

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ИОНЫ Ca^- И Ba^- БОЛЬШОГО РАДИУСА НА ПОВЕРХНОСТИ И В ОБЪЕМЕ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

П. Д. Григорьев*, А. М. Дюгаев

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия
Grenoble High Magnetic Field Laboratory MPI-FRF and CNRS BP 166
F-38042 Grenoble Cedex 09, France

Поступила в редакцию 17 сентября 1998 г.

Экспериментально изучены отрицательные ионы Ca^- и Ba^- большого размера на поверхности и в объеме жидкого гелия. В работе показано, что эти ионы адсорбируются на его поверхности. До сих пор ионы на свободной поверхности гелия не изучались, так как считалось невозможным их там удерживать. Ионы Ca^- и Ba^- имеют очень малую энергию связи и поэтому, подобно электрону, образуют в объеме гелия пузырьки большого радиуса, энергия которого внутри гелия оказывается выше, чем на поверхности. Поведение ионов на поверхности обладает многими новыми свойствами, связанными с их большой массой и сильной локализацией в горизонтальной плоскости. Даже в отсутствие прижимающего электрического поля под ионом образуется лунка вследствие поляризационного притяжения гелия к заряду иона. Эта лунка на несколько порядков уменьшает подвижность поверхностного иона в нулевом прижимающем поле и в несколько раз увеличивает его присоединенную массу. Критическая концентрация электронов и ионов оказывается примерно одинаковой на поверхности как толстой, так и тонкой пленки гелия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению свойств электронов на поверхности гелия посвящено огромное число работ (например, книга [1]). Это объясняется множеством красивых и новых явлений, возникающих в системе поверхностных электронов, а также тем, что на примере двумерного электронного газа на поверхности гелия удобно изучать многие эффекты в гетероструктурах, имеющие непосредственные применения в электронике. Однако ионы до сих пор изучались только в объеме гелия, потому что почти все ионы, будучи помещенными на поверхность, «тонут». Это связано с выигрышем в энергии поляризационного притяжения заряженного иона к гелию, которая доминирует над всеми остальными вкладами, если только размер иона не слишком велик. Ниже исследуются именно такие ионы. Энергия связи избыточного электрона в них ничтожно мала, поэтому радиус локализации этого электрона, определяющий размер иона, оказывается очень большим.

В физике поверхности гелия происходит оживление, связанное с созданием высоких плотностей электронов $n_e \sim 10^{11} \text{ см}^{-2}$ на тонкой пленке жидкости. В [2] обнаружено явление квантового плавления электронного вигнеровского кристалла, происходящее при увеличении плотности электронов n_e , что проявляется как резкое увеличение подвижности электронов. Интерпретация экспериментальных данных [2] не является

*E-mail: pashag@itp.ac.ru

однозначной, так как возможен, например, и другой сценарий. При низкой плотности электронов n_e из-за несовершенства подложки под тонкой пленкой гелия они формируют не связанные между собой «лужи» на фоне длинноволнового потенциального рельефа, создаваемого этой подложкой. Однако при высокой плотности n_e эти «лужи» перекрываются и образуется единая двумерная электронная система. Чтобы определить, какой сценарий реализуется, было бы неплохо иметь возможность «включать» и «выключать» квантовые эффекты для электронов на поверхности гелия, т.е. менять массу электрона. Эта возможность может быть экспериментально реализована, так как в природе существуют отрицательные ионы Ca^- и Ba^- с ничтожной энергией связи и гигантского размера (см. таблицу). Такие ионы адсорбируются на поверхности гелия и из-за их большой массы при всех разумных температурах T являются классическими частицами.

Уникальным объектом является смесь электронов и ионов Ca^- или Ba^- на поверхности гелия в сильном магнитном поле в режиме квантового эффекта Холла [3]. Дело в том, что до сих пор неясна роль мелких и заряженных примесей в формировании плато в зависимости холловского сопротивления от магнитного поля. В обычных твердотельных электронных структурах в режиме квантового эффекта Холла нет возможности разделить роли мелких и заряженных примесей. Чистота поверхности гелия, т.е. отсутствие на ней примесей, позволяет для смеси электронов и ионов Ca^- или Ba^- выделить эффекты заряженных примесей, меняя температуру T и концентрацию отрицательных ионов. В самом деле, при низких T отрицательные ионы Ca^- , Ba^- образуют вигнеровский кристалл, создающий для электронов периодический потенциал, снимающий бесконечнократное вырождение уровней Ландау в магнитном поле, но не приводящий к их уширению. При высоких T вигнеровский кристалл отрицательных ионов плавится и электронные уровни Ландау уширяются.

2. ЭНЕРГИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ИОНА В ОБЪЕМЕ ГЕЛИЯ

Определим энергию отрицательных ионов в объеме гелия и покажем, что ионы Ca^- и Ba^- большого радиуса адсорбируются на его поверхности, а ионы меньшего радиуса (типа O_2^- , H^-) погружаются, т.е. «тонут» в гелии.

В объеме гелия ион образует вокруг себя пузырек, энергия которого определяется тремя слагаемыми [1]:

$$E_{in}(R) = 4\pi\alpha R^2 - \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon} \nu \frac{e^2}{R} + E_e(R). \quad (1)$$

Первое слагаемое — энергия поверхностного натяжения пузырька (α — коэффициент поверхностного натяжения). Второй член обусловлен поляризационным взаимодействием заряда электрона с жидким гелием с диэлектрической проницаемостью ϵ . Численный коэффициент ν близок к единице и зависит от распределения заряда внутри пузырька. Для заряда, сосредоточенного в центре, $\nu = 1$. Для свободного электрона внутри пузырька $\nu = 1.35$. С учетом примерного вида волновой функции внешнего электрона примем $\nu = 1.16$ с погрешностью меньше 5%. Основные сложности возникают при вычислении последнего слагаемого — энергии $E_e(R)$ основного состояния избыточного электрона, находящегося в потенциале поляризационного взаимодействия с атомом и ограниченного сферически-симметричной стенкой из жидкого гелия. Этот

потенциал точно неизвестен, так как он является результатом сложного взаимодействия внешнего электрона со всеми остальными. Мы знаем лишь энергию сродства этого электрона к атому в вакууме и поведение потенциала на больших расстояниях от центра атома:

$$U(r) = -\frac{\beta e^2}{2r^4} \quad (2)$$

(β — поляризуемость атома). В работе [4] для расчета энергии иона O_2^- внутри гелия был использован модельный потенциал

$$U(r) = \begin{cases} +\infty, & r < b, \\ -\frac{\beta e^2}{2r^4}, & b < r < R, \\ +U_0, & r > R, \end{cases} \quad (3)$$

в котором радиус кора b определялся по энергии связи E_0 внешнего электрона в отсутствие гелия, а U_0 можно положить равным $+\infty$. Далее, следуя работе [4], отрезок $[b, R]$ делим на два — до точки поворота r_0 и после нее. Точка поворота определяется как

$$r_0 = \left(\frac{\beta}{a_B \kappa_0^2} \right)^{1/4}, \quad \kappa_0^2 \equiv -\frac{2mE_0}{\hbar^2}. \quad (4)$$

Здесь a_B — боровский радиус, m — масса электрона. На первом участке $[b, r_0]$ пренебрегаем энергией по сравнению с потенциалом, а на втором $[r_0, R]$ пренебрегаем потенциалом по сравнению с энергией. Затем решения уравнения Шредингера сшиваем в точке r_0 .

В таком приближении возможно получить зависимость $E_e(R)$ без решения уравнения Шредингера на участке $(0, r_0)$ и, что важно, без каких-либо предположений о форме потенциала при $r < r_0$, тем самым обобщив и упростив решение (как мы увидим ниже, выбор потенциала в виде (3) неприменим для ионов Ca^- и Ba^-). Погружение иона в гелий не меняет потенциал при $r < r_0$, но сдвигает энергию внешнего электрона. Если мы пренебрегаем на участке $(0, r_0)$ даже не энергией, а только сдвигом энергии по сравнению с потенциалом, то стенка из гелия не меняет волновую функцию электрона при $r < r_0$. Таким образом, логарифмическая производная производной волновой функции $\psi(r)$ слева от точки сшивки не меняется при погружении в гелий и равна

$$\frac{\chi'(r_0 - 0)}{\chi(r_0 - 0)} = -\kappa_0 = -\frac{\sqrt{-2mE_0}}{\hbar},$$

где $\chi(r) = \psi(r)r$. Справа от точки сшивки с учетом $|E_e| \gg |U(r)|$ волновая функция имеет вид

$$\psi = \frac{1}{r} \text{sh} [\kappa(R - r)],$$

причем на границе пузырька она становится равной нулю. Сшивка логарифмических производных в точке r_0 дает уравнение для энергии $E_e(R)$:

$$\frac{\chi'(r_0)}{\chi(r_0)} = -\kappa_0 = -\kappa \text{cth} [\kappa(R - r_0)], \quad (5)$$

$$E_e(R) \equiv -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}.$$

Пренебрежение энергией при $r < r_0$ законно при $r_0 \kappa \ll 1$. Реально $r_0 \kappa \sim 1$, и формула (5) верна лишь качественно. Для получения более точных значений необходим численный расчет, который требует знания точной формы потенциала. Прежде чем перейти к этим вычислениям, попробуем уточнить формулу (5) исходя из следующих соображений. Изменение логарифмической производной волновой функции слева от точки шивки из-за сдвига энергии имеет вид

$$\Delta \left. \frac{\chi'}{\chi} \right|_{r=r_0-0} = \frac{\Delta \chi'}{\chi} - \frac{\chi' \Delta \chi}{\chi^2} \Big|_{r=r_0-0}. \quad (6)$$

Первое слагаемое равно

$$\frac{\Delta \left[\chi'(0) + \int_0^{r_0} \chi'' dr \right]}{\chi(r_0)} = \frac{\Delta \left[\int_0^{r_0} \frac{2m}{\hbar^2} (U(r) - E) \chi dr \right]}{\chi(r_0)} \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\int_0^{r_0} \chi dr}{\chi(r_0)} \Delta E.$$

Вычисление последнего интеграла требует знания волновой функции на отрезке $[0, r_0]$. В работе [5] был проведен кропотливый численный расчет взаимодействия избыточного электрона со всеми электронами атомов Ca^- , Ba^- и Sr^- в вакууме. В результате была найдена волновая функция избыточного электрона в этих ионах в вакууме. Значение энергии связи, полученное авторами [5], неплохо согласуется с экспериментальными данными [6, 7]. Будем считать волновую функцию на участке $(0, r_0)$ слабо меняющейся от погружения иона в гелий. Тогда, используя вид волновой функции из [5], получим

$$\frac{\int_0^{r_0} \chi dr}{\chi(r_0)} \approx r_0.$$

Второе слагаемое в (6) мало, так как точка r_0 находится вблизи максимума $\chi(r)$, где значение волновой функции определяется в основном условием нормировки и мало меняется от сдвига энергии. В результате поправки (6) уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\chi'(r_0)}{\chi(r_0)} = -\kappa_0 - (\kappa_0^2 - \kappa^2)r_0 = -\kappa \text{cth} [\kappa(R - r_0)]. \quad (7)$$

В пределе $\kappa(R - r_0) \gg 1$ можно найти аналитическое решение этого уравнения:

$$E_e(R) - E_0 = -E_0 \frac{4 \exp(-2\kappa_0(R - r_0))}{1 + 2\kappa_0 r_0}. \quad (8)$$

При произвольных значениях $\kappa(R - r_0)$ уравнение (7) не разрешается аналитически относительно κ . Мы можем получить только обратную зависимость:

$$R(\kappa) = r_0 + \frac{1}{\kappa} \text{arcth} \left(\frac{\kappa_0 + r_0(\kappa_0^2 - \kappa^2)}{\kappa} \right).$$

Выражение (8) отличается множителем $(1 + 2\kappa_0 r_0)^{-1}$ от соответствующей зависимости, следующей из формулы (5). Этот множитель оказывается равным 0.3 для Ba^- и 0.4 для Ca^- . Таким образом, формула (7) заметно улучшает точность, хотя тоже остается приближенной.

В работе [4] показано, что при низких температурах около границы пузырька вокруг O_2^- возникает рост локальной плотности гелия, который слегка увеличивает вклад поляризационного взаимодействия в формуле (1). Однако на это не нужно делать поправку, так как мы не учитывали противоположный эффект такого же порядка, связанный с различием радиуса R в поляризационном и обменном взаимодействиях с окружающим гелием. Кроме того, поляризационное давление $P = \beta e^2 / 2vR^4$ быстро убывает с увеличением радиуса пузырька, и для интересующих нас ионов Ca^- и Ba^- большого размера эти эффекты совсем малы.

Чтобы сделать результат еще более надежным, был проведен численный расчет энергии $E_e(R)$. В связи с этим обсудим вопрос о выборе потенциала для избыточного электрона. Выражение (3) плохо аппроксимирует задачу для ионов Ca^- и Ba^- . Действительно, поскольку эти атомы обладают большой поляризуемостью, $\beta_{\text{Ba}} = 270a_B^3$, $\beta_{\text{Ca}} = 170a_B^3 \gg \beta_{\text{O}_2} = 10.6a_B^3$, то выбрав потенциал в форме (3), мы должны будем поместить жесткое ядро на расстоянии $b \approx 4 \text{ \AA}$ от центра атома, чтобы энергия избыточного электрона была равна энергии связи в вакууме. Ясно, что обменное отталкивание должно распространяться на расстояния порядка размера атома, т. е. $\sim 1 \text{ \AA}$. В работе [5] в результате сложного численного расчета показано, что внешний нуль волновой функции действительно находится на расстоянии 1.2 \AA для Ba^- и 0.8 \AA для Ca^- . Поэтому внутреннюю стенку в модельном потенциале следует поместить именно там. Чтобы удовлетворить также условию на энергию связи, мы выбрали потенциал в форме

$$U(r) = \begin{cases} +\infty, & r < b, \\ -\frac{\beta e^2}{2(r^2 + a^2)^2}, & b < r < R, \\ +\infty, & r > R, \end{cases} \quad (9)$$

где $b_{\text{Ba}} = 1.2 \text{ \AA}$, $b_{\text{Ca}} = 0.8 \text{ \AA}$, $b_{\text{O}_2} = 0.482 \text{ \AA}$. Параметр a определяется из равенства при $R = \infty$ энергий электрона в таком потенциале энергиям связи ионов в вакууме: $a_{\text{Ba}} = 2.335 \text{ \AA}$, $a_{\text{Ca}} = 2.593 \text{ \AA}$, $a_{\text{O}_2} = 0$. Такой потенциал намного ближе к реальному потенциалу, чем (3) и тоже допускает аналитическое решение в пределе $E \rightarrow 0$. Затем, решая численно уравнение Шредингера с потенциалом (9), получаем зависимость $E_e(R)$. Она хорошо аппроксимируется эмпирической формулой

$$E_e(R) - E_0 = -E_0 \frac{4 \exp(-2\kappa_0(R - r_0))}{1 + 2\kappa_0 r_0} \text{cth} \frac{\kappa_0 R^2}{3r_0}. \quad (10)$$

Для определения оптимального радиуса пузырька R_0 и энергии иона в гелии $E_e(R_0)$ нужно решить уравнение

$$\frac{\partial E_{in}}{\partial R} = 0,$$

где E_{in} дается формулой (1), а $E_e(R)$ — формулой (10). Результаты решения приведены в таблице для нескольких типичных отрицательных ионов большого радиуса вместе со

Таблица

Результаты численного расчета энергии и оптимального радиуса пузырька в объеме гелия и на его поверхности для нескольких типичных отрицательных ионов большого радиуса вместе со значениями параметров этих ионов

Ион	Энергия сродства электрона к атому в вакууме E_0 , эВ	Размер иона в вакууме $1/\kappa_0$, Å	Поляризуемость атома или молекулы β , a_B^3	Точка поворота $r_0 = (\alpha/a_B \kappa_0^2)^{1/4}$, Å	Оптимальный радиус пузырька в гелии R , Å
O_2^-	-0.46	2.87	10.6	2.23	8.0
Ba^-	-0.145	4.87	270	6.5	12.0
Ca^-	-0.0245	11.84	170	9	14.1

Ион	Добавка к энергии иона внутри гелия $E_{in} - E_0$, эВ	Оптимальное расстояние от иона до поверхности h , Å (оценка)	Добавка к энергии иона на поверхности E_{sur} с учетом поляризационной лунки, эВ (оценка)	Потенциальный барьер для иона на поверхности глубокой пленки Δ , эВ
O_2^-	-0.024	—	—	≈ 0
Ba^-	0.024	14	-0.011	0.04
Ca^-	0.060	20	-0.003	0.065

значениями параметров этих ионов. Величины $1/\kappa_0, r_0$ определены на основании (4) по известным экспериментальным данным [6, 7] для энергий связи E_0 отрицательных ионов и поляризуемостей атомов (последние мы взяли такими же, как и в работах [4, 5]). Расхождение между поправками к энергии, вычисленными по формуле (7) и с помощью компьютерного расчета, составляет 10–15%, а между значениями оптимального радиуса — меньше 5%. Это и есть оценка погрешности нашего расчета.

Во избежание недоразумений следует отметить, что размер иона $1/\kappa_0$ в третьей колонке таблицы — это расстояние, на котором модуль волновой функции уменьшается в $\sim e$ раз, в то время как экспоненциальный хвост этой функции тянется намного дальше. На границе пузырька волновая функция становится равной нулю. Поэтому оптимальный радиус пузырька R в шестой колонке таблицы — это расстояние, на котором кончается «хвост» волновой функции. С этим связано большое различие величин $1/\kappa_0$ и R , которое тем больше, чем больше энергия связи свободного иона, т. е. чем больше проигрыш в энергии при обрезании «хвоста» волновой функции.

Из таблицы видно, что энергии ионов Ca^- и Ba^- в объеме гелия оказались выше, чем в вакууме. Этот результат легко понять. Энергия сродства электрона к атому в этих ионах ничтожно мала (см. таблицу). Поэтому внешний электрон оказывается почти свободным (для Ca^- радиус локализации ~ 12 Å). Аналогично свободному электрону, эти ионы в объеме гелия образуют пузырек большого радиуса, и основной вклад в энергию пузырька вносит не поляризационное притяжение к гелию (как для ионов малого радиуса), а энергия сжатия внешнего электрона границей пузырька и энергия поверхностного натяжения. Проигрыш в энергии свободного электрона внутри гелия

$\Delta \sim 0.15$ эВ, в то время как для иона Ca^- этот проигрыш $\Delta \approx 0.06$ эВ. Радиус пузырька вокруг свободного электрона $R_- = 17$ Å, а вокруг Ca^- этот радиус $R \approx 14$ Å. Таким образом, параметры пузырьков вокруг свободного электрона и вокруг иона Ca^- оказались достаточно близкими.

Итак, мы показали, что ионы Ca^- и Ba^- адсорбируются на поверхности гелия, где их энергия еще ниже, чем в вакууме из-за дальнедействующих сил поляризационного притяжения к границе раздела воздух—гелий. Из-за своей большой массы и изначальной локализации в горизонтальной плоскости ионы на поверхности обладают многими необычными свойствами по сравнению с поверхностными электронами. К изучению некоторых из этих свойств мы сейчас переходим.

3. СВОЙСТВА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕЛИЯ

Ионы на поверхности гелия даже в отсутствие прижимающего поля образуют вокруг себя статическую деформацию поверхности, которую по аналогии со статической деформацией под электронами назовем лункой. Напомним, что электроны создают под собой лунку только в сильном электрическом поле [1]. Образование лунки в нулевом прижимающем поле связано с поляризационным взаимодействием заряда иона с гелием.

Предположим сначала, что деформация поверхности гелия мала, и найдем, на какой высоте над поверхностью левитирует ион. Этот эффективный размер иона h может быть найден аналогично тому, как мы нашли оптимальный радиус пузырька внутри гелия, т. е. путем минимизации полной энергии на поверхности E_{sur} , которая для плоской поверхности (в нулевом приближении по малой деформации) состоит только из двух слагаемых — энергии поляризационного взаимодействия иона с гелием $(e^2/4z)(\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$ и энергии E_b ограничения волновой функции внешнего электрона поверхностью. Для оценки E_b воспользуемся приближением о равномерном распределении этой энергии по телесному углу:

$$E_b(h) \approx \frac{1}{4\pi} \int (E_e(R) - E_0) d\Omega, \quad R(\Omega) = \frac{h}{\cos \theta}, \quad (11)$$

откуда

$$E_b(h) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(E_e \left(\frac{h}{\cos \theta} \right) - E_0 \right) d(\cos \theta) \approx \frac{1}{4\kappa_0 h} (E_e(h) - E_0),$$

где $E_e(R)$ дается формулой (10). Решая уравнение

$$\frac{\partial E_{sur}}{\partial h} = 0,$$

находим оптимальные значения расстояния от иона до поверхности $h_{\text{Ba}} = 14$ Å, $h_{\text{Ca}} = 21$ Å. Исследуем теперь деформацию поверхности $\xi(r)$. Лунка под ионом должна удовлетворять условиям

$$\xi'(0) = 0, \quad \xi''(0) \leq \frac{1}{h}.$$

Она также должна быть в основном локализована на расстояниях порядка размера иона, так как только в этом случае будет заметный выигрыш в энергии поляризационного притяжения. Энергия поверхностного натяжения E_α для такой лунки пропорциональна квадрату ее глубины в центре a^2 , $E_\alpha \propto a^2$, и оказывается почти не зависящей от формы лунки. Так, для лунки

$$\xi(r) = \begin{cases} h - a - \sqrt{h^2 - r^2}, & r < \sqrt{h^2 - (h - a)^2}, \\ \xi = 0, & r \geq \sqrt{h^2 - (h - a)^2}, \end{cases}$$

точно облегающей сферический ион радиуса h , энергия поверхностного натяжения $E_\alpha = \pi a^2 \alpha$. Такая деформация является негладкой по краям. Для более энергетически выгодной гладкой лунки

$$\xi(r) = -a \exp\left(-\frac{r^2}{2h^2}\right)$$

проигрыш в энергии поверхностного натяжения всего в 2 раза меньше.

При образовании лунки дополнительно сжимается внешний электрон иона. Чтобы изменение энергии при таком сжатии было несущественным, достаточно, чтобы функция $R(\theta)$ из (11) вблизи $\theta = 0$ почти не менялась (именно эта область вблизи центра лунки вносит основной вклад в поправку E_b к энергии внешнего электрона). Такому условию удовлетворяют лунки, у которых $\xi'' = 0$; например, деформация

$$\xi(r) = -a \exp\left(-\frac{r^4}{2h^4}\right),$$

поверхностная энергия которой $E_\alpha = \pi a^2 \alpha$. Выигрыш в энергии поляризационного взаимодействия с зарядом иона для такой лунки

$$E_{el} \approx -a \int_h^\infty 2\pi r dr \frac{e^2(\epsilon - 1)}{4\pi r^4} = -e^2 a \frac{\epsilon - 1}{4h^2}.$$

Поскольку $E_\alpha \propto a^2$, а $E_{el} \propto -a$, при малых a всегда $E_\alpha + E_{el} < 0$. Оптимальную глубину лунки a найдем с помощью минимизации:

$$E_{tot} = E_\alpha + E_{el} \approx \pi a^2 \alpha - \frac{e^2 a}{4h^2} (\epsilon - 1), \quad E'_{tot}(a) = 2\pi a \alpha - e^2 \frac{\epsilon - 1}{4h^2} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{e^2(\epsilon - 1)}{8\pi\alpha h^2} \approx \begin{cases} 7.4 \text{ \AA} & \text{для Ba}^-, \\ 3.3 \text{ \AA} & \text{для Ca}^-. \end{cases} \quad (12)$$

Полный выигрыш в энергии

$$E_{tot} = -\frac{e^2 a (\epsilon - 1)}{8h^2} \approx \begin{cases} 4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} & \text{для Ba}^-, \\ 0.8 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} & \text{для Ca}^-. \end{cases}$$

Оценим подвижность и эффективную массу ионов Ca^- и Ba^- на поверхности гелия. Мы будем действовать аналогично авторам [8] при исследовании динамических свойств

поверхностных электронов. Локальная деформация поверхности гелия под ионом успевает адиабатически подстраиваться к перемещающемуся иону и при движении индуцирует определенное поле гидродинамических скоростей. Несмотря на то что горизонтальный размер l лунки под ионом меньше, чем под свободным электроном, при температурах, больших температуры перехода в сверхтекучее состояние ($T > 2.18$ К), размер лунки все равно оказывается больше средней длины пробега тепловых возбуждений. Поэтому применимо гидродинамическое описание.

В системе отсчета, движущейся вместе с ионом со скоростью V_0 , полная скорость жидкости равна $V = V_0 + v$, где v — поле скоростей, индуцированное лункой. Лунка очень пологая ($\xi'(r) \ll 1$), поэтому $v \ll V_0$, а граничное условие

$$\mathbf{Vn} = 0$$

принимает вид

$$v_z|_{z=0} = V_0 \xi'(r) \cos \theta.$$

В пределе больших чисел Рейнольдса, когда в уравнениях движения жидкости можно пренебречь вязкими слагаемыми, поле скоростей находится из уравнений

$$v = \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \varphi_{r,z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = V_0 \xi'(r) \cos \theta. \quad (13)$$

Для расчета мы выбрали форму лунки

$$\xi(r) = \frac{a}{1 + r^2/h^2},$$

удовлетворяющую всем необходимым условиям для лунки под ионом. При вычислениях потребуется разложение

$$\xi(r) = \int_0^{\infty} G(\omega) J_0(\omega r) \omega d\omega,$$

где

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} \xi(r) J_0(\omega r) r dr = ah^2 K_0(\omega h).$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\chi(r, z) = V_0 \cos \theta \int_0^{\infty} G(\omega) e^{-\omega z} J_1(\omega r) \omega d\omega.$$

Здесь J_0 , J_1 , K_0 — функции Бесселя.

Присоединенная масса поверхностного иона дается выражением

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\rho}{V_0^2} \int v^2 d^3V = \frac{\rho}{V_0^2} \int \nabla(\varphi \nabla \varphi) d^3V = -\frac{\rho}{V_0^2} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS \approx -\frac{\rho}{V_0^2} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dS = \\
 &= \rho \int r dr \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta \int_0^\infty G(\omega) J_1(\omega r) \omega d\omega \int_0^\infty G(\omega') J_1(\omega' r) \omega'^2 d\omega' = \\
 &= \pi \rho \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^2 d\omega = \pi \rho a^2 h^4 \int_0^\infty K_0^2(\omega h) \omega^2 d\omega = \rho a^2 h \frac{\pi^3}{32} \approx \\
 &\approx \begin{cases} 10^{-22} g & \text{для Ba}^- \\ 0.3 \cdot 10^{-22} g & \text{для Ca}^-, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где ρ — плотность гелия, S — элемент площади. Таким образом, поляризационная добавка к массе ионов в нулевом прижимающем поле приблизительно равна массе самих ионов.

Для вычисления подвижности используем уравнение баланса энергии (см. [9, стр. 79]) $-eE_{\parallel} V_0 = \dot{W}$. Если выполняется равенство $\Delta\varphi = 0$, то диссипация энергии дается формулой [9]

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \eta \int \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{n}} dS \approx 2\eta V_0^2 \int_0^\infty (-\omega) G(\omega) \omega^2 d\omega \int_0^\infty G(\omega') \omega'^2 d\omega' \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr [J_1'(\omega r) J_1'(\omega' r) \cos^2 \theta + J_1(\omega r) J_1(\omega' r) \frac{\sin^2 \theta}{\omega \omega' r^2} + J_1(\omega r) J_1(\omega' r) \cos^2 \theta] \approx \\
 &\approx -4\pi\eta V_0^2 \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^4 d\omega,
 \end{aligned}$$

где η — вязкость. В нашем случае

$$\int_0^\infty G^2(\omega) \omega^4 d\omega = a^2 h^4 \int_0^\infty K_0^2(\omega h) \omega^4 d\omega = \frac{27\pi^2}{2^9}.$$

Таким образом, подвижность

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{V_0}{eE_{\parallel}} = \left(4\pi\eta \int_0^\infty G^2(\omega) \omega^4 d\omega \right)^{-1} = \frac{128}{27\pi^3} \frac{h}{\eta a^2} \approx \\
 &\approx \begin{cases} 1.3 \cdot 10^{11} \text{ см/г} & \text{для Ba}^- \\ 10^{12} \text{ см/г} & \text{для Ca}^- \end{cases} = \begin{cases} 0.21 \frac{\text{см}^2}{\text{с} \cdot \text{В}} & \text{для Ba}^- \\ 1.6 \frac{\text{см}^2}{\text{с} \cdot \text{В}} & \text{для Ca}^-, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где вязкость гелия при $T = 4$ К равна $\eta = 3 \cdot 10^{-5}$ г/см · с.

Заметим, что если мы возьмем другую лунку с такими же глубиной и горизонтальным размером, то результат изменится несильно. Например, для $\xi(r) = a \exp(-r/h)$

получаем

$$G(\omega) = \frac{a/h}{((1/h)^2 + \omega^2)^{3/2}}.$$

Далее вычисления, аналогичные только что проведенным, дают

$$M = \frac{\pi^2}{16} \rho h a^2, \quad \mu = \frac{4h}{3\pi^2 \eta a^2}.$$

Результаты для разных лунок отличаются лишь коэффициентом близким к единице. Однако, если бы мы попытались использовать форму лунки такую же, как под электроном в прижимающем поле, но с измененными параметрами так, чтобы совпадали глубина и горизонтальный размер лунок, то получили бы совсем другие результаты для подвижности и присоединенной массы. Это подчеркивает разницу в форме деформаций поверхности гелия под электроном и ионом.

Внешнее прижимающее поле создает дополнительную деформацию поверхности под ионом. Эта деформация, так же как и для электрона, имеет горизонтальный размер порядка гравитационно-капиллярной длины

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}} \gg h,$$

т. е. много больше размера поляризационной лунки. Поэтому энергии поверхностного натяжения этих двух деформаций просто складываются, а сами деформации независимо накладываются друг на друга. Глубина электростатической лунки дается формулой (13) из работы [8] с заменой $L \rightarrow h$, т. е. единственное отличие от случая электронов — размер иона — слабо влияет на значение глубины электростатической лунки, поскольку эта величина стоит под знаком логарифма.

Выражение для критической концентрации заряженных частиц на поверхности толстой пленки гелия

$$n^{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho g \alpha}}{2\pi e^2}} \quad (14)$$

было получено в металлическом приближении в работе [10]. При выводе формулы (14) было использовано единственное условие — что поверхность гелия можно считать эквипотенциальной. Для ионов это условие также выполняется, поскольку вблизи критической концентрации n^{max} частота колебаний поверхности (которая есть энергия поверхностных возбуждений, деленная на постоянную Планка) становится малой, так что ионы, несмотря на их малую подвижность, успевают подстраиваться под изменение потенциала. Поэтому формула (14) применима и в случае ионов.

На поверхности тонкой пленки электроны сильно локализованы лункой в сильном поле изображения и, так же как и ионы, имеют малую подвижность. Поэтому различия между электроном и ионом становятся незначительными. Минимальная толщина заряженной гелиевой пленки

$$d_{min} = \left(\frac{27\Lambda_1}{8\pi\alpha} \ln \frac{1}{\tilde{\kappa} l_\xi} \right)^{1/3} \quad (15)$$

оказывается примерно одинаковой для ионов и электронов¹⁾. Небольшое отличие, обусловленное разницей размеров l_{ξ} иона и электрона, компенсируется невозможностью для иона туннелировать через пленку. Вместе с d_{min} оказывается приблизительно одинаковой также критическая концентрация заряженных частиц на поверхности тонкой пленки.

Авторы благодарны В. Б. Шикину и Ю. Н. Овчинникову за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-18168) и INTAS-RFBR (грант № 95-553).

Литература

1. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
2. G. Mistura, T. Gunzler, V. Bitnar et al., *Surface Science* **361-362**, 831 (1996).
3. М. Кейдж, А. Чэнг и др., в сб. *Квантовый эффект Холла*, Мир, Москва (1989).
4. К. Ф. Вольхин, А. Г. Храпак, В. Ф. Шмидт, *ЖЭТФ* **108**, 1642 (1995).
5. G. F. Gribakin, B. V. Gul'tsev et al., *J. Phys. B* **23**, 4505 (1990).
6. V. V. Petrunin, H. H. Andersen, P. Balling, and T. Andersen, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 744 (1996).
7. V. V. Petrunin, J. D. Voldstad et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1911 (1995).
8. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *ЖЭТФ* **65**, 751 (1973).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
10. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, *Письма в ЖЭТФ* **18**, 119 (1973).

¹⁾ Вывод формулы (15) приведен в [1, § 15.3]; обозначения сохранены.