

ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ И МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ

В. С. Попов

*Институт теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва, Россия*

Б. М. Карнаков*, В. Д. Мур

*Московский инженерно-физический институт (Технический Университет)
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 сентября 1997 г.

Развита квазиклассическая теория ионизации атомов и отрицательных ионов под действием постоянных и однородных электрического и магнитного полей с учетом кулоновского взаимодействия между электроном и атомным остовом в процессе туннелирования. Особо рассмотрен случай скрещенных полей (лоренцева ионизация), а также предел сильного магнитного поля. Полученные аналитические формулы справедливы для произвольных полей \mathcal{E} и \mathcal{H} , малых по сравнению характерными внутриатомными полями. Основные результаты работы получены с помощью метода «мнимого времени» (ММВ), в котором для описания туннелирования используются классические уравнения движения, но с чисто мнимым «временем». Намечена возможность обобщения ММВ на релятивистский случай, а также на состояния с ненулевым угловым моментом.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача об атоме водорода в электрическом и магнитном полях имеет фундаментальное значение для атомной физики и часто встречается в приложениях. Ей посвящена обширная литература (см. [1–30] и ссылки в работах [8, 9, 19, 20]). Свойства энергетического спектра атома водорода и других атомов в сильных внешних полях обсуждались многими авторами [9–16], однако при этом ширинами уровней $\Gamma_n = \hbar\omega_n$ обычно пренебрегалось.

Проблемы, связанные с ионизацией атомов и ионов в сильных полях, приобрели особую актуальность после появления лазеров. В 60-е годы была создана квазиклассическая теория ионизации в электрическом поле \mathcal{E} , причем были рассмотрены случаи как нейтральных атомов [1–6], так и отрицательных ионов типа H^- , J^- и т. д. [7, 8] (первая из этих задач является более сложной ввиду необходимости учитывать кулоновское взаимодействие между вылетающим электроном и атомным остовом). Квазиклассика дает аналитические формулы для вероятности ионизации w , асимптотически точные в пределе «слабых» (см. ниже условия (1.2)) полей. В настоящее время имеются также численные расчеты (см., например, [11, 15–28]), в которых вычислялись положения и ширины атомных уровней, в том числе в чисто электрическом [17–24] и магнитном [25–27] полях, в параллельных [11, 15, 28] и взаимно перпендикулярных [26, 27] полях \mathcal{E} и

*E-mail: karnak@theor.mephi.msk.su

\mathcal{H} . Несмотря на очевидную ценность таких расчетов (относящихся к отдельным значениям напряженностей поля и к конкретным атомам), они не могут заменить аналитической теории.

Влияние магнитного поля \mathcal{H} на вероятность ионизации $w(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ изучалось в [29–31], однако в этих работах удалось рассмотреть только случай отрицательных ионов, когда на больших расстояниях от атома кулоновское взаимодействие отсутствует. При этом были вычислены как экспоненциальный фактор [29] в вероятности w , так и предэкспонента [30, 31] (последняя, правда, лишь в нескольких частных случаях).

Как известно, учет кулоновского взаимодействия в задачах подобного рода представляет значительные трудности и, например, в теории многофотонной ионизации атомов [32, 3, 4] не выполнен в полной мере¹⁾ вплоть до настоящего времени. Для задачи об ионизации атомного уровня под действием постоянных и однородных полей \mathcal{E} и \mathcal{H} такой расчет можно провести до конца в аналитическом виде, если для описания туннельного перехода электрона использовать метод «мнимого времени» (ММВ [3, 36]). Результаты расчета излагаются ниже.

Перечислим содержание данной работы. В разд. 1 приведены основные формулы для вероятности ионизации $w(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ и проанализированы предельные случаи слабого и сильного магнитных полей. Следующий разд. 2 посвящен специальному случаю ($\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$), к которому относится, в частности, лоренцева ионизация [30, 37], возникающая при движении атомов в постоянном магнитном поле. В разд. 3 изложена простая асимптотическая теория для случая сильного магнитного поля $\gamma \gg 1$ (см. ниже (1.7)). В разд. 4 приведены формулы для асимптотического коэффициента C_κ , через который выражается вероятность ионизации атомного s -уровня. В разд. 5 излагается основной метод расчета — ММВ; показано, что с его помощью нетрудно получить основные формулы статьи. Краткий обзор полученных результатов содержится в заключительном разд. 6.

В Приложении А приведено явное выражение для функции Грина электрона, движущегося в полях \mathcal{E} и \mathcal{H} произвольных величины и направления, и получено интегральное уравнение для энергии квазистационарного состояния в том случае ($Z = 0$), когда кулоновское взаимодействие на больших расстояниях отсутствует. В Приложении В вынесены некоторые вспомогательные формулы и асимптотики, в Приложении С обсуждаются детали расчета в случае $\gamma \gg 1$. Часть результатов данной работы была анонсирована в [38, 39].

Авторы посвящают эту работу светлой памяти Михаила Васильевича Терентьева (1935–1996) — выдающегося физика-теоретика, одного из создателей метода мнимого времени, беседы с которым всегда были полезными и многому нас научили.

1. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

Пусть $E_0 = -\kappa^2 m e^4 / 2\hbar^2$ — энергия невозмущенного атомного уровня с орбитальным моментом $l = 0$ (спином в дальнейшем пренебрегаем), а ϵ и \hbar — приведенные

¹⁾ Мы имеем в виду аналитические формулы, а не численные расчеты [33]. Укажем, однако, на работы [34, 35], в которых были получены некоторые частные результаты.

значения внешних полей:

$$\epsilon = \mathcal{E}/\kappa^3 \mathcal{E}_a, \quad h = \mathcal{H}/\kappa^2 \mathcal{H}_a, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{E}_a = m^2 e^5 / \hbar^4 = 5.142 \cdot 10^9$ В/см и $\mathcal{H}_a = m^2 c e^3 / \hbar^3 = 2.350 \cdot 10^9$ Гс — атомные единицы напряженностей поля (далее, как правило, $\hbar = e = m = 1$, однако в окончательных формулах мы восстановим размерность входящих в них величин). Отношение \mathcal{H}/\mathcal{E} , а также угол θ между полями могут быть произвольными. Условием применимости квазиклассического приближения в данной задаче является

$$\epsilon \ll 1, \quad h \ll 1. \quad (1.2)$$

Для основных состояний нейтральных атомов параметр $\kappa \approx 1$ (см. табл. 1), однако для высоковозбужденных (ридберговских) состояний, а также в случае отрицательных ионов он может быть существенно меньше единицы. В этом случае значения $\epsilon, h \sim 1$ достигаются уже для полей, значительно меньших, чем атомные (то же относится и к случаю полупроводников [40]).

Таблица 1

Параметры атомов и ионов

Атом или ион	κ	C_κ	Атом или ион	κ	C_κ
$^1\text{H}(1s)$	1.000	1.00	$^{24}\text{Cr}(4s)$	0.705	1.10
$\text{H}^-(1s)$	0.236	1.15	$^{25}\text{Mn}(4s)$	0.739	1.15
$^2\text{He}(1s)$	1.344	0.99	$^{26}\text{Fe}(4s)$	0.762	1.15
$\text{He}^+(1s)$	2.000	1.00	$\text{Fe}^+(4s)$	1.091	1.10
$\text{He}^-(2p)$	0.075	—	$\text{Fe}^-(4s)$	0.171	1.12
$^3\text{Li}(2s)$	0.630	1.07	$^{29}\text{Cu}(4s)$	0.754	1.08
$\text{Li}^+(1s)$	2.358	0.99	$\text{Cu}^-(4s)$	0.301	1.09
$\text{Li}^-(2s)$	0.212	1.09	$^{37}\text{Rb}(5s)$	0.554	0.93
$^4\text{Be}(2s)$	0.828	1.12	$\text{Rb}^-(5s)$	0.189	0.92
$\text{Be}^+(2s)$	1.157	0.97	$^{38}\text{Sr}(5s)$	0.645	1.05
$^5\text{B}(2p)$	0.781	—	$^{47}\text{Ag}(5s)$	0.746	1.01
$\text{B}^+(2s)$	1.360	1.8	$\text{Ag}^-(5s)$	0.309	1.2
$^{11}\text{Na}(3s)$	0.615	1.04	$^{55}\text{Cs}(6s)$	0.535	0.93
$\text{Na}^-(3s)$	0.201	1.1	$^{56}\text{Ba}(6s)$	0.619	1.07
$^{12}\text{Mg}(3s)$	0.750	1.12	$\text{Ba}^+(6s)$	0.857	1.00
$\text{Mg}^+(3s)$	1.051	1.03	$^{79}\text{Au}(6s)$	0.823	1.10
$^{13}\text{Al}^+(3s)$	1.176	1.1	$^{80}\text{Hg}(6s)$	0.876	1.22
$^{19}\text{K}(4s)$	0.565	0.95	$\text{Hg}^+(6s)$	1.174	1.30
$\text{K}^-(4s)$	0.192	1.03	$^{90}\text{Th}(7s)$	0.67	1.11
$^{20}\text{Ca}(4s)$	0.670	1.05	$^{92}\text{U}(7s)$	0.674	1.08
$\text{Ca}^+(4s)$	0.934	0.97			

Примечание. В таблице приведены параметры для внешних (валентных) электронов, состояния которых указаны в скобках.

Для вычисления вероятности ионизации w мы применяем ММВ. В рамках этого метода туннелирование электрона описывается с помощью подбарьерных траекторий, удовлетворяющих классическим уравнениям движения, но с мнимым «временем». Мнимая часть функции укороченного действия W (см. ниже (5.1)), вычисленная вдоль такой траектории, определяет вероятность туннелирования, т. е. (в данном случае) вероятность ионизации связанного состояния:

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \propto \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} W(0, t_0) \right\}, \quad (1.3)$$

где t_0 — начальный момент подбарьерного движения, а $t = 0$ — момент выхода частицы из-под барьера. Подробное обсуждение ММВ мы отложим до разд. 5. Там же будет показано, что в случае постоянных полей \mathcal{E} и \mathcal{H} учет кулоновского взаимодействия электрона с атомным остовом (заряд Z) можно провести с помощью специфического варианта теории возмущений, поэтому достаточно найти подбарьерную траекторию электрона при $Z = 0$, т. е. фактически для δ -потенциала. Экстремальная траектория, минимизирующая мнимую часть действия, определяет наиболее вероятный путь туннелирования частицы из связанного состояния в непрерывный спектр и находится из классических уравнений движения с граничными условиями:

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}^2(t_0) = -\kappa^2, \quad \operatorname{Im} \mathbf{r}(0) = \operatorname{Im} \dot{\mathbf{r}}(0) = 0. \quad (1.4)$$

Укажем их наглядный смысл, отсылая за подробностями к [36]. Первые два условия отвечают тому, что в начальный момент электрон находится уже за пределами атомного остова (т. е. $|V(r_0)| \ll \kappa^2$), однако искажением волновой функции из-за действия внешних полей \mathcal{E} и \mathcal{H} еще можно пренебречь²⁾. Последнее условие означает, что наиболее вероятная (экстремальная) траектория при $t = 0$ становится вещественной и далее описывает движение частицы на бесконечности уже в классически разрешенной области. Полагая $\tau = -i\omega_c t$, находим искомую траекторию³⁾:

$$\begin{aligned} x &= i \frac{|e|\mathcal{E}}{m\omega_c^2} \left(\tau - \tau_0 \frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{sh} \tau_0} \right) \sin \theta, & y &= \frac{e\mathcal{E}}{m\omega_c^2} \frac{\tau_0}{\operatorname{sh} \tau_0} (\operatorname{ch} \tau_0 - \operatorname{ch} \tau) \sin \theta, \\ z &= \frac{e\mathcal{E}}{2m\omega_c^2} (\tau_0^2 - \tau^2) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

($-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$). Второе из условий (1.4) дает уравнение, определяющее начальный момент подбарьерного движения $t_0 = -i\omega_c^{-1}\tau_0$:

$$\tau_0^2 - \sin^2 \theta (\tau_0 \operatorname{cth} \tau_0 - 1)^2 = \gamma^2, \quad (1.6)$$

или

²⁾ Строго говоря, эти условия соответствуют нулевому радиусу действия сил, связывающих электрон с атомным остовом. Можно, однако, показать, что учет конечного радиуса действия сил приводит к поправкам порядка $\epsilon \ll 1$ в предэкспоненте, которыми мы пренебрегаем (см., в частности, (A.19)).

³⁾ Эти выражения получаются аналитическим продолжением известных формул для движения заряженной частицы в постоянных и однородных полях [41].

$$\frac{th \tau_0}{\tau_0} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{\tau_0^2 - \gamma^2}}. \quad (1.6')$$

Здесь

$$\gamma = \frac{|\omega_c|}{\omega_t} = \frac{\kappa \mathcal{H}}{c \mathcal{E}} = \frac{h}{\epsilon}, \quad (1.7)$$

$\omega_c = e\mathcal{H}/mc$ — ларморовская, или циклотронная частота, а $\omega_t = \mathcal{E}/\kappa$ — характерная частота туннелирования в электрическом поле. В этом случае мнимое время туннелирования частицы равно

$$T_t = \int_0^b \frac{dx}{|p(x)|} = \frac{\kappa}{\mathcal{E}} \equiv \frac{1}{\omega_t},$$

где $|p(x)| = \sqrt{\kappa^2 - 2\mathcal{E}x}$ и $b = \kappa^2/2\mathcal{E}$ — ширина барьера. Отметим, что параметр γ аналогичен известному параметру Келдыша [32], возникающему в теории многофотонной ионизации атомов переменным электрическим полем. Его появление связано с тем, что в данной задаче имеются две частоты, ω_t и ω_c , соотношение между которыми может быть произвольным. При этом

$$\gamma = \sqrt{\frac{I}{I_0} \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_a} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_a} \right)^{-1}}, \quad (1.7')$$

где $I = \kappa^2/2$ — энергия связи уровня, $I_0 = 13.6$ эВ — потенциал ионизации атома водорода (параметр κ включает сдвиг уровня во внешнем поле).

Из (1.6') видно, что имеется единственное (вещественное) решение $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \theta)$, причем $\tau_0 \geq \gamma$. Если же $\gamma > 1$, то справедливо более сильное ограничение:

$$\tau_0 > \tilde{\tau}_0 \equiv \frac{\sin^2 \theta + \gamma^2}{\sin^2 \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta}}, \quad (1.8)$$

которое становится асимптотически точным при $\gamma \gg 1$ (см. рис. 1).

В (1.5), (1.6) и в дальнейших формулах считается, что магнитное поле направлено вдоль оси z , ось x перпендикулярна к плоскости $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ и θ — угол между \mathcal{E} и \mathcal{H} . Подстановка (1.5) в (1.3) дает экспоненциальный фактор в вероятности ионизации. Для определения предэкспоненты нужно учесть также вклад пучка подбарьерных траекторий, близких к экстремальной. В результате вычислений приходим к следующей формуле

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = \frac{me^4 \kappa^2}{\hbar^3} \cdot 2^{2\eta} |C_\kappa|^2 \left(\frac{\hbar^4 \mathcal{E}}{m^2 e^5 \kappa^3} \right)^{1-2\eta} \times \\ \times PQ^\eta \exp \left\{ -\frac{2m^2 e^5 \kappa^3}{3\hbar^4 \mathcal{E}} g(\gamma, \theta) \right\}. \quad (1.9)$$

Здесь C_κ — асимптотический коэффициент нормированной волновой функции началь-

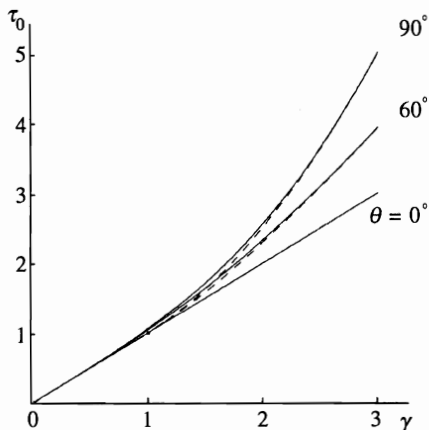


Рис. 1. Зависимость τ_0 от параметра γ согласно уравнению (1.6). У кривых указаны значения угла θ между электрическим и магнитным полями. Штриховые кривые отвечают приближению $\tilde{\tau}_0$ из (1.8), при этом $\tilde{\tau}_0 = 1$ при $\gamma = 1$ и любом θ

ного состояния ($l = 0$):

$$\psi_0(r) \approx C_\kappa \sqrt{\kappa^3/\pi} e^{-\kappa r} (\kappa r)^{\eta-1}, \quad r \gg \kappa^{-1} \tag{1.10}$$

(в частности, $C_\kappa = 1$ для 1s- и 2s-состояний атома водорода, $C_\kappa = 1/\sqrt{2}$ для уровня в трехмерном δ -потенциале),

$$g(\gamma, \theta) = \frac{3}{2}\beta \left(1 - \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\gamma} \sin \theta - \frac{1}{3}\beta^2 \cos^2 \theta \right), \tag{1.11}$$

$\beta = \tau_0/\gamma \geq 1$, кулоновский фактор имеет вид ($\eta = Z/\kappa$ — параметр Зоммерфельда)

$$Q(\gamma, \theta) = \exp \left\{ 2 \left(\ln \frac{\beta}{2} + \int_0^{\tau_0} d\tau \left[\frac{\gamma}{\xi(\tau)} - \frac{1}{\tau_0 - \tau} \right] \right) \right\}, \tag{1.12}$$

$$\xi(\tau) = \left\{ \frac{1}{4}(\tau_0^2 - \tau^2)^2 \cos^2 \theta + \tau_0^2 \left[\left(\frac{\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau}{\text{sh } \tau_0} \right)^2 - \left(\frac{\text{sh } \tau}{\text{sh } \tau_0} - \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 \right] \sin^2 \theta \right\}^{1/2}, \tag{1.12'}$$

и, наконец, предэкспонента

$$P(\gamma, \theta) = \frac{\gamma^2}{\tau_0} \left[\left(\frac{\text{sh } 2\tau_0}{2\tau_0} + \tau_0 \text{cth } \tau_0 - 2 \right) \sin^2 \theta + \text{sh}^2 \tau_0 \cos^2 \theta \right]^{-1/2}. \tag{1.13}$$

Наиболее простой способ получения этих формул состоит в использовании ММВ и излагается ниже в разд. 5. Предэкспоненту $P(\gamma, \theta)$ можно также вычислить независимым методом, решая интегральное уравнение для (комплексной) энергии квазистационарного состояния $E = E_r - i\Gamma/2$:

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi i}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3}} \left\{ \frac{u}{\sin u} \exp[-i\Lambda\varphi(u)] - \exp(i\Lambda\gamma^2 u) \right\}, \tag{1.14}$$

(см. Приложение А), где $\kappa_0 = \sqrt{-2E_0}$ и $\kappa = \sqrt{-2E}$ — параметры для свободного ($\mathcal{E} = \mathcal{H} = 0$) атома и для атома во внешних полях,

$$\Lambda = \epsilon^2 h^{-3}, \quad \varphi(u) = [\gamma^2 + (1 - u \operatorname{ctg} u) \sin^2 \theta] u + \frac{1}{3} u^3 \cos^2 \theta. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.14) определяет как сдвиг уровня $E_r - E_0$, так и его ширину Γ и получается, если на функцию (А.13) наложить граничное условие при $r \rightarrow 0$, отвечающее δ -потенциалу, т.е. приближению нулевого радиуса действия сил (в Приложении А получено уравнение (А.18), в котором учтена также поправка на эффективный радиус). Если $\Lambda \gg 1$, то интеграл в (1.14) может быть вычислен методом перевала, что приводит к формуле (1.9) с $\eta = 0$ и предэкспонентой (1.13). Вычисление кулоновского фактора (1.12) рассмотрено ниже в разд. 5.

Обсудим полученные результаты.

а) В отсутствие магнитного поля ($\gamma = 0$) формулы упрощаются: $g(\gamma, \theta) = P = Q \equiv 1$ и

$$w(\mathcal{E}) = 2^{2\eta} \kappa^2 |C_\kappa|^2 \epsilon^{1-2\eta} \exp(-2/3\epsilon), \quad (1.16)$$

что совпадает с известными результатами работ [1–3, 7] для s -уровня.

б) В случае параллельных полей имеем $\tau_0 = \gamma$,

$$g(\gamma, 0) = Q(\gamma, 0) \equiv 1, \quad P(\gamma, 0) = \gamma / \operatorname{sh} \gamma. \quad (1.17)$$

в) При $\gamma \ll 1$ (т.е. в области слабых магнитных полей) и произвольном угле θ можно использовать разложения этих функций, приведенные в Приложении В, см. формулы (В.1)–(В.4).

г) В противоположном случае $\gamma \rightarrow \infty$ функции $g(\gamma, \theta)$ и $Q(\gamma, \theta)$ выходят на постоянные пределы (если $\theta < \pi/2$), а предэкспонента $P(\gamma, \theta)$ убывает экспоненциальным образом, см. асимптотики (В.6)–(В.9) в Приложении В. Случай $\theta = \pi/2$ является выделенным и обсуждается в следующем разделе.

д) Если $\theta \neq 0$, то $g(\gamma, \theta) > 1$, поэтому магнитное поле уменьшает вероятность ионизации, стабилизируя уровень. Это связано с тем, что из-за действия силы Лоренца подбарьерная траектория электрона «закручивается», а ширина барьера возрастает (наглядное объяснение этому дает ММВ, см. разд. 5). С другой стороны, учет кулоновского взаимодействия значительно повышает вероятность ионизации нейтрального атома по сравнению со случаем отрицательного иона (при одной и той же энергии связи $\kappa^2/2$ и сравнимых значениях констант C_κ^2). Это объясняется тем, что в кулоновском поле электронная плотность на «краю» атома повышается, см. ниже (5.8) и (5.6).

е) Кулоновский и предэкспоненциальный факторы в (1.9) являются поправками (имеющими один и тот же порядок величины $\sim \ln \epsilon$ по малому параметру $\epsilon \rightarrow 0$) к главному члену, пропорциональному ϵ^{-1} , в показателе экспоненты. По этой причине величины $Q(\gamma, \theta)$ и $P(\gamma, \theta)$ могут вычисляться независимо друг от друга.

ж) Главный (экспоненциальный) фактор в (1.9) был вычислен ранее (см. формулы (35), (36) в работе [29]), где для функции $g(\gamma, \theta)$ получено выражение более громоздкое, чем (1.11), однако сводящееся к нему с использованием уравнения (1.6). Отметим, что коэффициент при γ^2 в разложении предэкспоненты P (который, согласно (В.2), не зависит от угла θ) совпадает с вычисленным ранее для частных случаев $\theta = 0$ [31] и $\pi/2$ [30].

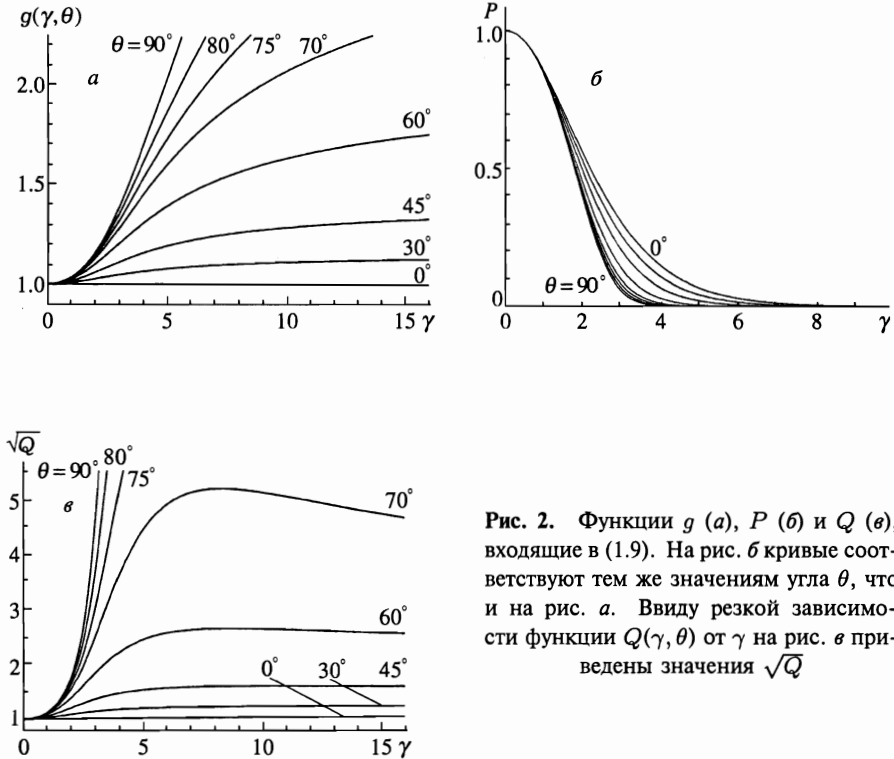


Рис. 2. Функции g (а), P (б) и Q (в), входящие в (1.9). На рис. б кривые соответствуют тем же значениям угла θ , что и на рис. а. Ввиду резкой зависимости функции $Q(\gamma, \theta)$ от γ на рис. в приведены значения \sqrt{Q}

Результаты численных расчётов по приведенным выше формулам представлены на рис. 1 и 2. Отметим, что $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \theta)$ имеет простой физический смысл: $t_0 = -i\omega_c^{-1}\tau_0$, где t_0 — время (чисто мнимое) подбарьерного движения. Функции g, P и Q в зависимости от γ показаны на рис. 2а–в.

С ростом магнитного поля ширина барьера увеличивается, а вероятность ионизации уменьшается. Введем «фактор стабилизации» S , учитывающий подавление распада связанного состояния магнитным полем:

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = Sw(\mathcal{E}, 0). \tag{1.18}$$

Для параллельных полей этот фактор находится аналитически:

$$S(\gamma, 0) = \frac{\gamma}{\text{sh } \gamma} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \frac{7}{360}\gamma^4 + \dots, & \gamma \rightarrow 0, \\ 2\gamma e^{-\gamma} + O(e^{-3\gamma}), & \gamma \rightarrow \infty, \end{cases} \tag{1.19}$$

причем в данном случае он одинаков для нейтральных атомов и отрицательных ионов. В общем случае

$$S = P Q^\eta \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} \left[g(\gamma, \theta) - 1 \right] \right\}, \tag{1.20}$$

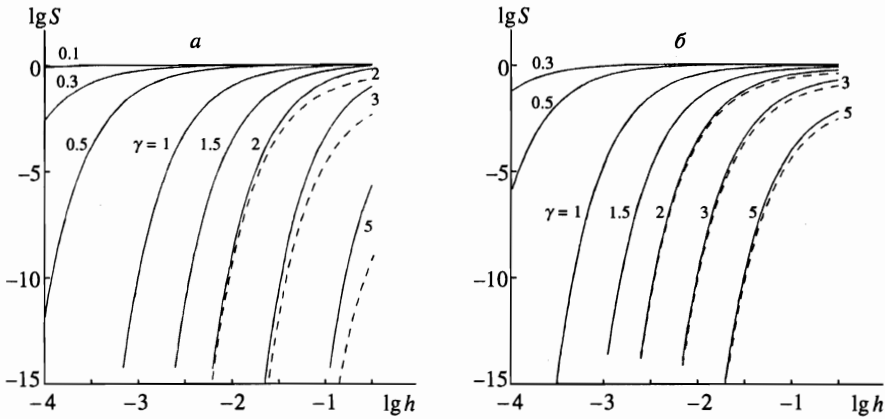


Рис. 3. Фактор стабилизации S в случаях $\theta = 90^\circ$ (а) и 45° (б): сплошные кривые — для основного состояния атома водорода ($\kappa = \eta = 1$), штриховые кривые — для отрицательного иона с $\kappa = 1, \eta = 0$. У кривых указаны значения γ ($h = \mathcal{H} / \mathcal{H}_a$)

так что при $\gamma \rightarrow 0$

$$S = 1 - s_1 \gamma^2 + \dots, \quad s_1 = \frac{1}{6} + \frac{2}{9}(0.1\epsilon^{-1} - \eta) \sin^2 \theta. \tag{1.21}$$

Коэффициент s_1 , как правило, положителен (в частности, для всех отрицательных ионов). Фактор стабилизации быстро убывает с уменьшением магнитного поля, в особенности при $\gamma > 1$ (рис. 3). Зависимость S от кулоновского параметра η становится существенной при $\gamma > 2$. Предэкспоненциальный множитель P резко уменьшает вероятность w , если $\gamma \gtrsim 10$ (рис. 2б).

2. СЛУЧАЙ $\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$

Случай взаимно перпендикулярных полей выделен как по формальному признаку (асимптотики входящих в (1.9) функций изменяют свой вид в области больших γ), так и с точки зрения физики: подобная конфигурация полей возникает в системе покоя атома, движущегося в постоянном магнитном поле (лоренцева ионизация [37]). Формулы принимают следующий вид:

$$g(\gamma) = \frac{3}{2} \beta^3 \left[1 - \left(\text{cth } \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right) \text{cth } \tau_0 \right], \quad P(\gamma) = \frac{\gamma}{\beta} \left[\left(\frac{\text{sh } \tau_0 + \tau_0}{\tau_0 \text{sh } \tau_0} \right) \text{ch } \tau_0 - 2 \right]^{-1/2}, \tag{2.1}$$

$$Q(\gamma) = \frac{1}{4} \beta^2 \exp \left(2 \int_0^{\tau_0} d\tau \left\{ \beta^{-1} \left[\left(\frac{\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau}{\text{sh } \tau_0} \right)^2 - \left(\frac{\text{sh } \tau - \tau}{\text{sh } \tau_0 - \tau_0} \right)^2 \right]^{-1/2} - \frac{1}{\tau_0 - \tau} \right\} \right), \tag{2.2}$$

$\tau_0(\gamma)$ определяется из уравнения $\text{th } \tau_0 = \tau_0 / (1 + \sqrt{\tau_0^2 - \gamma^2})$, а $\beta = [1 - (\text{cth } \tau_0 - 1/\tau_0)^2]^{-1/2}$.

При $\gamma \ll 1$ (слабое магнитное поле)

$$g(\gamma) = 1 + \frac{1}{30} \gamma^2 + \frac{11}{7560} \gamma^4 + \frac{53}{2\,041\,200} \gamma^6 - \frac{2507}{538\,876\,800} \gamma^8 + \dots, \tag{2.3}$$

$$P(\gamma) = 1 - \frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{3240}\gamma^4 + \dots, \quad Q(\gamma) = 1 + \frac{2}{9}\gamma^2 + \dots \quad (2.4)$$

С другой стороны, при $\gamma \gg 1$ имеем (см. Приложения В и С):

$$g(\gamma) = \frac{3}{8}\gamma(1 + \gamma^{-2})^2 \left[1 - c_1 e^{-\gamma^2} + O(e^{-2\gamma^2}) \right], \quad (2.5)$$

$$P(\gamma) = c_2 e^{-\gamma^2/2} \gamma \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \dots \right), \quad Q(\gamma) = c_3 e^{\pi\gamma} \gamma^{-2} \left[1 + O(\gamma^{-1}) \right], \quad (2.6)$$

где c_i — численные коэффициенты: $c_1 = 2e^{-1} = 0.7358$, $c_2 = 2^{3/2}e^{-1/2} = 1.716$ и $c_3 = 0.0106$. Таким образом, $g(\gamma) \propto \gamma$ при $\gamma \rightarrow \infty$, в то время как для углов $\theta < \pi/2$ эта функция выходит на константу; асимптотики функций P и Q также существенно различаются.

Таблица 2

Функция $g(\gamma)$ и ее аппроксимации

γ	А	В	δ	С	δ
1.0	1.0348090	1.03479 1.0348097	$[-2.0(-3)]$ $[6.3(-5)]$	1.09399	$[5.7]$
1.5	1.0825046	1.08237 1.08254	$[-0.013]$ $[3.5(-3)]$	1.08260	$[8.7(-3)]$
2.0	1.1564487	1.15661 1.15708	$[0.014]$ $[0.055]$	1.15608	$[-0.032]$
2.5	1.2597242	1.26517 1.26441	$[0.43]$ $[0.37]$	1.25971	$[-1.3(-3)]$

Примечание. Таблица содержит значения функции $g(\gamma, \theta)$ при $\theta = \pi/2$: А) численный расчет; В) по формуле (2.3), в которой удержаны члены до γ^4 и γ^8 включительно (соответственно верхняя и нижняя строки); С) асимптотика (2.5). В квадратных скобках приведена относительная погрешность δ соответствующих приближений (в процентах); в круглых скобках указан порядок величины, т. е. $a(b) \equiv a \cdot 10^b$.

Замечательной особенностью полученных разложений является то, что области их применимости «затягиваются» вплоть до $\gamma \sim 1$, где эти асимптотики плавно сшиваются друг с другом. Это иллюстрирует табл. 2, в которой приведены значения функции $g(\gamma)$, вычисленные по приближенным формулам (2.3) и (2.5) — соответственно столбцы В и С, а также результаты численного счета — столбец А. Видно, что при $\gamma \lesssim 2$ значения $g(\gamma)$ можно вычислять по (2.3), а при $\gamma > 1.5$ — по асимптотическому разложению (2.5), не обращаясь к решению трансцендентного уравнения. Хотя функции $P(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ при $\gamma \gg 1$ изменяются более резко, чем $g(\gamma)$, вероятность w наиболее чувствительна к изменению именно $g(\gamma)$, поскольку эта функция содержится в (1.9) в показателе экспоненты и притом с большим коэффициентом $2/3\epsilon$. При этом кулоновский и предэкспоненциальный множители имеют параметрическую малость по отношению к главному члену

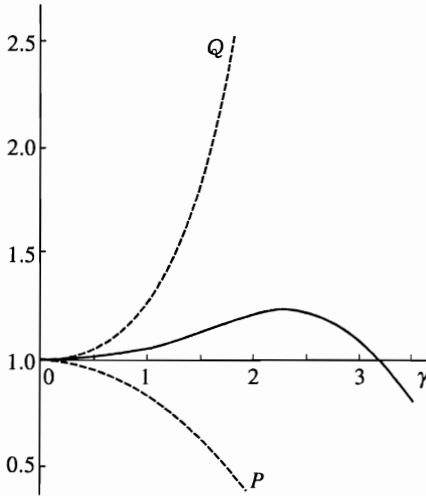


Рис. 4. Зависимость предэкспоненты P , кулоновского фактора Q (штриховые кривые) и их произведения (сплошная кривая) от γ в случае $\theta = \pi/2$

асимптотики $\exp\{-(2/3\epsilon)g(\gamma)\}$: с экспоненциальной точностью

$$w(\gamma) \approx \exp\left\{-\frac{h}{4\epsilon^2} [1 + 2(h - 2\pi\eta\epsilon) + \dots]\right\}, \quad \gamma = \frac{h}{\epsilon} \gg 1, \quad (2.7)$$

где слагаемое $2h$ в квадратных скобках происходит из предэкспоненты $P(\gamma)$, а член, пропорциональный η , — от кулоновского фактора $Q(\gamma)$.

Интересно заметить, что для основного уровня атома водорода ($\kappa = \eta = 1$) общий множитель PQ перед экспонентой в (1.9) при $0 \leq \gamma \lesssim 4$ близок к единице (рис. 4), хотя функции $P(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ по отдельности меняются в этом интервале изменения γ более чем на два порядка (так, $P(4) = 2.23 \cdot 10^{-3}$, а $Q(4) = 227.3$). При этом практически вся зависимость вероятности ионизации от γ определяется экспоненциальным множителем (если $\eta \neq 1$, то это уже не так).

Отметим, что в случае $\theta = \pi/2$ и $\gamma > 1$ вероятность ионизации w хотя и мала (особенно ввиду линейного роста функции $g(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow \infty$), однако не обращается в нуль тождественно в отличие от того, что утверждается в работе [30]. Приведенные в [30] формулы для w в области $\gamma < 1$ также являются ошибочными за исключением разложения (9) при $\gamma \rightarrow 0$.

3. АСИМПТОТИКА ПРИ $\gamma \gg 1$

В этом случае, который аналогичен антиадиабатическому ($\omega \gg \omega_t$) приближению в теории многофотонной ионизации, можно развить более простую асимптотическую теорию (излагаемый ниже подход, возможно, окажется полезным и в ряде других задач).

Уравнения для подбарьерной траектории электрона принимают вид

$$x = ia \left(\frac{\tau}{\tau_0} - e^{\tau - \tau_0} \right) \sin \theta, \quad y = -a(1 - e^{\tau - \tau_0}) \sin \theta, \quad (3.1)$$

$$z = -\frac{a}{2\tau_0}(\tau_0^2 - \tau^2) \cos \theta,$$

где $a = \mathcal{E}\tau_0\omega_c^{-2}$, $\tau = -i\omega_c t$ и $\tau_0 \gg 1$. При этом

$$\dot{r}^2 = -\frac{\kappa^2}{\gamma^2} \left\{ \tau^2 \cos^2 \theta - (1 - 2\tau_0 e^{-\tau/\tau_0}) \sin^2 \theta \right\}. \tag{3.2}$$

Начальное условие $\dot{r}^2(\tau_0) = -\kappa^2$ приводит к приближению (1.8) для τ_0 , которое при $\gamma \gtrsim 1$ имеет высокую точность. Так, в случае параллельных полей $\tilde{\tau}_0 = \tau_0 = \gamma$, а для $\theta = \pi/2$ имеем $\tilde{\tau}_0 = (\gamma^2 + 1)/2$ и $\delta(\gamma) \equiv (\tau_0 - \tilde{\tau}_0)/\tau_0 = 0.052, 0.019, 3.6(-4)$ и $1.2(-10)$ соответственно при $\gamma = 1.5, 2, 3$ и 5 . Разложение функции (1.8) по обратным степеням γ дает все члены ряда (В.6).

Используя приближение (3.1), находим

$$g(\gamma, \theta) = \frac{3\tau_0}{2\gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{\gamma^2} \left[(\tau_0 - 1) \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \tau_0^2 \cos^2 \theta \right] \right\}, \tag{3.3}$$

$$P(\gamma, \theta) = 2\gamma^2 (\tau_0 \sin^2 \theta + \tau_0^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} e^{-\tau_0}, \tag{3.4}$$

а также выражение (2.6) для $Q(\gamma, \pi/2)$, см. Приложение С. В качестве τ_0 сюда следует подставить приближение (1.8); например, $\tau_0 = \gamma$ при $\theta = 0$, $\tau_0 = \sqrt{2(1 + \gamma^2)} - 1$ при $\theta = 45^\circ$ и $\tau_0 = (\gamma^2 + 1)/2$ для $\theta = 90^\circ$.

Таблица 3

Точность антиадиабатического приближения

γ	$g(\gamma, 90^\circ)$	$\delta_g, \%$	$P(\gamma, 0)$	$\delta_P, \%$	$P(\gamma, 90^\circ)$	$\delta_P, \%$
2	1.15645	-1.33	0.5514	13.5	0.3847	-7.9
3	1.38876	-9.1(-3)	0.2995	0.25	5.406(-2)	-0.34
4	1.69336	-8.2(-6)	0.1466	0.034	2.233(-3)	-1.0(-3)
5	2.02800	-1.0(-9)	0.0674	4.5(-3)	3.13(-5)	-1.7(-7)
10	3.82538	-	9.08(-4)	2.0(-7)	3.29(-21)	-
15	5.67511	-	9.18(-6)	9.4(-12)	-	-

Примечание. Относительные ошибки δ_g и δ_P даны в процентах. Проверк указывает, что соответствующая величина меньше, чем 10^{-30} .

Эти асимптотические формулы имеют удивительно высокую точность, начиная уже с $\gamma \sim 3$: см. табл. 3, в которой δ — относительная погрешность соответствующей асимптотики: $\delta_g = (g - g_{as})/g$, где значение g вычислено по формуле (2.1), а g_{as} — по (3.3), и аналогично определяются δ_P, δ_Q . Отметим, что в случае параллельных полей $g_{as} = Q_{as} \equiv 1$ независимо от γ , $P_{as} = 2\tau_0 \exp(-\tau_0)$, $\delta_P = \exp(-2\gamma)$. С другой стороны, при $\theta = \pi/2$

$$g_{as} = \frac{3\tau_0^2}{2(2\tau_0 - 1)^{3/2}}, \quad P_{as} = \frac{2(2\tau_0 - 1)}{\sqrt{\tau_0}} e^{-\tau_0}, \tag{3.5}$$

причем $\delta_g \approx -c_4 \exp(-\gamma^2)$, $\delta_P \sim c_5 \gamma^2 \exp(-\gamma^2)$ и $c_4 = 2c_5 = 0.736$. Что касается функции Q , то для нее данное приближение имеет не столь высокую точность, что объясняется

сложным видом кулоновского интеграла (1.12). Сравнение асимптотики (2.6) с численными расчетами показывает, что $\delta_Q = 10.6\%, 2.7\%$ и 0.69% при $\gamma = 5, 10$ и 20 , причем δ_Q убывает как γ^{-2} , а не экспоненциальным образом.

Наконец, с помощью (3.1) нетрудно выяснить, как набирается действие W в процессе подбарьерного движения. Пусть $\rho = r/b$, где $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ — расстояние между электроном и ядром (при этом компонента $x(t)$ — чисто мнимая, а y и z — вещественные), b — ширина барьера, см. (С.5). При $\theta < \pi/2$ легко находим

$$W(\rho)/W(1) = 1 - (1 - \rho)^{3/2} + O(\gamma^{-1}). \quad (3.6)$$

Интересно отметить, что та же зависимость имеет место при $\gamma = 0$, т.е. в случае чисто электрического поля, когда [3, 36]

$$x = b_0 \left[1 - \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right], \quad W(t, t_0) = \frac{i\kappa^3}{3\mathcal{E}} \left[1 - \left(\frac{t}{t_0} \right)^3 \right] \quad (3.7)$$

($b_0 = \kappa^2/2\mathcal{E}$). Таким образом, при переходе от $\gamma \ll 1$ к $\gamma \gg 1$, т.е. от случая слабого магнитного поля к сильному, характер изменения функции действия вдоль подбарьерной траектории практически не меняется.

4. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Как видно из (1.9), вероятность ионизации атомного уровня пропорциональна $|C_\kappa|^2$. Это не удивительно, поскольку при $\epsilon, h \ll 1$ ионизация идет с «хвоста» атомной волновой функции $\psi_0(r)$, а барьер является широким ($\kappa b \sim 1/\epsilon \gg 1$). Кратко обсудим свойства коэффициентов C_κ .

Для потенциалов с кулоновским «хвостом» на бесконечности, $V(r) = -Z/r + o(r^{-2})$, асимптотика нормированной радиальной функции имеет вид

$$\chi_{\kappa l}(r) = 2 C_{\kappa l} \sqrt{\kappa} e^{-\kappa r} (\kappa r)^\eta \left[1 + \frac{(l + \eta)(l + 1 - \eta)}{2\kappa r} + \dots \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

что определяет асимптотический коэффициент $C_{\kappa l}$. Заметим, что при преобразовании подобия $\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}$ в уравнении Шредингера

$$E_{\kappa l} \rightarrow \alpha^2 E_{\kappa l}, \quad \kappa \rightarrow \alpha \kappa, \quad V(\mathbf{r}) \rightarrow \alpha^2 V(\alpha \mathbf{r}),$$

$$\chi_l(r) \rightarrow \sqrt{\alpha} \chi_l(\alpha r), \quad C_{\kappa l} \rightarrow C_{\kappa l}. \quad (4.2)$$

Поэтому коэффициенты $C_{\kappa l}$ безразмерны и масштабно-инвариантны, т.е. зависят лишь от формы потенциала V (и номера уровня), но не от его глубины и радиуса по отдельности. Для n -состояний водородоподобного атома

$$C_\kappa = 2^{n-1}/n!, \quad l = 0, \quad (4.3)$$

причем эти коэффициенты не зависят от заряда ядра ($C_\kappa = 1$ для $n = 1$ и 2).

Параметры κ и C_κ для нейтральных ($Z = 1$) атомов, отрицательных ($Z = 0$) и однозарядных положительных ($Z = 2$) ионов приведены в табл. 1, при составлении которой мы использовали справочник [42]. При этом $C_\kappa = (2\kappa^{\eta+1/2})^{-1}A$, где A — соответствующие коэффициенты из [42]. Значения C_κ для основных состояний атомов и ионов лежат в довольно узких пределах: для нейтральных атомов — от $C_\kappa = 0.926$ для атома Cs до $C_\kappa = 1.22$ для Hg, и в большинстве случаев они численно близки к единице (мы брали в основном те случаи, когда валентный электрон находится в s -состоянии). Таким образом, асимптотические коэффициенты C_κ (а тем самым и вероятность ионизации w) мало чувствительны к виду потенциала $V(r)$ внутри атомного остова.

5. МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ

В расчетах вероятности ионизации мы использовали метод мнимого времени (ММВ). Это позволило, в частности, найти кулоновскую поправку к вероятности $w(\mathcal{E}, \mathcal{H})$, что вряд ли можно сделать другим способом. Дадим необходимые пояснения относительно применения ММВ к задачам об ионизации.

1) Для вычисления вероятности перехода из начального состояния в конечное следует, согласно Фейнману [43], учесть вклад всевозможных траекторий, связывающих эти состояния. В случае подбарьерного (туннельного) перехода и в рамках применимости квазиклассического приближения достаточно ограничиться классом гладких траекторий, удовлетворяющих классическим уравнениям движения (но с мнимым временем t) и естественным граничным условиям: при $t = t_0$ электрон связан в атоме, а при $t \rightarrow \infty$ он вылетает на бесконечность в заданных внешних полях \mathcal{E} и \mathcal{H} . Вклад такой траектории в вероятность туннелирования есть [36] $\exp(-2 \operatorname{Im} W)$, где W — укороченное действие:

$$W = \int_{t_0}^0 \left[L + E_0 - \frac{d}{dt}(\mathbf{pr}) \right] dt, \quad L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi, \quad (5.1)$$

$E_0 = -\kappa^2/2$ — энергия начального состояния, t_0 — начальный момент подбарьерного движения и $t = 0$ — момент выхода частицы из-под барьера ($\operatorname{Im} W(t)$ уже не меняется при $t > 0$). Далее мы рассмотрим случай постоянных и однородных полей и потенциала $U(r)$ нулевого радиуса (δ -потенциал). Подставляя

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}\mathbf{r}], \quad \varphi = -\mathcal{E}\mathbf{r}$$

в (5.1), учитывая уравнение движения и начальное условие $\mathbf{r}(t_0) = 0$, получаем

$$W = \frac{1}{2} \left\{ e\mathcal{E} \int_{t_0}^0 \mathbf{r}(t)dt + \kappa^2 t_0 - m(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})_{t=0} \right\}. \quad (5.2)$$

Это и есть основная формула, по которой будем рассчитывать вероятность ионизации. Перейдем к примерам (далее $\hbar = e = m = 1$).

2) В чисто электрическом поле $\mathcal{E} = (0, 0, \mathcal{E})$ подбарьерная траектория электрона характеризуется поперечным импульсом \mathbf{p}_\perp :

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ \mathbf{p}_\perp(t - t_0), \frac{1}{2} \mathcal{E}(t^2 - t_0^2) \right\},$$

$$t_0 = \frac{i}{\mathcal{E}} \sqrt{\kappa^2 + p_\perp^2} = \frac{i\kappa}{\mathcal{E}} \left(1 + \frac{p_\perp^2}{2\kappa^2} + \dots \right),$$
(5.3)

откуда $(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})_{t=0} = -p_\perp^2 t_0$ и

$$W(p_\perp) = \frac{1}{6} \mathcal{E}^2 t_0^3 + \frac{1}{2} (\kappa^2 + p_\perp^2) t_0 = \frac{i}{3\mathcal{E}} (\kappa^2 + p_\perp^2)^{3/2}.$$
(5.4)

В D -мерном случае полная вероятность ионизации s -уровня равна

$$w_{sr}(\mathcal{E}) = \frac{\kappa^2}{\pi} |C_\kappa|^2 \int \exp\{-2 \operatorname{Im} W(p_\perp)\} d^{D-1} \left(\frac{p_\perp}{\kappa} \right) \approx$$

$$\approx \kappa^2 \pi^{(D-3)/2} |C_\kappa|^2 \epsilon^{-(D-1)/2} e^{-2/3\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$
(5.5)

где C_κ — безразмерный асимптотический коэффициент (нормированной) волновой функции в короткодействующем потенциале $U(r)$:

$$\psi_0(r) \approx \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} C_\kappa e^{-\kappa r} r^{-(D-1)/2}, \quad r = \left(\sum_{i=1}^D x_i^2 \right)^{1/2} \gg \kappa^{-1}$$
(5.6)

(в случае δ -потенциала $\pi^{(D-3)/2} |C_\kappa|^2 = 1$, $\sqrt{\pi}/2$ и $1/2$ соответственно при $D = 1, 2$ и 3). При этом распределение вылетающих электронов по p_\perp является (в атомных масштабах) узким: $\langle p_\perp \rangle \sim \sqrt{\epsilon} \kappa \ll \kappa$.

Формула (5.5) относится к ионизации s -уровня, связанного короткодействующим потенциалом, и демонстрирует зависимость вероятности w_{sr} от размерности пространства⁴⁾. Приведем также вероятность ионизации основного состояния D -мерного «атома водорода»:

$$w_H(\mathcal{E}) = \kappa^2 \frac{2^{D-1}}{\Gamma((D+1)/2)} \epsilon^{-(D-1)/2} e^{-2/3\epsilon}$$
(5.7)

(при $\mathcal{E} = 0$ энергия основного уровня равна $E_0 = -2(D-1)^{-2}$, так что $\kappa = 2/(D-1)$, $D > 1$). Заметим, что (5.7) вытекает непосредственно из общей формулы [2, 3, 6] для вероятности ионизации состояния $|n_1 n_2 m\rangle$ в слабом электрическом поле, если учесть, что основное состояние в D -мерной кулоновской задаче эквивалентно безузельному ($n_1 = n_2 = 0$, $n = \kappa^{-1} = (D-1)/2$) состоянию трехмерного атома водорода [46]; здесь n_1, n_2, m — параболические квантовые числа, $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$.

Сравнение (5.5) и (5.7) показывает, что экспоненциальные множители в них одни и те же, однако предэкспоненты существенно различаются: для короткодействующих потенциалов предэкспонента уменьшается с ростом размерности D , в то время как для

⁴⁾ Переход от физического значения $D = 3$ к произвольному D в последние годы получил значительное развитие и широко применяется в теоретической физике ($1/D$ -разложение, или размерный скейлинг); см. [44, 45], где можно найти дальнейшие ссылки.

кулоновского потенциала — наоборот, возрастает. Это объясняется тем, что в случае $\epsilon \ll 1$ ионизация идет с «хвоста» волновой функции $\psi_0(r)$, где электронная плотность

$$\psi_0^2(r) \propto r^{2\eta-(D-1)} e^{-2\kappa r}, \quad \kappa r \gg 1 \quad (5.8)$$

тем больше, чем больше показатель степени $2\eta - (D - 1) = (Z - 1)(D - 1)$.

3) Если присутствуют оба поля, \mathcal{E} и \mathcal{H} , то экстремальная ⁵⁾ траектория уже не является одномерной и имеет вид (1.5). Скорость частицы вдоль нее есть $\mathbf{v} = i\omega_c d\mathbf{r}/d\tau$, причем

$$v^2(\tau) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\omega_c}\right)^2 \left\{ \tau_0^2 \left[\left(\text{cth } \tau_0 - \frac{1}{\tau_0} \right)^2 + 2 \frac{\text{ch } \tau_0 - \text{ch } \tau}{\tau_0 \text{sh } \tau_0} \right] \sin^2 \theta - (\tau_0^2 \sin^2 \theta + \tau^2 \cos^2 \theta) \right\}. \quad (5.9)$$

Из условия $v^2(\tau_0) = -\kappa^2$ непосредственно следует уравнение (1.6), а при $\tau = 0$ получаем, что импульс частицы на выходе из-под барьера направлен перпендикулярно к плоскости (\mathcal{E} , \mathcal{H}) и по величине равен

$$p_0 = v_x(0) = \frac{e\mathcal{E}}{\omega_c} \left(1 - \frac{\tau_0}{\text{sh } \tau_0} \right) \sin \theta \approx \kappa \sin \theta \begin{cases} \frac{1}{6} \gamma, & \gamma \ll 1, \\ \gamma^{-1}, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

В отличие от одномерного случая точка выхода из-под барьера не является точкой остановки частицы; однако компоненты скорости v_y и v_z , мнимые в подбарьерном движении, обращаются в ней в нуль.

Из (1.5) вытекает, что для экстремальной траектории $(\dot{\mathbf{r}})_{t=0} = 0$ и

$$W = -i \frac{\mathcal{E}^2}{2\omega_c^3} \tau_0 \left[(\tau_0 \text{cth } \tau_0 - 1) \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \tau_0^2 \cos^2 \theta \right] + i \frac{\kappa^2}{2\omega_c} \tau_0 = \frac{i}{3\epsilon} g(\gamma, \theta). \quad (5.11)$$

Учитывая (1.6) и соотношения $\mathcal{E}/\omega_c = \kappa/\gamma$, $\kappa^2/\omega_c = (\epsilon\gamma)^{-1}$ и $\mathcal{E}^2/\omega_c^3 = (\epsilon\gamma^3)^{-1}$, приходим к (1.9), (1.11).

4) Для вычисления предэкспоненты P нужно учесть вклад не одной только экстремальной траектории, но и всего пучка близких к ней «классических» траекторий. Проиллюстрируем это на примере параллельных полей: $\mathbf{r}(t) = \{\rho(t), z(t)\}$, где

$$\rho \equiv x + iy = i \frac{p_{\perp}}{\omega_c} [\exp(-i\omega_c t) - \exp(-i\omega_c t_0)], \quad z = \frac{1}{2} \mathcal{E}(t^2 - t_0^2) \quad (5.12)$$

(поля \mathcal{E} и \mathcal{H} направлены по оси z), причем $\mathbf{r}(t_0) = 0$ и $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{p}_{\perp}$. Второе из условий (1.4) принимает вид

$$\mathcal{E}^2 t_0^2 + p_{\perp}^2 \exp(-2i\omega_c t_0) = -\kappa^2$$

и определяет начальный момент подбарьерного движения:

$$t_0 = \frac{i\kappa}{\mathcal{E}} \left(1 + \frac{p_{\perp}^2}{2\kappa^2} e^{-2\tau_0} + \dots \right), \quad p_{\perp} \ll \kappa.$$

⁵⁾ Т.е. та подбарьерная траектория, которая минимизирует $\text{Im } W$ и определяет наиболее вероятный путь туннелирования частицы. Она выделяется граничными условиями (1.4).

Первые два слагаемых в правой части (5.2) дают вклад, равный

$$\frac{1}{6} \mathcal{E}^2 t_0^3 + \frac{1}{2} \kappa^2 t_0 = i \frac{\kappa^3}{3 \mathcal{E}} \left[1 + O \left(\left(\frac{p_{\perp}}{\kappa} \right)^4 \right) \right],$$

и в гауссовском ($\sim p_{\perp}^2$) приближении их зависимостью от поперечного импульса следует пренебречь. Остается последнее слагаемое в (5.2):

$$(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}})_{t=0} = \frac{1}{2} (\dot{\rho}\rho^* + \rho^*\dot{\rho})_{t=0} = -p_{\perp}^2 t_0 \frac{\sin \omega_c t_0}{\omega_c t_0}.$$

Поскольку $\omega_c t_0 = i\gamma [1 + O(p_{\perp}^2/\kappa^2)]$, то окончательно

$$W(p_{\perp}) = \frac{i}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\text{sh } \gamma}{\gamma} \frac{p_{\perp}^2}{2\kappa^2} + \dots \right\}. \quad (5.13)$$

Интегрирование по $d^2 p_{\perp}$ дает множитель $\epsilon\gamma/\text{sh } \gamma$ в предэкспоненте, см. формулы (1.9) и (1.17). Сделаем несколько замечаний по поводу полученного решения.

а) При нахождении подбарьерных траекторий мы учитывали лишь внешние поля \mathcal{E} и \mathcal{H} , что фактически означает приближение нулевого радиуса для потенциала $U(r)$, связывающего электрон в атоме. Учет конечного радиуса действия сил r_s дает малые поправки порядка $r_s/b \sim \epsilon(\kappa r_s)$ в предэкспоненте, которыми мы пренебрегаем.

б) ММВ легко объясняет причину уменьшения вероятности ионизации с ростом магнитного поля. Ширина барьера b равна

$$b \equiv \sqrt{r^2(0)} = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}} d(\gamma, \theta), \quad (5.14)$$

где

$$d(\gamma, \theta) = \left(\frac{\tau_0}{\gamma} \right)^2 \sqrt{\cos^2 \theta + \left[\frac{\text{th}(\tau_0/2)}{\tau_0/2} \right]^2 \sin^2 \theta} = \begin{cases} 1 + \frac{\sin^2 \theta}{36} \gamma^2 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \frac{1}{\cos \theta} - \frac{2 \text{tg}^2 \theta}{\gamma} + \dots, & \gamma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.14')$$

При $\gamma \lesssim 1$ ширина барьера практически не меняется и совпадает со значением $b_0 = \kappa^2/2\mathcal{E}$ для постоянного электрического поля, причем $\kappa b_0 = 1/2\epsilon \gg 1$. Однако в случае $\gamma \gg 1$, когда магнитное поле преобладает над электрическим, $d(\gamma, \theta)$ возрастает, что увеличивает ширину барьера и приводит к резкому уменьшению его проницаемости.

в) В момент выхода из-под барьера

$$x = 0, \quad \frac{y}{z} \equiv \text{tg} \theta_0, \quad \theta_0 = \text{arctg} \left\{ \frac{\text{th}(\tau_0/2)}{\tau_0/2} \text{tg} \theta \right\}.$$

При $\gamma \lesssim 1$ частица в подбарьерном движении смещается вдоль электрического поля. Если же $\gamma \gg 1$, то подбарьерная траектория «прижимается» к направлению магнитного поля ($\theta_0 \ll \theta$).

5) Переходя к вычислению кулоновской поправки, положим $V = V_0 + \delta V$, причем экстремальная подбарьерная траектория $\mathbf{r}_0(t)$ в потенциале V_0 считается известной (аналитически или численно), а возмущение δV мало всюду вдоль нее. Вариация действия равна

$$\delta S = - \int_{t_0}^0 \delta V(\mathbf{r}_0(t)) dt. \tag{5.15}$$

В данном случае $\delta V = -Z/r$, поэтому интеграл (5.15) логарифмически расходится при $r \rightarrow 0$ (или $t \rightarrow t_0$); вообще для основного и низковозбужденных состояний атомов область $r \lesssim \kappa^{-1}$ не может быть рассмотрена квазиклассически. Эта трудность преодолевается с помощью процедуры сшивания (ср. с [1]). В силу того что $\epsilon \ll 1$, имеем⁶⁾: $b \gg r_0 \gg \kappa^{-1}$, где b — ширина барьера, а $r_0 = \sqrt{Z/\mathcal{E}}$ — то расстояние, на котором кулоновское поле атомного остатка (заряд Z) сравнивается с внешним полем \mathcal{E} . Это позволяет ввести точку сшивания r_1 ($\kappa^{-1} \ll r_1 \lesssim r_0$), такую, что при $r > r_1$ кулоновское взаимодействие слабо искажает подбарьерную траекторию и работает формула (5.15), а при $r < r_1$ влиянием внешних полей еще можно пренебречь, в силу чего

$$\psi_0(r) \approx r^{-1} \exp \{-\kappa r + \eta \ln(\kappa r) + O(1)\} = r^{-1} \exp \{-\text{Im} [S_0(r) + \delta S(r)]\}.$$

В итоге для кулоновской поправки получаем

$$\delta S_C = -i\eta \ln(\kappa r_1) + Z \int_{t_1}^0 \frac{1}{\sqrt{r_0^2(t)}} dt, \quad \exp(-2 \text{Im} \delta S_C) = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{-2\eta} [Q(\gamma, \theta)]^\eta, \tag{5.16}$$

где $r_1 = \sqrt{r_0^2(t_1)}$ и $\eta = Z/\kappa$. Проверкой этой процедуры является выпадение произвольной точки сшивания r_1 из окончательного ответа.

6) Проиллюстрируем формулу (5.16) на примере электрического поля, когда (см. (5.3) при $p_\perp = 0$) $r_0(t) = \mathcal{E}(t^2 - t_0^2)/2$, $t_0 = i\kappa/\mathcal{E}$:

$$\delta S_C = -i\eta \ln(\kappa r_1) + \frac{2Z}{\mathcal{E}} \int_{t_1}^0 \frac{dt}{t^2 - t_0^2} = -i\eta \ln \frac{(t_0 + t_1)\kappa r_1}{t_0 - t_1},$$

Поскольку $r_0(t) = i\kappa(t - t_0) + \dots$ при $t \rightarrow t_0$, то

$$\delta S_C = -i\eta \ln(-2i\kappa^2 t_0) = -i\eta \ln(2\kappa^3/\mathcal{E}), \quad \exp(-2 \text{Im} \delta S_C) = (2/\epsilon)^{2\eta}, \tag{5.17}$$

что совпадает с известным результатом, полученным с помощью асимптотического решения уравнения Шредингера в параболических координатах для атома водорода [1–3] и для короткодействующего потенциала [7, 8]. Сравнение с этими работами показывает, насколько упрощаются вычисления при использовании ММВ. Применение (5.16) к подбарьерной траектории (1.5) приводит к формуле (1.12) для кулоновской поправки.

⁶⁾ Заметим, что $r_0/b \sim \sqrt{Z\mathcal{E}}\kappa^{-2} \sim \sqrt{ZF}$, где $F = n^4\mathcal{E}/\mathcal{E}_a$ — приведенное электрическое поле, которое удобно вводить при рассмотрении эффекта Штарка для ридберговских состояний [21–23]. Барьер в потенциале $U_2(\eta)$ исчезает при «критическом» значении поля $F = F_*$, причем F_* изменяется в пределах от 0.130 для состояний типа $|0, n - 1, 0\rangle$ до 0.383 для состояний $|n - 1, 0, 0\rangle$ с $n \gg 1$. Условием применимости формулы теории возмущений по кулоновскому взаимодействию (5.16) является $F \ll F_*$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена квазиклассическая теория ионизации атомов и ионов под действием электрического и магнитного полей с учетом кулоновского взаимодействия между электроном и атомным остовом. Полученные формулы являются асимптотически точными в области слабых ($\epsilon, h \ll 1$) полей, а при $\mathcal{H} = 0$ переходят в известные [1–7] результаты для случая электрического поля. При этом в ответ (1.9) входят только две константы (κ и C_κ), характеризующие данный атомный уровень.

Укажем два вопроса, требующих дальнейшей проработки.

1) Выше рассматривалась ионизация s -уровня⁷⁾, однако ММВ может быть обобщен и на состояния с $l \neq 0$. При этом на малых ($\kappa r \lesssim 1$) расстояниях, где атомный потенциал сферически-симметричен, необходимо учитывать снятие вырождения по проекциям m во внешних полях \mathcal{E} и \mathcal{H} . Это можно сделать с помощью уравнений (A.1)–(A.5) из Приложения А, которые решают задачу о нахождении правильных волновых функций нулевого приближения⁸⁾.

2) ММВ можно обобщить на релятивистский случай, что позволяет рассмотреть ионизацию уровня, энергия связи которого сравнима с энергией покоя mc^2 . С учетом поправок порядка α^2 вероятность ионизации равна (с экспоненциальной точностью)

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \propto \exp \left\{ -\frac{2}{3\epsilon} (1 - c_1 \alpha^2 \kappa^2) \right\}, \quad (6.1)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{30} \left[\frac{9}{4} - \left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} \right)^2 \sin^2 \theta \right], \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \quad (6.2)$$

В частности, $c_1 = 3/40$ для чисто электрического поля, $c_1 = 1/24$ для скрещенных полей. В этих случаях релятивистская поправка слегка увеличивает вероятность ионизации; однако она меняет знак, если $\mathcal{E}/\mathcal{H} < (2/3) \sin \theta$.

Релятивистская версия ММВ позволяет получить аналог формул (1.9) и (6.1) для уровня с любой энергией (от mc^2 до $-mc^2$), однако данный вопрос выходит за рамки этой статьи [47].

Авторы благодарны Н. Б. Делоне и В. П. Крайнову за обсуждение результатов работы, С. Г. Позднякову и А. В. Сергееву за помощь в проведении численных расчетов, а также М. Н. Маркиной за помощь при оформлении рукописи. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

⁷⁾ Этот случай встречается наиболее часто. Так, для нейтральных атомов (от водорода до урана) в 61-м случае валентный электрон находится в s -состоянии, в 30-и случаях — в p -состоянии и лишь для одного атома (Pd) $l = 2$, см. [42].

⁸⁾ В [48] этим методом был вычислен спектр квазиэнергий p -уровней электрона, находящегося под действием короткодействующего потенциала и поля циркулярно поляризованной волны. При этом учет вырождения по m существен, но изменяет парциальные ширины Γ_{lm} , в то время как полная ширина $\Gamma_l = \sum_{m=-l}^l \Gamma_{lm}$ совпадает с вычисленной ранее [3, 4].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Как показано в [48], энергетический спектр электрона, связанного короткодействующим потенциалом $U(r)$ радиуса r_s , при наличии внешних статических полей \mathcal{E} и \mathcal{H} определяется уравнением

$$\det \left[A'_{lm'}(E) - B_l(E)\delta_{mm'} \right] = 0, \tag{A.1}$$

вытекающим из условия сшивания внешней и внутренней волновых функций в области перекрытия:

$$r_s \ll r \ll \min\{\kappa^{-1}, L_{\mathcal{E}}, L_{\mathcal{H}}\}.$$

Здесь $\kappa = \sqrt{-2E}$, $L_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{-1/3}$ — электрическая, $L_{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}/c)^{-1/2}$ — магнитная длина [10, 48]. Поскольку $L_{\mathcal{E}} = \kappa^{-1}\epsilon^{-1/3}$, $L_{\mathcal{H}} = \kappa^{-1}h^{-1/2}$ и предполагаются выполненными условия (1.2), то в нашем случае достаточно, чтобы

$$r_s \ll r \ll \kappa^{-1}, \tag{A.2}$$

что всегда может быть выполнено при $\kappa r_s \ll 1$, т. е. в случае мелкого уровня.

Коэффициенты $A'_{lm'}$ входят в разложение решений уравнения Шредингера:

$$g_{lm}(\mathbf{r}; E) = r^{-(l+1)}Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \dots + \sum_{l', m'} A'_{lm'}(E) r^{l'} Y_{l'm'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \dots, \quad r \rightarrow 0, \tag{A.3}$$

удовлетворяющих условию излучения Зоммерфельда на бесконечности, а $B_l(E)$ определяются фазами рассеяния на потенциале $U(r)$. В приближении эффективного радиуса имеем

$$(2l + 1)!! (2l - 1)!! B_l(E) = k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l^{(s)}(k) = -\frac{1}{a_l} + r_l E, \tag{A.4}$$

где a_l — длина рассеяния, r_l — эффективный радиус и l — орбитальный момент. Решения (A.3) выражаются через функцию Грина G :

$$g_{lm}(\mathbf{r}; E) = \frac{2\pi}{(2l - 1)!!} Y_{lm}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)|_{r'=0}. \tag{A.5}$$

В частности, $g_{00}(\mathbf{r}; E) = \sqrt{\pi}G(\mathbf{r}, 0; E)$. В свою очередь, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ выражается через временную функцию Грина:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \lim_{\delta \rightarrow +0} i \int_0^{\infty} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) e^{i(E+i\delta)t} dt, \tag{A.6}$$

которая в случае однородных электрического и магнитного полей факторизуется [43, 49]:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi it)^3 \sin u}} \frac{u}{\sin u} \exp \{i [S_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; t) + S_1(z, z'; t)]\}, \tag{A.7}$$

где

$$S_1(z, z'; t) = \frac{(z - z')^2}{2t} - \frac{1}{2}(z + z')F_{\parallel}t - \frac{1}{24}F_{\parallel}^2t^3, \quad (\text{A.8})$$

$$S_2(\rho, \rho'; t) = \frac{(\rho - \rho')^2}{2t}u \operatorname{ctg} u + \frac{1}{2}\omega(x - x')(y + y') - \\ - \frac{1}{2}[(x - x')(\operatorname{ctg} u - u^{-1}) + (y + y')]F_{\perp}t - \frac{1}{8}F_{\perp}^2t^3\frac{1 - u \operatorname{ctg} u}{u^2}, \quad (\text{A.9})$$

$\mathbf{r} = \{\rho, z\}$, $F_{\parallel} = |e|\mathcal{E} \cos \theta$, $F_{\perp} = |e|\mathcal{E} \sin \theta$ (для электрона $e < 0$), введена переменная

$$u = \omega t/2, \quad \omega = |\omega_c| \quad (\text{A.10})$$

и выбрана калибровка $\mathbf{A} = \{-\mathcal{H}y, 0, 0\}$. При этом S_1 — функция действия для одномерного движения в однородном поле F_{\parallel} , а S_2 — двумерное действие для случая скрещенных полей F_{\perp} и \mathcal{H} .

Представим (A.7) в виде

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) = G_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', 0) + \xi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t), \quad (\text{A.11})$$

где $G_0 = (2\pi i t)^{-3/2} \exp\{i(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2t\}$ — свободная функция Грина, а функция ξ уже не приводит к расходимости при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ в (A.6). В частности, при $t \rightarrow 0$

$$\xi(0, 0; t) = \frac{1}{24}\omega^2t^2 - \frac{i}{24}F^2t^3 + \dots, \quad F^2 = F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2.$$

Рассмотрим сначала случай δ -потенциала. Функция $G(\mathbf{r}, 0; E)$ описывает квази-стационарное состояние частицы в суммарном поле (\mathcal{E} , \mathcal{H} и яма нулевого радиуса, находящаяся в точке $\mathbf{r}' = 0$), если выполняется граничное условие

$$G(\mathbf{r}, 0; E) = \text{const} \cdot \{r^{-1} - \kappa_0 + O(r)\}, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{A.12})$$

где $\kappa_0 = 1/a_s$ — константа связи δ -потенциала, $E = E_r - i\Gamma/2 = -\kappa^2/2$ и $E_0 = -\kappa_0^2/2$ — энергии уровня соответственно во внешних полях и в свободном атоме (ионе). Из (A.7)–(A.9) с учетом значения интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{i\left(Et + \frac{r^2}{2t}\right)\right\} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi i}}{r} \exp(-\sqrt{-2Er})$$

получаем

$$G(\mathbf{r}, 0; E) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{r} - \kappa + \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{iEt} \xi(t) + \dots \right\}, \quad r \rightarrow 0, \quad (\text{A.13})$$

где

$$\xi(t) \equiv \xi(0, 0; t) = \frac{u}{\sin u} \exp\left\{-\frac{i}{24}\left[F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2 f_1(u)\right]t^3\right\} - 1, \quad (\text{A.14})$$

$$f_1(u) = \frac{3}{u^2}(1 - u \operatorname{ctg} u) = 1 + \frac{1}{15}u^2 + \dots, \quad u \rightarrow 0,$$

а точками в (А.13) обозначены члены, обращающиеся в нуль при $r \rightarrow 0$. Сравнение (А.13) с (А.12) дает уравнение

$$\kappa - \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} e^{iEt} \xi(t), \tag{А.15}$$

которое можно также записать в виде (1.14), полагая $u = \kappa^2 ht/2$.

Обсудим частные случаи. Если $\mathcal{E} = 0$, то $\Lambda \rightarrow 0$, $\Lambda\gamma^2 = h^{-1}$, и (1.14) переходит после некоторых преобразований в уравнение, соответствующее чисто магнитному полю (см. [8] для $l = 0$ и [48] для произвольного момента l).

При выключении магнитного поля имеем

$$h \rightarrow 0, \quad u = 0, \quad \xi(t) = \exp\left(-\frac{i}{24} \mathcal{E}^2 t^3\right) - 1.$$

Переходя в (А.15) к переменной $\tau = \kappa^2 t/2$, получаем

$$\kappa_0 = \kappa + \frac{\kappa}{\sqrt{4\pi i}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-i\tau} \left[1 - \exp\left(-\frac{i}{3} \epsilon^2 \tau^3\right) \right], \quad \epsilon = \frac{\mathcal{E}}{\kappa^3}, \tag{А.16}$$

что согласуется с работой [50] для $l = 0$ (пользуясь случаем, исправим допущенную там опечатку: в интеграле, входящем в формулу (10) указанной статьи, вместо $t^{-3/2}$ должно стоять $t^{-1/2}$).

При выполнении условий (1.2) интегралы в (1.14) и (А.15) вычисляются методом перевала (перевальная точка $u_0 = -i\tau_0$, где $\tau_0 > 0$ — корень уравнения (1.6), возникающего в ММВ). В результате вычислений определяются как сдвиг уровня

$$\Delta E = E_r - E_0 = E_0 \delta, \quad \delta = \frac{1}{2} |C_\kappa|^2 \left(\epsilon^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) + \dots, \tag{А.17}$$

так и его ширина $\Gamma = \hbar w$ (формула (1.9) с $\eta = 0$ и предэкспонентой (1.13)). Подчеркнем, что (А.17) относится только к слабосвязанному уровню в короткодействующем потенциале. Например, для основного состояния в кулоновском поле [1] $C_\kappa = 1$ и $\delta = (9\epsilon^2 - h^2)/2 + \dots$

Действуя аналогичным образом, из (А.1)–(А.5) можно получить уравнение для энергии s -состояния $E = -\kappa^2/2$ с учетом поправки на эффективный радиус системы:

$$\kappa - \frac{1}{a_s} - \frac{1}{2} \kappa^2 r_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} e^{iEt} \left\{ \frac{u}{\sin u} \exp\left[-\frac{1}{24} \left(F_\parallel^2 + F_\perp^2 f_1(u) \right) t^3\right] - 1 \right\}, \tag{А.18}$$

которое в приближении нулевого радиуса действия сил ($r_s = 0$, $1/a_s = \kappa_0$) переходит в (А.15). В частности, в случае чисто электрического поля [50]

$$w(\mathcal{E}) = \kappa^2 C_\kappa^2 \epsilon e^{-2/3\epsilon} [1 - c_1 \epsilon + O(\epsilon^2)], \tag{А.19}$$

причем

$$C_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa_0 r_s + \dots \right), \quad c_1 = \frac{5}{3} \left(1 + \frac{3}{20} \kappa_0 r_s + \dots \right). \quad (\text{A.20})$$

Включение кулоновского взаимодействия в рамках изложенного здесь подхода требует знания функции Грина с учетом действия как внешних полей \mathcal{E} и \mathcal{H} , так и кулоновского поля, что вряд ли может быть выполнено в аналитическом виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Приведем здесь разложение функций, входящих в формулу (1.9). При $\gamma \ll 1$

$$\tau_0(\gamma, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma^{2k+1}, \quad g(\gamma, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3c_k}{2k+3} \gamma^{2k}, \quad (\text{B.1})$$

$$P(\gamma, \theta) = 1 - \frac{1}{6} \gamma^2 + \frac{1}{3240} (20s^2 - 84s + 63) \gamma^4 + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$Q(\gamma, \theta) = 1 + \frac{2}{9} s \gamma^2 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

где $s = \sin^2 \theta$ и

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{s}{18}, \quad c_2 = \frac{1}{3240} (35s^2 - 24s), \quad c_3 = \frac{11s^3}{3888} - \frac{s^2}{270} + \frac{s}{1050}, \dots \quad (\text{B.4})$$

Указанная в (B.1) связь между коэффициентами разложений для функций τ_0 и g вытекает из соотношения

$$\tau_0(\gamma, \theta) = \frac{1}{3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} [\gamma^3 g(\gamma, \theta)], \quad (\text{B.5})$$

в справедливости которого можно убедиться, записав (1.11) в виде

$$\frac{1}{3} \gamma^3 g = \frac{1}{2} \left[\gamma^2 \tau_0 - \frac{1}{3} \tau_0^3 - \left(\tau_0^2 \operatorname{cth} \tau_0 - \tau_0 - \frac{1}{3} \tau_0^3 \right) \sin^2 \theta \right]$$

и вычисляя затем $\partial(\gamma^3 g)/\partial \gamma - 3\gamma \tau_0$.

При $\gamma \gg 1$ (случай сильного магнитного поля) и $\theta < \pi/2$ получаем

$$\tau_0(\gamma, \theta) = \frac{\gamma}{\cos \theta} - \operatorname{tg}^2 \theta \left(1 - \frac{1}{2\gamma \cos \theta} + \dots \right), \quad (\text{B.6})$$

$$g(\gamma, \theta) = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{3 \operatorname{tg}^2 \theta}{2\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma \cos \theta} + \dots \right), \quad (\text{B.7})$$

$$P = 2\gamma \exp \left(-\frac{\gamma}{\cos \theta} + \operatorname{tg}^2 \theta \right) \left[1 + O \left(\gamma^{-1} \right) \right], \quad (\text{B.8})$$

$$Q = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left[1 + 2 \frac{\sin^2 \theta}{\gamma} \ln \frac{\gamma}{\cos \theta} + O(\gamma^{-1}) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Случай $\theta = \pi/2$ — особый. При этом уравнение (1.6) для $\tau_0(\gamma)$ принимает вид $f(\tau_0) = \gamma^2$, где

$$f(\tau) = 2\tau \operatorname{cth} \tau - \left(\frac{\tau}{\operatorname{sh} \tau} \right)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2k+1)}{(2k)!} B_{2k} \tau^{2k},$$

B_{2k} — числа Бернулли. Обращая этот ряд и используя (B.5), приходим к разложениям (2.3). Если же $\gamma \gg 1$, то уравнение (1.6) удобно записать в виде

$$\tau - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\tau^2 - \tau) e^{-2n\tau} = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 1).$$

Решая его итерациями, приходим к быстросходящимся разложениям

$$\tau_0(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) e^{-nz}, \quad g(\gamma) = \gamma^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) e^{-nz}, \quad (\text{B.10})$$

где

$$z = \gamma^2 + 1, \quad P_0 = \frac{1}{2}z, \quad P_1 = \frac{1}{2}z^2 - z, \quad P_2 = -\frac{1}{2}z^4 + 3z^3 - 4z^2 + z,$$

$$Q_0 = -\frac{1}{2}Q_1 = \frac{3}{8}z^2, \quad Q_2 = \frac{3}{8}(z^4 - 4z^3 + 2z^2)$$

и для любого n

$$P_n(z) = \frac{2}{3}(Q'_n - nQ_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{B.11})$$

Наконец, в области малых углов $\theta \ll 1$

$$\tau_0(\gamma, \theta) = \gamma(1 + \tau_1\theta^2 + \dots), \quad g(\gamma, \theta) = 1 + g_1\theta^2 + \dots,$$

$$P = \frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \left(1 - p_1\theta^2 + \dots \right), \quad Q = 1 + q_1\theta^2 + \dots, \quad (\text{B.12})$$

где

$$\tau_1(\gamma) = \frac{1}{2}(\operatorname{cth} \gamma - \gamma^{-1})^2, \quad g_1(\gamma) = \frac{3}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{1}{3}\gamma^2 - \gamma \operatorname{cth} \gamma \right), \quad (\text{B.13})$$

$$p_1(\gamma) = (\gamma \operatorname{cth} \gamma - 1) \left(\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma^2} - \frac{\operatorname{cth} \gamma}{2\gamma} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \gamma} \right).$$

Отметим исключительную малость этих коэффициентов при $\gamma \ll 1$:

$$\tau_1 = \frac{1}{18}\gamma^2 - \frac{1}{35}\gamma^4 + \dots, \quad g_1 = \frac{1}{30}\gamma^2 - \frac{1}{315}\gamma^4 + \dots, \quad p_1 = \frac{7}{270}\gamma^4 + \dots \quad (\text{B.14})$$

Поэтому в области слабых магнитных полей зависимостью вероятности ионизации от угла между \mathcal{E} и \mathcal{H} можно пренебречь вплоть до $\theta \sim 1$ (что согласуется с численными расчетами, рис. 2). В другом пределе имеем

$$\tau_1 = \frac{1}{2} - \gamma^{-1} + \dots, \quad g_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\gamma} + \dots, \quad p_1 = \frac{1}{2}\gamma - 1 + O(\gamma^{-2}), \quad \gamma \rightarrow \infty \quad (\text{B.15})$$

(все эти коэффициенты монотонно возрастают с ростом γ).

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Обсудим здесь подробности вычислений, относящихся к разд. 3. Для компонент скорости подбарьерного движения из (3.1) получаем ($e = -1$)

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \frac{\kappa}{\gamma}(1 - \tau_0 e^{\tau - \tau_0}) \sin \theta, & \dot{y} &= -i \frac{\kappa}{\gamma} \tau_0 e^{\tau - \tau_0} \sin \theta, \\ \dot{z} &= -i \frac{\kappa}{\gamma} \tau \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

откуда вытекает (3.2). Далее,

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t (L + E_0) dt = \frac{i}{\omega_c} \left\{ \frac{1}{2} \kappa^2 (\tau_0 - \tau) - \int_{\tau}^{\tau_0} L d\tau \right\}, \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} \omega_c (x\dot{y} - y\dot{x}) - \mathcal{E}(y \sin \theta + z \cos \theta) = \\ &= \frac{\kappa^2}{2\gamma^2} \{ (\tau_0^2 - 2\tau^2) \cos^2 \theta + [\tau_0 + 1 + \tau_0(\tau_0 - \tau - 3)e^{\tau - \tau_0}] \sin^2 \theta + \dots \}. \end{aligned}$$

Элементарное интегрирование дает

$$\begin{aligned} W(t_0, t) &= \frac{iK}{2} \left\{ \tau_0 - \tau - \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{3} (\tau_0^3 - 3\tau_0^2 \tau + 2\tau^3) \cos^2 \theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\tau_0^2 - \tau_0 - (\tau_0 + 1)\tau) \sin^2 \theta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

где $K = \kappa^2/\omega_c = 1/\epsilon\gamma$, $\tau_0 - \tau \gg 1$ и отброшены члены $\propto \exp(\tau - \tau_0)$. На выходе из-под барьера выражение (C.3) переходит в формулу (3.3) для $g(\gamma, \theta)$. Из (3.1) также находим

$$\begin{aligned} r &= (\mathcal{E}/\omega_c^2) \xi(\tau), \\ \xi &= \tau_0 \left\{ \frac{1}{4} \tau_0^2 (1 - u^2)^2 \cos^2 \theta + (1 - u)(1 + u - 2e^{-\tau_0(1-u)}) \sin^2 \theta \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$u = \tau/\tau_0$. При этом ширина барьера равна

$$b = \frac{\mathcal{E}}{\omega_c^2} \xi(0) = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}} \frac{\tau_0}{\gamma^2} \sqrt{\tau_0^2 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}, \quad (\text{C.5})$$

и в пределе $\gamma \rightarrow \infty$ имеем

$$b = \frac{\kappa^2}{2\mathcal{E}} \begin{cases} \frac{1}{\cos\theta} - 2\gamma^{-1}tg^2\theta + \dots, & \gamma \gg \frac{1}{\cos\theta} \quad (0 \leq \theta < \pi/2), \\ 1 + \gamma^{-2} + \dots, & \theta = \pi/2. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Кулоновскую поправку вычисляем по формуле (1.12). Если $\theta < \pi/2$, то $\xi/\gamma = \tau_0(1 - u^2)/2$, интеграл в (1.12) равен $J = \ln 2$ и $Q(\infty) \approx (\tau_0/\gamma)^2 = 1/\cos^2\theta$. В особом случае $\theta = \pi/2$ имеем

$$\xi = \tau_0 \sqrt{y [2(1 - e^{-\tau_0 y}) - y]}, \quad y = 1 - u \quad (\text{C.7})$$

и $\tau_0 = (\gamma^2 + 1)/2$. Вводя точку сшивания a такую, что $1/\tau_0 \ll a \ll 1$, разбиваем интеграл J на два и приходим к формуле (2.6), в которой константа равна

$$c_3 = \frac{1}{4} \exp \{ 2(J_1 + J_2 - 2) \}, \quad (\text{C.8})$$

$$J_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x(1 - e^{-x})}} - \frac{1}{x} \right) dx, \quad J_2 = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x}}} - 1 \right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Численно имеем: $J_1 = 0.25433$, $J_2 = 0.16692$, откуда $c_3 = 0.01063$. Численные расчеты функции $Q(\gamma)$ подтверждают справедливость асимптотики (2.6), которая, однако, устанавливается лишь при $\gamma \gtrsim 15$.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Физматгиз, Москва (1963), §77.
2. Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов, ЖЭТФ **49**, 841 (1965).
3. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966); **51**, 309 (1966).
4. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966).
5. J. D. Bekenstein and J. V. Krieger, Phys. Rev. **188**, 130 (1969).
6. T. Yamabe, A. Tachibana, and H. J. Silverstone, Phys. Rev. A **16**, 877 (1977).
7. Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
8. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, изд-во ЛГУ, Ленинград (1975).
9. В. С. Лисица, УФН **153**, 379 (1987).
10. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ **53**, 717 (1967).
11. В. R. Johnson, K. F. Scheibner, and D. Farrelly, Phys. Rev. Lett. **51**, 2280 (1983).
12. Ю. Н. Демков, Б. С. Монозон, В. Н. Островский, ЖЭТФ **57**, 1431 (1969).
13. Е. А. Соловьев, ЖЭТФ **85**, 109 (1983).
14. Н. Л. Манаков, С. И. Мармо, В. Д. Овсянников, ЖЭТФ **91**, 404 (1986).
15. В. М. Вайнберг, В. С. Попов, А. В. Сергеев, ЖЭТФ **98**, 847 (1990).
16. V. S. Melezhik, Phys. Rev. A **48**, 4528 (1993).
17. R. J. Damburg and V. V. Kolosov, J. Phys. B **9**, 3149 (1976); **11**, 1921 (1978).
18. H. J. Silverstone, Phys. Rev. A **18**, 1853 (1978); Phys. Rev. Lett. **43**, 1498 (1979).
19. S. P. Alliluev, V. L. Eletsky, and V. S. Popov, Phys. Lett. A **73**, 103 (1979); С. П. Аллилуев, В. М. Вайнберг, В. Л. Елецкий, В. С. Попов, ЖЭТФ **82**, 77 (1982).

20. V. Franceschini, V. Grecchi, and H. J. Silverstone, *Phys. Rev. A* **32**, 1338 (1985).
21. В. М. Вайнберг, В. Д. Мур, В. С. Попов и др., *Письма в ЖЭТФ* **44**, 9 (1986); **46**, 178 (1987); *ЖЭТФ* **93**, 450 (1987).
22. V. S. Popov, V. D. Mur, A. V. Sergeev et al., *Phys. Lett. A* **124**, 77 (1987); **149**, 418, 425 (1990).
23. V. S. Popov, *Phys. Lett. A* **173**, 63 (1993).
24. F. M. Fernandez, *Phys. Rev. A* **54**, 1206 (1996).
25. M. C. Chu and H. Friedrich, *Phys. Rev. A* **28**, 1423, 3651 (1983); **29**, 675 (1984).
26. J. Main and G. Wunner, *J. Phys. B* **27**, 2835 (1994).
27. J. H. Wang and C. S. Hsue, *Phys. Rev. A* **52**, 4508 (1995).
28. I. Seipp and W. Schweizer, *Astron. Astrophys.* **318**, 990 (1997).
29. Л. П. Котова, А. М. Переломов, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **54**, 1151 (1968).
30. Г. Ф. Друкарев, Б. С. Монозон, *ЖЭТФ* **61**, 956 (1971).
31. С. П. Андреев, В. А. Полуниин, *Письма в ЖЭТФ* **42**, 154 (1985).
32. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
33. Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт, *ЖЭТФ* **61**, 968 (1971); Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. Л. Манаков, *Теория многофотонных процессов в атомах*, Атомиздат, Москва (1978).
34. А. И. Никишов, В. И. Ригус, *ЖЭТФ* **52**, 223 (1967).
35. А. М. Переломов, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **52**, 514 (1967).
36. В. С. Попов, В. П. Кузнецов, А. М. Переломов, *ЖЭТФ* **53**, 331 (1967).
37. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 391 (1997).
38. В. С. Попов, А. В. Сергеев, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 398 (1996).
39. V. S. Popov, B. M. Karakov, and V. D. Mur, *Phys. Lett. A* **229**, 306 (1997).
40. А. С. Давыдов, *Теория твердого тела*, Наука, Москва (1976).
41. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
42. А. А. Радциг, Б. М. Смирнов, *Параметры атомов и атомных ионов*, Энергоатомиздат, Москва (1968).
43. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965) (перевод: Р. Фейнман, А. Хиббс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва (1968)).
44. *Dimensional Scaling in Chemical Physics*, ed. by D. R. Herschbach, J. Avery, and O. Goscinsky, Kluwer Academic, Dordrecht (1993).
45. *New Methods in Quantum Theory*, ed. by C. A. Tsipis, V. S. Popov, D. R. Herschbach, and J. S. Avery, Kluwer Academic, Dordrecht (1996).
46. С. П. Аллилуев, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **104**, 3569 (1993).
47. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, *Письма в ЖЭТФ* **66**, 213 (1997).
48. С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 155 (1983); *ТМФ* **64**, 287 (1985).
49. Л. И. Магарилл, С. К. Саввиных, *ЖЭТФ* **60**, 175 (1971).
50. С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. А. Полуниин, *ЖЭТФ* **86**, 866 (1984).