

МАГНИТНЫЙ ОТКЛИК ДВУМЕРНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В НАНОСТРУКТУРАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, А. В. Шорохов

*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
430000, Саранск, Россия*

Поступила в редакцию 25 августа 1998 г.

Исследован магнитный отклик наноструктур с цилиндрической симметрией, помещенных в продольное магнитное поле. Найдены аналитические выражения для магнитного момента наноструктур — цилиндра и «браслета». Показано, что магнитный момент испытывает осцилляции типа Ааронова—Бома. Исследованы форма осцилляций и положение осцилляционных максимумов. Показано, что в пределе $T = 0$ кривые зависимости магнитного отклика от потока магнитного поля содержат изломы типа «клюва», и найдены положения точек, в которых кривые имеют излом. Изучена температурная зависимость магнитного отклика. Рассмотрено влияние спин-магнитного взаимодействия на магнитный отклик наноструктур. Показано, что это взаимодействие нарушает периодичность магнитного отклика по потоку и приводит к появлению монотонного слагаемого в отклике.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет равновесные и транспортные свойства электронов в мезоскопических образцах были объектом интенсивного экспериментального и теоретического изучения [1]. Это связано с тем обстоятельством, что современные технологии позволяют получать совершенные наноструктуры различной геометрии (квантовые ямы и точки, каналы, проволоки и кольца в гетероструктурах). Каждая из таких наноструктур обладает своими уникальными физическими свойствами. Интересные равновесные эффекты возникают в случае приложенного к образцу магнитного поля [8–11].

Отметим, что исследования магнитного отклика в различных квазиодномерных и квазидвумерных системах позволяют получить важные данные о параметрах электронного энергетического спектра и потенциалах латерального конфайнмента в таких структурах [1–10]. Заметим, что приложенное к наноструктуре магнитное поле создает дополнительные возможности для исследования этих параметров. Это обусловлено тем, что магнитное поле может создавать дополнительный или усиливать имеющийся латеральный конфайнмент в наноструктуре, а также создавать гибридную связь движений вдоль и поперек поля в случае, когда поле направлено под углом по отношению к оси симметрии системы [4, 7].

Равновесные свойства электронного газа в наноструктурах в основном определяются электронным энергетическим спектром, который, в свою очередь, обусловлен геометрией системы. Кроме упомянутых выше наноструктур, которые изготавливаются в плоской двумерной электронной системе, в последние годы начали исследоваться наносистемы в искривленных слоях [11–18]. С помощью специальных приемов (например, *lift-off*) недавно появилась возможность экспериментально исследовать искривленный

слой электронного газа [17]. Наиболее близко экспериментальной ситуации соответствует геометрия цилиндра [17]. В частности, к геометрии цилиндра близка геометрия углеродной нанотрубки. Магнитный отклик нанотрубки при $T = 0$ численно исследовался в [19]. Использовалось приближение эффективной массы для нахождения электронного спектра в случае, когда магнитное поле \mathbf{B} параллельно оси трубки. В [2] магнитный отклик нанотрубки при такой же ориентации поля исследован в приближении сильной связи, но учтено и спин-магнитное взаимодействие. Последнее приводит к серповидной особенности (*cusp*) на кривой зависимости намагниченности M от потока магнитного поля Φ в окрестности целых значений кванта потока $\Phi_0 = e/ch$. Как отмечалось в [2], результаты для модели сильной связи схожи с полученными в приближении эффективной массы [19].

В [18] дан подробный теоретический анализ усредненного магнитного отклика ряда мезоскопических систем, включая «браслет» (цилиндр, высота которого порядка фермиевской длины волны). При этом магнитное поле выбиралось направленным нормально к боковой поверхности цилиндра. При усреднении предполагалось, что химический потенциал получает случайную добавку, которая равномерно распределена в интервале порядка расстояния между уровнями. При таком усреднении «замазываются» как осцилляции де Гааза—Ван Альфена, так и размерные флуктуации. В результате при $T \gg \hbar\omega_c$ в [18] получены выражения для магнитной восприимчивости рассмотренных мезоскопических систем, являющиеся аналогом формулы Ландау для диамагнитной восприимчивости.

В связи с изложенным выше представляется актуальным получить аналитические выражения для магнитного момента в неплоских двумерных наносистемах и исследовать осцилляции магнитного отклика типа Ааронова—Бома, а также найти зависимости формы этих осцилляций от температуры. Основная цель настоящей работы — получить удобные для аналитического и численного исследований формулы, описывающие осцилляции магнитного отклика свернутого в цилиндр двумерного вырожденного электронного газа (квантовый цилиндр), включая цилиндр с малой длиной образующей L порядка фермиевской длины волны электрона λ_F (квантовый браслет). Изучается актуальный случай магнитного поля, направленного вдоль оси симметрии системы (рассматривается как постоянное однородное поле \mathbf{B} , так и поле, созданное бесконечно тонким соленоидом Ааронова—Бома). Проанализировано влияние электронного спина на форму осцилляционной кривой. Как показано ниже, нетривиальная кривизна рассмотренных двумерных систем приводит к новому интересному эффекту: в пределе $T \rightarrow 0$ на осцилляционной кривой возникают изломы типа клюва. Природа таких изломов аналогична той, которая обуславливает изломы на кривой незатухающего тока в квантовом магнитном кольце [3].

Наконец отметим, что для исследования магнитного отклика используются как каноническое распределение Гиббса (постоянное число электронов), так и большое каноническое распределение Гиббса (постоянный химический потенциал газа: $\mu(B) = \text{const}$). Для большинства ситуаций результаты, полученные при помощи этих распределений, разнятся очень мало. Это обстоятельство связано с тем, что осцилляционная часть $\mu(B)$ в случае постоянного числа электронов очень мала [20]. Для вырожденного электронного газа, однако, использование большого канонического распределения при расчетах более удобно. Поэтому ниже мы используем именно этот подход, т. е. считаем, что $\mu = \text{const}$. Кроме того, будем рассматривать исключительно невзаимодействующий электронный газ.

2. МАГНИТНЫЙ ОТКЛИК КВАНТОВОГО ЦИЛИНДРА

В приближении эффективной массы гамильтониан H одноэлектронных бесспиновых состояний для векторного потенциала A , выбранного в виде $A = (By/2, -Bx/2, 0)$, в цилиндрических координатах запишется в виде

$$H = -\varepsilon \frac{d^2}{d\varphi^2} - \frac{i\hbar\omega_c}{2} \frac{d}{d\varphi} + \frac{m^*\omega_c^2}{8} \rho^2 + \frac{p^2}{2m^*}, \quad (1)$$

где $\omega_c = eB/m^*c$ — циклотронная частота, φ — полярный угол, m^* — эффективная масса электрона, p — импульс вдоль оси цилиндра, $\varepsilon = \hbar^2/2m^*\rho^2$ — энергия размерного конфайнмента.

Спектр гамильтониана имеет вид

$$\varepsilon_{mp} = \varepsilon \left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{p^2}{2m^*}. \quad (2)$$

Здесь магнитное квантовое число m принимает значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\Phi = \pi\rho^2 B$ — поток поля B через сечение цилиндра. Воспользовавшись стандартным выражением для термодинамического потенциала Ω [21], получим в нашем случае выражение

$$\Omega = -\frac{TL}{2\pi\hbar} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - \varepsilon_{mp}}{T} \right) \right], \quad (3)$$

где L — длина цилиндра. Из (3) найдем магнитный момент по формуле $M = -(\partial\Omega/\partial B)_{\mu, T}$, тогда

$$-\frac{M}{\mu_B} = \frac{Lm_0}{\pi\hbar m^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(m + \Phi/\Phi_0) dp}{1 + \exp[(\varepsilon_{mp} - \mu)/T]}, \quad (4)$$

где m_0 — масса свободного электрона, μ_B — магнетон Бора.

Для дальнейшего анализа удобно разложить магнитный момент цилиндра в ряд Фурье с помощью формулы суммирования Пуассона. После несложных, но довольно длинных преобразований получим

$$-\frac{M}{\mu_B} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(T) \sin \left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (5)$$

где коэффициенты Фурье $C_n(T)$ имеют вид

$$C_n(T) = \frac{Lm_0}{\pi^3\hbar m^*} \int_0^{\infty} dz z \sin(nz) \int_0^{\infty} dp \left\{ 1 + \exp \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\varepsilon z^2}{4\pi^2} + \frac{p^2}{2m^*} - \mu \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Введем новые переменные $x = z\sqrt{\varepsilon}/2\pi$, $y = p/\sqrt{2m^*}$ и перейдем в (6) к полярным координатам (r, ψ) в плоскости xy . Тогда получим для $C_n(T)$ выражение

$$C_n(T) = \frac{4L\sqrt{2m^*} m_0}{\hbar m^* \varepsilon \pi} \int_0^{\infty} dr r^2 \left[1 + \exp \left(\frac{r^2 - \mu}{T} \right) \right]^{-1} \int_0^{\pi/2} \sin \left(\frac{2\pi n r \cos \psi}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \cos \psi d\psi. \quad (7)$$

Используя интегральное представление для функции Бесселя J_1 [22],

$$\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{2\pi nr \cos \psi}{\sqrt{\epsilon}}\right) \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{2} J_1\left(\frac{2\pi nr}{\sqrt{\epsilon}}\right), \quad (8)$$

получим

$$C_n(T) = \frac{2L\sqrt{2m^*\epsilon}m_0}{\hbar m^*} \int_0^\infty \frac{x^2 J_1(2\pi nx) dx}{1 + \exp[(\epsilon x^2 - \mu)/T]}. \quad (9)$$

Как следует из (9) и (5), магнитный момент квантового цилиндра является осциллирующей функцией потока с периодом, равным кванту потока.

Для качественного рассмотрения характера осцилляций рассмотрим случай, когда $T = 0$. Тогда

$$C_n(0) = \frac{2L\sqrt{2m^*\epsilon}m_0}{\hbar m^*} \int_0^{\sqrt{\mu/\epsilon}} x^2 J_1(2\pi nx) dx. \quad (10)$$

Используя формулу [22]

$$\int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(ax) dx = a^{-1} J_{\nu+1}(a), \quad (11)$$

получим

$$C_n(0) = \frac{L\mu\sqrt{2m^*}m_0}{\pi\hbar m^*\sqrt{\epsilon}} \frac{J_2\left(2\pi n\sqrt{\mu/\epsilon}\right)}{n}. \quad (12)$$

Для реальных ситуаций $\mu \gg \epsilon$. Используя асимптотику функции Бесселя $J_2(x)$ для больших значений аргумента [22], из (12) получим оценку

$$C_n(0) = \frac{L\mu\sqrt{2m^*}m_0}{\pi^2\hbar m^*\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\pi^2 n \sqrt{\mu}}\right)^{1/2} \cos\left(2\pi n\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - \frac{5\pi}{4}\right) + o\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\pi n\sqrt{\mu}}\right) \right]. \quad (13)$$

Из (13) следует оценка для $M(T=0)$

$$\frac{M(T=0)}{\mu_B} = \frac{\sqrt{2}Lm_0}{\pi\hbar\sqrt{m^*}} \left(\frac{\mu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \cos\left(2\pi n\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (14)$$

Из (14) следует важное для дальнейшего утверждение: в силу периодичности входящих в ряд Фурье функций магнитный момент зависит только от дробной части входящих в (14) величин Φ/Φ_0 и $\sqrt{\mu/\epsilon}$. Обозначим их соответственно ξ и η ($0 \leq \eta, \xi < 1$). Тогда

$$\frac{M(T=0)}{\mu_B} = \frac{\sqrt{2}Lm_0}{\pi^2\hbar\sqrt{m^*}} \left(\frac{\mu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \sin(2\pi n\xi) \cos\left(2\pi n\eta - \frac{\pi}{4}\right). \quad (15)$$

Из (15) вытекает, что достаточно провести исследование осцилляций момента в области, где $0 \leq \xi < 1$, $0 \leq \eta < 1$, так как далее с изменением Φ/Φ_0 картина повторяется на каждом единичном отрезке изменения. Сумму ряда в (15) можно выразить через обобщенные ζ -функции, используя формулу Гурвица [23]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \begin{cases} \sin(2\pi n x) \\ \cos(2\pi n x) \end{cases} = 2\pi [\zeta(-1/2, x) \pm \zeta(-1/2, 1-x)], \quad (16)$$

где $0 < x \leq 1$.

Отметим сначала свойства симметрии графика $M(\Phi/\Phi_0)$. Из (15) вытекает, что $M(\xi, \eta) = -M(1-\xi, \eta)$ для любого $0 \leq \eta < 1$. Таким образом, график антисимметричен относительно оси, проходящей через точку $\xi = 1/2$ перпендикулярно оси ординат. Кроме того, $M(\xi + 1/2, \eta - 1/2) = M(\xi, \eta)$. Следовательно, случай, когда $1/2 \leq \eta < 1$, сводится к случаю, когда $\eta < 1/2$, сдвигом графика $M(\Phi/\Phi_0)$ по оси абсцисс на половину кванта потока. В связи с такой симметрией графика рассмотрим только область $\xi, \eta \leq 1/2$, т.е. половину периода функции $M(\Phi/\Phi_0)$. Сразу отметим, что при целых значениях $\sqrt{\mu/\epsilon}$ на этой половине периода есть только один экстремум (максимум или минимум, в зависимости от того, $\eta < 1/2$ или $\eta > 1/2$). При $\eta < 1/2$ формулы (15) и (16) дают

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, 1 - \xi + \eta), \quad \xi \geq \eta, \quad (17a)$$

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, \eta - \xi), \quad \eta > \xi, \quad (17b)$$

где $Lm_0/2\pi^2\hbar\sqrt{m^*}(\mu^3/\epsilon)^{1/4} \equiv A$.

Как следует из (17), критической точкой графика $M(\xi)$ на интервале $0 < \xi < 1/2$ является точка, где $\xi = \eta$. Рассмотрим поведение графика в окрестности этой точки. Используем для анализа формулу сдвига для обобщенной ζ -функции [23],

$$\zeta(s, x) = \zeta(s, 1+x) + x^{-s}. \quad (18)$$

Тогда (17b) запишется в виде

$$\frac{M(\xi, \eta)}{4\pi A\mu_B} = \zeta(-1/2, \xi + \eta) - \zeta(-1/2, 1 - \xi + \eta) - \sqrt{\eta - \xi}, \quad \eta > \xi. \quad (19)$$

Функции $\zeta(-1/2, x)$, как следует из (15) и (16), являются непрерывными, поскольку соответствующие ряды Фурье сходятся равномерно. Сравнение (17a) и (19) показывает, однако, что в точке $\eta = \xi$ имеется излом на графике $M(\xi, \eta)$, обусловленный наличием третьего слагаемого в формуле (19). Кроме того, этот член может дать дополнительный нуль функции $M(\xi, \eta)$ в области $0 < \xi < 1/2$. В этом случае на половине периода функции имеются два экстремума (максимум и минимум).

Графики, построенные по формуле (15), показаны на рис. 1. Вид графиков соответствует приведенным выше аналитическим результатам о поведении магнитного момента.

При $T \neq 0$ изломы на графиках сглаживаются, но в целом картина осцилляций остается той же (рис. 2).

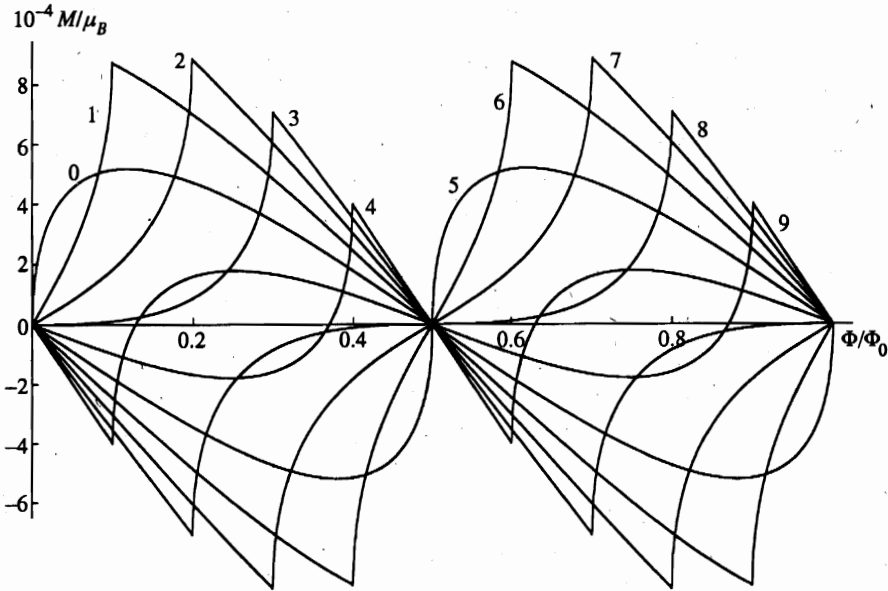


Рис. 1. Зависимость магнитного отклика квантового цилиндра от потока магнитного поля. Номер кривой N соответствует значению $\eta = 0.N$, где N принимает значения $N = 0, 1, \dots, 9$ (например, $\eta = 0, 0.1, \dots$)

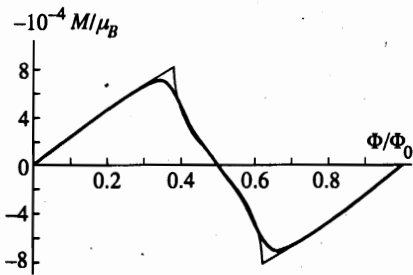


Рис. 2. Температурное сглаживание кривой магнитного отклика квантового цилиндра. Тонкая линия на рисунке соответствует $T = 0$, жирная линия соответствует $T = 10K$; $\eta = 0.6$, $\rho = 3.58 \cdot 10^{-6}$, $L = 4.37 \cdot 10^{-4}$

3. МАГНИТНЫЙ ОТКЛИК КВАНТОВОГО БРАСЛЕТА

Рассмотрим цилиндр с малой длиной образующей — квантовый браслет. Когда длина цилиндра сравнима с фермиевской длиной волны электрона, необходимо учитывать квантование движения частиц вдоль оси z . Выберем в качестве модели потенциала конфинмента по этой оси модель бесконечно глубокой потенциальной ямы. Тогда спектр электрона для этого случая запишется в виде

$$E_{nm} = \epsilon_m + \epsilon_n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где $\epsilon_m = a(2\pi m + 2\pi\Phi/\Phi_0)$, $\epsilon_n = b(2\pi n)^2$. Энергии размерного конфинмента $a = \hbar^2/8m^* \pi^2 \rho^2$, $b = \hbar^2/8m^* L^2$. Длина браслета равна L , а радиус равен ρ .

Воспользовавшись термодинамическим потенциалом газа электронов в браслете,

$$\Omega = -T \sum_{n,m} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - E_{nm}}{T} \right) \right], \quad (21)$$

получим для магнитного отклика браслета выражение

$$-\frac{M}{\mu_B} = \frac{m_0}{m^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m + \Phi/\Phi_0}{1 + \exp((E_{nm} - \mu)/T)}. \quad (22)$$

Выражение (22) удобно переписать следующим образом:

$$-\frac{M}{\mu_B} = \frac{1}{2} \frac{m_0}{m^*} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m + \Phi/\Phi_0}{1 + \exp[(E_{nm} - \mu)/T]} - \frac{1}{2} \frac{m_0}{m^*} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m + \Phi/\Phi_0}{1 + \exp[(E_{0m} - \mu)/T]}. \quad (23)$$

Вторая сумма в (23) представляет собой половину магнитного момента квантового кольца M_{ring}/μ_B .

В [3] изучался незатухающий ток J в изолированном квантовом кольце. Этот ток вычислялся с помощью свободной энергии F , т. е. считалось постоянным число частиц. Величина J пропорциональна магнитному моменту кольца. Поскольку выражение для M_{ring} входит в формулу для магнитного момента браслета (который считается частью большой системы, например, браслет расположен в квазидвумерном слое гетероструктуры), приведем здесь для полноты выражение для M_{ring} .

Считая постоянным химический потенциал μ , получим для разложения M_{ring} в ряд Фурье выражение

$$-\frac{M_{ring}}{\mu_B} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (24)$$

где коэффициенты Фурье имеют вид

$$C_n(T) = \frac{4m_0}{m^*} \int_0^{\infty} \frac{x \sin(2\pi n x) dx}{1 + \exp[(\epsilon x^2 - \mu)/T]}. \quad (25)$$

В пределе низких температур ($T \rightarrow 0$) из (25) получим

$$C_n(0) = \frac{m_0}{m^*} \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} \sin \left(2\pi n \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{2}{\pi n} \cos \left(2\pi n \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) \right]. \quad (26)$$

Ряд (24) можно просуммировать, используя (26). Обозначая целую часть $\sqrt{\mu/\epsilon}$ через N , получим при $\xi + \eta < 1$

$$-\frac{M_{ring}}{\mu_B} = \frac{m_0}{m^*} \begin{cases} (2N + 1)\xi, & \xi \leq \eta, \\ 2N(\xi - 1/2), & \eta < \xi, \end{cases} \quad (27)$$

а при $\xi + \eta \geq 1$

$$-\frac{M_{ring}}{\mu_B} = \frac{m_0}{m^*} \begin{cases} (2N + 2)(\xi - 1/2), & \xi \leq \eta, \\ (2N + 1)(\xi - 1), & \eta < \xi. \end{cases} \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что магнитный отклик кольца испытывает при $T = 0$ пилообразные осцилляции. Амплитуда этих осцилляций пропорциональна $\sqrt{\mu/\varepsilon}$, причем за исключением случая $\eta = 1/2$ на периоде имеются два пилообразных максимума разной высоты. Ширина одного из них $|1 - 2\eta|$, а другого $1 - |1 - 2\eta|$.

Одномерное квантовое кольцо является предельным случаем двумерных структур — цилиндра и браслета.

Запишем теперь (23) в виде

$$-\frac{M}{\mu_B} = \frac{M_{ring}}{2\mu_B} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_0}{m^*}\right) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi(m + \Phi/\Phi_0)}{1 + \exp[(E_{nm} - \mu)/T]}. \quad (29)$$

Далее разложим магнитный момент браслета в ряд Фурье, для чего снова воспользуемся формулой Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n + t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilt} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ilx} dx. \quad (30)$$

После довольно громоздких, но простых преобразований получим

$$-\frac{M}{\mu_B} = \frac{M_{ring}}{2\mu_B} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(T) \sin(2\pi k\xi), \quad (31)$$

где коэффициенты Фурье

$$C_k(T) = -\frac{1}{2\pi^3} \frac{m_0}{m^*} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \cos(lx) \int_0^{\infty} \frac{y \sin(ky) dy}{1 + \exp[(bx^2 + ay^2 - \mu)/T]}. \quad (32)$$

Введем полярные координаты по формулам $x = (r/b) \cos \varphi$, $y = (r/a) \sin \varphi$, тогда из (32) найдем

$$C_k(T) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{m_0}{m^*} \frac{k}{\sqrt{ba^3}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2/a + l^2/b}} \int_0^{\infty} \frac{r^2 J_1 \left(r \sqrt{k^2/a + l^2/b} \right) dr}{1 + \exp[(r^2 - \mu)/T]}. \quad (33)$$

Рассмотрим далее случай, когда $T = 0$. Входящий в (33) интеграл при $T = 0$ легко вычисляется:

$$\int_0^{\sqrt{\mu}} r^2 J_1 \left(r \sqrt{\frac{k^2}{a} + \frac{l^2}{b}} \right) dr = \frac{\mu}{\sqrt{k^2/a + l^2/b}} J_2 \left(\sqrt{\mu \left(\frac{k^2}{a} + \frac{l^2}{b} \right)} \right). \quad (34)$$

Используя асимптотику функций Бесселя для больших значений аргумента ($\mu/a, \mu/b \gg \gg 1$), получим

$$C_k(0) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_0}{m^*} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\mu^3}{b^2}\right)^{1/4} \left\{ \frac{1}{a^{1/4}} \frac{1}{k^{3/2}} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} k - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2k}{a^{5/4}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \left[\sqrt{\mu(k^2/a + l^2/b)} - \pi/4 \right]}{(k^2/a + l^2/b)^{5/4}} \right\}. \quad (35)$$

Подставим (35) в (31), тогда для магнитного отклика браслета получим формулу

$$-\frac{M(T=0)}{\mu_B} = \frac{M_{ring}(T=0)}{2\mu_B} + \frac{M_{cyl}(T=0)}{2\mu_B} + \frac{4}{(2\pi)^{5/2}} \frac{m_0}{m^*} \left(\frac{\mu^3}{a^6 b^2}\right)^{1/4} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos\left[\sqrt{\mu(k^2/a + l^2/b)} - \pi/4\right]}{(k^2/a + l^2/b)^{5/4}}, \quad (36)$$

где M_{cyl} — найденный во втором разделе магнитный отклик цилиндра (19).

Графики, построенные с помощью (31) и (33), показаны на рис. 2. Из (31) следует, что $M(T)$ обращается в нуль в точках, где Φ/Φ_0 — полуцелое число (так же как для цилиндра и квантового кольца). Таким образом, $M(T)$ является периодической функцией потока магнитного поля с периодом, равным кванту потока.

4. ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МАГНИТНОГО ОТКЛИКА

Рассмотрим температурные поправки к магнитному отклику. Ограничимся актуальным случаем сильновырожденного газа, когда $\mu/T \gg 1$. В этом случае интеграл, входящий в выражения для магнитного отклика цилиндра (9) и браслета (33), можно оценить. Представим вначале $P(T)$,

$$P(T) = \int_0^{\infty} \frac{x^2 J_1(\alpha x) dx}{1 + \exp[(x^2 - \mu)/T]},$$

в виде

$$P(T) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi(x) \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx, \quad (37)$$

где

$$\varphi(x) = 2x J_2(\alpha\sqrt{x})/\alpha, \quad f(x) = \{1 + \exp[(x - \mu)/T]\}^{-1}.$$

Теперь $P(T)$ можно легко оценить по формуле [24]

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx \simeq \varphi(\mu) + \frac{\pi^2 T^2}{6} \varphi''(\mu). \quad (38)$$

Из (38) получим оценку

$$P(T) \simeq P(0) + \frac{\alpha \pi^2 T^2}{12} J_0(\alpha\sqrt{\mu}). \quad (39)$$

Используя (39), найдем коэффициенты Фурье $C_n(T)$ магнитного отклика цилиндра

$$C_n(T) \simeq C_n(0) + \frac{\pi^3 L T^2 \sqrt{2m^* \epsilon} m_0}{3\hbar m^* \epsilon^2} J_0\left(2\pi n \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\right). \quad (40)$$

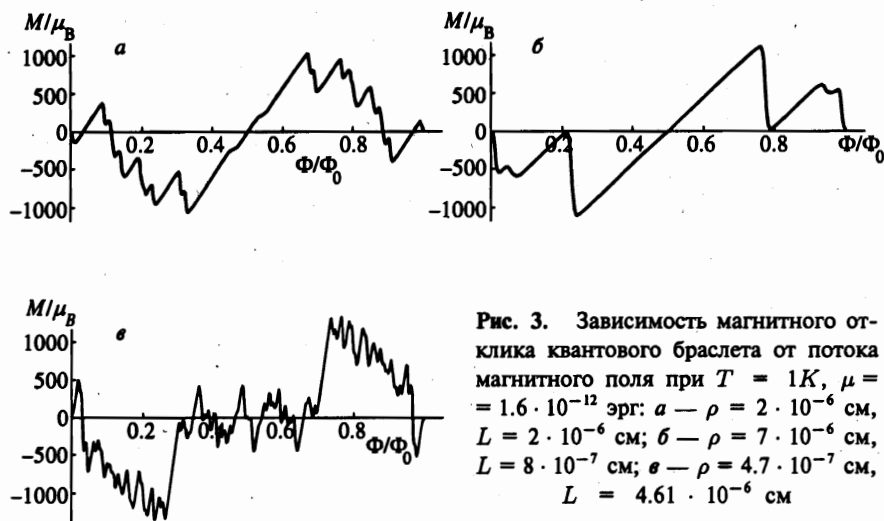


Рис. 3. Зависимость магнитного отклика квантового браслета от потока магнитного поля при $T = 1\text{K}$, $\mu = 1.6 \cdot 10^{-12}$ эрг: $a - \rho = 2 \cdot 10^{-6}$ см, $L = 2 \cdot 10^{-6}$ см; $b - \rho = 7 \cdot 10^{-6}$ см, $L = 8 \cdot 10^{-7}$ см; $e - \rho = 4.7 \cdot 10^{-7}$ см, $L = 4.61 \cdot 10^{-6}$ см

Тогда для магнитного момента получим

$$\frac{M_{\text{цил}}(T)}{\mu_B} \simeq \frac{M_{\text{цил}}(T=0)}{\mu_B} + \frac{\pi^3 L T^2 \sqrt{2m^* \varepsilon} m_0}{3 \hbar m^* \varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(2\pi n \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) J_0\left(2\pi n \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right). \quad (41)$$

Коэффициенты Фурье для случая браслета имеют вид

$$C_n(T) \simeq C_n(0) + \frac{1}{48\pi^2} \frac{m_0}{m^*} \frac{\pi^2 T^2 n}{\sqrt{a^3 b}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_0\left(\sqrt{\mu \left(\frac{k^2}{a} + \frac{l^2}{b}\right)}\right), \quad (42)$$

а его магнитный момент запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{брас}}(T)}{\mu_B} &= \frac{M_{\text{брас}}(T=0)}{\mu_B} + \frac{1}{48} \frac{m_0}{m^*} \frac{T^2}{\sqrt{a^3 b}} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(2\pi k \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \times \\ &\times \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_0\left(\sqrt{\mu \left(\frac{k^2}{a} + \frac{l^2}{b}\right)}\right). \end{aligned} \quad (43)$$

Температурные поправки в формулах (41) и (43) сглаживают изломы на кривых зависимостей магнитного момента цилиндра и браслета от потока магнитного поля (рис. 2, 3).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Магнитный момент вырожденного электронного газа, помещенного в квантующее магнитное поле, как известно, испытывает осцилляции с изменением величины магнитного поля (эффект де Гааза—Ван Альфена). Хорошо известна и физическая причина этого эффекта: плотность электронных состояний изменяется скачком при каждом

пересечении уровней электронного энергетического спектра с уровнем химического потенциала μ газа при изменении магнитного поля. При этом от величины μ зависят как амплитуда осцилляционных максимумов, так и их положение на кривой $M(B)$.

Отметим, что при этом набор возможных проекций квазиклассических траекторий электронов на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, определяется при $T \rightarrow 0$ величиной энергии Ферми, при этом каждому из уровней энергии соответствует своя проекция этой траектории. Уровни энергии, а следовательно, и траектории зависят от величины B и меняются с изменением B . Это изменение, однако, может происходить только таким образом, чтобы поток магнитного поля через площадь, охватываемую проекцией траектории, изменялся на целое число квантов потока Φ_0 .

С некоторыми вариациями описанная выше картина эффекта де Гааза—Ван Альфена имеет место и для ряда низкоразмерных систем [3–8]. Однако, как следует из полученных в разд. 2–4 статьи результатов, в наноструктурах, обладающих цилиндрической симметрией (квантовое кольцо, браслет, квантовый цилиндр), ситуация совершенно иная, а именно, хотя амплитуды осцилляционных максимумов на кривой $M(B)$ по-прежнему будут зависеть от величины химического потенциала, положения этих максимумов определяются соотношениями между величинами ξ и η . При этом период осцилляций не зависит от μ и равен кванту потока (осцилляции типа Ааронова—Бома). Это обусловлено тем чисто геометрическим обстоятельством, что при любом из возможных значений энергии электрона проекция его квазиклассической траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, является фиксированной — совпадающей с окружностью основания цилиндра.

Во всех рассмотренных в данной работе наноструктурах коэффициенты Фурье не зависят от магнитного поля, что отличает наноструктуры с цилиндрической симметрией от обычных трехмерных образцов [21] или наноструктур, не имеющих такой симметрии [4–8]. Далее отметим, что при $T = 0$ кривая зависимости магнитного отклика от потока поля Φ имеет во всех случаях точки излома. Исключением для цилиндра являются случаи $\eta = 0$, а также $\eta = 1/2$, когда изломов нет. Особенности кривой для браслета содержат в себе, как следует из (36), все особенности цилиндра и квантового кольца.

Интересно отметить, что добавление потока Ааронова—Бома Φ_{AB} (поток магнитного поля, созданного тонким и, в идеале, бесконечно длинным соленоидом, расположенным вдоль оси симметрии наноструктуры) сохраняет для всех рассмотренных случаев картину осцилляций. Этот поток приводит лишь к общему сдвигу кривой магнитного отклика $M(\Phi)$ на величину Φ_{AB} . Такое поведение магнитного отклика обусловлено отсутствием зависимости коэффициентов Фурье от магнитного поля.

Отметим также, что для всех рассмотренных наноструктур в магнитном отклике отсутствует монотонная часть магнитного отклика.

Полученные выше результаты не учитывают электронный спин. Учет спина приводит к добавлению к спектру электрона слагаемого $\frac{1}{2}\sigma g\mu_B B$, где $\sigma = \pm 1$, а g — электронный g -фактор. Расчеты, аналогичные приведенным в разд. 2–4, дают для квантового кольца

$$M_{ring} = \sum_{\sigma=\pm 1} (M_{\sigma}^{mon} + M_{\sigma}^{osc}).$$

Монотонная часть отклика кольца M_{σ}^{mon} имеет вид

$$-\frac{M_{\sigma}^{mon}}{\mu_B} = \frac{\sigma g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\varepsilon [x^2 + \sigma g (m^*/m_0) (\Phi/\Phi_0)] - \mu}{T} \right] \right\}^{-1} dx, \quad (44)$$

а осциллирующая часть отклика описывается выражением

$$-\frac{M_{\sigma}^{osc}}{\mu_B} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\sigma} \sin \left[2\pi k \frac{\Phi + \Phi_{AB}}{\Phi_0} \right], \quad (45)$$

где коэффициенты Фурье

$$a_{k\sigma} \left(T, \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = \frac{4m_0}{m^*} \int_0^{\infty} \frac{(x + m^* g \sigma / 2m_0) \sin(2\pi k x) dx}{1 + \exp \{ (\varepsilon [x^2 + \sigma g (m^*/m_0) (\Phi/\Phi_0)] - \mu) / T \}}. \quad (46)$$

Как следует из (44)–(46), учет спина в общем случае, когда есть поток Ааронова—Бома, приводит к следующим изменениям картины эффекта: возникает монотонная часть магнитного отклика, нелинейно зависящая от потока Φ и не зависящая от потока Ааронова—Бома Φ_{AB} , коэффициенты Фурье $a_{k\sigma}$ становятся нелинейно зависящими от потока Φ , но также не зависят от потока Φ_{AB} . Таким образом, как и в случае, когда спин не учитывается, поток Φ_{AB} дает только сдвиг осцилляционной картины. Важно заметить, что учет спин-магнитного взаимодействия приводит к нарушению периодичности магнитного отклика кольца из-за зависимости коэффициентов $a_{k\sigma}$ от потока Φ и зависимости монотонной части отклика от потока.

Аналогичные изменения в картине осцилляций возникают в цилиндре и, следовательно, в браслете. Действительно, магнитный отклик цилиндра при учете спин-магнитного взаимодействия

$$M = \sum_{\sigma} (M_{\sigma}^{(1)} + M_{\sigma}^{(2)}),$$

где

$$\frac{M_{\sigma}^{(1)}}{\mu_B} = \frac{Lm_0}{\pi m^* \hbar} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[m + (\Phi + \Phi_{AB})/\Phi_0] dp}{1 + \exp [(\varepsilon_{mp} + g\sigma \mu_B B/2 - \mu)/T]}, \quad (47)$$

$$\frac{M_{\sigma}^{(2)}}{\mu_B} = \frac{Lg\sigma}{2\pi \hbar} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp}{1 + \exp [(\varepsilon_{mp} + g\sigma \mu_B B/2 - \mu)/T]}. \quad (48)$$

Из сравнения (4) и (47) ясно, что это слагаемое дает только осциллирующую часть магнитного отклика с коэффициентами Фурье, зависящими от потока. Расчет, аналогичный проделанному в разд. 2, показывает, что $M_{\sigma}^{(2)}$ дает вклад как в монотонную, так и в осциллирующую части отклика, причем монотонная часть нелинейно зависит от потока Φ .

Резюмируя, можно сказать, что во всех рассмотренных наноструктурах при учете спин-магнитного взаимодействия нарушается периодичность магнитного отклика от

потока, обусловленная зависимостью коэффициентов Фурье от поля B и появлением монотонного слагаемого в отклике.

Поскольку в реальных структурах $m_0/m^* \gg 1$, спин-магнитное взаимодействие будет существенно в наноструктурах с большим g -фактором носителя заряда. В заключение отметим, что для браслета графики сильно зависят от отношения ρ к L (рис. 3). В целом можно отметить, что в рассмотренных выше цилиндрических наноструктурах имеют место осцилляции магнитного отклика как функции потока. Эти осцилляции типа Ааронова—Бома, т. е. периодические по потоку магнитного поля, если не учитывать электронный спин. Заметим также, что для углеродных нанотрубок, не имеющих полной цилиндрической симметрии, периодичность по потоку также имеет место [2, 19]. В связи с этим обстоятельством модель цилиндра, рассмотренная в разд. 2, является, по-видимому, неплохим приближением для описания магнитного отклика углеродных нанотрубок без учета спина. Если учитывается электронный спин, то модель цилиндра, в отличие от [2], не даёт серповидной особенности на кривых $M(\Phi)$.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований, Министерства общего и профессионального образования РФ и программы «Университеты России — Фундаментальные исследования».

Литература

1. *Solid State Physics: Semiconductor Heterostructures and Nanostructures*, Vol. 44, ed. by H. Ehrenreich and D. Turnbull, Academic Press, New York (1991).
2. M. F. Lin and K. W.-K. Shung, *Phys. Rev. B* **52**, 8423 (1995).
3. H.-F. Cheung, Y. Gefen, E. K. Riedel, and W.-H. Shin, *Phys. Rev. B* **37**, 6050 (1988).
4. Y. Meyer, O. Entin-Wohlman, and Y. Gefen, *Phys. Rev. B* **42**, 8531 (1990).
5. R. Merlin, *Sol. St. Comm.* **64**, 99 (1987).
6. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, И. В. Чудаев, *ЖЭТФ* **109**, 762 (1996).
7. В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, О. Б. Томилин, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 549 (1996).
8. V. A. Geyler and V. A. Margulis, *Phys. Rev. B* **55**, 2543 (1997).
9. M. Büttiker, Y. Imry, and R. Landauer, *Phys. Lett. A* **96**, 365 (1983).
10. M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **32**, 1846 (1985).
11. C. L. Foden, M. L. Leadbeater, J. H. Burroughes, and M. Pepper, *J. Phys. Cond. Matt.* **6**, L127 (1994).
12. C. L. Foden, M. L. Leadbeater, and M. Pepper, *Phys. Rev. B* **52**, 8646 (1995).
13. H. Aoki and H. Suezawa, *Phys. Rev. A* **46**, R1163 (1992).
14. В. М. Набутовский, Д. А. Романов, *ЖЭТФ* **90**, 232 (1986).
15. В. В. Роткин, Р. А. Сурис, *ФТТ* **36**, 3569 (1994).
16. Л. И. Магарилл, Д. А. Романов, А. В. Чаплик, *Письма в ЖЭТФ*, **64**, 421 (1996).
17. Л. И. Магарилл, Д. А. Романов, А. В. Чаплик, *ЖЭТФ* **113**, 1411 (1998).
18. Yu. N. Ovchinnicov, W. Lehle, and A. Schmid, *Ann. Phys.* **6**, 489 (1997).
19. H. Ajiki and T. Ando, *J. Phys. Soc. Jap.*, **62**, 1255 (1993).
20. Д. Шенберг, *Магнитные осцилляции в металлах*, Мир, Москва (1986).
21. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
22. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).
23. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1973).
24. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Наука, Москва (1978).