

ТЕОРИЯ ДВУХФОТОННОЙ ГЕНЕРАЦИИ СВЕТА НА БЕЗЫНВЕРСНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМАХ

*В. Н. Горбачев**, *А. И. Трубилко†*

*Санкт-Петербургский институт
Московского государственного университета печати
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 13 октября 1998 г.

Предложена теория, позволяющая одновременно рассмотреть как лазерную, так и микролазерную двухфотонную генерацию света. Она основана на модели Лэмба—Скалли, в которой двухуровневые атомы обладают начальной когерентностью. Такое начальное состояние позволяет генерировать свет на атомах без инверсии и даже с отрицательной инверсией на переходе. Проанализированы условия возникновения сжатых состояний светового поля. Показано, что статистика фотонов лазерной генерации всегда оказывается классической, однако возникает состояние поля, сжатое по фазе с предельным подавлением дробового шума при фоторегистрации. Для микролазера найден режим, где на безынверсном переходе возникает субпуассоновский свет с уровнем подавления дробового шума 60%. В другом режиме может генерироваться сжатое состояние, приводящее к наблюдению 75-процентного подавления шумов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивное внимание уделяется исследованию взаимодействия света с безынверсными атомными системами [1]. Обычно здесь рассматриваются резонаторные трехуровневые модели атомов с релаксацией и без нее, с различными типами схем многомодового взаимодействия. Интерес представляют как исследование свойств генерации световых полей в качестве источника излучения нового типа, обнаружение избирательной динамики системы, динамического хаоса и мультистабильных режимов [2], так и возможность получения по спектроскопическим измерениям пробного зондирующего излучения информации о когерентных взаимодействиях в системе и конкуренции мод [3].

В моделях лазерной и микролазерной генерации, основанных на теории Лэмба—Скалли, обычно рассматривают некогерентную накачку, которая приводит к возбуждению двухуровневого атома на верхний или нижний рабочий уровень [4]. Однако в общем случае может возникать смешанное состояние или атомная когерентность. Причиной этого для лазера или микролазера служит, например, разброс по скоростям в атомном пучке, взаимодействующем с π -импульсом поля накачки. Здесь из-за различия доплеровского сдвига частоты рабочего перехода невозможно перевести все атомы в верхнее состояние, поэтому часть из них будет попадать в зону генерации в смешанном состоянии. Немонокинетичность атомного пучка рассматривалась в [5], где прове-

*E-mail: vn@vg3024.spb.edu

†E-mail: tai@at3025.spb.edu

ден численный анализ уравнения для матрицы плотности поля с учетом усреднения по скоростям. Однако, регулируя импульс накачки, можно специально создавать смешанное состояние атома. При этом свойства генерируемой системы оказываются другими. Анализ такой лазерной и мазерной генерации в условиях однофотонного взаимодействия двухуровневых атомов проведен в работах [6]. В работах [7] показана возможность формирования поля в сжатых состояниях для генерации на каскадных переходах, когда атомная когерентность создана между верхним и нижним состояниями трехуровневой системы, а в работе [8] — для Λ - и V -типов переходов.

Целью настоящей работы является анализ оптических систем, где накачка создает атомную когерентность на рабочих уровнях. Мы рассматриваем влияние последней на стационарные режимы генерации двухфотонного перехода, ширину линии и формирование статистики света. Активные атомы, которые моделируются двухуровневой системой, после резонансного двухфотонного взаимодействия с импульсом когерентной накачки инжектируются в оптический резонатор. Наличие атомной когерентности приводит к возникновению стационарного режима генерации как в случае отрицательной инверсной заселенности на рабочих уровнях, так и при их одинаковой заселенности. Из-за захвата фаз контур линии генерации становится монохроматическим.

Влияние двух факторов — начальной когерентности атомного пучка и нелинейности двухфотонного перехода — приводит к возможности формирования фазово-сжатого состояния поля лазерной генерации с предельным подавлением шумов в регистрации. Фотонная статистика лазерного поля всегда остается классической. Для двухфотонного микромазера в обычном случае поле обладает квантовыми особенностями, проявляющимися в статистике фотонов, при этом уровень подавления дробовых шумов не превышает 33% [9]. Для безынверсного перехода найдены условия более высокого подавления. На таком переходе возможно сформировать поле и в фазово-сжатом состоянии.

В модели Лэмба—Скалли обычно выводится кинетическое уравнение для матрицы плотности поля, которое является исходным пунктом анализа статистики света. Это операторное уравнение, которое записывают либо в матричном виде, либо в диагональном представлении. Здесь мы приводим формализм, который позволяет сразу записать уравнение Фоккера—Планка для глауберовской квазивероятности двухфотонного лазера и микромазера. Методика вывода этого уравнения для модели Лэмба—Скалли описана в разд. 2. В разд. 3 вычислены коэффициенты этого уравнения с учетом произвольного состояния активных атомов, инжектируемых в резонатор. Механизм накачки атомного пучка рассмотрен в разд. 4. В разд. 5 обсуждается лазерная генерация, в частности, на безынверсном переходе. Ширина линии лазерной генерации и свойства микромазера рассмотрены в разд. 6 и разд. 7.

2. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ МОДЕЛИ ЛЭМБА—СКАЛЛИ

В стандартной теории Лэмба—Скалли рассмотрим двухфотонное взаимодействие двухуровневых атомов с неосновным рабочим переходом, которые инжектируются со скоростью r в высокочастотный резонатор. Исходным служит уравнение для матрицы плотности F , которое описывает взаимодействие одного атома и поля:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = [V, F] + RF, \quad (1)$$

$$V = g(A_{ba}a^{\dagger 2} - a^2 A_{ab}). \quad (2)$$

Здесь $A_{ab} = |a\rangle\langle b|$ — одноатомный оператор, переводящий атом с нижнего рабочего уровня b на верхний a , g — константа взаимодействия с резонаторной модой, операторы рождения и уничтожения которой обозначены a^{\dagger} и a . Выход поля из резонатора и уход атома с рабочих уровней описываются оператором релаксации R . Уравнения приведены для случая точного резонанса. Поскольку атом влетает в резонатор в момент времени $t = 0$ в заданном состоянии $F_A(0)$, имеем

$$F(0) = F_A(0)\rho(0), \quad (3)$$

где $\rho = \text{Sp}_A F$ — матрица плотности поля.

Чтобы записать кинетическое уравнение для матрицы плотности ρ , введем обычное предположение о медленном изменении поля. Согласно этому приближению за время T взаимодействия атома с полем, в течение которого атом пролетает через резонатор, $\rho(T) \approx \rho(0)$, при этом $F_{mn}(T) = 0$ для $m, n = a, b$. Изменение матрицы плотности поля от одного атома $\Delta\rho = \rho(T) - \rho(0)$ можно найти из уравнения (1) с учетом (3)

$$F(T) - F_A(0)\rho(0) = \int_0^T ([V, F] + RF) dt. \quad (4)$$

Вводя изменение матрицы плотности поля за счет вкладов от rT атомов, $\Delta\rho = rT\delta\rho$, кинетическое уравнение можно представить в виде

$$\frac{\Delta\rho}{T} = r\text{Sp}_A \int_0^T [V, F] dt + R_F \rho, \quad (5)$$

где левая часть представляет собой крупномасштабную производную по времени, а оператор R_F описывает выход излучения из резонатора.

Относительно приведенного подхода заметим следующее. Если время взаимодействия атома с полем T мало по сравнению с характерными атомными временами релаксации, то приведенный метод является основой для описания мазера или микромазера, где в исходных уравнениях (1), (4) следует опустить атомную релаксацию. При описании накачки, где необходимо задать начальное состояние атома $F_A(0)$, обычно ограничиваются некогерентной моделью, считая, что атом инжектируется в резонатор, находясь на верхнем или на нижнем рабочем уровне. Здесь мы будем учитывать общий случай, где накачка создает атомную когерентность $\langle a|AF_A(0)|b\rangle$. Для этого удобно использовать формализм, приведенный в [10]. Он позволяет сразу записать исходное уравнение Фоккера—Планка для глауберовской квазивероятности $P(\alpha)$, минуя весьма трудоемкий вывод операторного уравнения для матрицы плотности ρ , который является лишь промежуточным этапом.

Для одноатомной матрицы плотности F введем квазивероятность Φ :

$$F = \int \Phi|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha, \quad (6)$$

которая является операторной функцией от атомных переменных, а при усреднении по атомам дает глауберовскую квазивероятность $\text{Sp}_A \Phi = P(\alpha)$. Из (1) для Φ следует уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [V_0, \Phi] + \partial(d\Phi) + R\Phi, \quad (7)$$

где

$$V_0 = gA_{ba}\alpha^{*2} - gA_{ab}\alpha^2,$$

$$\partial(dX) = - \left[g \frac{\partial}{\partial \alpha} 2\alpha^{*2} |b\rangle \langle a| X + g \frac{\partial}{\partial \alpha^*} 2\alpha^2 X |a\rangle \langle b| \right] + \left[g \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} |b\rangle \langle a| X + g \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} X |a\rangle \langle b| \right]. \quad (8)$$

Здесь происхождение первого слагаемого в скобках связано с шумами атомной системы, а второго — с используемым нами диагональным представлением для поля. Для Φ воспользуемся представлением

$$\Phi(t) = P(0)\varphi(t) + \Pi(t),$$

где φ — одноатомная матрица плотности: $\text{Sp}_A \varphi = 1$. Поскольку поле развивается медленно, для глауберовской квазивероятности P можно считать $P(0) \approx P(T)$. Для функции Π (здесь она не является корреляционной матрицей) получаем следующие свойства:

$$\Pi(0) = 0, \quad \text{Sp}_A \Pi \neq 0, \quad \text{Sp}_F \Pi \neq 0, \quad \text{Sp}_{AF} \Pi = 0,$$

где индексами A и F обозначены переменные атомной и полевой систем, по которым проводится усреднение. Обозначим далее усреднение по атомам $\text{Sp}_A = \langle \dots \rangle$. Из (7) для P , φ и Π следуют уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \langle \partial(d\varphi) \rangle P(0) + \langle \partial(d\Pi) \rangle + R'_F P, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = [V_0, \varphi] + R'_A \varphi, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi = [V_0, \Pi] + \partial(d\varphi)P(0) + \partial(d\Pi) + (R'_A + R'_F)\Pi, \quad (11)$$

где $\partial(dX)$ определено согласно (8), а R'_F, R'_A — релаксационные операторы в представлении (6).

Изменение поля от одного атома можно найти из (9):

$$\delta P = \int_0^T ((\partial(d\varphi))P(0) + \langle \partial(d\Pi) \rangle) dt, \quad (12)$$

где мы опустили релаксационное слагаемое. Чтобы получить для квазивероятности P уравнение Фоккера—Планка, решение для функции Π должно содержать производные по α не выше первого порядка. Это легко получить, решая (11), например, методом итераций. В результате вместо (5) для P получим уравнение

$$\frac{\Delta P}{T} = r \int_0^T ((\partial(d\varphi))P(0) + \langle \partial(d\pi) \rangle) dt, \quad (13)$$

где функции φ и π определяются из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi &= [V_0, \varphi] + R'_A \varphi, \\ \frac{\partial}{\partial t}\pi &= [V_0, \pi] + \partial((d\varphi))P(0) + R'_A \pi.\end{aligned}$$

Здесь $\varphi(0) = \varphi^0$ определяется начальным состоянием атома, инжектируемого в резонатор, а $\pi(0) = 0$. Сформулированная задача для функций φ и π сразу приводит к уравнению Фоккера—Планка для глауберовской квазивероятности.

3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения для φ и π имеют одинаковую структуру. Их можно представить в матричном виде:

$$\partial_t f_{mn} = [V_0, f]_{mn} + (R'_A f)_{mn} + \Gamma_{mn}, \quad (14)$$

где

$$\Gamma = -g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} 2\alpha^* |b\rangle \langle a| \varphi + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} 2\alpha \varphi |a\rangle \langle b| \right) P(0).$$

Отсюда следует, что $f = \varphi$, где $\varphi(0) = \varphi^0$, если $\Gamma = 0$, и $f = \pi$, где $\pi(0) = 0$, если $\Gamma \neq 0$. Учитывая, что $P(0) \approx P(T)$, перепишем кинетическое уравнение (5) в виде

$$\partial_t P = -rg \frac{\partial}{\partial \alpha} 2\alpha \left[\int_0^T \varphi_{ab}(t) dt + \int_0^T \pi_{ab}(t) dt \right] P + \text{с.с.} \quad (15)$$

Чтобы записать уравнение (15), нужно найти решения базисной системы (14), которая описывает эволюцию атомов в приближении «заданного поля» на интервале времени T . Характер эволюции существенно зависит от соотношения между T и временем релаксации атомов γ^{-1} . Обычно различают два случая. При $T\gamma \gg 1$, когда атом достигает стационарного состояния, а в этой модели он уходит с рабочих уровней, говорят о лазерной генерации. Если $T\gamma \ll 1$, когда атомную релаксацию можно не учитывать, полагая $\gamma = 0$, говорят о мазерной или микромазерной генерации. В этом случае спустя время T атом покидает резонатор, что эквивалентно уходу с рабочих уровней.

Для микромазера уравнения (14), где следует положить $R'_A = 0$, удобно решать, например, с помощью преобразования Лапласа:

$$f(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt.$$

Тогда

$$s f_{mn}(s) - f_{mn}(0) = [V_0, f(s)]_{mn} + \Gamma_{mn} \quad (16)$$

и коэффициенты кинетического уравнения определяются решениями (16):

$$\int_0^T f(t)dt = \int ds \frac{\exp(sT) - 1}{s} f(s). \quad (17)$$

Для лазера можно воспользоваться простой моделью релаксации, где все релаксационные константы одинаковы, и пренебречь распадом на рабочем переходе:

$$(R'_A f)_{mn} = -\gamma f_{mn}. \quad (18)$$

Тогда для коэффициентов кинетического уравнения справедливо соотношение

$$\int_0^T f(t)dt = f(s), \quad (19)$$

где $f(s)$ — решение (16) при $s = \gamma$.

Можно рассмотреть произвольный случай соотношения $T\gamma$. Тогда

$$\int_0^T f(t)dt = \int ds \frac{\exp(sT) - 1}{s} f(s + \gamma), \quad (20)$$

где $f(s)$ — по-прежнему решения (16), а замена $s \rightarrow s + \gamma$ означает учет релаксации в форме (18). В итоге уравнение Фоккера—Планка для глауберовской квазивероятности принимает вид

$$\partial_t P = (\partial_\alpha 2\alpha^* \Lambda_1 + \partial_{\alpha\alpha}^2 \Lambda_2 + \partial_{\alpha\alpha}^2 2\alpha^* \Lambda_3) P + \text{c.c.}, \quad (21)$$

где коэффициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Lambda_1(s) &= -rg \left\{ \frac{\varphi_{ab}^0}{s} + g\alpha^2 \frac{s(\varphi_{aa}^0 - \varphi_{bb}^0) - 2g(\alpha^* \varphi_{ab}^0 + \text{c.c.})}{s(s^2 + 4g^2|\alpha|^4)} \right\} + \frac{1}{2} C\alpha, \\ \Lambda_2(s) &= -rg^2 2\alpha^* \left\{ \frac{4g^2 \alpha^3 |\alpha|^2 \varphi_{aa}(s) + 2sg |\alpha|^2 \alpha \varphi_{ab}(s)}{s(s^2 + 4g^2|\alpha|^4)} \right\} - \left\{ -\Lambda_1 + \frac{1}{2} C\alpha \right\}, \\ \Lambda_3(s) &= -rg^2 2\alpha \left\{ -\frac{\varphi_{aa}(s)}{s} + \frac{2g^2 |\alpha|^4 \varphi_{aa}(s) + sg\alpha^2 \varphi_{ba}(s)}{s(s^2 + 4g^2|\alpha|^4)} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{mn}(s)$ — решение системы (16) с начальными условиями φ_{mn}^0 , C — резонаторная ширина, характеризующая скорость выхода поля из резонатора. В слагаемых коэффициента $\Lambda_2(s)$ мы по-прежнему выделили вклады, обусловленные шумами атомной системы (первое слагаемое в скобках) и P -представлением для поля (второе слагаемое). Для лазерной генерации в соответствии с (19) следует положить

$$s = \gamma,$$

а для описания микромазера, учитывая (17),

$$\Lambda(s) \rightarrow \int ds \frac{\exp(sT) - 1}{s} \Lambda(s).$$

Заметим, что частный случай $\varphi_{ab}^0 = 0$ приводит к хорошо известным уравнениям микромазерной и лазерной теорий [9, 11].

4. МОДЕЛЬ НАКАЧКИ

Заселенности рабочих уровней φ_{aa}^0 , φ_{bb}^0 и когерентность φ_{ab}^0 определяются механизмом накачки и не являются в общем случае величинами независимыми. Пусть исходные атомы или атомный пучок также двухфотонно взаимодействует с классическим полем накачки, частота Раби которого равна

$$\Omega = 2g|\alpha_0|^2.$$

Пусть заселенность нижнего рабочего уровня N_b . Далее (исключительно для простоты) положим $N_b \approx 1$. Если время взаимодействия $\tau \ll \gamma^{-1}$, то состояние атомов определяется матрицей плотности

$$\varphi_{ab}^0 = -\frac{1}{2} \exp(2i \arg \alpha_0) \sin(\Omega\tau), \quad (22)$$

$$\varphi_{aa}^0 - \varphi_{bb}^0 = -\cos(\Omega\tau), \quad (23)$$

$$\varphi_{aa}^0 = \frac{1}{2} (1 - \cos(\Omega\tau)), \quad (24)$$

где α_0 — амплитуда поля накачки. Эти решения хорошо известны.

В зависимости от величины $\Omega\tau$ или «площади импульса» возможны следующие состояния атома:

1. В области $\pi/2 < \Omega\tau \leq \pi$ инверсия положительна. При $\Omega\tau = \pi$ атом находится на верхнем уровне, а когерентность $\varphi_{ab}^0 = 0$.

2. При $0 < \Omega\tau < \pi/2$ инверсия отрицательна, переход безынверсный. Если $\Omega\tau = \pi/2$, заселенности обоих уровней одинаковы и равны $1/2$, а когерентность максимальна: $|\varphi_{ab}^0| = 1/2$.

5. ЛАЗЕРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В БЕЗЫНВЕРСНОЙ СРЕДЕ. СТАТИСТИКА ФОТОНОВ

В оптической схеме, приведенной на рис. 1а, классическое поле накачки создает на рабочих уровнях атома заселенности φ_{aa}^0 , φ_{bb}^0 и когерентность

$$\varphi_{ab}^0 = \tilde{\varphi}_{ab}^0 \exp(2i\varphi_0), \quad (25)$$

которые определены согласно (22), (23) и (24). Атомы инжектируются в высокочастотный резонатор, где взаимодействуют с резонаторной модой, частота которой равна половине частоты рабочего перехода. Скорость ухода атома с рабочих уровней одинакова и равна γ , как показано на рис. 1б. Здесь рассматривается случай $\gamma T \gg 1$, что отвечает лазерной генерации, который описывается уравнением (21).

Ограничиваясь в уравнении (21) производными по α только первого порядка, найдем его решение:

$$P(\alpha, t) = \delta(\alpha - z(t)).$$

Здесь комплексная амплитуда поля в резонаторе z , где $|z|^2 = n$ — среднее число фотонов, удовлетворяет полуклассической задаче

$$\partial_t n = 2An^2 \frac{\varphi_{aa}^0 - \varphi_{bb}^0}{1 + \beta n^2} + \frac{4An}{\sqrt{\beta}} \frac{\tilde{\varphi}_{ab}^0 \cos \psi}{(1 + \beta n^2)} - Cn, \tag{26}$$

$$\partial_t \psi = -4 \frac{A}{\sqrt{\beta}} \tilde{\varphi}_{ab}^0 \sin \psi, \tag{27}$$

где $A = (2g^2/\gamma)(r/\gamma)$ — линейный коэффициент усиления, r/γ — число атомов в резонаторе, βn^2 — безразмерная интенсивность, $\beta = 4(g/\gamma)^2$ — параметр насыщения, $\psi = 2(\arg z - \arg \alpha_0)$ — разность фаз поля генерации и когерентности, величина $\tilde{\varphi}_{ab}^0$ определена согласно (25), C — резонаторная ширина, описывающая выход излучения.

Присутствие начальной когерентности приводит к двум особенностям генерации. Во-первых, в уравнении для n появляется дополнительное слагаемое. Во-вторых, возникает захват фазы поля генерации и фазы начальной когерентности. Последнее приводит к тому, что в стационарном режиме устанавливается разностная фаза, для которой

$$\sin \psi_0 = 0. \tag{28}$$

При этом значение ψ_0 определяется начальной когерентностью:

$$\tilde{\varphi}_{ab}^0 \cos \psi_0 > 0. \tag{29}$$

Условие (29) вытекает из требования устойчивости стационарного режима. С учетом (29) и (22) получим

$$\tilde{\varphi}_{ab}^0 \cos \psi_0 = \frac{1}{2} |\sin \Omega \tau|.$$

Тогда стационарное число фотонов в резонаторе будет определяться выражением

$$\frac{2An}{1 + \beta n^2} \left(-\cos \Omega \tau + \frac{|\sin \Omega \tau|}{\sqrt{\beta n}} \right) = C. \tag{30}$$

При $\Omega \tau = \pi$ из (30) следует обычное для двухфотонного лазера условие стационарной генерации, где необходимое пороговое условие для коэффициента усиления имеет вид

$$A > C \frac{1 + \beta n^2}{2n}. \tag{31}$$

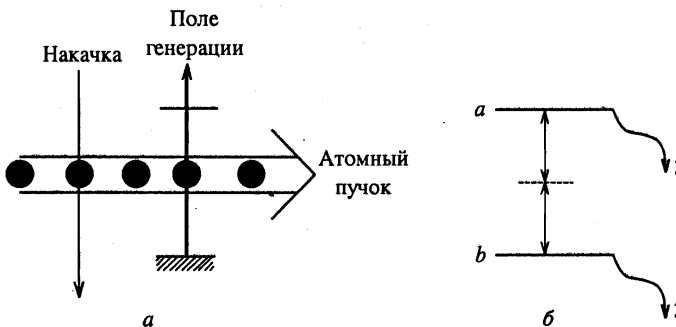


Рис. 1. а — Оптическая схема, б — схема рабочих уровней

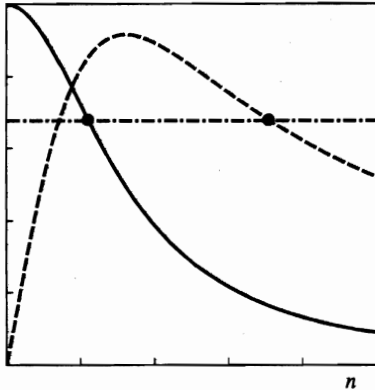


Рис. 2. Графическое решение уравнения (26) в стационарном случае для безынервного двухфотонного лазера (сплошная линия), обычный двухфотонный лазер (штриховая линия). Уровень потерь — штрих-пунктирная линия. Устойчивые режимы генерации показаны точками

При $\Omega\tau = \pi/2$ режим генерации устойчивый, а условия (31) не требуется. Если $\Omega\tau < \pi/2$, инверсия на рабочем переходе отрицательна. Стационарный режим возникает при условии

$$\frac{|\sin(\Omega\tau)|}{\sqrt{\beta n}} > \cos(\Omega\tau). \quad (32)$$

Заметим, что для случая безынервного лазера условия генерации более «мягкие», чем в случае обычного лазера, устойчивый режим генерации которого выделен точкой на рис. 2.

Чтобы определить статистику фотонов, воспользуемся условием малых флуктуаций для числа фотонов в резонаторе:

$$|\alpha|^2 = n + \epsilon, \quad \epsilon \ll n, \quad (33)$$

где n определено согласно (30). При условиях (33) для квазивероятности

$$R(\epsilon, t) = \int P(\alpha, t) d(\arg \alpha),$$

которая описывает флуктуации фотонов в стационарном режиме, получаем уравнение

$$\partial_t R = (\Gamma_\epsilon \partial_\epsilon \epsilon + D_{\epsilon\epsilon} \partial_\epsilon^2) R, \quad (34)$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma_0 \frac{(2\sqrt{\beta n} |\sin(\Omega\tau)| (\beta n^2 - 1)^{-1} - \cos(\Omega\tau))}{|\sin(\Omega\tau)| / \sqrt{\beta n} - \cos(\Omega\tau)},$$

$$D_{\epsilon\epsilon} = D_0 \left(\frac{|\sin(\Omega\tau)|}{\sqrt{\beta n}} - \cos(\Omega\tau) \right)^{-1} \left(2 \frac{1 + \beta n^2}{5 + \beta n^2} + \frac{|\sin \Omega\tau|}{\sqrt{\beta n}} \frac{1 - 3\beta n^2}{5 + \beta n^2} - \cos(\Omega\tau) \frac{3 - \beta n^2}{5 + \beta n^2} \right).$$

Здесь

$$\Gamma_0 = C \frac{\beta n^2 - 1}{\beta n^2 + 1}, \quad D_0 = \Gamma_0 n \xi, \quad \xi = \frac{5 + \beta n^2}{2(\beta n^2 - 1)}.$$

Величины Γ_0 , D_0 и параметр Мандела ξ отвечают случаю обычного двухфотонного лазера, для которого следует положить $\Omega\tau = \pi$.

Диффузионный коэффициент $D_{\epsilon\epsilon}$ в уравнении Фоккера—Планка для R всегда оказывается положительным (как для случая обычного лазера, так и в условиях безынверсного), и статистика фотонов оказывается классической, более того, статистика всегда сверхпуассоновская.

6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ КОНТУР ДВУХФОТОННОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ФАЗОВО-СЖАТЫЙ СВЕТ

Спектральный контур линии генерации определяется фурье-образом корреляционной функции $G(\tau) = \langle a^\dagger(0)a(\tau) \rangle$:

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\Omega\tau)g(\tau)d\tau. \quad (35)$$

Чтобы найти $G(\Omega)$, воспользуемся условием малых флуктуаций, полагая, что флуктуации фазы поля μ малы:

$$\varphi = \varphi_{st} + \mu, \quad \mu \ll 1, \quad \varphi_{st} = (1/2)(\psi_0 + \varphi_0). \quad (36)$$

Здесь ψ_0 и φ_0 определены согласно (29) и (25). Тогда выражение для $G(\tau)$ можно представить в виде

$$G(\tau) = n \left[1 + \frac{1}{4n^2} \langle \epsilon(0)\epsilon(\tau) \rangle + \langle \mu(0)\mu(\tau) \rangle \right] \exp(-i\omega\tau), \quad (37)$$

где n — стационарное число фотонов в резонаторе, определяемое (30), а $\langle \epsilon(0)\epsilon(\tau) \rangle$ — корреляционная функция флуктуации числа фотонов, которую можно найти с помощью (34). Корреляционную функцию флуктуаций фазы $\langle \mu(0)\mu(\tau) \rangle$ найдем из уравнения, которое следует из (21) в условиях малых флуктуаций:

$$\partial_t Y = (\Gamma_\mu \partial_\mu \mu + D_{\mu\mu} \partial_\mu^2) Y, \quad (38)$$

$$Y(\mu, t) = \int P(\alpha, t) d|\alpha|^2.$$

Здесь

$$\Gamma_\mu = \frac{2A|\sin(\Omega\tau)|}{\sqrt{\beta}} = \frac{C|\sin(\Omega\tau)|(1 + \beta n^2)}{|\sin(\Omega\tau)| - \sqrt{\beta}n \cos(\Omega\tau)}, \quad (39)$$

$$D_{\mu\mu} = \frac{\Gamma_\mu}{8n} \left\{ -\frac{1 + 3\beta n^2 + 2\beta^2 n^4}{(1 + \beta n^2)^2} + \frac{\sqrt{\beta}n}{|\sin \Omega\tau|} \left(2 - \frac{\cos(\Omega\tau)}{1 + \beta n^2} \right) \right\}. \quad (40)$$

В отличие от обычного лазера фаза генерации имеет стационарное распределение при $\Gamma_\mu \neq 0$. Это следствие захвата фаз, который приводит к спектральной линии, состоящей

из монохроматической компоненты и двух лоренцевских контуров на частоте генерации, обусловленных амплитудными и фазовыми флуктуациями:

$$G(\Omega) = n \left[\delta(\Omega - \omega) + \frac{D_{\epsilon\epsilon}}{2n^2\Gamma_\epsilon} \frac{\Gamma_\epsilon^2}{(\Omega - \omega)^2 + \Gamma_\epsilon^2} + \frac{2D_{\mu\mu}}{\Gamma_\mu} \frac{\Gamma_\mu^2}{(\Omega - \omega)^2 + \Gamma_\mu^2} \right]. \quad (41)$$

Введем в рассмотрение параметр η :

$$\eta = 4n \frac{D_{\mu\mu}}{\Gamma_\mu}, \quad (42)$$

отрицательное значение которого свидетельствует о сжатии фазовой квадратуры поля. Поле в таком сжатом состоянии может обнаруживать провал ниже уровня дробового шума в низкочастотной области спектра шумов при гетеродинной регистрации:

$$i^2(\Omega) = 1 + Q \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\Omega\tau) \langle \mu(0)\mu(\tau) \rangle d\tau. \quad (43)$$

Здесь нормировка выбрана так, что дробовому уровню отвечает единица, а Q — квантовая эффективность гетеродинного приема.

Наблюдаемой является относительное уменьшение уровня шумов, определяемое с помощью введенных обозначений выражением

$$\delta = i^2(0) - 1 = 2Q \frac{C}{\Gamma_\mu} \eta. \quad (44)$$

Для безынервного двухфотонного лазера, впрочем как и для лазера с отрицательной инверсией, при малой интенсивности $\sqrt{\beta}n \ll 1$ реализуется предельное фазовосжатое состояние поля генерации, при этом $\eta \rightarrow (-1/2)$, а шумы в области $\Omega \approx 0$ полностью подавлены ($\delta \rightarrow -1$).

7. БЕЗЫНВЕРСНЫЙ ДВУХФОТОННЫЙ МИКРОМАЗЕР

В случае безынервного двухфотонного микромазера $T\gamma \ll 1$. Полуклассические уравнения генерации имеют вид

$$\partial_t n = 2r(\varphi_{aa}^0 - \varphi_{bb}^0) \sin^2 I + 2r\bar{\varphi}_{ab}^0 \cos \psi \sin I \cos I - Cn, \quad (45)$$

$$\partial_t \psi = -4rgT\bar{\varphi}_{ab}^0 \sin \psi, \quad (46)$$

где безразмерная интенсивность определена теперь соотношением

$$I = gnT, \quad n = |z|^2.$$

Аналогично случаю лазера, здесь в стационарном режиме происходит захват фазы начальной когерентности и фазы поля генерации, что приводит к условию (29). В результате среднее число фотонов в резонаторе определяется из условия

$$2r(\varphi_{aa}^0 - \varphi_{bb}^0) \sin^2 I + r|\varphi_{ab}^0| \sin I \cos I = Cn. \quad (47)$$

Чтобы найти статистику фотонов с помощью приближения малых флуктуаций, запишем уравнение (34) для функции распределения R , где коэффициенты определены соотношениями

$$\Gamma_\epsilon = \frac{\Gamma_0}{|\sin(\Omega\tau)| - 2 \cos(\Omega\tau) \operatorname{tg} I} \left\{ \cos(\Omega\tau) \frac{2(2I - \operatorname{tg} I)}{1 - 2I \operatorname{ctg} I} + |\sin(\Omega\tau)| \left(1 + \frac{I(\operatorname{tg} I + \operatorname{ctg} I)}{1 - 2I \operatorname{ctg} I} \right) \right\}, \quad (48)$$

$$D_{\epsilon\epsilon} = \frac{2D_0}{1 + 4I \operatorname{ctg} I} \left\{ \frac{2 \operatorname{tg} I + \cos(\Omega\tau)(\operatorname{tg} I - 4I) + (1/2)|\sin(\Omega\tau)|(1 - 4I \operatorname{ctg} I + 4I \operatorname{tg} I)}{|\sin(\Omega\tau)| - 2 \cos(\Omega\tau) \operatorname{tg} I} \right\}. \quad (49)$$

Здесь величины

$$\Gamma_0 = C [1 - 2I \operatorname{ctg} I], \quad (50)$$

$$D_0 = \frac{Cn}{2} [1 + 4I \operatorname{ctg} I] \quad (51)$$

отвечают случаю обычного двухфотонного лазера. Режимы генерации, определяемые решениями (47), устойчивы, если значение $\Gamma_\epsilon > 0$.

Используя (48) и (49), определим внутрирезонаторный параметр Мандела ξ :

$$\xi = \frac{D_{\epsilon\epsilon}}{\Gamma_\epsilon n}. \quad (52)$$

Значение ξ определяет отличие статистики фотонов от пуассоновской:

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = n(1 + \xi).$$

При $\xi < 0$ состояние света является неклассическим с субпуассоновской статистикой. При измерении спектра фототока или спектра шума $i^2(\Omega)$ в области $\Omega \approx 0$ параметр Мандела определяет уровень избыточного шума по отношению к дробовой компоненте:

$$\begin{aligned} i^2(0) &= 1 + \delta, \\ \delta &= 2q\xi \frac{C}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь q — квантовая эффективность детектора, а уровень дробового шума принят равным единице.

Для случая $\Omega\tau = \pi$, когда активные атомы инжектируются в резонатор только на верхнем рабочем уровне, из (53) с учетом (50), (51) найдем известный результат [9]:

$$\delta = q \frac{1 + 2y}{(1 - y)^2}, \quad y = 2I \operatorname{ctg} I. \quad (54)$$

Значение $y = -2$ является оптимальным для формирования провала в спектре шумов фототока. При этом величина $\delta = -q/3$, что отвечает снижению шумов в низкочастотной области до 33% от дробового уровня.

Численный анализ выражения (53) с учетом (48), (49) показывает, что оптимальное минимальное значение δ реализуется в случае начального атомного состояния рабочих

атомов лазера без инверсии при $\Omega\tau = \pi/2$, т. е. максимального проявления атомной когерентности. При этом условии может быть реализована целая серия почти периодических состояний, при которых минимальное значение параметра $\delta \approx -0.6q$. Их реализация определена конкретным значением параметра n , а следовательно, и параметрами лазерной системы — решением уравнения (47) и одновременным выполнением условия $\Gamma_\epsilon > 0$. Незначительное изменение n является «губительным» для квантовой статистики, и в этом смысле условия генерации являются жесткими.

Эволюция линейризованной в условиях малых флуктуаций (36) фазы поля генерации определяется уравнением (38), в котором коэффициенты Γ_μ и $D_{\mu\mu}$ с учетом стационарного режима (47) имеют вид

$$\Gamma_\mu = 2rgT|\sin(\Omega\tau)| = \frac{2CI|\sin(\Omega\tau)|}{\sin I \cos I(|\sin(\Omega\tau)| - 2 \cos(\Omega\tau) \operatorname{tg} I)}, \quad (55)$$

$$D_{\mu\mu} = \frac{\Gamma_\mu}{4n} \left[-1 + \frac{I}{|\sin(\Omega\tau)|} - \frac{\cos(\Omega\tau)}{|\sin(\Omega\tau)|} \frac{\sin^2 I}{2I} + \frac{\sin I \cos I}{4I} \right]. \quad (56)$$

Максимальное проявление эффекта фазового сжатия для поля микролазерной двухфотонной генерации также наблюдается в случае безынервной атомной среды $\Omega\tau = \pi/2$. Уровень подавления шумов (44) гетеродинного приема в области $\Omega \approx 0$ в этом случае определяется выражением

$$\delta = Q \frac{C}{\Gamma_{0\mu}} \left\{ \frac{C}{\Gamma_{0\mu}} + \frac{\Gamma_{0\mu}}{2C} \sin(2I) - 2 \right\}. \quad (57)$$

Здесь Q — квантовая эффективность гетеродинного приема, а

$$\frac{C}{\Gamma_{0\mu}} = \frac{\sin I \cos I}{2I}.$$

Только в случае генерации поля малой интенсивности $I \ll 1$ мы имеем максимально возможное подавление в спектре шумов фотоприема в низкочастотной области $\delta \rightarrow -3/4Q$. Заметим, что найденные условия являются устойчивыми (Γ_μ (55) и Γ_ϵ (48) — положительные).

8. ВЫВОДЫ

На основе модели Лэмба—Скалли построена теория, позволяющая одновременно рассматривать лазерную и микролазерную генерации света на активных атомах, находящихся изначально в смешанном состоянии. Такое начальное состояние позволяет генерировать свет на атомах без инверсии и даже с отрицательной инверсией на переходе. Явление захвата фаз когерентности и генерируемого поля обуславливает монохроматичность линии генерации.

Нами проанализированы условия, в которых возникают сжатые состояния света. Показано, что статистика фотонов лазерной генерации всегда оказывается классической, однако удается получить фазово-сжатое состояние поля, определяющее полное подавление шумов гетеродинной фоторегистрации. Статистика фотонов микролазерной генерации может оказаться неклассической, при этом на безынервном переходе

можно генерировать свет, уровень подавления шумов регистрации которого составляет около 60% относительно стандартного квантового предела, что больше, чем в условиях обычной двухфотонной генерации на атомах в возбужденном верхнем состоянии. На таком же типе перехода возможна и генерация фазово-сжатого поля, уровень подавления шумов которого при гетеродинном приеме соответствует 75% от дробового.

Литература

1. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, ЖЭТФ **63**, 945 (1986); M. O. Scully, S.-Y. Zhy, and A. Carrielides, Phys. Rev. Lett. **62**, 2813 (1989); O. A. Kocharovskaya and P. Mandel, Phys. Rev. A **42**, 523 (1990).
2. A. J. Merriam and A. V. Sokolov, Phys. Rev. A **56**, 967 (1997); S.-Y. Zhy, De-Zhong Wang, and J.-Y. Gao, Phys. Rev. A **55**, 1339 (1997).
3. P. Bogar and J. A. Bergou, Phys. Rev. A **56**, 1012 (1997); O. A. Kocharovskaya, Yu. V. Rostovtsev, and A. Imamoglu, Phys. Rev. Lett. **58**, 649 (1998).
4. M. O. Scully and W. E. Lamb, Phys. Rev. **159**, 208 (1967); P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, Phys. Rev. A **34**, 4547 (1986); J. Krause, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **34**, 2032 (1986); L. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, Phys. Rev. A **36**, 740 (1987).
5. K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari, and M. S. Feld, Phys. Rev. Lett. **73**, 3375, (1994).
6. N. Lu and R. Bergou, Phys. Rev. A **40**, 237 (1989); N. Lu, Phys. Rev. Lett. **70**, 912 (1993).
7. M. O. Scully, K. Wodkiewicz et al., Phys. Rev. Lett. **60**, 1832 (1988); N. Lu, Phys. Rev. A **45**, 8154 (1992).
8. N. Lu, Phys. Rev. A **45**, 5011 (1992).
9. В. Н. Горбачев, Н. В. Слепухина, А. И. Трубилко, Опт. и спектр. **85**, 155 (1998).
10. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, Quantum Opt. **5**, 193 (1993).
11. Ю. М. Голубев, Опт. и спектр. **46**, 3 (1979).