

## КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ВЫСОКОЙ ГАРМОНИКИ, ИЗЛУЧАЕМОЙ В ПРОЦЕССЕ НАДПороГОВОЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ

Д. Ф. Зарецкий\*

Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия

Э. А. Нерсесов

Московский государственный инженерно-физический институт  
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 1998 г.

Впервые рассмотрена задача об усилении высоких гармоник, генерируемых в процессе надпороговой ионизации атомов в поле мощной лазерной волны. Дается оценка величины коэффициента усиления в зависимости от параметров атомного пучка и волны накачки.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Генерация высоких гармоник является источником когерентного излучения в диапазоне жесткого ультрафиолета. Значительный прогресс в области создания мощных (пиковая интенсивность в импульсе  $I = 10^{13} - 10^{18}$  Вт·см<sup>-2</sup>) ультракоротких импульсов ( $\tau = 600$  фс–1 пс) позволил продвинуться в область длин волн гармоник  $\lambda_s = 10 - 100$  нм [1–4].

В последние годы получен ряд новых экспериментальных результатов в исследовании детальных свойств импульсов высоких гармоник. В частности, получены данные об угловом распределении излучения [5–7], его спектральном профиле [4] и временной картине [8], условиях фазового синхронизма волны высокой гармоники и волны накачки. Кросс-корреляционные эксперименты с высоким разрешением позволили сделать заключение о возможной временной длительности процесса генерации высокой гармоники [9,10].

Совершенствование лазерной техники позволило достичь большого числа фотонов высокой гармоники за импульс ( $N_s \approx 10^6 - 10^{10}$ ) при сравнительно больших плотностях газов (давление в пучке  $P = 10 - 100$  Торр). Эти достижения сделали актуальной постановку вопроса о возможности наблюдения эффекта усиления высоких гармоник в процессе их прохождения через область взаимодействия волны накачки и атомного пучка.

В данной работе впервые рассмотрена задача об усилении высоких гармоник, генерируемых в процессе надпороговой ионизации атомов в поле мощной лазерной волны. Дана оценка величины коэффициента усиления в зависимости от параметров атомного пучка и волны накачки.

\*E-mail: zaretsky@imp.kiae.ru

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается эффект усиления импульса высокой гармоники, когда в область взаимодействия пучка атомов с сильной волной накачки в направлении этой волны посылается слабая пробная волна интенсивности  $I_2$  с частотой  $\Omega \approx s\omega$  ( $s$  — номер гармоники,  $\omega$  — частота волны накачки).

Считаем выполненным приближение заданного поля, когда приращение числа фотонов высокой гармоники на длине области взаимодействия меньше числа фотонов в усиливаемой волне (условие малости коэффициента усиления пробной волны на длине пересечения пучка с пробной волной).

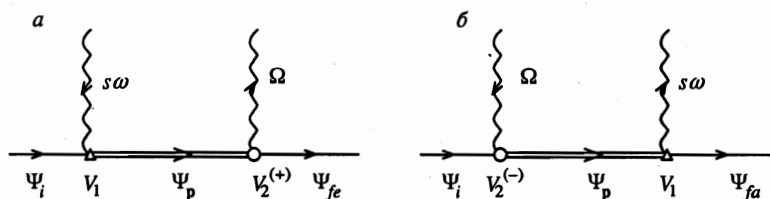
Эффект усиления определяется конкуренцией прямого и обратного процессов (соответственно с излучением и поглощением квантов высокой гармоники). Представленные на рисунке графики описывают процессы, протекающие при условии одновременного присутствия обеих волн в объеме взаимодействия. Рисунок *a* соответствует процессу с поглощением атомом  $s$  квантов лазерной волны, переходом электрона в виртуальное состояние непрерывного спектра  $\Psi_p$  (известное волковское решение в поле сильной волны (модель Келдыша—Файсала—Риса [11])) и последующей вынужденной рекомбинацией в основное состояние атома с излучением одного кванта  $\Omega$ . Рисунок *b* отвечает обратному процессу с поглощением кванта  $\Omega$ . Начальная  $\Psi_i$  и конечная  $\Psi_{f_e, a}$  функции системы «электрон + ион» относятся к основному состоянию атома; при этом функции  $\Psi_{f_e}$  и  $\Psi_{f_a}$  различаются энергией и импульсом атома после взаимодействия с электромагнитными полями.

Коэффициент усиления пробной волны определяется полной вероятностью процесса:

$$G \propto \Delta w = w_e - w_a, \quad (1)$$

где  $w_{e, a}$  — соответственно вероятности вынужденного излучения и поглощения кванта  $\Omega$  системой атомов в объеме взаимодействия.

Обратим внимание на особенность рассматриваемой задачи. Поскольку до и после взаимодействия с волнами атом находится в основном состоянии, матричные элемен-



Вершина, представленная в виде треугольника с волнистой линией, отвечает взаимодействию электрона с полем волны накачки, приводящему к прямой многофотонной ионизации атома из основного состояния в виртуальное состояние непрерывного спектра; вершина, изображенная волнистой линией с точкой, описывает взаимодействие фотоэлектрона в континууме с полем пробной волны, приводящее к рекомбинации в основное состояние атома с излучением кванта высокой гармоники  $\Omega$  (случай *a*); двойная линия со стрелкой изображает состояние фотоэлектрона в непрерывном спектре, возникающее в поле сильной волны (метод Келдыша). Случай *b* отвечает обратному процессу, и смысл обозначений тот же, что и в случае *a*

ты для процессов *a* и *b* (см. рисунок), записанные без учета движения центра масс системы «электрон + ион», равны, и, соответственно,  $\Delta w = 0$ . Ненулевой результат в (1) может возникнуть только на базе волновых функций, учитывающих совместное движение электрона и иона. В этом случае необходимо принять во внимание эффект отдачи, который возникает, когда эта система излучает или поглощает кванты поля. В такой постановке рассматриваемая задача становится аналогичной известной проблеме о вынужденном комптоновском излучении электрона (см., например, [12]). Отметим общую формальную особенность этих задач. Поскольку в них рассматриваются процессы в полях заданных волн, конечный результат для коэффициента усиления *G* необходимо усреднить по функциям распределения как атомного пучка, так и пробной волны (более подробно этот вопрос обсуждается в разд. 3).

Остановимся на вопросе о базе волновых функций, используемых при вычислении составных матричных элементов графиков на рисунке. Ввиду малости параметра, связанного с отдачей атома, эффект усиления высокой гармоники может быть замечен только в том случае, когда в среде атомов выполнено условие фазового синхронизма излучателей в направлении распространения волн [13]. Фаза атомов определяется фазой когерентной волны накачки, и расчет коэффициента усиления с учетом фазового синхронизма требует учета движения центра масс системы «электрон + ион» и задания абсолютной координаты электрона в лабораторной системе отсчета.

Предполагается выполненным адиабатическое приближение, в соответствии с которым электрон и остаточный ион рассматриваются соответственно как быстрая и медленная подсистемы. Это приближение дает возможность разделить пространственные переменные частиц (отбрасываемые в методе разделения слагаемые в уравнении Шредингера имеют малость  $\sim m_e \varepsilon_p / ME$ , где *M* и *m<sub>e</sub>* — массы соответственно иона и электрона;  $\varepsilon_p$  — энергия фотоэлектрона с импульсом *p*; *E* — кинетическая энергия атома).

Пси-функция начального состояния системы с учетом совместного движения иона и электрона записывается в виде ( $\hbar = c = 1$ )

$$\Psi_i = \exp[-i(Et - \mathbf{PR})] \exp(-iE_0 t) \psi_0(\mathbf{r}) \quad (2)$$

и описывает свободное движение атома с энергией  $E = P^2/2M$  и импульсом *P*, находящегося в основном состоянии  $\psi_0(\mathbf{r})$  с энергией  $E_0$ . Здесь *R* — радиус-вектор атома (иона); *r* — относительный радиус-вектор электрона; нормировочный объем плоской волны положен равным единице. В соответствии с моделью Келдыша [14] считается, что основное состояние атома слабо возмущается полем лазерной волны.

Аналогичным образом представляется волновая функция конечного состояния:

$$\Psi_{f_{e,a}} = \exp[-i(E_{e,a}t - \mathbf{P}_{e,a}\mathbf{R})] \exp(-iE_0 t) \psi_0(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $E_e$ ,  $\mathbf{P}_e$  и  $E_a$ ,  $\mathbf{P}_a$  — значения энергии и импульса, которые приобретает атом в результате излучения (*e*) и поглощения (*a*) кванта *K*,  $\Omega$ .

Промежуточное состояние  $\Psi_p$  на рисунке отвечает иону и электрону в непрерывном спектре и записывается следующим образом:

$$\Psi_p = \exp[-i(E't - \mathbf{P}'\mathbf{R})] \exp[-i(\tilde{\varepsilon}_p t - \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{r}))] \exp(i\alpha_1 \cos \varphi_1) \exp(-i\alpha_2 \sin 2\varphi_2). \quad (4)$$

В (4) введены обозначения:  $E'$  и  $\mathbf{P}'$  — энергия и импульс иона в промежуточном состоянии;  $\tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + U_p$  — энергия фотоэлектрона с учетом пондеромоторной энергии  $U_p = (eE_0 \lambda_0)^2 / 4m_e$  ( $E_0$  — амплитудное значение напряженности электрического поля

в волне накачки,  $\lambda_0 = 1/\omega$ ;  $\vec{p} = \mathbf{p} + (U_p/\omega)\mathbf{k}$  — импульс фотоэлектрона;  $\mathbf{R}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{r}$  — абсолютный радиус-вектор электрона ( $\mathbf{R}_0$  — фиксированный радиус-вектор иона без учета его движения); безразмерные параметры

$$\alpha_1 = \frac{eE_0\mathbf{p}}{m_e\omega^2}, \quad \alpha_2 = \frac{(eE_0\lambda_0)^2}{8m_e\omega} = \frac{U_p}{2\omega} \quad (5)$$

определяются интенсивностью взаимодействия электрона с полем лазерной волны;  $\varphi_1 = \omega t - \mathbf{k}(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{r})$  — фаза волны в момент  $t$  в точке расположения электрона.

Определим выражением

$$\hat{V}_1 = eA_1(t)\hat{\mathbf{p}}/m_e + [eA_1(t)]^2/2m_e \quad (6)$$

оператор взаимодействия электрона с полем волны накачки. Векторный потенциал волны зададим классическим выражением  $A_1(t) = A_{01} \sin \varphi_1$ , где  $A_{01}$  — амплитуда векторного потенциала. Поле волны накачки используется в рамках метода Келдыша [14].

Поле пробной волны учитывается в первом порядке теории возмущений. Оператор возмущения, связанный с этой волной, имеет вид

$$\hat{V}_2 = eA_2(t)\hat{\mathbf{p}}/m_e + e^2A_1(t)A_2(t)/m_e, \quad (7)$$

где  $A_2(t) = A_{02} \sin[\Omega t - \mathbf{K}(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{r})]$  — векторный потенциал пробной волны;  $\mathbf{K}$  и  $\Omega$  — ее волновой вектор и частота.

Амплитуда вероятности перехода электрона из основного состояния атома с номером  $j$  в непрерывный спектр с поглощением нескольких квантов волны накачки и последующей вынужденной рекомбинацией в основное состояние с излучением к моменту  $t$  кванта высокой гармоники  $\mathbf{K}$ ,  $\Omega$  (рисунок *a*) дается выражением

$$A_e^j(t) = (-i)^2 \int \frac{d\mathbf{P}'}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle \Psi_{fe}^{j*} | V_2^{(+)}(t_1) | \Psi_p^j \rangle \langle \Psi_p^{j*} | V_1(t_2) | \Psi_i^j \rangle, \quad (8)$$

где  $\mathbf{P}'$  и  $\mathbf{p}$  — соответственно импульсы иона и фотоэлектрона в виртуальном промежуточном состоянии; в операторе  $V_2(t)$  (7) оставлены слагаемые  $V_2^{(+)}$ , ответственные за излучение. Очевидным образом выглядит аналогичная по смыслу амплитуда вероятности обратного процесса  $A_a^j(t)$  (рисунок *b*).

Полная амплитуда вероятности вынужденного излучения (поглощения) кванта  $\mathbf{K}$ ,  $\Omega$  всей системой атомов, находящихся в объеме взаимодействия пучка с волнами, возникает в результате суммирования амплитуд (8) по всем номерам  $j$  атомов в этом объеме и отличается от (8) множителем [15]

$$\sum_j \exp [i(\mathbf{s}\mathbf{k} - \mathbf{K}) \mathbf{R}_{0j}]. \quad (9)$$

Сумма (9) легко вычисляется в приближении сплошной среды и приводит к появлению дифракционного множителя в выражениях для вероятностей процессов [15]:

$$\left| \sum_j \exp [i(\mathbf{s}\mathbf{k} - \mathbf{K}) \mathbf{R}_{0j}] \right|^2 = \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 (V_{int} n_a)^2 \frac{\sin^2 [(\Omega - n_\omega s\omega)l/2]}{[(\Omega - n_\omega s\omega)l/2]^2}, \quad (10)$$

где  $V_{int} = \pi \rho_0^2 l$  — объем взаимодействия пучка атомов с волнами;  $\rho_0$  — радиус фокуса волны накачки в его центре;  $l$  — продольный в направлении волны размер области взаимодействия (как правило, в экспериментах по генерации гармоник  $l = d$ , где  $d$  — диаметр пучка атомов, посылаемых в поперечном к волнам направлении);  $n_\omega = 1 - \omega_p^2/2\omega^2$  — показатель преломления ионизированной среды для волны накачки (здесь  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$  — плазменная частота);  $n_a$  — концентрация атомов в пучке.

Из (8) с учетом дифракционного множителя (10) для вероятности перехода системы атомов за единицу времени в парциальное конечное состояние получим следующее выражение:

$$w_{e,a}^{(s)} = \frac{d|A_{e,a}|^2}{dt} = 8\pi\alpha^2 \frac{\lambda_0^4}{s^2} \frac{I_1 I_2}{Ry^3} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 (V_{int} n_a)^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \left| \sum_n E_{s,n} \right|^2 \delta [E_{e,a} - E \pm (\Omega - s\omega)]. \quad (11)$$

В (11) использованы обозначения:  $I_1$  и  $I_2$  — интенсивности соответственно волны накачки и пробной волны;  $u = (\Omega - n_\omega s\omega)l/2$ ;  $E_{s,n}$  — выражение, возникающее при вычислении интегралов в составном матричном элементе амплитуды (8) (вид его не будет приводиться в тексте работы, поскольку окончательный результат выражен через вероятность спонтанного излучения, содержащего это выражение (см. ниже)); индекс суммирования  $n$  пробегает последовательность номеров пиков фотоэлектронов в спектре надпороговой ионизации атомов;  $\alpha = e^2/\hbar c$ ;  $Ry = m_e e^4/2\hbar^2$  — постоянная Ридберга; знаки «+» и «-» в аргументе  $\delta$ -функции, дающей закон сохранения энергии для рассматриваемых процессов, относятся соответственно к процессу вынужденного излучения (e) и поглощения (a) кванта частоты  $\Omega \approx s\omega$ ;  $E$  — начальная кинетическая энергия атома;  $E_{e,a}$  — кинетическая энергия атома в конечном состоянии, в которое он переходит в результате взаимодействия с волнами с излучением (поглощением) кванта высокой гармоники.

Обратим внимание на то, что в вынужденных процессах значения  $E_{e,a}$  определяются из закона сохранения импульса  $P_{e,a} - P \pm (K - sk) = 0$  и равны

$$E_{e,a} = E \mp \frac{P(K - sk)}{M} + \frac{(K - sk)^2}{2M}, \quad (12)$$

(знаки «-» и «+» соответствуют процессам излучения и поглощения).

Вероятности вынужденных процессов (11) достаточно просто связываются с вероятностью спонтанного излучения  $w_{sp}^{(s)}$  кванта  $\Omega \approx s\omega$ , и формула связи имеет вид

$$w_{e,a}^{(s)} = 4\rho_0^2 \lambda_0 I_2 \frac{\sin^2 u/u^2}{\sin^2 u_0/u_0^2} \frac{1}{s} w_{sp}^{(s)} \delta [E_{e,a} - E \pm (\Omega - s\omega)], \quad (13)$$

где  $u_0 = s\omega(1 - n_\omega)l/2$  — аргумент дифракционного множителя  $u$  при точном равенстве  $\Omega = s\omega$ .

Дельта-функции, входящие в (13) и дающие закон сохранения энергии при переходе системы в парциальное конечное состояние, в последующих вычислениях должны быть сняты интегрированием по распределениям во взаимодействующих объектах.

## 3. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

Безразмерный коэффициент усиления на один проход пробной волны частоты  $\Omega \approx s\omega$  дается формулой

$$G^{(s)} = \frac{\langle \Delta w^{(s)} \rangle \Omega}{\pi \rho_0^2 I_2}, \quad (14)$$

где  $\langle \Delta w^{(s)} \rangle = \langle w_e^{(s)} - w_a^{(s)} \rangle$  — усредненная по распределениям полная вероятность вынужденных процессов. Подстановка (13) в (14) приводит к результату

$$G^{(s)} = \frac{8w_{sp}^{(s)}}{I_2(\sin^2 u_0/u_0^2)} J, \quad (15)$$

где посредством  $J$  обозначен интеграл

$$J = \iint \frac{\sin^2 u}{u^2} \{ \delta [E_e - E + (\Omega - s\omega)] - \delta [E_a - E - (\Omega - s\omega)] \} f(\mathbf{P}) d\mathbf{P} \frac{dI_2}{d\Omega} \frac{dI_1}{d\omega} d\Omega d\omega, \quad (16)$$

$f(\mathbf{P})$  — нормированная на единицу функция распределения начального пучка атомов по импульсу; функции  $dI_1/d\omega$  и  $dI_2/d\Omega$  описывают нормированные на полную интенсивность  $I_1$  (соответственно  $I_2$ ) спектральные распределения в волне накачки (пробной волне), ширины которых связываются с длительностью импульсов.

Процедура интегрирований в (16) описана в Приложении 1. Конечный результат для  $G^{(s)}$  и характер интегрирований в (16) зависят от постановки задачи. В том случае, когда необходим ответ в виде коэффициента усиления в моде, т. е. на заданной частоте пробной волны, в (16) достаточно ограничиться интегрированием по распределению начального пучка атомов. При этом в соответствии с формулой (1.8) из Приложения 1 для коэффициента усиления в моде получим

$$G^{(s)}(\Omega) = 8w_{sp}^{(s)} \frac{\sin^2 u/u^2}{\sin^2 u_0^2/u_0^2} \left( -\frac{16\sqrt{\pi} \tilde{M}^2}{\Delta P} \frac{\Omega - s\omega}{|\Omega - n_\omega s\omega|} \right) \exp \left[ -\tilde{M}^2 \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_\omega s\omega} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Как следует из (17), коэффициент усиления обращается в нуль при точном равенстве  $\Omega = s\omega$  и положителен для волн с частотами  $\Omega < s\omega$ . Рост частотной расстройки  $|\Omega - s\omega|$  ввиду большой величины параметра  $\tilde{M}$  сопровождается резким уменьшением коэффициента  $G^{(s)}(\Omega)$ .

Более адекватной условиям экспериментов по генерации высоких гармоник следует считать ситуацию, когда в интеграле  $J$  необходимо усреднение и по спектральному распределению в пробной волне. В этом случае окончательный результат для  $J$  имеет вид (формула (1.12) в Приложении 1)

$$J = -\frac{16\sqrt{\pi} s\omega(1 - n_\omega)}{\Delta\Omega M} \frac{\sin^2 u_0}{u_0^2} I_2 \exp \left[ -\left( \frac{\Omega_0 - s\omega}{\Delta\Omega} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[ u_0 \operatorname{ctg} u_0 + \frac{(\Omega_0 - s\omega)s\omega(1 - n_\omega)}{(\Delta\Omega)^2} \right]. \quad (18)$$

Из выражений (15) и (18) следует, что положительная величина коэффициента усиления может быть получена в двух предельных случаях. Если плотность атомов в пучке

мала, так что  $u_0 < 1$  (напомним, что величина  $u_0$  зависит от степени ионизации и концентрации атомов среды), усиление пробной волны может быть достигнуто только в том случае, когда частота  $\Omega_0$ , соответствующая максимуму ее спектрального распределения, меньше величины  $s\omega$ . Другой предельный случай реализуется для плотных пучков, когда параметр  $u_0$  лежит в интервале  $1 < u_0 < \pi$ . Тогда в качестве пробной волны может использоваться спонтанное излучение гармоники с номером  $s$  ( $\Omega_0 = s\omega$ ), предварительно создаваемое в условиях, аналогичных условиям процесса усиления. Это излучение должно быть затем направлено в область взаимодействия второго пучка с волной накачки и синхронизировано с приходом импульса этой волны (схема двухпучкового эксперимента).

В дальнейших вычислениях ограничимся этим случаем, опустив в (18) все множители, содержащие разность  $\Omega_0 - s\omega$ . Параметры  $n_\omega$  и  $u_0$  зависят от степени ионизации среды, а следовательно, от локальных характеристик интенсивности поля в фокусе волны накачки. Поэтому после подстановки (18) в (15) для вывода окончательной формулы для коэффициента усиления необходимо усреднить получившееся выражение по поперечной к оси фокуса координате  $\rho$ :

$$\langle G^{(s)} \rangle = -\frac{(16)^2 s\omega}{\sqrt{\pi} \Delta\Omega M} \frac{J_\rho}{\rho_0^2} w_{sp}^{(s)}, \quad (19)$$

где

$$J_\rho = \int_0^{\rho_0} [1 - n_\omega(\rho)] u_0(\rho) \operatorname{ctg} u_0(\rho) \rho d\rho. \quad (20)$$

Детали вычислений интеграла (20) описаны в Приложении 2. Используя полученный в нем результат (2.3), приведем выражение для усредненного коэффициента усиления (в обычных единицах)

$$\langle G^{(s)} \rangle = -\frac{(16)^2 \hbar c N_s}{\sqrt{\pi} I M c^2 \Delta\Omega \tau_s} \left( \frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} \right)^2 \int_0^{u_{0m}} x \operatorname{ctg} x dx, \quad (21)$$

где  $N_s$  — число фотонов гармоники номера  $s$ , испускаемых за импульс волны накачки, оцениваемое из соотношения  $N_s \approx w_{sp}^{(s)} \tau_s$ ,  $\tau_s$  — длительность импульса пробной волны,  $\tilde{\rho}_0$  — характерная константа гауссова распределения концентрации электронов в фокусе,  $u_{0m}$  — величина аргумента на оси фокуса (см. Приложение 2).

В области достаточно больших  $u_0 \sim 1$  (при  $u_0 \leq \pi$ ) справедливо разложение [16]

$$\int x \operatorname{ctg} x dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad (22)$$

где  $B_{2k}$  — числа Бернулли.

#### 4. ОЦЕНКИ. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Оценку коэффициента усиления будем проводить для случая, когда в качестве волны накачки используется излучение титан-сапфирового лазера (длина волны  $\lambda \approx$

$\approx 800$  нм). Будем предполагать также, что пробной волной является спонтанное излучение на частоте высокой гармоники, возникающее при взаимодействии волны накачки с атомным пучком. Предполагается, что это излучение пересекает второй атомный пучок одновременно с импульсом волны накачки (двухпучковый эксперимент).

Рассмотрим условия, необходимые для усиления пробной волны. Прежде всего отметим, что в случае атомного пучка со сравнительно малой плотностью ( $u_0 < 1$ ), когда  $\text{ctg } u_0 \approx 1/u_0$ , коэффициент усиления отрицателен (см. (18)), что соответствует поглощению пробной волны в объеме взаимодействия. Однако при увеличении  $u_0$  ситуация меняется. В частности, когда величина  $u_0$  приближается к  $\pi$ , интеграл (21), определяющий значение усредненного коэффициента усиления, представляется в виде ряда (22). Например, при  $u_0 = 3$  интеграл (21) оказывается равным  $-2.6$ , т.е. коэффициент усиления положителен. Подставляя это значение в (21), и считая, что насыщение по фотоионизации в поле мощной лазерной волны имеет место практически во всем объеме фокуса ( $\bar{\rho}_0 \approx \rho_0$ ), получим оценку  $\langle G^{(s)} \rangle \approx 16\%$  при  $N_s = 10^7$ . Указанное число спонтанных квантов наблюдается в области плато в случае пучка атомов Хе для гармоник с номерами порядка  $s = 40-60$  (соответствующие частоты  $\Omega = 60-90$  эВ).

В заключение отметим, что спектральный состав пробной волны может отличаться от спектра спонтанного излучения высокой гармоники. В этом случае  $\Omega_0$  может быть не равной  $s\omega$ . Тогда значение коэффициента усиления зависит от величины и знака расстройки  $\Delta\Omega = \Omega_0 - s\omega$  и при этом может оказаться положительным даже при  $u_0 < 1$ .

Авторы благодарят М. В. Федорова за обсуждение постановки задачи, а также П. Агостини (P. Agostini) за обсуждение возможности экспериментальной проверки полученных результатов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Обратимся к вычислению интеграла (16). Порядок интегрирования в нем зависит от относительной остроты функций распределения величин, по которым осуществляется интегрирование. В реальных условиях эксперимента по генерации высоких гармоник в пучках атомов имеют место неравенства  $\Delta P/P \ll \Delta\Omega/\Omega \ll \Delta\omega/\omega$ , где  $\Delta P$  определяется температурой атомов в сопровождающей системе отсчета;  $\Delta\Omega \sim 1/\tau_s$  и  $\Delta\omega \sim 1/\tau_p$  — ширины спектральных распределений волн, связываемые с длительностью соответствующих импульсов.

Обозначим посредством  $I$  следующий интеграл

$$I = \int \{ \delta [E_e - E + (\Omega - s\omega)] - \delta [E_a - E - (\Omega - s\omega)] \} f(\mathbf{P}) d\mathbf{P}. \quad (1.1)$$

Функцию распределения атомов пучка по импульсам зададим нормированной на единицу модельной зависимостью

$$f(\mathbf{P}) = \frac{4}{\sqrt{\pi} (\Delta P)^3} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^2}{(\Delta P)^2} \right], \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{P}_0$  — импульс атомного пучка как целого,  $\Delta P$  — ширина импульсного распределения.



Интегрирование по импульсам атомов в (1.1) предварим рядом преобразований. С помощью (12) представим  $\delta$ -функции в виде

$$\delta_{\pm} \left[ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{K} - s\mathbf{k})}{M} - (\Omega - s\omega) \mp \frac{(\mathbf{K} - s\mathbf{k})^2}{2M} \right], \quad (1.3)$$

где знак « $-$ » в аргументе функции относится к процессу излучения кванта  $\mathbf{K}$ ,  $\Omega$ , а « $+$ » — к процессу поглощения.

Считая, что импульс  $P_0$  направлен перпендикулярно векторам  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{k}$ , удобно во всех выражениях перейти к относительному импульсу атомов  $\mathbf{a} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0$ . Обратим внимание на то, что посылка пучка под произвольным углом  $\vartheta$  к направлению распространения волн приводит к появлению несущественных поправок  $\sim P_{0\parallel}/M$  в выражении для  $J$  ( $P_{0\parallel} = P_0 \cos \vartheta$  — составляющая  $\mathbf{P}_0$  вдоль векторов  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{k}$ ).

Выражения (1.3) с помощью известных свойств  $\delta$ -функции могут быть представлены в виде

$$\delta_{\pm} \left[ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{K} - s\mathbf{k})}{M} - (\Omega - s\omega) \mp \frac{(\mathbf{K} - s\mathbf{k})^2}{2M} \right] = \frac{M}{|\Omega - n_{\omega} s\omega| |\cos \theta|} \delta(a - a_{\pm}), \quad (1.4)$$

где

$$a_{\pm} = \frac{M}{\cos \theta} \frac{\Omega - s\omega}{|\Omega - n_{\omega} s\omega|} \left[ 1 \pm \frac{(\Omega - n_{\omega} s\omega)^2}{2M(\Omega - s\omega)} \right] \quad (1.5)$$

— значения начального относительного импульса атома, участвующего в процессе излучения ( $a_+$ ) или поглощения ( $a_-$ ) кванта  $\mathbf{K}$ ,  $\Omega$ ;  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{a}$  и волновыми векторами волн.

В том случае, когда частота пробной волны совпадает с  $s\omega$  ( $\Omega = s\omega$ ), импульсы (1.5) одинаковы и равны

$$a_+ = a_- = \frac{|\Omega - n_{\omega} s\omega|}{2|\cos \theta|}.$$

При этом в процессах излучения кванта высокой гармоник принимают участие только атомы, летящие «в направлении распространения волн»:  $|\theta| < \pi/2$ . В процессах поглощения участвуют лишь атомы, летящие «в противоположном волнам направлении»:  $|\theta| > \pi/2$ . В силу симметрии направлений импульсов  $\mathbf{a}$  атомов в пучке относительно векторов  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{k}$  и в виду равенства  $a_+ = a_-$  в случае  $\Omega = s\omega$ , коэффициент усиления пробной волны на этой частоте обращается в нуль.

В общем случае при  $\Omega \neq s\omega$  разность импульсов

$$a_+ - a_- = \frac{|\Omega - n_{\omega} s\omega|}{\cos \theta} \quad (1.6)$$

связывается с отдачей, которую испытывает атом при взаимодействии с волнами, и определяет величину коэффициента усиления.

Интегрирование в (1.1) по модулю импульса  $\mathbf{a}$  приводит с учетом (1.4) и (1.5) к следующему результату:

$$I = \frac{16\sqrt{\pi} M^2}{(\Delta P)^3} \frac{\Omega - s\omega}{|\Omega - n_{\omega} s\omega|} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{|\cos \theta| \cos^2 \theta} \exp \left[ -\frac{\tilde{M}^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_{\omega} s\omega} \right)^2 \right] \right\} -$$

$$- \tilde{M}^2 \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_\omega s\omega} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{|\cos \theta| \cos^4 \theta} \exp \left[ - \frac{\tilde{M}^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_\omega s\omega} \right)^2 \right] \Bigg\}, \quad (1.7)$$

где безразмерный параметр  $\tilde{M} \equiv M/\Delta P$ .

Заменой переменной  $x = \cos \theta$  интегралы в (1.7) сводятся к известным интегралам [16], и в результате из (1.7) получаем

$$I = - \frac{16\sqrt{\pi} \tilde{M}^2}{\Delta P} \frac{\Omega - s\omega}{|\Omega - n_\omega s\omega|} \exp \left[ - \tilde{M}^2 \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_\omega s\omega} \right)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Подстановка (1.8) в определение  $J$  (16) приводит к результату

$$J = - \frac{16\tilde{M}^2 I_2}{\Delta P \Delta \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} \exp \left[ - \left( \frac{\Omega - \Omega_0}{\Delta \Omega} \right)^2 \right] \times \\ \times \frac{\Omega - s\omega}{|\Omega - n_\omega s\omega|} \exp \left[ - \tilde{M}^2 \left( \frac{\Omega - s\omega}{\Omega - n_\omega s\omega} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (1.9)$$

При получении (1.9) использовалась простая модельная зависимость для спектрального распределения пробной волны:

$$\frac{dI_2}{d\Omega} = \frac{I_2}{\sqrt{\pi} \Delta \Omega} \exp \left[ - \left( \frac{\Omega - \Omega_0}{\Delta \Omega} \right)^2 \right],$$

нормированная на полную интенсивность  $I_2$ . В силу неравенства  $\Delta \Omega/\Omega \ll \Delta \omega/\omega$  в последующем интегрировании по частоте  $\omega$  нет необходимости.

В подынтегральном выражении в (1.9) наиболее острой функцией  $\Omega$  является  $\exp\{-\tilde{M}^2[(\Omega - s\omega)/(\Omega - n_\omega s\omega)]^2\}$ , и значение  $J$  набирается за счет интегрирования в малой окрестности точки  $\Omega = s\omega$  (оценка характерной ширины области интегрирования  $\delta\Omega$  приводится ниже).

Для вычисления (1.9) проведем замену переменной  $x = (\Omega - s\omega)/(\Omega - n_\omega s\omega)$ . В результате из (1.9) следует

$$J = - \frac{16M^2 I_2 s\omega (1 - n_\omega)}{(\Delta P)^3 \Delta \Omega} J_x, \quad (1.10)$$

где

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u(x)}{u^2(x)} \frac{x}{(1-x)^2} \exp \left[ - \left( \frac{\Omega(x) - \Omega_0}{\Delta \Omega} \right)^2 \right] \exp(-\tilde{M}^2 x^2) dx, \quad (1.11)$$

где  $u(x) = u_0/(1-x)$  (напомним, что  $u_0$  — аргумент дифракционного множителя при точном равенстве  $\Omega = s\omega$ ).

Как следует из (15) и формул (1.10), (1.11), для получения положительной величины  $G$  необходимо, чтобы интеграл  $J_x$ , был отрицательным. По этой причине оказывается существенным учет в низших порядках по  $x$  дифракционного множителя  $\sin^2 u(x)/u^2(x)$  и функции распределения  $\exp\{-[(\Omega - \Omega_0)/\Delta \Omega]^2\}$ .

Эффективная область интегрирования в (1.11) определяется шириной функции  $\exp(-M^2x^2)$  и составляет  $\delta x \sim 1/\tilde{M} = \Delta P/M$ . Частотный интервал  $\delta\Omega \sim s\omega(1 - n_\omega)\delta x$ , что значительно меньше расстояния между точкой  $s\omega$  и особой точкой  $n_\omega s\omega$  на оси  $\Omega$ .

Результат последующих вычислений зависит от величины  $u_0$ , «остроты» функции  $\exp\{-[(\Omega(x) - \Omega_0)/\Delta\Omega]^2\}$  и возможной расстройки  $|\Omega - s\omega|$ .

В общем случае, когда выполнено условие  $\Omega_0 \neq s\omega$ , в результате разложения в ряд по малому  $x$  всех множителей при  $\exp(-M^2x^2)$  и последующего интегрирования получим

$$J = -\frac{16\sqrt{\pi} s\omega(1 - n_\omega)I_2}{\Delta\Omega M} \frac{\sin^2 u_0}{u_0^2} \exp\left[-\left(\frac{\Omega_0 - s\omega}{\Delta\Omega}\right)^2\right] \times \\ \times \left[u_0 \operatorname{ctg} u_0 + \frac{(\Omega_0 - s\omega)s\omega(1 - n_\omega)}{(\Delta\Omega)^2}\right]. \quad (1.12)$$

Результат справедлив при выполнении условия

$$\frac{|\Omega_0 - s\omega|s\omega(1 - n_\omega)}{\tilde{M}(\Delta\Omega)^2} \ll 1.$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Опишем зависимость интенсивности волны накачки от поперечной координаты  $\rho$  простым гауссовым законом

$$I_1(\rho) = I_{01} \exp[-\rho^2/\rho_0^2],$$

где  $I_{01}$  — интенсивность волны на оси фокуса. В соответствии с этой зависимостью зададим концентрацию электронов в объеме взаимодействия выражением

$$n_e(\rho) = n_{0e} \exp[-(\rho^2/\tilde{\rho}_0^2)]$$

(ввиду нелинейной зависимости вероятности ионизации атома от интенсивности ионизирующей волны  $\tilde{\rho}_0 \leq \rho_0$ ). Из определения аргумента дифракционного множителя  $u_0$  следует, что  $1 - n_\omega = 2u_0(\rho)/s\omega l$ . Это дает возможность представить значение  $u_0$  в виде зависимости

$$u_0(\rho) = u_{0m} \exp\left[-(\rho/\tilde{\rho}_0)^2\right],$$

где  $u_{0m}$  — величина аргумента на оси фокуса. Подстановка этой зависимости в интеграл  $J_\rho$  (20) приведет его к виду

$$J_\rho = \frac{u_{0m}^2 \tilde{\rho}_0^2}{s\omega l} J_t, \quad (2.1)$$

где

$$J_t = \int_0^{(\rho_0/\tilde{\rho}_0)^2} e^{-2t} \operatorname{ctg}(u_{0m} e^{-t}) dt. \quad (2.2)$$

Наконец, подстановкой  $x = u_{0m}e^{-t}$  выражение (2.2) сводится к известному интегралу [16]

$$J_t \approx \frac{1}{u_{0m}^2} \int_0^{u_{0m}} x \operatorname{ctg} x dx. \quad (2.3)$$

Нижний предел интегрирования  $u_{0m} \exp[-(\rho_0/\tilde{\rho}_0)^2]$  положен равным нулю, поскольку  $\exp[-(\rho_0/\tilde{\rho}_0)^2] < 1$ , а значение интеграла набирается в основном на верхнем пределе.

## Литература

1. K. Miyazaki and H. Sakai, J. Phys. B **25**, L83 (1992).
2. K. Kondo, H. Sarukura, K. Sajiki, and S. Watanabe, Phys. Rev. A **47**, R2480 (1993).
3. J. J. Macklin, J. D. Kmetec, and C. L. Gordon III, Phys. Rev. Lett. **70**, 776 (1993).
4. C.-G. Wahlstrom, J. Larsson, A. Persson et al., Phys. Rev. A **48**, 4709 (1993).
5. J. W. G. Tisch, R. A. Smith, J. E. Muffett et al., Phys. Rev. A **49**, R28 (1994).
6. P. Salieres, T. Ditmire, K. S. Budil et al., J. Phys. B **27**, L217 (1994).
7. P. Peatross and D. D. Meyerhofer, Phys. Rev. A **51**, R906 (1995).
8. M. E. Faldon and M. H. R. Hutchinson, J. Opt. Soc. Amer. B **9**, 2094 (1992).
9. T. E. Glover, R. W. Schoenlein, A. H. Chin, and C. V. Shank, Phys. Rev. Lett. **76**, 2468 (1996).
10. A. Bouhal, R. Evans, G. Grillon et al., J. Opt. Soc. Amer. B **14**, 950 (1997).
11. H. Reiss, J. Opt. Soc. Amer. B **4**, 726 (1987).
12. М. В. Федоров, *Электрон в сильном световом поле*, Наука, Москва (1991), с. 31.
13. Д. Ф. Зарецкий, Э. А. Нерсесов, ЖЭТФ **107**, 79 (1995).
14. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
15. Д. Ф. Зарецкий, Э. А. Нерсесов, ЖЭТФ **109**, 1994 (1996).
16. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963), с. 1.