

ГЕНЕРАЦИЯ ОДНОФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКОЙ

А. В. Крашенинников^а, С. Н. Молотков^б, С. С. Назин^б, Л. А. Опенов^а^а Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия^б Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 22 апреля 1997 г.

Предлагается способ приготовления однофотонного волнового пакета путем воздействия классического электромагнитного поля на квантовую точку из полупроводника. Показано, что наличие кулоновского отталкивания носителей заряда позволяет так подобрать частоту, амплитуду и длительность импульса, что один электрон перейдет с верхнего размерно-квантованного уровня валентной зоны на нижний размерно-квантованный уровень зоны проводимости с вероятностью, очень близкой к единице. Излучательная рекомбинация образовавшейся при этом электрон-дырочной пары приводит к испусканию строго одного фотона (однофотонного волнового пакета). Такой источник однофотонных состояний может быть использован в квантовых системах передачи информации и в квантовых компьютерах.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени хорошо изучены «классические» состояния электромагнитного поля, содержащие большое (формально, бесконечное) число фотонов. К таким состояниям относятся, в частности, когерентные и сжатые состояния [1]. В последние годы возрос интерес к «конструированию» неклассических фотонных состояний. Например, для некогерентной двухфотонной интерферометрии [2, 3] и квантовых криптосистем [4–7] требуются так называемые «запутанные» (entangled) фотонные состояния [8]. А такое направление современной квантовой физики как квантовая криптография во многом основано на использовании однофотонных состояний, поскольку секретность квантовых криптосистем вытекает из невозможности клонирования (копирования) заранее неизвестного квантового состояния [9].

Сейчас в квантовой криптографии наметился переход от сугубо теоретического анализа проблемы к созданию опытных экспериментальных установок для квантовой передачи информации, пока на сравнительно небольшие расстояния (30 км [5]). При этом возникает потребность в надежных источниках однофотонных состояний. Под надежным мы понимаем источник, который генерирует только одно- (а не двух-, трех- и т. д.) фотонные состояния.

Что может служить таким источником? Самый простой способ получения «почти однофотонного» состояния состоит в ослаблении когерентного излучения на выходе лазера, содержащего исходно большое число фоковских состояний $|n\rangle$ [5] (именно так поступали в экспериментах по квантовой криптографии на принципе фазового кодирования [6, 7]). Поле на выходе идеального лазера выше порога генерации описывается когерентным состоянием $|\alpha\rangle$, которое имеет вид

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1)$$

Когерентное состояние, ослабленное после прохождения через поглощающую среду, соответствует пределу малых $|\alpha|$ (напомним, что интенсивность — среднее число фотонов — монохроматического когерентного поля пропорциональна $|\alpha|^2$). Разлагая (1) по $|\alpha| \ll 1$, имеем

$$|\alpha\rangle \approx \left(1 - \frac{1}{2}|\alpha|^2\right) |0\rangle + \alpha |1\rangle + \frac{|\alpha|^2}{\sqrt{2}} |2\rangle. \quad (2)$$

Из (2) видно, что основной вклад в значительно ослабленное когерентное состояние фотонного поля дает вакуумная компонента ($1 - |\alpha|^2/2 \approx 1$), тогда как доля однофотонной фоковской составляющей $|1\rangle$ мала в меру малости $|\alpha| \ll 1$. Последнее означает, что крайне мала и вероятность регистрации единичного фотона фотодетектором.

Казалось бы, ситуацию можно поправить путем увеличения значения $|\alpha|$ (т. е. увеличения интенсивности). Но тогда (см. (2)), хотя доля вакуумной компоненты в $|\alpha\rangle$ и уменьшается, зато резко возрастает вероятность испускания двух фотонов (фоковское состояние $|2\rangle$). В квантовой криптографии это будет приводить к нарушению секретности криптосистемы, так как часть фотонов может быть «отведена» из линии и использована для подслушивания.

Использование ослабленного состояния (2) с $|\alpha| \ll 1$ в квантовой криптографии связано с еще одной трудностью. Дело в том, что для криптосистемы, работающей на принципе фазового кодирования [6], секретность гарантируется лишь при условии попарной ортогональности состояний с фазовыми задержками $0^\circ/180^\circ$ и $90^\circ/270^\circ$ (подробнее см. [6]). Однако перекрытие этих состояний отнюдь не равно нулю, а пропорционально $\exp(-|\alpha|^2/2)$ и тем ближе к единице, чем меньше $|\alpha|$.

Заметим, что для целей квантовой криптографии требование монохроматичности однофотонного состояния не является обязательным. Достаточно уметь приготавливать однофотонный волновой пакет, который может быть представлен в виде [10–12]

$$|1\rangle_f = \sum_{\omega=0}^{\infty} f(\omega) \hat{a}^+(\omega) |0\rangle = \sum_{\omega=0}^{\infty} f(\omega) |1_\omega\rangle, \quad (3)$$

где $\hat{a}^+(\omega)$ — бозевский оператор рождения монохроматического состояния $|1_\omega\rangle$. Однофотонность волнового пакета $|1\rangle_f$ (3) означает, что в разложении состояния $|1\rangle_f$ по фоковским состояниям $|1_\omega\rangle$ присутствуют только состояния с числами заполнения $n = 1$, хотя и на разных частотах. Такое состояние фотонного поля является «одиноким» квантовым состоянием: оно вызывает лишь одно срабатывание фотодетектора или только один переход в какой-либо регистрирующей системе (и не может быть расщеплено так, чтобы вызвать два срабатывания или два перехода). В этом смысле состояние $|1\rangle_f$ можно называть «одиноким некогерентным фотоном». Функция $f(\omega)$ определяет спектр излучаемого волнового пакета, который формально содержит бесконечное число мод $|1_\omega\rangle$, но с амплитудами $f(\omega)$, по модулю меньшими единицы. Эта функция является нормированной,

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} |f(\omega)|^2 = 1,$$

и предполагается центрированной около некоторой несущей частоты ω_0 .

Однофотонный волновой пакет (3) может быть получен следующим образом: один электрон, изначально приготовленный в квазистационарном возбужденном состоянии $|e\rangle$ с энергией ε_e , вследствие взаимодействия с фотонным полем, находящимся исходно в вакуумном состоянии, переходит с излучением фотона в основное состояние $|g\rangle$ с энергией $\varepsilon_g < \varepsilon_e$.

Таким образом, задачу о приготовлении однофотонного состояния можно свести к задаче о приготовлении квазистационарного возбужденного состояния одного электрона. Эта проблема уже обсуждалась в литературе. Например, в работе [13] был предложен способ получения такого состояния в полупроводниковой гетероструктуре $p\text{-}i\text{-}p\text{-}i\text{-}n\text{-}p$ Al-GaAs-GaAs путем воздействия на нее переменного напряжения со специально подобранными параметрами. При этом из контактов (через потенциальные барьеры) в структуру резонансным образом туннелируют один электрон и одна дырка, которые затем рекомбинируют с излучением фотона. По мнению авторов [13], эффекты размерного квантования и кулоновской блокады должны подавлять квантовые флуктуации, связанные с процессом инжектирования электронов и дырок. Однако данная схема, как и другие аналогичные ей, предъявляет достаточно высокие требования к параметрам наноструктуры и характеристикам приложенного напряжения. Поэтому ее экспериментальная реализация представляется весьма проблематичной.

Можно предложить и другой способ возбуждения одного электрона на квазистационарный уровень: воздействие переменного электромагнитного поля на изолированную полупроводниковую квантовую точку, имеющую размерно-квантованные уровни в валентной зоне и в зоне проводимости. На первый взгляд, задача выглядит тривиальной. Действительно, пусть (как это имеет место в полупроводнике) все уровни валентной зоны заполнены электронами, а все уровни зоны проводимости пусты. Обозначим через ε_v и ε_c энергии верхнего (занятого) размерно-квантованного уровня $|v\rangle$ валентной зоны и нижнего (свободного) размерно-квантованного уровня $|c\rangle$ зоны проводимости соответственно. Как известно, воздействие на такую систему периодического возмущения $\hat{V} \cos(\Omega t)$ (например, классического переменного электрического поля) с частотой $\Omega = \varepsilon_c - \varepsilon_v$ (здесь и далее мы полагаем $\hbar = 1$) приводит к периодическому изменению вероятностей p_v и p_c нахождения электрона на уровнях $|v\rangle$ и $|c\rangle$ [14–17]. Если в начальный момент времени $p_v(0) = 1$ и $p_c(0) = 0$, то

$$p_c(t) = \sin^2(\omega_R t), \quad (4)$$

где $\omega_R = |\langle c|\hat{V}|v\rangle|/2$. Здесь $\langle c|\hat{V}|v\rangle$ — матричный элемент межзонного перехода. Из (4) следует, что можно так подобрать длительность воздействия возмущения T (например, $T = \pi/2\omega_R$), чтобы выполнялось равенство $p_c(T) = 1$ (так называемый π -импульс [14–17]). Тогда через время T электрон перейдет в квазистационарное состояние $|c\rangle$ с вероятностью равной единице.

Все это, однако, справедливо лишь в том случае, если уровни $|v\rangle$ и $|c\rangle$ невырожденные. Действительно, пусть, например, они двукратно вырождены по проекции спина и при $t = 0$ на уровне $|v\rangle$ находится не один, а два электрона. Легко найти вероятность p_{vc} того, что под воздействием периодического возмущения $\hat{V} \cos(\Omega t)$ только один из электронов (неважно, с какой проекцией спина) перешел на уровень $|c\rangle$, а другой остался на уровне $|v\rangle$:

$$p_{vc}(t) = \frac{1}{2} \sin^2(2\omega_R t). \quad (5)$$

Из (5) следует, что $p_{vc} \leq 1/2$, и нельзя гарантировать переход ровно одного ($p_{vc} = 1$) электрона в квазистационарное состояние $|c\rangle$, если уровни $|v\rangle$ и $|c\rangle$ вырождены (причиной ограничения $p_{vc} \leq 1/2$ является «перенос вероятности» на состояния с двумя электронами на уровне $|c\rangle$, т. е. $p_{cc} \leq 1$).

Если вырождение по угловому моменту и его проекции снимается за счет того, что реальная квантовая точка не является сферически-симметричной (см., например, [18]), то в отсутствие магнитного поля сохраняется вырождение по проекции спина. Для снятия этого вырождения необходимо приложить к системе очень сильное магнитное поле. Оценим его величину H . Будем исходить из того, что наилучшие экспериментально достижимые времена жизни электрона на возбужденном уровне $|c\rangle$ в квантовой точке не могут быть более чем $\tau \approx 10^{-10}$ – 10^{-9} с. Время действия возмущения T , которое требуется для перевода электрона из валентной зоны на этот уровень, должно быть существенно меньше τ . В противном случае велика вероятность испускания фотона при $t < T$, когда возмущение еще действует (и тогда испущенный фотон «потеряется» в возмущающем поле). Таким образом, мы должны иметь $T \approx 10^{-12}$ – 10^{-11} с. Но тогда возмущающее поле содержит набор гармоник с частотами в диапазоне $\delta\omega \approx 1/T \approx 10^{11}$ – 10^{12} с $^{-1}$. Величина $\delta\omega$ должна быть много меньше энергии ($\approx \mu_B H$) зеemanовского расщепления размерно-квантованных уровней $|v\rangle$ и $|c\rangle$, так как иначе внешнее поле будет по-прежнему «перемешивать» все уровни ($|v, \uparrow\rangle$, $|v, \downarrow\rangle$, $|c, \uparrow\rangle$, $|c, \downarrow\rangle$), т. е. вырождение по проекции спина, будучи снятым формально, сохранится фактически. В результате имеем оценку $H \gg 10$ Тл, что очень сложно реализовать экспериментально.

В настоящей работе предлагается другой подход к проблеме. Он основан на учете кулоновского отталкивания электронов, имеющих разные проекции спина и занимающих (в отсутствие межэлектронного взаимодействия) один одноэлектронный энергетический уровень (в реальной квантовой точке кулоновское взаимодействие всегда имеет место, причем оно тем сильнее, чем меньше размер квантовой точки). Из качественных соображений понятно, что если бы кулоновское отталкивание (например, на уровне $|c\rangle$) было бесконечно велико, то возбуждение второго электрона на этот уровень было бы запрещено, и можно было бы реализовать состояние с $p_{vc} = 1$ при некотором $t = T$. Однако при конечной величине кулоновского отталкивания это не очевидно.

Наша цель — выяснить, возможно ли возбуждение только одного электрона из валентной зоны в зону проводимости при воздействии периодического возмущения на квантовую точку с конечным кулоновским взаимодействием. Будет показано, что при реальных значениях параметров задачи (энергии кулоновского отталкивания, частоты и амплитуды внешнего периодического электрического поля, времени жизни электрона в квазистационарном состоянии) можно так подобрать длительность импульса T , чтобы вероятность перехода одного электрона в зону проводимости была близка к единице. Таким образом, оказывается возможным реализовать источник однофотонных волновых пакетов на основе изолированной квантовой точки, не прибегая ни к каким изощренным технологическим и экспериментальным приемам.

2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Приведем сначала качественные оценки величины расщепления $\Delta\epsilon$ двукратно вырожденного по проекции спина размерно-квантованного уровня $|v\rangle$ из-за кулоновского взаимодействия электронов в состояниях $|v, \uparrow\rangle$ и $|v, \downarrow\rangle$:

$$\Delta\varepsilon \approx U = \langle v \uparrow | \frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} | v \downarrow \rangle \approx \frac{e^2}{\varepsilon a} \quad (6)$$

— матричный элемент кулоновского взаимодействия, ε — статическая диэлектрическая проницаемость, a — характерный линейный размер квантовой точки. Из (6) видно, что при $\varepsilon \approx 10$ и $a \approx 10$ нм имеем $U \approx 10$ мэВ. Наша оценка U близка по порядку величины к экспериментальному значению [19]. Такую же оценку получим, естественно, и для расщепления уровня $|c\rangle$ в зоне проводимости из-за кулоновского отталкивания электронов, находящихся в состояниях $|c \uparrow\rangle$ и $|c \downarrow\rangle$.

Как показано во Введении, для положительного ответа на вопрос о возможности возбуждения в зону проводимости строго одного электрона (с вероятностью $p_{vc} = 1$) необходимо выполнение условий $T \ll \tau$ и $1/T \ll \Delta\varepsilon$. Вследствие этого из (6) имеем

$$1/\tau \ll 1/T \ll U. \quad (7)$$

Так как $1/\tau \approx 10^{-3}-10^{-2}$ мэВ, то $1/T \approx 0.1-1$ мэВ, и поэтому (7) может быть выполнено при $U \geq 1-10$ мэВ, т. е. (см. (6)) при $a \leq 10-100$ нм. Диапазон возможных значений T можно, конечно, расширить. Для этого требуется увеличить τ и (или) уменьшить a . Для нас, однако, будет достаточно и указанного диапазона T , поскольку для него условие (7) выполняется при реалистичных значениях τ и a , реализуемых в полупроводниковых квантовых точках на современном технологическом уровне.

Заметим также, что нас в принципе устраивает и такая ситуация, когда максимальное значение $p_{vc}(t)$ хотя и не равно строго единице, но очень близко к ней. Поэтому будем определять время T действия внешнего возмущения из условия

$$p_{vc}(T) = \max[p_{vc}(t)]. \quad (8)$$

При этом договоримся выбирать в качестве T минимальное из всех возможных значений, удовлетворяющих условию (8) (в противном случае может не выполняться левая часть двойного неравенства (7)).

Прежде чем переходить к описанию используемой нами модели, слегка упростим задачу. Будем считать, что как в валентной зоне, так и в зоне проводимости имеется только по одному размерно-квантованному уровню, каждый из которых двукратно вырожден по проекции спина. В общем случае это, конечно, не так. Физически такое упрощение означает, что мы учитываем только переходы электронов с верхнего уровня валентной зоны на нижний уровень зоны проводимости, пренебрегая низколежащими (полностью заполненными) уровнями валентной зоны и верхними (незаполненными) уровнями зоны проводимости (ниже мы обсудим, к каким поправкам приводит их учет). Для описания кулоновского отталкивания воспользуемся моделью Хаббарда [20], широко применяемой в теории систем с сильными кулоновскими корреляциями [21].

Итак, с учетом сделанных замечаний запишем модельный гамильтониан полупроводниковой квантовой точки, находящейся в периодическом электрическом поле, в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \sum_{\sigma} (\varepsilon_v \hat{a}_{v\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{v\sigma} + \varepsilon_c \hat{a}_{c\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{c\sigma}) + U_v \hat{n}_{v\uparrow} \hat{n}_{v\downarrow} + U_c \hat{n}_{c\uparrow} \hat{n}_{c\downarrow} + \\ & + E(t) \sum_{\sigma} (d_{cv} \hat{a}_{c\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{v\sigma} + d_{vc} \hat{a}_{v\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{c\sigma}), \end{aligned} \quad (9)$$

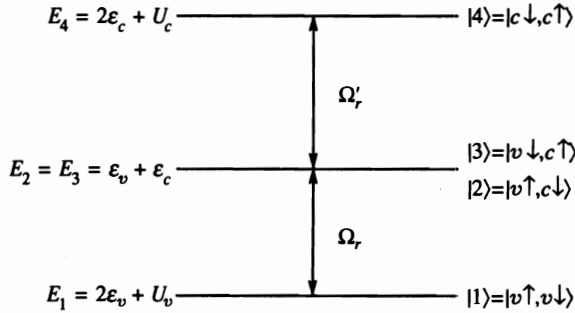


Рис. 1. Схема двухчастичных состояний и соответствующих энергетических уровней полупроводниковой квантовой точки

где $\hat{a}_{q\sigma}^+$ ($\hat{a}_{q\sigma}$) — операторы рождения (уничтожения) электрона с проекцией спина $\sigma = \uparrow$ или \downarrow на размерно-квантованных уровнях $|q\rangle = |v\rangle$ и $|c\rangle$ (индекс v везде относится к валентной зоне, индекс c — к зоне проводимости); $\hat{n}_{q\sigma} = \hat{a}_{q\sigma}^+ \hat{a}_{q\sigma}$ — операторы числа частиц (числа заполнения); ϵ_q — одноэлектронные энергии уровней; U_q — энергии хаббардовского отталкивания электронов, занимающих один уровень; d_{cv} — дипольный матричный элемент для оптических переходов ($d_{vc} = d_{cv}^*$); $E(t)$ — внешнее классическое переменное поле.

Будем считать, что внешнее поле включается в момент времени $t = 0$, выключается при $t = T$ и имеет некоторую несущую частоту Ω , т. е.

$$E(t) = E_0 \cos(\Omega t) \theta(t) \theta(T - t),$$

где E_0 — амплитуда поля, $\theta(t)$ — тета-функция. Длительность действия поля T и его частота Ω подлежат определению из условия, что вероятность перехода лишь одного электрона из валентной зоны на квазистационарный уровень зоны проводимости будет максимально возможной (см. (8)).

Так как мы рассматриваем два электрона (с разными проекциями спина) на двух одноэлектронных энергетических уровнях, то полное число двухэлектронных состояний такой системы равно четырем. Будем обозначать эти состояния следующим образом:

$$|1\rangle = |v \uparrow, v \downarrow\rangle, \quad |2\rangle = |v \uparrow, c \downarrow\rangle, \quad |3\rangle = |v \downarrow, c \uparrow\rangle, \quad |4\rangle = |c \uparrow, c \downarrow\rangle, \quad (10)$$

где, например, $|v \uparrow, c \downarrow\rangle$ означает, что электрон с $\sigma = \uparrow$ находится в валентной зоне, а электрон с $\sigma = \downarrow$ — в зоне проводимости, и т. д. Для нашей системы набор состояний (10) является полным, поэтому волновую функцию $\Psi(t)$ системы в любой момент времени можно представить в виде

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^4 A_i(t) \exp(-iE_i t) |i\rangle, \quad (11)$$

где E_i — собственные значения стационарного уравнения Шредингера $\hat{H}|i\rangle = E_i|i\rangle$ в отсутствие внешнего поля ($t \leq 0$). Из (9) с учетом (10) имеем

$$E_1 = 2\epsilon_v + U_v, \quad E_2 = \epsilon_v + \epsilon_c, \quad E_3 = \epsilon_v + \epsilon_c, \quad E_4 = 2\epsilon_c + U_c. \quad (12)$$

Подчеркнем, что мы используем набор двухэлектронных состояний (10), см. рис. 1.

Задание значений $A_i(0)$ определяет волновую функцию системы в начальный момент времени (при этом $A_i(0) = A_i(t < 0)$, так как $|i\rangle$ — собственные состояния гамильтониана (9) при $t \leq 0$). Будем полагать, что при $t \leq 0$ реализуется обычное состояние полупроводника: валентная зона полностью заполнена, а зона проводимости пуста, т. е. $A_1(0) = 1$, $A_2(0) = A_3(0) = A_4(0) = 0$. Вероятность $p_i(t)$ найти систему в состоянии $|i\rangle$ в произвольный момент времени t равна $|A_i(t)|^2$. Нас интересует величина $p_{vc}(t) = p_2(t) + p_3(t)$, представляющая собой вероятность того (см. (10)), что в валентной зоне и в зоне проводимости находится ровно по одному электрону (из нормировки (11) имеем, естественно, $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$ при любом t).

Коэффициенты $A_i(t)$ в разложении (12) должны быть найдены путем решения нестационарного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}(t) \Psi(t), \quad (13)$$

где $\hat{H}(t)$ имеет вид (9), т. е. при $0 \leq t \leq T$ явно зависит от времени.

3. РЕЗОНАНСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для решения поставленной задачи воспользуемся резонансным приближением [14–17], которое позволит нам достаточно далеко продвинуться аналитически и получить точное решение (в некоторых предельных случаях — полностью аналитическое). Выход за рамки резонансного приближения, конечно, возможен, но допускает только численное решение и, как мы покажем ниже, не приводит к сколько-нибудь существенному изменению результатов. В резонансном приближении гамильтониан (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \sum_{\sigma} (\varepsilon_v \hat{a}_{v\sigma}^+ \hat{a}_{v\sigma} + \varepsilon_c \hat{a}_{c\sigma}^+ \hat{a}_{c\sigma}) + U_v \hat{n}_{v\uparrow} \hat{n}_{v\downarrow} + U_c \hat{n}_{c\uparrow} \hat{n}_{c\downarrow} + \\ & + \sum_{\sigma} \left[\frac{\lambda}{2} \exp(-i\Omega t) \hat{a}_{c\sigma}^+ \hat{a}_{v\sigma} + \frac{\lambda^*}{2} \exp(i\Omega t) \hat{a}_{v\sigma}^+ \hat{a}_{c\sigma} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где мы ввели обозначение $\lambda = d_{cv} E_0$.

В дальнейшем задача решается точно. Подчеркнем, что в отличие от простейшего случая резонансного перехода между двумя одноэлектронными уровнями $|v\rangle$ и $|c\rangle$, который имеет место при частоте $\Omega = \varepsilon_c - \varepsilon_v$ [14], мы рассматриваем все возможные переходы между четырьмя двухэлектронными состояниями системы. Поэтому при конечном кулоновском отталкивании электронов резонансная частота будет отличаться от $\varepsilon_c - \varepsilon_v$.

Для решения уравнения Шредингера (13) с гамильтонианом (14) удобно перейти к представлению, в котором гамильтониан не зависит от времени. Для этого используем унитарное преобразование

$$\hat{U}(t) = \exp \left[-\frac{i\Omega t}{2} \sum_{\sigma} (\hat{a}_{c\sigma}^+ \hat{a}_{c\sigma} - \hat{a}_{v\sigma}^+ \hat{a}_{v\sigma}) \right], \quad (15)$$

которое впервые применялось в [16] для описания взаимодействия сильного электромагнитного поля с полупроводником.

Перейдем от волновой функции $\Psi(t)$ к функции $\tilde{\Psi}(t) = \hat{U}^+(t)\Psi(t)$. Подставляя

$$\Psi(t) = \hat{U}(t)\tilde{\Psi}(t) \tag{16}$$

в уравнение Шредингера (13) для $\Psi(t)$ и учитывая (15), получаем уравнение Шредингера для $\tilde{\Psi}(t)$:

$$i \frac{\partial \tilde{\Psi}(t)}{\partial t} = \hat{H}\tilde{\Psi}(t), \tag{17}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{U}^+(t)\hat{H}(t)\hat{U}(t) - i\hat{U}^+(t)\frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} = \\ &= \sum_{\sigma} \left[\left(\epsilon_v + \frac{\Omega}{2} \right) \hat{a}_{v\sigma}^+ \hat{a}_{v\sigma} + \left(\epsilon_c - \frac{\Omega}{2} \right) \hat{a}_{c\sigma}^+ \hat{a}_{c\sigma} \right] + U_v \hat{n}_{v\uparrow} \hat{n}_{v\downarrow} + U_c \hat{n}_{c\uparrow} \hat{n}_{c\downarrow} + \\ &+ \sum_{\sigma} \left(\frac{\lambda}{2} \hat{a}_{c\sigma}^+ \hat{a}_{v\sigma} + \frac{\lambda^*}{2} \hat{a}_{v\sigma}^+ \hat{a}_{c\sigma} \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Гамильтониан \hat{H} не зависит явно от времени, поэтому общее решение нестационарного уравнения Шредингера (17) при $0 \leq t \leq T$ имеет вид

$$\tilde{\Psi}(t) = \sum_{i=1}^4 B_i \exp(-i\tilde{E}_i t) |\tilde{i}\rangle, \tag{19}$$

где $|\tilde{i}\rangle$ и \tilde{E}_i — собственные состояния и собственные значения энергии стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}|\tilde{i}\rangle = \tilde{E}_i |\tilde{i}\rangle \tag{20}$$

с гамильтонианом \hat{H} , имеющим вид (18). Коэффициенты B_i в (19) подлежат определению исходя из начальных условий (известных значений $A_i(0)$ в (11)) и удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{i=1}^4 |B_i|^2 = 1. \tag{21}$$

Будем искать решения уравнения (20) в виде

$$|\tilde{i}\rangle = \sum_{k=1}^4 C_{ik} |k\rangle, \tag{22}$$

где $|k\rangle$ — двухэлектронные собственные состояния (10) при $t \leq 0$. Подставляя (22) в (20), получаем систему уравнений для определения \tilde{E}_i и C_{ik} :

$$\sum_{k=1}^4 C_{ik} (\langle i | \hat{H} | k \rangle - \delta_{ik} \tilde{E}_i) = 0, \tag{23}$$

где $i = 1, 2, 3, 4$, $\langle i | \hat{H} | k \rangle$ — матричные элементы гамильтониана (18), взятые по состояниям (10). Матрица $\langle i | \hat{H} | k \rangle$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_v + U_v + \Omega & \lambda^*/2 & \lambda^*/2 & 0 \\ \lambda/2 & \varepsilon_v + \varepsilon_c & 0 & \lambda^*/2 \\ \lambda/2 & 0 & \varepsilon_v + \varepsilon_c & \lambda^*/2 \\ 0 & \lambda/2 & \lambda/2 & 2\varepsilon_c + U_c - \Omega \end{pmatrix}.$$

Из (19) и (22) находим

$$\tilde{\Psi}(t) = \sum_{i=1}^4 D_i(t) |i\rangle, \quad (24)$$

где

$$D_i(t) = \sum_{k=1}^4 B_k C_{ki} \exp(-i\tilde{E}_k t). \quad (25)$$

В силу того что $\tilde{\Psi}(0) = \Psi(0)$ (см. (15) и (16)), имеем $D_i(0) = A_i(0)$, где величины $A_i(0)$ определяют состояние системы (11) при $t \leq 0$. Поэтому из (25) получим уравнение для определения коэффициентов B_i через заданные значения $A_i(0)$:

$$A_i(0) = \sum_{k=1}^4 B_k C_{ki},$$

откуда

$$B_i = \sum_{k=1}^4 A_k(0) C_{ki}^{-1}, \quad (26)$$

где C^{-1} — матрица, обратная матрице C . Из (25) и (26) находим

$$D_i(t) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 A_l(0) C_{li}^{-1} C_{ki} \exp(-i\tilde{E}_k t). \quad (27)$$

Учитывая соотношение (16) между волновыми функциями $\Psi(t)$ и $\tilde{\Psi}(t)$ и унитарность матрицы $\hat{U}(t)$ (9), для вероятности $p_i(t)$ перехода системы в состояние $|i\rangle$ имеем

$$p_i(t) = |D_i(t)|^2. \quad (28)$$

В интересующем нас случае $A_1(0) = 1$, $A_2(0) = A_3(0) = A_4(0) = 0$ (при $t = 0$ уровни в валентной зоне полностью заполнены, а в зоне проводимости пусты, см. (10)) выражение (27) для $D_i(t)$ несколько упрощается. Тем не менее для расчета $D_i(t)$ нам еще необходимо найти \tilde{E}_i и C_{ik} из уравнения (23). Эта задача на собственные значения сводится к решению алгебраического уравнения третьей степени. Получающиеся для \tilde{E}_i и C_{ik} выражения очень громоздки и трудно поддаются анализу, поэтому на данном этапе удобнее решать уравнение (23) численно. Однако прежде чем приводить результаты

расчета, остановимся на важном предельном случае, который допускает аналитическое решение, прекрасно согласующееся с численным (по описанной выше схеме) решением в интересующем нас диапазоне параметров.

Будем считать, что кулоновское отталкивание электронов в зоне проводимости бесконечно велико $U_c = \infty$. Тогда очевидно, что двухэлектронный уровень $|4\rangle = |c \uparrow, c \downarrow\rangle$ (см. (10)) с энергией $E_4 = 2\varepsilon_c + U_c = \infty$ всегда не занят, т.е. коэффициент $A_4(t)$ в (11) равен нулю при любом t . По этой же причине равны нулю и коэффициенты C_{i4} ($i = 1 \div 4$) в (22). Поэтому решение уравнения (23) сводится к диагонализации матрицы 3×3 , что может быть выполнено аналитически. Найдя таким образом собственные значения \bar{E}_i и матрицу собственных векторов C_{ik} , из (27) и (28) получим следующие выражения для вероятностей $p_i(t)$ перехода системы из состояния $\Psi(0) = |1\rangle = |v \uparrow, v \downarrow\rangle$ в состояние $|i\rangle$:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{4\omega_R^2}\right) \sin^2(\omega_R t), \\ p_2(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{4\omega_R^2}\right) \sin^2(\omega_R t), \\ p_3(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{4\omega_R^2}\right) \sin^2(\omega_R t), \\ p_4(t) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\delta = \Omega - (\varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v), \quad \omega_R = \frac{\sqrt{\delta^2 + 2|\lambda|^2}}{2}. \tag{30}$$

Из (29) находим интересующую нас вероятность $p_{vc}(t) = p_2(t) + p_3(t)$ перехода одного электрона в зону проводимости:

$$p_{vc}(t) = \left(1 - \frac{\delta^2}{4\omega_R^2}\right) \sin^2(\omega_R t). \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует, что $p_{vc}(T) = 1$ при $\delta = 0$ и

$$T = \frac{\pi}{2\omega_R}. \tag{32}$$

Равенство $\delta = 0$ имеет простой физический смысл: частота Ω равна $\Omega_r = E_2 - E_1 = E_3 - E_1$ (см. (12) и рис. 1), т.е. разнице между энергией пары вырожденных уровней $|2\rangle, |3\rangle$ и энергией уровня $|1\rangle$. Только эти двухэлектронные состояния находятся в резонансе при $\delta = 0$. Поскольку $\varepsilon_c - \varepsilon_v \approx 1$ эВ и $U_v + U_c \ll \varepsilon_c - \varepsilon_v$, то $\Omega_r \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$. В случае отклонения от резонанса ($\delta \neq 0$) величина $p_{vc}(T)$, определяемая из условия (8), отлична от максимального значения в меру малости отношения $|\delta|^2/|\lambda|^2$, т.е. должно выполняться неравенство

$$|\delta| \ll |\lambda|. \tag{33}$$

Понятно, что при $\delta = 0$ полученные нами результаты должны быть справедливы и в случае конечной величины U_c (ниже мы получим нижнюю границу), поскольку тогда

система может находиться только в состояниях $|1\rangle$, $|2\rangle$ и $|3\rangle$ (при $U_c = \infty$ это справедливо для любых δ). Более того, при $\delta = 0$ конечное значение должна иметь сумма $U_v + U_c$ (т. е. возможно и $U_c = 0$), что следует из требования различия резонансных частот Ω_r и $\Omega_r' = E_4 - E_2 = E_4 - E_3$ (см. рис. 1) для переходов между уровнями $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle, |3\rangle$ и $|4\rangle \leftrightarrow |2\rangle, |3\rangle$ соответственно (при $U_v = U_c = 0$ мы имеем $p_{vc} \leq 1/2$, см. (5)). При $\delta \neq 0$ необходимым условием применимости выражения (31) для $p_{vc}(t)$ является, очевидно,

$$|\delta| \ll U_v + U_c, \quad (34)$$

причем важна величина именно суммы $U_v + U_c$, а не значений U_v и U_c по отдельности.

Неравенства (33) и (34) оставляют открытым вопрос о соотношении между $|\lambda|$ и $U_v + U_c$. Поскольку при $|\delta| \ll |\lambda|$ мы имеем $\omega_R \approx |\lambda|$, то, обобщая обсуждавшееся в разд. 2 условие (7), получим $|\lambda| \ll U_v + U_c$, т. е. с учетом (7) и (33)

$$1/\tau, |\delta| \ll |\lambda| \ll U_v + U_c \quad (35)$$

(напомним, что τ — время излучательной рекомбинации). Итак, при выполнении двойного неравенства (35) «трехуровневое приближение» должно хорошо описывать электронные переходы в рассматриваемой четырехуровневой системе под действием внешнего периодического возмущения.

Подчеркнем, что неравенства (35) могут быть выполнены в условиях реального эксперимента. Действительно, поскольку $U_v + U_c \geq 1-10$ мэВ и $1/\tau \approx 10^{-3}-10^{-2}$ мэВ (см. разд. 2), мы должны иметь $|\lambda| \approx 0.1-1$ мэВ (при этом верхняя граница может быть увеличена за счет увеличения $U_v + U_c$, т. е. уменьшения размеров квантовой точки a , а нижняя граница достаточно жестко фиксирована конечной величиной τ). Вспоминая, что величина $|\lambda|$ равна произведению дипольного матричного элемента $|d_{cv}|$ для оптических переходов на амплитуду электрического поля E_0 и учитывая, что $|d_{cv}| \approx ea$, $a \approx 10-100$ нм, получим $E_0 \approx 10^2$ В/см, что легко реализовать в эксперименте. Что касается неравенства $|\delta| \ll |\lambda|$, то мы имеем $|\delta| \leq 0.01$ мэВ, т. е. частоту Ω внешнего источника нужно фиксировать с точностью не хуже 10^{10} с $^{-1}$. Современные экспериментальные методики позволяют это сделать.

Перейдем к сравнению результатов, полученных путем численного решения уравнений (23)–(28), с результатами аналитического решения (30)–(32) в «трехуровневом приближении». Для определенности будем полагать $\varepsilon_c - \varepsilon_v \approx 1$ эВ. На рис. 2 приведена зависимость p_{vc} от t при $\delta = 0$, $|\lambda| = 0.01$ эВ и $U_v + U_c = 0.1$ эВ (численные расчеты показали, что $p_{vc}(t)$ определяется только суммой $U_v + U_c$, по крайней мере при $U_v + U_c \ll \varepsilon_c - \varepsilon_v$). Как видно из рис. 2, аналитическое решение очень хорошо согласуется с численным, что и ожидалось, поскольку выбранные значения параметров удовлетворяют условию (34). Численные значения p_{vc}^{max} и T составляют 0.9935 и $1.4606 \cdot 10^{-13}$ с, а аналитические — 1 и $\pi/|\lambda|\sqrt{2} = 1.4622 \cdot 10^{-13}$ с соответственно.

На рис. 3 и 4 проиллюстрирован переход из «режима невзаимодействующих электронов» ($U_v + U_c = 0$, $p_{vc}^{max} = 1/2$, $T = \pi/2|\lambda| = 1.0339 \cdot 10^{-13}$ с, см. (5)) в «режим сильного кулоновского отталкивания», $U_v + U_c \gg |\lambda|$ (35). Этот переход имеет место при $U_v + U_c \approx \lambda$, причем уже при $U_v + U_c \geq 3\lambda$ величина p_{vc}^{max} превышает 0.95, а величина T отличается от своего асимптотического (для $U_v + U_c = \infty$) значения не более чем на 3.5 процента.

Изучим теперь влияние отклонения от резонанса ($\delta \neq 0$) на p_{vc}^{max} и T . Соответствующие графики приведены на рис. 5 и 6 для значений $U_v + U_c = 0.1$ эВ и $|\lambda| = 0.01$ эВ,

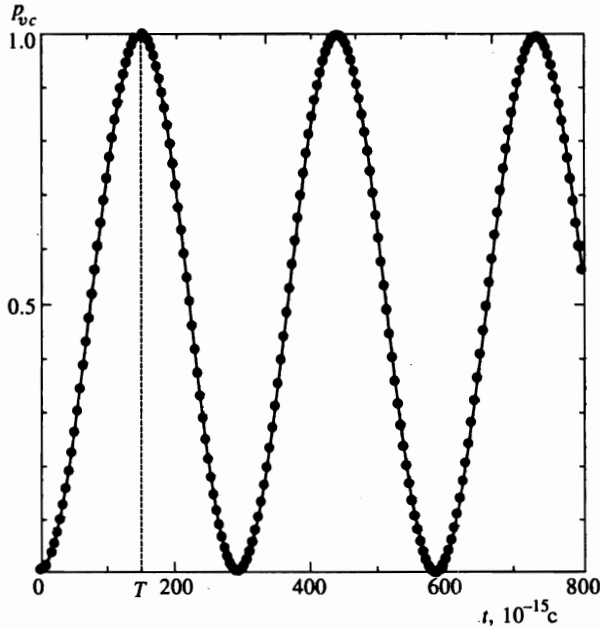


Рис. 2. Зависимость вероятности p_{vc} перехода одного электрона из валентной зоны в зону проводимости от времени t действия периодического возмущения с частотой $\Omega = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$ ($\delta = 0$); $\varepsilon_c - \varepsilon_v = 1$ эВ, $U_v + U_c = 0.1$ эВ, $|\lambda| = 0.01$ эВ. Точки — результат численного расчета по формулам (23)–(28). Сплошная линия — аналитическое решение (30)–(32) в «трехуровневом приближении»

удовлетворяющих правой части неравенства (35). Как следует из этих рисунков, аналитическое решение прекрасно согласуется с численным даже в случае нарушения левой части неравенства (35). При этом, конечно, $p_{vc}^{max} \approx 1$ лишь тогда, когда выполняется условие $|\delta| \ll |\lambda|$.

На рис. 7 и 8 приведены результаты расчета p_{vc}^{max} и T в непосредственной близости к резонансу для $U_v + U_c = 0.01$ эВ и $|\lambda| = 0.0001$ эВ. При $|\delta| \leq 10^{-10} \text{ с}^{-1}$ имеем $p_{vc}^{max} \geq 0.998$, т. е. вероятность перехода практически не отличается от единицы. При этом величина T изменяется в диапазоне $1.4607 \cdot 10^{-11} - 1.4622 \cdot 10^{-11} \text{ с}$, т. е. всего на 0.1%.

4. УЧЕТ НЕРЕЗОНАНСНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

В резонансном приближении мы пренебрегали несколькими «нерезонансными» гармониками внешнего периодического поля (см. разд. 3). С целью проверить, насколько сильно это влияет на результаты, мы провели численные расчеты путем непосредственного решения нестационарного уравнения Шредингера (13) с гамильтонианом (9) явным методом Рунге–Кутты порядков 7(8), основанным на формулах Дорманда и Принса с автоматическим выбором длины шага [22]. Мы определили коэффициенты $A_i(t)$ в (11) при начальных условиях $A_i(0) = \delta_{i1}$ и нашли величину $p_{vc}(t) = |A_2(t)|^2 + |A_3(t)|^2$. Как следует из наших расчетов, в интересующем нас интервале па-

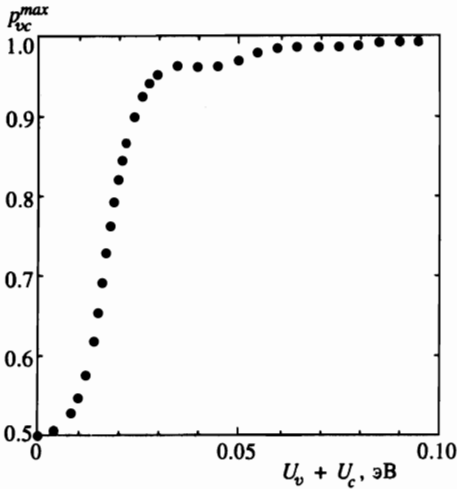


Рис. 3

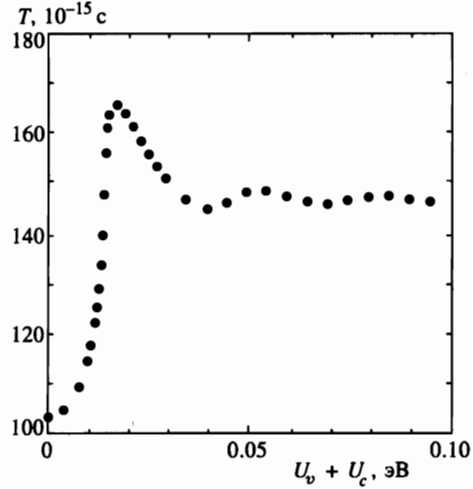


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость максимальной вероятности p_{vc}^{max} перехода одного электрона из валентной зоны в зону проводимости под действием периодического возмущения с частотой $\Omega = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$ ($\delta = 0$) от суммы $U_v + U_c$ энергий кулоновского отталкивания электронов в валентной зоне и в зоне проводимости; $\varepsilon_c - \varepsilon_v = 1$ эВ, $|\lambda| = 0.01$ эВ. Численный расчет по формулам (23)–(28)

Рис. 4. Зависимость времени T , соответствующего максимальной вероятности p_{vc}^{max} перехода одного электрона из валентной зоны в зону проводимости под действием периодического возмущения с частотой $\Omega = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$ ($\delta = 0$), от суммы $U_v + U_c$ энергий кулоновского отталкивания электронов в валентной зоне и в зоне проводимости; $\varepsilon_c - \varepsilon_v = 1$ эВ, $|\lambda| = 0.01$ эВ. Численный расчет по формулам (23)–(28)

параметров (см. (35)) зависимость $p_{vc}(t)$, найденная в нерезонансном приближении, совпадает с точностью до долей процента с найденной аналитически в «трехуровневом резонансном приближении» по формулам (30)–(32). Следует, однако, отметить, что при учете нерезонансных слагаемых максимальная вероятность p_{vc}^{max} достигается при очень малом, но все же отличном от нуля δ . Очень хорошее соответствие численных и аналитических результатов свидетельствует о том, что нерезонансные слагаемые в гамильтониане (9) практически не влияют на временную эволюцию системы. Этого, впрочем, и следовало ожидать при $|\lambda| \ll \Omega$ [14].

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Итак, задача о влиянии высокочастотного электрического поля на квантовую точку с двумя размерно-квантованными уровнями (одним в валентной зоне и одним в зоне проводимости) и двумя электронами решена нами с учетом кулоновского отталкивания электронов. Для интересующего нас диапазона параметров эта задача допускает наглядное аналитическое решение (30)–(32) в так называемом «резонансном трехуровневом приближении» (разд. 3). Мы показали, что учет всех двухэлектронных энергетических уровней квантовой точки в резонансном приближении (разд. 3), равно как и численное

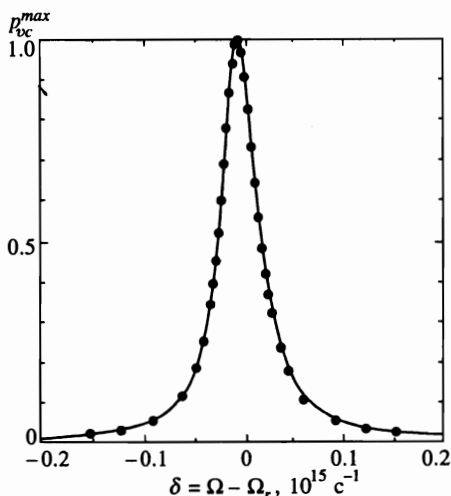


Рис. 5

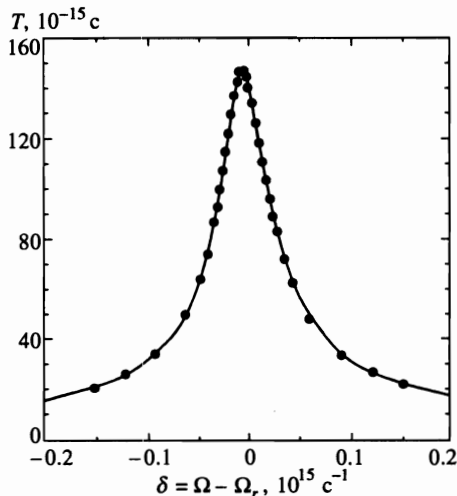


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость максимальной вероятности p_{vc}^{max} перехода одного электрона из валентной зоны в зону проводимости под действием периодического возмущения с частотой Ω от величины $\delta = \Omega - \Omega_r$, где $\Omega_r = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$ — резонансная частота; $\varepsilon_c - \varepsilon_v = 1$ эВ, $U_v + U_c = 0.1$ эВ, $|\lambda| = 0.01$ эВ. Точки — результат численного расчета по формулам (23)–(28). Сплошная линия — аналитическое решение (30)–(32) в «трехуровневом приближении»

Рис. 6. Зависимость времени T , соответствующего максимальной вероятности p_{vc}^{max} перехода одного электрона из валентной зоны в зону проводимости под действием периодического возмущения с частотой Ω от величины $\delta = \Omega - \Omega_r$, где $\Omega_r = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$ — резонансная частота; $\varepsilon_c - \varepsilon_v = 1$ эВ, $U_v + U_c = 0.1$ эВ, $|\lambda| = 0.01$ эВ. Точки — результат численного расчета по формулам (23)–(28). Сплошная линия — аналитическое решение (30)–(32) в «трехуровневом приближении»

решение нестационарного уравнения Шредингера с учетом «нерезонансных» гармоник внешнего поля (разд. 4), практически не влияют на зависимость заселенностей энергетических уровней от времени.

Необходимо сделать замечание относительно вида модельного гамильтониана (9). В нем опущены слагаемые, отвечающие кулоновскому взаимодействию U_{vc} двух электронов, находящихся на различных уровнях $|v\rangle$ и $|c\rangle$ (при описании валентных состояний на языке дырок такое взаимодействие отвечает экситонным эффектам). Если волновые функции одноэлектронных состояний $|v\rangle$ и $|c\rangle$ имеют различную симметрию (как в GaAs/AlGaAs), то величина U_{vc} должна быть существенно меньше U_v и U_c . Но даже если это и не так, то можно показать (см. также [18]), что учет U_{vc} приводит лишь к изменению резонансной частоты, которая становится равной $\Omega_r = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v + U_{vc}$, а динамика системы не меняется. Для конкретной квантовой точки величина Ω_r должна быть определена экспериментально.

Таким образом, мы показали, что теоретически возможно подобрать параметры внешнего возмущения (Ω , $|\lambda|$, T) и квантовой точки ($U_v + U_c \approx e^2/\varepsilon a$) так, что один электрон перейдет из валентной зоны в зону проводимости с вероятностью, практически не отличающейся от единицы. Существенно, что время этого перехода $T = 10^{-13}$ – 10^{-11} с на несколько порядков величины меньше времени рекомбинации $\tau =$

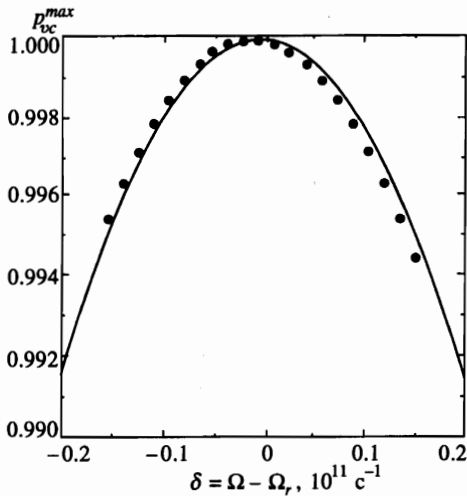


Рис. 7

Рис. 7. То же, что на рис. 5, для $U_v + U_c = 0.01$ эВ; $|\lambda| = 0.0001$ эВ

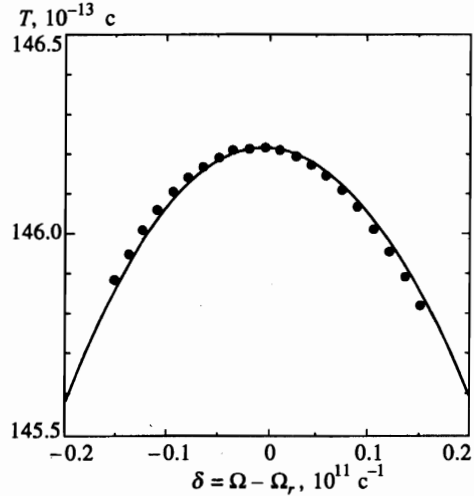


Рис. 8

Рис. 8. То же, что на рис. 6, для $U_v + U_c = 0.01$ эВ; $|\lambda| = 0.0001$ эВ

$= 10^{-10} - 10^{-9}$ с. Поэтому после прекращения действия внешнего поля (при $T \geq t$) квантовая точка будет находиться в квазистационарном возбужденном состоянии $|v \uparrow, c \downarrow\rangle$ или $|v \downarrow, c \uparrow\rangle$ в течение времени порядка τ , после чего произойдет рекомбинация электрон-дырочной пары с испусканием однофотонного волнового пакета $|1\rangle_f$ (3) со спектральной плотностью $f(\omega)$, centered around frequency $\omega_0 = (2\varepsilon_c + U_v) - (\varepsilon_c + \varepsilon_v)$, т. е. около резонансной частоты $\Omega_r = \varepsilon_c - \varepsilon_v - U_v$, с которой мы воздействовали на квантовую точку. Процесс испускания фотона носит, конечно, вероятностный характер, поэтому мы не можем указать точное время испускания. Для нас важно, что если произойдет излучательная рекомбинация, то будет испущен только один фотон. Такой источник однофотонных состояний может быть использован в квантовых системах обработки и передачи информации, в том числе в квантовых криптосистемах.

В заключение отметим, что сделанные в разд. 3 оценки требуемых значений параметров квантовой точки и внешнего возмущения указывают на практическую возможность экспериментальной реализации такого источника однофотонных состояний. Добавим, что в случае невозможности плавно менять частоту внешнего поля в широком диапазоне условие резонанса может быть, по-видимому, обеспечено путем изменения разности энергий размерно-квантованных уровней в зоне проводимости и валентной зоне путем воздействия на квантовую точку статического электрического и магнитных полей.

Авторы выражают благодарность В. Ф. Елесину за обсуждение результатов работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 96-02-18918).

Литература

1. Труды ФИАН **200** (1991).
2. Z. Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988).
3. J. G. Rarity and P. B. Tapster, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1991).
4. A. K. Ekert, J. G. Rarity, P. R. Tapster, and G. M. Palma, Phys. Rev. Lett. **69**, 1293 (1992).
5. C. Marand and P. D. Townsend, Opt. Lett. **20**, 1695 (1995).
6. S. J. D. Phoenix and P. D. Townsend, Contemporary Physics **36**, 165 (1995).
7. R. J. Hughes, D. M. Alde, P. Dyer, G. G. Luther, G. L. Morgan, and M. Schauer, Contemporary Physics **36**, 149 (1995).
8. C. H. Bennett, Phys. Today **48**, 24 (1995).
9. W. K. Wotters and W.H.Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
10. U. M. Titulaer and R. J. Glauber, Phys. Rev. **145**, 1041 (1966).
11. H. Fearn and R. Loudon, Opt. Commun. **64**, 485 (1987); H. Fearn and R. Loudon, J. Opt. Soc. Amer. B **6**, 917 (1989).
12. R. A. Campos, B. E. Salech, and M. Teich, Phys. Rev. A **42**, 4127 (1990).
13. A. Imamoglu and Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **72**, 210 (1994).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963), с. 173, 174.
15. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971), p. 180.
16. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками*, Энергоатомиздат, Москва (1986); В. М. Галицкий, С. П. Гореславский, В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **57**, 207 (1969).
17. Э. А. Манькин, А. И. Маймистов, *Взаимодействие излучения с веществом. Когерентные процессы*, Изд-во МИФИ, Москва (1996).
18. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **64**, 219 (1996).
19. B. Meurer, D. Heitmann, and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **68**, 1371 (1992).
20. J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. A **276**, 238 (1963).
21. Ю. А. Изюмов, УФН **165**, 403 (1995).
22. Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*, Мир, Москва (1990) (E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1987)).