

ВЫСОКИЕ ПОРЯДКИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: СУЩЕСТВЕННЫ ЛИ РЕНОРМАЛОНЫ?

И. М. Суслов*

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
117334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 февраля 1999 г.

Согласно Липатову [1], высокие порядки теории возмущений определяются перевальными конфигурациями — инстантонами — соответствующих функциональных интегралов. Согласно другой точке зрения, существенны также вклады отдельных больших диаграмм — ренормалонов, которые по мнению г'Хоофта [15] не содержатся в липатовском вкладе. Излагается история концепции ренормалонов и обсуждаются аргументы за и против их существования. На примере теории φ^4 исследуются аналитические свойства борелевских образов функциональных интегралов, функций Грина, вершинных частей и скейлинговых функций. Доказана их аналитичность в комплексной плоскости с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности (гипотеза Ле Гийу—Зинн-Жюстина [38]). Это исключает существование ренормалонных сингулярностей, указанных г'Хоофтом, и демонстрирует неконструктивность концепции ренормалонов в целом. Результаты можно интерпретировать как указание на внутреннюю непротиворечивость теории φ^4 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи теоретической физики сводятся к вычислению функциональных интегралов типа

$$I = \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\}), \quad (1)$$

разложение которых по константе связи g дает обычную теорию возмущений. В 1977 г. Липатов [1] предложил метод вычисления далеких коэффициентов разложения интегралов (1), основанный на следующей простой идее. Если функция $F(g)$ раскладывается в ряд

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N,$$

то N -й коэффициент разложения может вычисляться по формуле

$$F_N = \oint_C \frac{dg}{2\pi i} \frac{F(g)}{g^{N+1}}, \quad (2)$$

*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

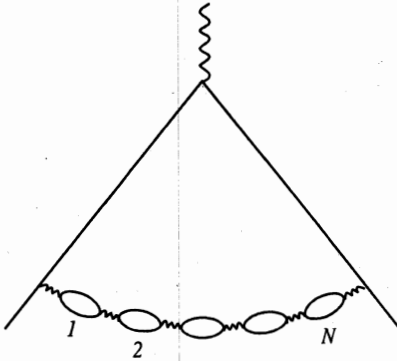


Рис. 1. Пример диаграммы для квантовой электродинамики, дающей вклад $\sim N!$ в N -м порядке теории возмущений [12]

где контур C охватывает точку $g = 0$ в комплексной плоскости. Принимая в качестве $F(g)$ интеграл (1), получим

$$I_{N-1} = \frac{1}{2\pi i} \int dg \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\} - gS_{int}\{\varphi\} - N \ln g), \quad (3)$$

и появление при больших N экспоненты с большим показателем позволяет надеяться на применение метода перевала. Идея Липатова состоит в том, что перевал в (3) ищется одновременно по g и φ : он существует для всех представляющих интерес случаев и реализуется на локализованной в пространстве функции, называемой инстантоном, причем при больших N оказываются выполненными условия применимости метода перевала.

Примененный первоначально к скалярным теориям типа φ^4 ,

$$S_0\{\varphi\} + gS_{int}\{\varphi\} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{1}{4}g\varphi^4 \right\}, \quad (4)$$

метод Липатова был обобщен в дальнейшем на векторные поля [2], скалярную электродинамику [3, 4], поля Янга—Миллса [5], фермионные поля [6] и др. (см. сборник статей [7]). Конечная цель состояла в применении его к теориям, представляющим практический интерес — квантовой электродинамике [8, 9] и КХД [10, 11]: как было указано уже в первой работе Липатова [1], знание нескольких первых коэффициентов и их асимптотики позволяет приближенно восстановить функцию Гелл-Манна—Лоу, что открывает прямой путь к решению проблемы конфайнмента и электродинамики на малых расстояниях.

Однако уже в 1977 году зародилось направление, ставящее под сомнение метод Липатова. Оно берет начало с работы Лаутрупа [12], которая содержала следующее любопытное замечание. Типичный результат вычислений методом Липатова имеет функциональную форму,

$$I_N = ca^N \Gamma(N + b) \approx ca^N N^{b-1} N! \quad (5)$$

и его естественная интерпретация состоит в том, что имеется факториально большое число диаграмм одинакового порядка $(ag)^N$. Однако в общем случае такая интерпретация неправильна — существуют примеры отдельных диаграмм N -го порядка, имеющих величину $\sim N!$: это диаграммы (рис. 1), содержащие длинные цепочки «пузырей»

(bubble diagrams). Такие факториальные вклады отдельных диаграмм получили название ренормалонов, так как они возникают лишь в перенормируемых теориях¹⁾: пример Лаутрупа (рис. 1) относился к квантовой электродинамике, но аналогичные диаграммы существуют в КХД и четырехмерной теории φ^4 .

Строго говоря, из замечания Лаутрупа ничего не следовало: метод Липатова основан на формальном вычислении функционального интеграла (3) и ни в коей мере не опирается на статистический анализ диаграмм. Естественно ожидать, что ренормалонные вклады уже учтены в инстантонном результате (5). Фактически ни в работе [12], ни в нескольких последующих [13, 14] никаких серьезных утверждений и не делалось.

Однако в дальнейшем тональность работ этого направления резко меняется. Причиной послужила лекция т'Хоофта [15], прочитанная на одной из школ в том же 1977 г.: в ней впервые появилось слово ренормалоны и было высказано утверждение, что ренормалоны не содержатся в инстантонном вкладе (5). Авторы последующих работ [16–30] считают мнение т'Хоофта самоочевидным и не утруждают себя аргументацией.

В лекции т'Хоофта был введен удобный язык для обсуждения — аналитические свойства борелевских образов. В теории расходящихся рядов [30] широко используется преобразование Бореля

$$F(g) = \sum_{N=0}^{\infty} F_N g^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} \int_0^{\infty} dx x^N e^{-x} g^N = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} (gx)^N,$$

факториально улучшающее сходимость рядов. Его удобно переписать в виде

$$F(g) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} B(gx), \quad (6)$$

$$B(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{N!} z^N, \quad (7)$$

введя борелевский образ $B(z)$ функции $F(g)$. Для функции с коэффициентами разложения (5) борелевский образ

$$B_I(z) = \sum_N ca^N N^{b-1} z^N \sim (1 - az)^{-b}, \quad za \rightarrow 1 \quad (8)$$

имеет особенность в точке $z = 1/a$.

т'Хоофт приходит к этому результату другим путем, без ссылок на метод Липатова. Переписывая интеграл (1) и определение борелевского образа (6) в виде

$$I = \int D\varphi \exp(-S\{\varphi\}/g), \quad (9)$$

¹⁾ В широком смысле перенормируемой называется теория, в которой расходимости устраняются путем перенормировки конечного числа параметров. По более тонкой терминологии такие теории подразделяются на суперперенормируемые (перенормируемые «с запасом») и перенормируемые в узком смысле (перенормируемые «на пределе», маргинально); последние, давшие название ренормалонам, характеризуются логарифмической ситуацией, которая необходима для возникновения факториальных вкладов (см. ниже).

$$F(g) = \int_0^\infty dx e^{-x/g} B(x), \tag{10}$$

что может быть сделано путем замен $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{g}$ и $x \rightarrow x/g$ в (4) и (6)²⁾, он получает борелевский образ интеграла (9):

$$B_I(z) = \int D\varphi \delta(z - S\{\varphi\}) = \oint_{z=S\{\varphi\}} \frac{d\sigma}{|\nabla S\{\varphi\}|}, \tag{11}$$

где последнее интегрирование проводится по гиперповерхности $z = S\{\varphi\}$. Если для интеграла (9) существует инстантон $\varphi_c(x)$, т. е. классическое решение с конечным действием, то $\delta S\{\varphi_c\} = 0$ и частные производные $\partial S/\partial\varphi_i$ по всем переменным φ_i , входящим в символ $D\varphi$, обращаются в нуль; следовательно, $\nabla S\{\varphi_c\} = 0$ и борелевский образ (11) имеет особенность в точке

$$z = S\{\varphi_c\}, \tag{12}$$

совпадающей с $1/a$. Кроме того, имеются сингулярности в точках $mS\{\varphi_c\}$, соответствующие решениям, содержащим m бесконечно удаленных инстантонов. Если считать, что особенность (12) — ближайшая к началу координат, то воспроизводится результат (5) метода Липатова. Однако т'Хоофт допускает существование сингулярностей, отличных от инстантонных: в этом случае асимптотика коэффициентов разложения может определяться одной из них, ближайшей к началу координат.

В качестве возможного механизма возникновения новых сингулярностей т'Хоофт рассматривает ренормалоны. Возьмем произвольную диаграмму для квантовой электродинамики и выделим в ней линию виртуального фотона с импульсом k (или линию взаимодействия в теории φ^4) (рис. 2а): ей соответствует интегрирование по области

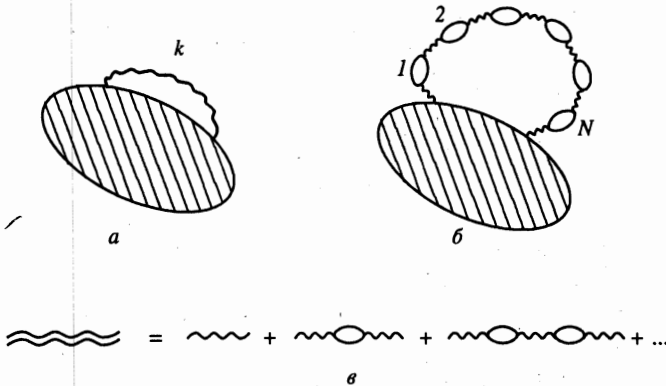


Рис. 2. Более общая точка зрения на ренормалоны

²⁾ Т'Хоофт опускает множители типа g^n , имея в виду, что интегралы типа (1) обычно входят в виде отношения и такие множители сокращаются.

больших импульсов типа

$$\int_{k>k_0} d^4 k k^{-2m},$$

где m — целое; если считать все перенормировки выполненными, то интеграл сходится и $m \geq 3$. Вставляя в фотонную линию цепочку из N «пузырей» (рис. 2б), получим интеграл³⁾

$$\int_{k>k_0} d^4 k k^{-2m} (\beta_0 \ln k^2)^N \sim \beta_0^N \int_0^\infty dt t^N e^{-(m-2)t} \sim \left(\frac{\beta_0}{m-2} \right)^N N!. \quad (13)$$

Суммирование по Борелю последовательности таких диаграмм дает особенности в точках

$$z = \frac{m-2}{\beta_0}, \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (14)$$

Константа β_0 является первым неисчезающим коэффициентом разложения функции Гелл-Манна—Лоу (разд. 2), и с учетом знаковых соотношений ($S\{\varphi_c\} < 0$, $\beta_0 > 0$) т'Хоофт приходит к картине сингулярностей для теории φ^4 , показанной на рис. 3а.

Нетрудно видеть, что аргументация т'Хоофта в отношении ренормалонов оставляет без ответа главные вопросы:

Почему можно придавать значение отдельным последовательностям диаграмм, которые при $N \rightarrow \infty$ составляют бесконечно малую долю их полного числа?

Откуда известно, что ренормалоны уже не учтены в инстантонном вкладе (5)?

Однако общая постановка вопроса о возможности вкладов неинстантонной природы в асимптотику коэффициентов разложения имеет смысл: она вскрывает пробел в математической обоснованности метода Липатова. Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет резкий максимум в точке x_0 и медленный хвост при больших x (рис. 4), так что вклады в интеграл $\int f(x) dx$ от окрестности максимума и области хвоста сравнимы. Исследование интеграла на перевал обнаружит точку максимума x_0 и (при условии его достаточной резкости) формальную применимость метода перевала; однако вычисление интеграла в перевальном приближении будет ошибочным, так как будет потерян вклад хвоста. Если такие хвосты имеются в интеграле (3), то метод Липатова может оказаться неверным⁴⁾.

Практическое отсутствие неперевальных методов вычисления функциональных интегралов делает невозможным прямое исследование вклада возможных хвостов. Но есть

³⁾ В квантовой электродинамике и КХД поляризация петля дает множитель $k^2 \ln k^2$, а фотонный (глюонный) пропагатор — $1/k^2$; в четырехмерной теории φ^4 замкнутой петле соответствует $\ln k^2$, а линии взаимодействия — константа. Во всех случаях цепочке из N «пузырей» соответствует $(\ln k^2)^N$.

⁴⁾ Справедливость метода перевала может быть обоснована для сходящихся интегралов конечной кратности от функций типа $\exp[\lambda F(x)]$ в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ [31]. Интеграл (3) может быть приведен к указанному виду, но, вообще говоря, содержит как обычные ультрафиолетовые расходимости, так и расходимости, связанные с переходом к бесконечному числу интегрирований. Конечным (после соответствующих перенормировок) должно быть отношение двух интегралов типа (1), но не каждый из них по отдельности.

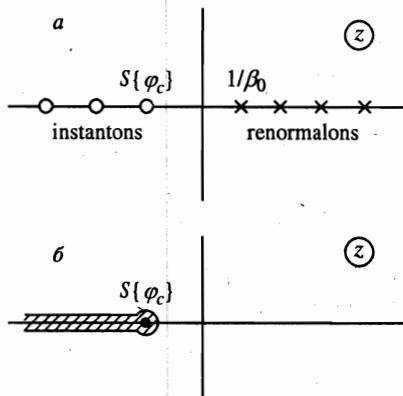


Рис. 3

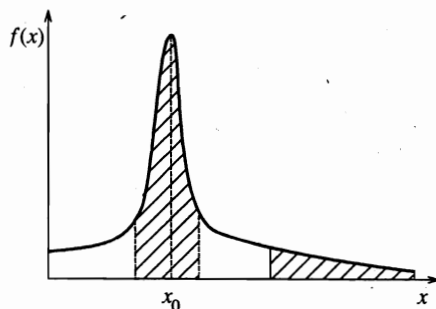


Рис. 4

Рис. 3. а) Картина сингулярностей для теории φ^4 , представленная т'Хоофтом [15]. б) Область аналитичности согласно результатам настоящей работы

Рис. 4. Пример функции, для которой метод перевала формально применим, но дает неправильный результат

ли конструктивные аргументы, указывающие на их существование? В принципе такие аргументы имеются, но носят довольно интуитивный и расплывчатый характер, а при ближайшем рассмотрении не выдерживают критики (разд. 2). В результате концепция ренормалонов оказалась в диалектическом равновесии — ее не удалось ни доказать, ни опровергнуть. Такая неопределенность привела к тому, что интерес к высоким порядкам теории возмущений резко упал и программа Липатова [1] осталась незавершенной. Так, предварительный результат для квантовой электродинамики был получен уже в 1978 г. [9], однако параметры b и c в асимптотике $I_N = ca^N \Gamma(N/2+b)$ не вычислены до сих пор; первый результат для КХД появился в 1991 г. [10], недавно подвергнут ревизии [11], но все равно остается неудовлетворительным (разд. 4), хотя фундамент для таких расчетов был полностью подготовлен к 1980 г. [5, 6]; попытки восстановления функции Гелл-Манна—Лоу ограничились теорией φ^4 [33–35].

В последнее время наблюдается оживление интереса к асимптотическим оценкам, но почти исключительно в рамках ренормалонного направления [21–30]; в частности, считается общепринятым (см. обзор Захарова [21]), что ренормалоны определяют асимптотику теории возмущений в КХД. Однако уже в рамках ренормалонного направления обнаружилась его сомнительность: суммирование более сложных последовательностей диаграмм привело к сильной перенормировке ренормалонного вклада и сделало полностью неопределенным общий коэффициент перед ним [30]; фактически невозможно утверждать, что он не обращается в нуль. С другой стороны, применение метода Липатова обеспечило существенный прогресс в теории неупорядоченных систем [36] и теории турбулентности [37].

В настоящей работе дается детальное обсуждение существующей аргументации в пользу ренормалонов и показывается ее несостоятельность (разд. 2). На примере тео-

рии φ^4 исследуются аналитические свойства борелевских образов (разд. 3) и доказываются их аналитичность в комплексной плоскости с разрезом от первой инстантонной особенности до бесконечности (рис. 3б): это исключает существование ренормальных сингулярностей, указанных т'Хоофтом (рис. 3а), и демонстрирует неконструктивность концепции ренормалонов в целом.

Гипотеза о том, что борелевские образы имеют указанные аналитические свойства, высказывалась Ле Гийо и Зинн-Жюстином [38] и лежит в основе одного из эффективнейших методов суммирования рядов теории возмущений, известного под названием «конформ-борель»; полученные ниже результаты дают математическое обоснование этого метода.

2. PRO ET CONTRA

Обсудим имеющиеся в литературе аргументы, указывающие на существование в интеграле (3) вкладов, отличных от инстантонного.

1. Имеется множество полуинтуитивных высказываний, сводящихся к тому, что *инстантоны не исчерпывают всей физики*. Этот тезис является правильным при правильном его понимании; но в этом случае он не имеет отношения к делу.

Исторически инстантоны впервые появились при использовании перевального приближения в исходном интеграле (1); это было обосновано лишь в узкой области параметров, и потому инстантоны действительно не исчерпывали всей физики. В методе Липатова ситуация меняется, так как перевальное приближение используется не в интеграле (1), а в выражении (3) для коэффициентов разложения. Поскольку рассматриваются лишь большие значения N , то инстантонам с самого начала отводится ограниченная роль; но теперь метод перевала применим всегда⁵⁾ и появляются основания считать, что все определяется инстантонами.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения Шредингера со случайным потенциалом $V(x)$:

$$[\hat{p}^2/2m + V(x)] \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (15)$$

Его собственные функции (рис. 5) при больших отрицательных E локализованы на редких флуктуациях случайного потенциала (a, b), при больших положительных E близки к плоским волнам (z, d), а в окрестности затравочного края спектра $E = 0$ имеют сильно изрезанный, фрактальный характер (e). Проблема исследования уравнения (15) может быть переформулирована на языке эффективной теории поля — именно, теории φ^4 с «неправильным» знаком g [36, 39]; при этом типичные волновые функции локализованных состояний описываются инстантонами. На инстантонном языке изменение ситуации при увеличении E выглядит следующим образом: сначала инстантоны имеют малый радиус и расположены редко, т. е. образуют идеальный газ (a); затем радиус инстантонов увеличивается, а их плотность возрастает — между ними возникает взаимодействие (b); затем происходит конденсация инстантонов (e), и образуется инстантонный кристалл (z, d). Применности метода перевала в интеграле типа (1) соответствует

⁵⁾ Конечно инстантоны существуют не во всей области параметров, но в методе Липатова это не является ограничением: величины a, b, c в асимптотике (5) вычисляются точно и как функции физических параметров допускают аналитическое продолжение.

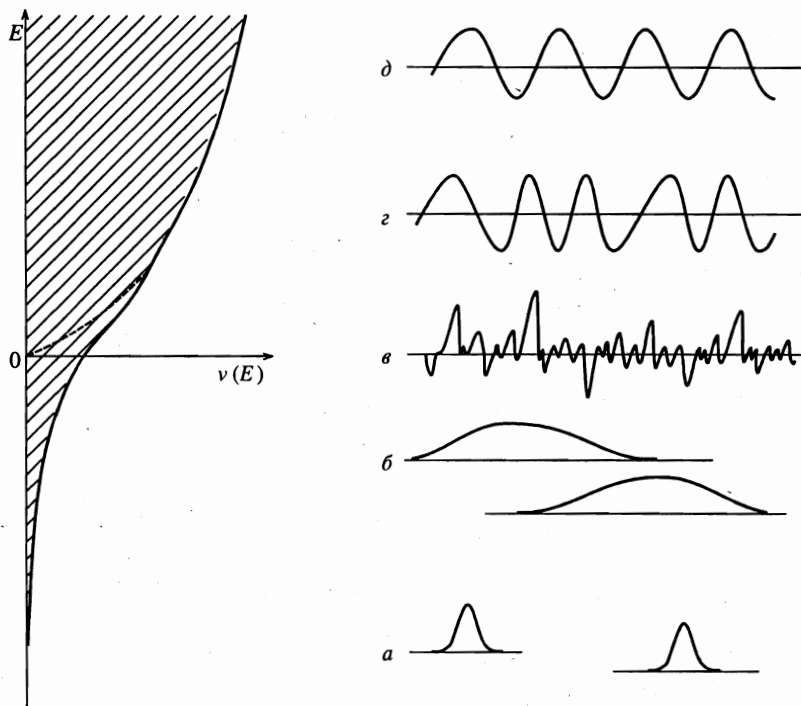


Рис. 5. Слева — плотность состояний $\nu(E)$ при наличии (сплошная кривая) и отсутствии (штрихи) случайного потенциала, справа — схематический вид собственных функций уравнения (15)

лишь случай *a*, и потому стандартное инстантонное приближение оказывается очень бедным.

Рассмотрим эту ситуацию с точки зрения теории возмущений по случайному потенциалу $V(x)$. Идеальный инстантонный кристалл (*d*) соответствует плоской волне, т. е. нулевому порядку теории возмущений; в неидеальном кристалле (*z*) возрастает роль более высоких порядков; в окрестности затравочной границы спектра (*e*) все диаграммы оказываются одного порядка величины, так что высокие и низкие порядки теории возмущений одинаково существенны; в области локализованных состояний (*a, б*) доминирующая роль переходит к высоким порядкам: эти состояния не появляются ни в каком конечном порядке теории возмущений, а отбрасывание вкладов низших порядков никак не влияет на их свойства. Мы видим, что концепция Липатова (высокие порядки определяются инстантонами) прекрасно вписывается в существующую физическую картину.

Таким образом, статус инстантонов в интеграле (1) и интеграле (3) существенно различен; на наш взгляд, это объясняет позицию, занятую т'Хоофтом, так как он является классиком инстантонов [40] именно в исходном интеграле (1).

2. *Связь с логарифмической ситуацией* [15]. Ренормалоны существуют лишь в перенормируемых, но не суперперенормируемых теориях. Если теория суперперенормируема, то для вклада отдельной диаграммы можно получить оценку сверху типа $a^N g^N$, и появление множителя $N!$ в асимптотике (5) может быть связано лишь с факториально

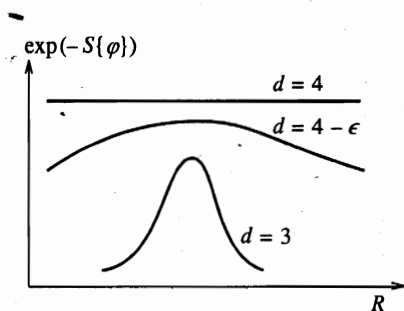


Рис. 6. Зависимость подынтегральной функции (1) от радиуса инстантона в d -мерной теории φ^4

большим числом диаграмм. В перенормируемых теориях появляются ренормалоны и, следовательно, новый механизм возникновения факториальных вкладов. Можно ожидать, что этот механизм связан с образованием хвостов в интеграле (3) и не учитывается в методе Липатова.

В этом аргументе правильно все, кроме последнего вывода. Проиллюстрируем это на примере теории φ^4 , которая перенормируема при $d = 4$ и суперперенормируема при $d < 4$. Среди множества интегрирований, спрятанных в символе $D\varphi$ интеграла (3), можно выделить одно, для которого предельный переход $d \rightarrow 4$ связан с качественными изменениями: это интегрирование по радиусу инстантона R (рис. 6). Для d , существенно меньших четырех (например, $d = 3$), подынтегральная функция $\exp(-S\{\varphi\})$ имеет по R резкий максимум и допускает перевальное интегрирование; при $d = 4 - \epsilon$ максимум становится пологим, а при $d = 4$ инстантонное действие $S\{\varphi_c\}$ вообще не зависит от R . В последнем случае интеграл расходится, что и приводит к логарифмической ситуации. Мы видим (см. кривую для $d = 4 - \epsilon$ на рис. 6), что «подключение» ренормалонных вкладов действительно связано с возникновением медленных хвостов в интеграле (3), однако эти хвосты учитываются в липатовской технике [36].

Может возникнуть недоумение: если метод Липатова — это метод перевала, то как он может охватить заведомо неперевальную ситуацию для $d = 4 - \epsilon$? Дело в том, что перевал в функциональном интеграле фактически никогда не сводится к простому максимуму, достигаемому в одной точке: максимум оказывается вырожденным на некотором подпространстве конечной размерности. Соответственно, конечное число интегрирований должно быть выполнено точно, а не в перевальном приближении. Но если по некоторой переменной (например, R) интегрирование проводится точно, то не имеет значения, является ли вырождение точным ($d = 4$) или приближенным ($d = 4 - \epsilon$). Впрочем, в последнем случае возникают технические трудности и соответствующие методы (constrained instantons [41, 42]) до недавнего времени были плохо разработаны [36].

Из сказанного ясно, что даже в случаях, когда медленные хвосты в интеграле (3) реально возникают, липатовская процедура оказывается достаточно гибкой и содержит широкие возможности для обращения с ними.

3. Предел $n \rightarrow \infty$. Есть мнение, что в существовании ренормалонных вкладов легко убедиться, рассмотрев n -компонентную теорию φ^4 в пределе $n \rightarrow \infty$ (и аналогичные модели в КХД и электродинамике) [16]: замкнутой петле соответствует множитель n , и ренормалонные графики, содержащие максимально возможное количество петель, оказываются выделенными по большому параметру n . Диаграммы того же порядка, но с меньшим количеством петель, хотя и могут давать при больших N сравнимые вклады из-за комбинаторных множителей, имеют более медленную зависимость от n ; поэтому

ренормалоны не могут сократиться тождественно.

Этот аргумент является правильным в любом конечном порядке по $1/n$. Однако детальное исследование структуры $1/n$ -разложения [18, 19] обнаруживает наличие многочисленных сокращений, и хотя ситуацию не удастся прояснить полностью, вопрос не решается на уровне простых аргументов указанного типа.

Нетрудно разобраться, в чем здесь дело. Рассмотрим для примера собственную энергию $\Sigma(p, m)$ теории φ^4 ; из диаграммного анализа ясно, что при $m = 0$ и импульсах p , близких к импульсу обрезания Λ , $(N+1)$ -й коэффициент разложения для $\Sigma(p, 0) - \Sigma(0, 0)$ имеет вид полинома по n ,

$$p^2 \{ A_N(N)n^N + A_{N-1}(N)n^{N-1} + \dots + A_1(N)n + A_0(N) \}, \quad (16)$$

в котором коэффициент $A_N(N)$ определяется ренормалонными графиками:

$$A_N(N) = \text{const} \cdot \left(-\frac{1}{16\pi^2} \right)^N N! \quad (17)$$

Если предположить, что ренормалонный вклад содержится в инстантонном, то выражение (16) должно переходить при больших N в асимптотику Липатова (см. формулу (130) работы [43] при $M = 1$ и $p \approx \Lambda$):

$$p^2 \alpha \beta^n N^{(n+6)/2} \left(-\frac{3}{8\pi^2} \right)^N N! \left[\Gamma \left(\frac{n+2}{2} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty dy y^{(n+5)/3} K_1(y)^2, \quad (18)$$

где $\alpha, \beta \sim 1$, $K_1(x)$ — функция Мак-Дональда. Легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$ равенство выражений (16) и (18) невозможно — в этом и проявляется «несокращаемость» ренормалонов.

Однако обычное условие применимости метода Липатова $N \gg 1$ при больших n , вообще говоря, заменяется более жестким, например $N \gg n$, и для n возникает ограничение типа

$$n \lesssim n_0(N), \quad (19)$$

не позволяющее переходить к пределу $n \rightarrow \infty$. Если учесть, что асимптотика Липатова имеет ограниченную точность ($\sim 1/N$ в относительных единицах), то правильная постановка вопроса состоит в следующем: можно ли построить интерполяционный полином вида (16) со старшим коэффициентом (17), который с заданной точностью аппроксимирует функцию (18) на отрезке $0 \leq n \leq n_0(N)$, где $n_0(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$? Ответ на этот вопрос положительный (см. Приложение); следовательно, предположение о том, что ренормалонный вклад содержится в инстантонном, не приводит к противоречиям.

4. *Связь с полюсом Ландау* [16, 19]. Нетрудно видеть (рис. 2в), что суммирование последовательности ренормалонных диаграмм соответствует «одеванию» взаимодействия; при этом для связи перенормированного заряда g с затравочным g_0 получается известное выражение [44–46]

$$g_0 = \frac{g}{1 - \beta_0 g \ln(\Lambda^2/m^2)}, \quad (20)$$

содержащее полюс в точке

$$\Lambda_c^2 = m^2 e^{1/\beta_0 g}. \quad (21)$$

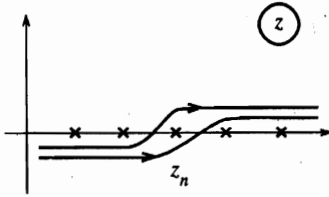


Рис. 7. Неоднозначность выбора контура интегрирования в борелевском интеграле (6) при наличии ренормальных сингулярностей

При буквальной интерпретации этого полюса в духе старых работ Ландау и Померанчука [47] ренормальными сингулярностям можно придать наглядный физический смысл [16, 19]⁶⁾.

Зависимость ряда теории возмущений от параметра обрезания Λ имеет структуру

$$c_{-1}\Lambda^2 + c_0 \ln \Lambda^2 + c_1\Lambda^{-2} + c_2\Lambda^{-4} + \dots + c_n\Lambda^{-2n} + \dots \quad (22)$$

Первые два члена устраняются процедурой перенормировки, остальные в принципе остаются, но исчезают в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Из-за наличия полюса в (20) значения Λ , большие Λ_c , принципиально недостижимы, и в теории возникают неустранимые неопределенности типа

$$\Lambda_c^{-2n} = m^2 e^{-n/\beta_0 g} \quad (23)$$

Такие же неопределенности порождаются ренормальными сингулярностями, существование которых на положительной полуоси приводит к неоднозначности выбора контура интегрирования в борелевском интеграле (6). Контур можно провести справа или слева от n -й сингулярности (рис. 7), что дает неопределенность в восстановлении функции по ее борелевскому образу,

$$\delta F(g) \sim \oint_{z \approx z_n} dz e^{-z/g} B(z) \sim e^{-z_n/g} \quad (24)$$

которая с учетом $z_n = n/\beta_0$ совпадает с (23).

Разумеется, буквальная интерпретация полюса Ландау выглядит архаичной, однако путем некоторой модификации приведенного рассуждения ему можно придать реальный смысл. Как известно [46], зависимость заряда g от масштаба расстояний Λ^{-1} определяется уравнением

$$\frac{dg}{d \ln \Lambda^2} = \beta(g) = \beta_0 g^2 + \beta_1 g^3 + \dots, \quad (25)$$

характер решения которого зависит от поведения функции Гелл-Манна—Лоу $\beta(g)$. Полюс в (20) устраняется, если $\beta(g)$ меняет знак или ведет себя при больших g как g^α с $\alpha < 1$; если же $\beta(g)$ положительна и растет при $g \rightarrow \infty$ как g^α с $\alpha > 1$, то полюс

⁶⁾ Ниже предполагается, что $\beta_0 > 0$. Для асимптотически свободных теорий, в которых $\beta_0 < 0$, аналогичные соображения справедливы в отношении так называемых инфракрасных ренормалонов; последние получаются из интегралов типа (13) с $m = 1, 0, -1, -2, \dots$ от области малых импульсов.

сохраняется, и теория внутренне противоречива из-за невозможности определить зависимость $g(\Lambda)$ при всех Λ [46]. В последнем случае положение полюса определяется уравнением

$$\ln \frac{\Lambda_c^2}{m^2} = \int_g^\infty \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (26)$$

которое при малых g приводит к результату

$$\Lambda_c^2 = \text{const} \cdot m^2 e^{1/\beta_0 g}, \quad (27)$$

отличающемся от (21) лишь несущественным постоянным множителем. Таким образом, для внутренне противоречивых теорий существование ренормалонных сингулярностей выглядит достаточно убедительным; напротив, в «хороших» теориях для них нет оснований⁷⁾.

Поскольку поведение функции $\beta(g)$ при $g \gtrsim 1$ неизвестно, то существование или отсутствие ренормалонных сингулярностей оказывается предметом веры. Подчеркнем, однако, следующее обстоятельство. Факториальные вклады отдельных диаграмм существуют во всех теориях поля, в которых разложение β -функции (25) начинается с квадратичного члена: тогда взаимодействие на масштабе k^{-1} описывается формулой типа (20) с заменой Λ на k , разложение которой дает $(\beta_0 \ln k^2)^N$ в N -м порядке (см. (13))⁸⁾. Решение же вопроса о внутренней противоречивости теории требует знания всех коэффициентов разложения (25). Поэтому считать, что формальное существование ренормалонов указывает на внутреннюю противоречивость теории, было бы некорректно.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БОРЕЛЕВСКИХ ОБРАЗОВ ТЕОРИИ φ^4

3.1. Расширение класса преобразований Бореля

Для дальнейшего удобно расширить класс преобразований Бореля, полагая вместо (6), (7)

$$F(g) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{b_0-1} B(gx),$$

⁷⁾ В частности, результат (27) справедлив при обрыве разложения (25) на конечном числе членов при условии положительности возникающего полинома: на этом основании легко прийти к ошибочному выводу, что высшие члены разложения β -функции малосущественны. Аргументация Паризи [16, 17] в отношении импульсной зависимости борелевских образов носит именно такой характер; в действительности, характер решения написанных им уравнений [17] существенно зависит от поведения $\beta(g)$ на бесконечности: в частности, они легко решаются для модельной функции $\beta(g) = \beta_0 g^2 / (1 + \lambda g)$ с $\lambda \gg 1$ и приводят к результату, качественно отличному от однопетлевого.

⁸⁾ При этом конкретный вид ренормалонных диаграмм в разных теориях может несколько различаться: так, в теории φ^4 существенные диаграммы не сводятся к цепочкам из «пузырей» (рис. 2θ), а образуют так называемый паркет [48].

$$B(g) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F_N}{\Gamma(N + b_0)} g^N \quad (28)$$

с произвольным параметром $b_0 > 0$. Если $B(g)$ и $\tilde{B}(g)$ — борелевские образы, соответствующие параметрам b_0 и b_1 (для определенности $b_1 > b_0$), то нетрудно вывести формулу пересчета:

$$\tilde{B}(g) = \frac{1}{\Gamma(b_1 - b_0)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{b_1 - b_0 - 1}}{(1+x)^{b_1}} B\left(\frac{g}{1+x}\right). \quad (29)$$

Определим область аналитичности функции $B(g)$, построив так называемую звезду Миттаг—Лефлера [30], т. е. проведя разрезы от всех особых точек до бесконечности вдоль лучей, проведенных через эти точки из начала координат. Если g лежит в области аналитичности функции $B(g)$, то контур интегрирования в (29) не проходит через ее сингулярности и $\tilde{B}(g)$ оказывается также аналитичной. Если g_c — особая точка $B(g)$, то в интеграле (29) для $g = g_c$ контур неизбежно проходит через g_c , порождая особенность в $\tilde{B}(g)$. Для актуального случая степенных сингулярностей имеем правило соответствия

$$B(g) = \text{AG}(-\beta) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta} \rightarrow \tilde{B}(g) = \text{AG}(-\beta - b_1 + b_0) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta + b_1 - b_0} \quad (30)$$

для нецелых $\beta + b_1 - b_0$ и

$$B(g) = \text{AG}(-\beta) \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^{\beta} \rightarrow \tilde{B}(g) = A \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right)^n \ln \left(\frac{g_c - g}{g_c}\right), \quad (31)$$

если $\beta + b_1 - b_0 = n$ — целое.

Мы видим, что область аналитичности для всех борелевских образов одинакова и ее достаточно установить при каком-то фиксированном b_0 . Для исследования функциональных интегралов удобен выбор $b_0 = 1/2$, так как в этом случае получается простой результат для борелевского образа экспоненты,

$$F(g) = e^{-g} \rightarrow B(g) = \frac{\cos(2\sqrt{g})}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \{ \exp(2i\sqrt{g}) + \text{с.с.} \}, \quad (32)$$

сохраняющий ее экспоненциальную форму. Это позволяет записать явное выражение для борелевского образа функционального интеграла (1):

$$B_I(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \exp(-S_0\{\varphi\}) \left[\exp\left(2i\sqrt{g} S_{int}\{\varphi\}\right) + \text{с.с.} \right]. \quad (33)$$

Подынтегральная функция регулярна, и область аналитичности $B_I(g)$ определяется условием сходимости интеграла.

3.2. Аналитичность вне отрицательной полуоси

Для простоты рассматриваем скалярную теорию φ^4 ; обобщение на n -компонентный случай тривиально и сводится лишь к некоторому усложнению обозначений. Считаем, что $m^2 > 0$, имея в виду последующее аналитическое продолжение на произвольные комплексные m^2 .

Интеграл (33) для теории φ^4 хорошо определен при положительных g , так как его сходимость определяется экспонентой от $-S_0\{\varphi\}$ и является очевидной после фурье-преобразования $\varphi(x)$:

$$S_0\{\varphi\} = \frac{1}{2} \int d^d x \{(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\} = \frac{1}{2} \sum_k (k^2 + m^2) |\varphi_k|^2. \quad (34)$$

Для аналитического продолжения на комплексные g повернем контур интегрирования в (33), полагая

$$g = \bar{g} e^{i\Psi}, \quad \varphi = \bar{\varphi} e^{-i\Psi/4}, \quad (35)$$

где \bar{g} и $\bar{\varphi}$ действительны, причем $\bar{g} > 0$. Тогда интеграл в (33) принимает вид

$$\int D\bar{\varphi} \exp\left(-S_0\{\bar{\varphi}\} e^{-i\Psi/2}\right) \left[\exp\left(2i\sqrt{\bar{g}} S_{int}\{\bar{\varphi}\}\right) + \text{с.с.}\right] \quad (36)$$

и сходится для $-\pi < \Psi < \pi$; тем самым борелевский образ аналитичен вне отрицательной полуоси.

3.3. Аналитичность в круге

Воспользуемся формальным приемом, использованным в работах [3, 41], и введем функцию

$$R\{\varphi\} = \frac{S_0\{\varphi\}^2}{4S_{int}\{\varphi\}}. \quad (37)$$

Тогда выражение (33) переписывается в виде

$$B_I(g) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \exp\left(-\left[1 - i\left(\frac{g}{R\{\varphi\}}\right)^{1/2}\right] S_0\{\varphi\}\right) + \text{с.с.} \quad (38)$$

и при замене $R\{\varphi\}$ на константу R_0 оказывается аналитичным в круге $|g| < R_0$. Пусть теперь

$$R\{\varphi\} \geq R_0 \quad (39)$$

для всех φ , т. е. R_0 — точная нижняя грань $R\{\varphi\}$. Полагая $g = -|g|e^{i\gamma}$, $-\pi \leq \gamma \leq \pi$, имеем неравенство

$$|B_I(g)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int D\varphi \left\{ \exp\left(-\left[1 - \left|\frac{g}{R_0}\right|^{1/2} \cos \frac{\gamma}{2}\right] S_0\{\varphi\}\right) + \exp(-S_0\{\varphi\}) \right\}, \quad (40)$$

обеспечивающее сходимость интеграла в выражении (33), а следовательно, его аналитичность в круге $|g| < R_0$.

Для нахождения R_0 рассматриваем вариационную задачу о минимизации $R\{\varphi\}$; она приводит к уравнению

$$-\Delta\varphi(x) + m^2\varphi(x) - C\varphi^3(x) = 0, \quad (41)$$

где

$$C = \frac{S_0\{\varphi\}}{2S_{int}\{\varphi\}},$$

которое после замены $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)/\sqrt{C}$ превращается в стандартное уравнение инстантона теории φ^4 . С его помощью легко показать, что $R_0 = S\{\varphi_c\}$, чем устанавливается требуемая область аналитичности (рис. 3б). Вопросы, связанные с отсутствием инстантонов в массивной четырехмерной теории [47], обсуждаются в п. 3.5.

Кроме интеграла (1) представляют интерес другие функциональные интегралы, содержащиеся в предэкспоненте произведения типа $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_M)$; наличие последних не влияет на сходимость, и все проведенные доказательства остаются без изменений.

3.4. Инвариантность относительно алгебраических операций

Как указал т'Хоофт [15], сингулярности борелевских образов не сдвигаются при проведении с исходными функциями алгебраических операций. Это легко доказать для модифицированного определения борелевского образа (10), отличного от (6) и (28), так как

$$F(g) = F_0 + F_1g + F_2g^2 + F_3g^3 + \dots, \quad B(z) = F_0\delta(z) + \frac{F_1}{0!} + \frac{F_2}{1!}z + \frac{F_3}{2!}z^2 + \dots \quad (42)$$

и $B(z)$ содержит δ -образную особенность в нуле. Преобразование (10) заменой $g \rightarrow 1/z$ сводится к преобразованию Лапласа и допускает обращение; с его помощью можно выразить борелевский образ произведения $F_3(g) = F_1(g)F_2(g)$ через известные борелевские образы сомножителей:

$$B_3(z) = \int_0^z dz' B_1(z')B_2(z - z'). \quad (43)$$

Легко видеть, что δ -образная особенность в $B_3(z)$ соответствует определению (42), а особые точки при конечных z совпадают с особыми точками функций $B_1(z)$ и $B_2(z)$ (см. аналогичное рассуждение в п. 3.1). В частности, борелевским образом g^n является функция $z^{n-1}/\Gamma(n)$, аналитичная при целых n , и умножение функции на g^n не меняет ее аналитических свойств в борелевской плоскости.

Если $F_2(z) = 1/F_1(z)$, то

$$\delta(z) = \int_0^z dz' B_1(z')B_2(z - z') \quad (44)$$

и δ -образная особенность в левой части сокращается с δ -образными особенностями в $B_1(z)$ и $B_2(z)$. При конечных z правая часть содержит сингулярности, соответствующие особым точкам $B_1(z)$ и $B_2(z)$, которые отсутствуют в левой части и, следовательно, компенсируют друг друга: это возможно лишь в случае, если $B_2(z)$ имеет особенности в тех же точках, что $B_1(z)$.

Для линейных операций — суммирования, дифференцирования, интегрирования и пр. — аналогичные утверждения доказываются тривиально.

Стандартное определение борелевского образа (6) получается из (10), (42) при $F_0 = 0$ после замены $F(g) \rightarrow gF(g)$; при этом δ -образные особенности исчезают, а остальные сохраняются в тех же точках ввиду несущественности множителя g . Определение (6) соответствует определению (28) с $b_0 = 1$, и в силу п. 3.1 проведенный анализ распространяется на произвольные b_0 .

Поскольку все входящие в теорию величины — функции Грина, вершинные части и пр. — выражаются путем алгебраических операций через функциональные интегралы с одинаковыми аналитическими свойствами (см. конец п. 3.3), их особые точки в борелевской плоскости такие же, как у интеграла (1).

3.5. Процедура перенормировки

Выше неявно предполагалось отсутствие ультрафиолетовых расходимостей, что для теории φ^4 верно при $d < 2$. Для $2 \leq d \leq 4$ построение континуальной теории без расходимостей возможно путем введения в лагранжиан контрчленов [46, 50]. В простейшем случае, когда требуется лишь перенормировка массы ($2 \leq d < 4$), соответствующий член в (4) переписывается в виде

$$m_0^2 \varphi^2 = (m^2 + \Delta m^2) \varphi^2 = (m^2 + Ag + Bg^2 + Cg^3 + \dots) \varphi^2, \quad (45)$$

где коэффициенты A, B, C, \dots выбираются из условия сокращения расходимостей. При наличии контрчленов аналитические свойства интегралов типа (1) усложняются, так как константа связи входит не только в комбинации $g\varphi^4$, но и в виде $g\varphi^2, g^2\varphi^2$ и т. д. Одно из направлений ренормальной деятельности как раз и состояло во введении в лагранжиан дополнительных членов и отслеживании возникающих ренормальных сингулярностей [16, 18, 19]; при этом возникает вопрос о сокращении сингулярностей при выборе коэффициентов у дополнительных членов из условия отсутствия расходимостей, на который не удается получить однозначного ответа.

Более простой путь состоит в явном введении регуляризации и использовании уравнений ренормгруппы. При этом имеется в виду так называемая схема обрезания [51]: по теории возмущений вычисляются вершинные части как функции затравочного заряда g_0 и параметра обрезания Λ ; затем получаются скейлинговые функции, зависящие только от g_0 ; наконец, строятся перенормированные вершины, зависящие от перенормированного заряда g [50]. При этом явного введения контрчленов не требуется, но учитываются все тонкости, связанные с их наличием, так как при записи ренормгрупповых уравнений существенно используется принципиальная возможность устранения расходимостей.

Простейший способ регуляризации состоит в замене члена $(\nabla\varphi)^2$ в (4), приводящегося к виду $-\varphi\Delta\varphi = \varphi\hat{p}^2\varphi$, где \hat{p} — оператор импульса, на $\varphi\epsilon(\hat{p})\varphi$. Если

$$\epsilon(p) = \epsilon(-p), \quad \epsilon(p) \geq 0, \quad (46)$$

то сохраняются как вся структура инстантонных вычислений [49], так и приведенные выше доказательства; единственное изменение происходит в уравнении инстантона (41), которое приводится к виду

$$\epsilon(\hat{p})\varphi(x) + m^2\varphi(x) - \varphi^3(x) = 0. \quad (47)$$

При использовании регуляризации

$$\epsilon(p) = p^2 + p^6/\Lambda^4 \quad (48)$$

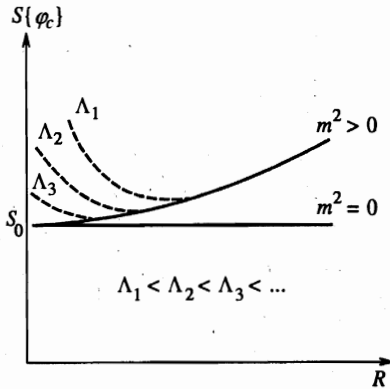


Рис. 8. Зависимость действия $S\{\varphi\}$ от радиуса инстантона R в четырехмерной теории φ^4 при отсутствии регуляризации (сплошные кривые) и для конечного параметра обрезания Λ (штрихи)

зависимость действия $S\{\varphi\}$ от радиуса инстантона R в четырехмерной теории φ^4 имеет вид, показанный на рис. 8⁹⁾. При $\Lambda = \infty$ в безмассовой теории имеется вырождение по радиусу инстантона [1], тогда как в массивной теории инстантоны не существуют [49] ввиду монотонной зависимости $S\{\varphi\}$ от R . При конечных Λ в зависимости $S\{\varphi\}$ от R при $m^2 > 0$ возникает минимум (штриховые кривые на рис. 8), и в массивной теории появляются инстантоны: их действие $S\{\varphi_c\}$ определяет положение сингулярностей в борелевской плоскости. При $\Lambda \rightarrow \infty$ и произвольных $m^2 > 0$ величина $S\{\varphi_c\}$ стремится к инстантонному действию безмассовой теории и положение сингулярностей не зависит от m ¹⁰⁾.

Уравнения ренормгруппы (в форме Каллана—Симанчика) справедливы для вершин $\Gamma^{L,N}$ с N свободными концами и L замыканиями двух линий [50]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda^2} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} + \left(L - \frac{N}{2} \right) \eta(g_0) - L\eta_2(g_0) \right] \Gamma^{L,N}(g_0, \Lambda) = 0. \quad (49)$$

Выписывая три таких уравнения с разными L и N , можно выразить скейлинговые функции $\beta(g_0)$, $\eta(g_0)$, $\eta_2(g_0)$ через вершины $\Gamma^{L,N}(g_0, \Lambda)$ с помощью алгебраических операций и операций дифференцирования, не сдвигающих положение особенностей в борелевской плоскости. В пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, когда справедливо уравнение (49), зависимость скейлинговых функций от Λ исчезает [50] и их сингулярности в борелевской плоскости соответствуют безмассовой теории.

Функция Гелл-Манна—Лоу $\beta(g_0)$ определяет связь перенормированного заряда g с затравочным g_0 . Пусть функции F_0 и F_1 таковы, что $F_0(g_0) \equiv F_1(g)$; связь соответствующих борелевских образов B_0 и B_1 (в смысле определения (10)) легко найти для

⁹⁾ Эту зависимость легко получить, характеризуя инстантон двумя параметрами — радиусом и амплитудой — и проводя вариационную оценку действия; в теории неупорядоченных систем это соответствует методу оптимальной флуктуации [35].

¹⁰⁾ Для размерностей пространства $2 \leq d < 4$ влияние параметра Λ на свойства инстантона несущественно и роль перенормировок сводится к тому, что в уравнение инстантона входит перенормированная масса [36]; зависимость $S\{\varphi_c\}$ от m в этом случае сохраняется.

бесконечно малого преобразования зарядов, $g_0 = g + 2\beta(g)\delta\Lambda/\Lambda$ (см. (25)):

$$B_1(z) = B_0(z) + \frac{2\delta\Lambda}{\Lambda} \int_0^z dy [B_0(y) + yB_0'(y)] B_\beta(z-y), \quad (50)$$

где $B_\beta(z)$ — борелевский образ функции $\beta(g)/g$. Уравнение (50) аналогично уравнению (43) и, следовательно, аналитические свойства не меняются при преобразовании зарядов.

Вершины $\Gamma^{L,N}$ расходятся при $\Lambda \rightarrow \infty$, но становятся конечными после выделения из них расходящихся Z -факторов и перехода от затравочного заряда к перенормированному. Поскольку Z -факторы в свою очередь выражаются через $\Gamma^{L,N}$ [50], перенормированные вершины имеют требуемые аналитические свойства.

Зависимость скейлинговых функций от ренормировочной схемы определяется формулами пересчета [51]:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(q(g)) &= \beta(g) \frac{dq(g)}{dg}, \\ \tilde{\eta}(q(g)) &= \eta(g) - \beta(g) \frac{d \ln p(g)}{dg}, \\ \tilde{\eta}_2(q(g)) &= \eta_2(g) - \beta(g) \frac{d \ln p_2(g)}{dg}. \end{aligned} \quad (51)$$

Входящие в них пересчетные функции $q(g)$, $p(g)$ и $p_2(g)$ для стандартных ренормировочных схем (обрезания, вычитания и пр.) выражаются через вершины $\Gamma^{L,N}$, так что аналитические свойства скейлинговых функций во всех схемах одинаковы. В общем случае аналитические свойства пересчетных функций требуют дополнительного исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты разд. 3 исключают существование ренормальных сингулярностей в теории φ^4 . Если считать убедительными соображения разд. 2 о связи с полюсом Ландау, то теория φ^4 не может быть внутренне противоречивой. К тому же выводу можно прийти, исходя из твердотельных приложений: к теории φ^4 математически точно сводится разумная модель неупорядоченной системы [36, 39], и внутренняя противоречивость теории φ^4 означала бы принципиальную невозможность получить математическое описание этой модели. Поэтому становится актуальной ревизия результатов работ [34, 35], в которых указания на внутреннюю противоречивость теории φ^4 получены на основе приближенного восстановления функции Гелл-Манна—Лоу.

Результаты разд. 3 относятся только к теории φ^4 и не могут быть прямо перенесены на другие теории поля; однако вместе с качественными соображениями разд. 2 они демонстрируют несостоятельность концепции ренормалонов в целом. Поэтому было бы актуально обобщить метод доказательства, использованный в разд. 3, на другие случаи.

В квантовой хромодинамике ренормалонное направление является в настоящее время господствующим [20–30]. Однако специфика КХД в данном контексте никогда не подчеркивалась: так, т'Хоофт [15], говоря о КХД, дает пояснения на примере теории φ^4 , а в последних работах возник термин «наивная неабелизация» [26, 30], суть которого как раз и состоит в пренебрежении спецификой КХД. Впрочем, в КХД есть специальная причина для веры в ренормалоны, имеющая чисто феноменологический характер. Путем обработки экспериментальных данных можно установить, что вклад высших порядков имеет зависимость от импульса $\propto 1/q^4$ [22]: ее легко получить из ренормалонных графиков, но, как принято считать, невозможно получить в рамках инстантонного метода. Последнее основано на результатах работ [10, 11], согласно которым инстантонный вклад пропорционален $1/q^{18}$. Однако легко убедиться, что вклад $\sim 1/q^4$ в работах [10, 11] возникал, но содержал расходимости, которые авторы затруднились устранить¹¹⁾; поэтому соответствующий член был «отправлен» в ренормалонный сектор с мотивацией, что «он дает вклад скорее в ренормалонную сингулярность, чем в инстантонную» [10, стр. 287]. Если никаких ренормалонных сингулярностей нет, то этот вклад был просто выброшен; следовательно, никакого реального вычисления асимптотики Липатова для КХД в настоящее время нет.

Работа стимулирована продолжительными дискуссиями с П. Г. Сильвестровым, которому автор признателен за оппонирование на стороне ренормалонов, критические замечания и общую помощь в ознакомлении с ситуацией. Автор благодарит Б. Л. Иоффе, Л. Н. Липатова и участников семинаров в ИФП, ФИАН, ИТЭФ и ПИЯФ за интерес к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 96-0580) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-02-19527).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение интерполяционного полинома

Полином степени N , совпадающий с функцией $f(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, определяется формулой Лагранжа [53]:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f(x_k)}{\psi'(x_k)} \frac{\psi(x)}{(x - x_k)}, \quad (\text{П.1})$$

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N), \quad (\text{П.2})$$

а ошибка интерполяции дается выражением

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \psi(x), \quad (\text{П.3})$$

где ξ принадлежит интервалу (x_0, x_N) .

Интересующая нас функция (18) при $n \lesssim N$ ведет себя как q^n с медленно меняющимся q , так что $\ln q \sim \ln N$; пренебрегая этими медленными изменениями и опуская в (16) и (18) общий множитель, имеем

¹¹⁾ Такие расходимости возникают и в теории φ^4 , процедура их устранения известна [36].

$$f(x) = q^x, \quad A_N \sim \frac{1}{6^N N^3}. \quad (\text{П.4})$$

Учитывая, что на интервале $0 \leq x \leq \Delta$ функция $|\psi(x)| \leq \Delta^{N+1}$, получим

$$|R_N(x)| \leq \frac{(\ln q)^{N+1} q^\Delta}{(N+1)!} \Delta^{N+1}, \quad (\text{П.5})$$

и ошибка интерполяции мала при

$$\Delta \lesssim N / \ln N. \quad (\text{П.6})$$

Для исследования зависимости коэффициента A_N от расположения точек x_k положим $\psi(x) = \operatorname{Re} \psi(x + i0)$ и, вычисляя $\ln \psi(x + i0)$ с помощью формулы Эйлера—Маклорена, получим для $\psi(x)$ представление

$$\psi(x) = F(x) \sin G(x). \quad (\text{П.7})$$

В частности, для степенного расположения точек

$$x_k = (k/N)^\alpha \Delta, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{П.8})$$

имеем при $\alpha \gg 1$

$$F(x) = (-1)^N \sqrt{x(\Delta - x)} \exp \left\{ N \left[\alpha (x/\Delta)^{1/\alpha} + \ln \Delta - \alpha \right] \right\}, \quad (\text{П.9})$$

$$G(x) = \pi N (x/\Delta)^{1/\alpha}.$$

Для старшего коэффициента полинома (П.1) получим

$$A_N = \sum_{k=0}^N \frac{f(x_k)}{\psi'(x_k)} \sim \exp\{(\alpha - \ln \Delta)N\} \quad (\text{П.10})$$

(сумма определяется членом с $k = 1$), и при $\alpha \sim \ln N$ в зависимости от соотношения α и $\ln \Delta$ коэффициент A_N может быть факториально малым или факториально большим, так что требуемое значение (П.4) попадает в область изменения. Таким образом, требуемый полином (16) существует в интервале $0 \leq n \leq n_0$, где $n_0 \sim N / \ln N$.

Литература

1. Л. Н. Липатов, ЖЭТФ 72, 411 (1977).
2. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D 15, 1544 (1977).
3. C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. Lett. 38, 306 (1977).
4. А. П. Бухвостов, Л. Н. Липатов, ЖЭТФ 73, 1658 (1977).
5. E. V. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B 71, 93 (1977); L. N. Lipatov, A. P. Bukhvostov, and E. I. Malkov, Phys. Rev. D 19, 2974 (1979).
6. G. Parisi, Phys. Lett. B 66, 382 (1977).
7. Large order behavior of perturbation theory, ed. by J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Amsterdam (1990).
8. C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. D 16, 996 (1977); R. Balian, C. Itzykson, G. Parisi, and J. B. Zuber, Phys. Rev. D 17, 1041 (1978).
9. E. V. Bogomolny and V. A. Fateyev, Phys. Lett. B 76, 210 (1978).
10. I. I. Balitsky, Phys. Lett. B 273, 282 (1991).
11. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B 463, 489 (1996).

12. B. Lautrup, Phys. Lett. B **69**, 109 (1977).
13. S. Chadha and P. Olesen, Phys. Lett. B **72**, 87 (1977).
14. P. Olesen, Phys. Lett. B **73**, 327 (1977).
15. G. t'Hooft, in *The whys of subnuclear physics* (Erice, 1977), ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York (1979).
16. G. Parisi, Phys. Lett. B **76**, 65 (1978); Nucl. Phys. B **150**, 163 (1979).
17. G. Parisi, Phys. Rep. **49**, 215 (1979).
18. F. David, Nucl. Phys. B **209**, 433 (1982); **234**, 237 (1984); **263**, 637 (1986).
19. M. C. Bergere and F. David, Phys. Lett. B **135**, 412 (1984).
20. A. H. Mueller, Nucl. Phys. B **250**, 327 (1985).
21. G. B. West, Phys. Rev. Lett. **67**, 1388 (1991).
22. V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **385**, 452 (1992).
23. L. S. Brown and L. J. Yaffe, Phys. Rev. D **45**, R398 (1992); L. S. Brown, L. J. Yaffe, and C. Zhai, Phys. Rev. D **46**, 4712 (1992).
24. G. Grunberg, Phys. Lett. B **304**, 183 (1993).
25. A. H. Mueller, Phys. Lett. B **308**, 355 (1993).
26. M. Beneke et al, Phys. Lett. B **307**, 154 (1993); **348**, 613 (1995); Nucl. Phys. B **452**, 563 (1995); **472**, 529 (1996); Phys. Rev. D **52**, 3929 (1995).
27. D. J. Broadhurst, Z. Phys. C **58**, 339 (1993).
28. A. I. Vainstein and V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **73**, 1207 (1994); Phys. Rev. D **54**, 4039 (1996).
29. C. N. Lovett-Turner and C. V. Maxwell, Nucl. Phys. B **432**, 147 (1994).
30. S. V. Faleev and P. G. Silvestrov, Nucl. Phys. B **507**, 379 (1997).
31. И. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИИЛ, Москва (1951).
32. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1976).
33. В. С. Попов, В. Л. Елецкий, А. В. Турбинер, ЖЭТФ **74**, 445 (1978).
34. Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, ТМФ **38**, 15 (1979).
35. Ю. А. Кубышин, ТМФ **58**, 137 (1984).
36. И. М. Суслов, УФН **168**, 503 (1998).
37. G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, and A. Migdal, Phys. Rev. E **54**, 4896 (1996).
38. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. Lett. **39**, 95 (1977); Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
39. М. В. Садовский, УФН **133**, 223 (1981).
40. G. t'Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3433 (1976).
41. Y. Frishman, Phys. Rev. D **19**, 540 (1979).
42. I. Affleck, Nucl. Phys. B **191**, 429 (1981).
43. И. М. Суслов, ЖЭТФ **111**, 220 (1997).
44. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).
45. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
46. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
47. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **102**, 489 (1955).
48. И. Т. Дятлов, В. В. Судаков, К. А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ **32**, 767 (1957).
49. V. G. Makhankov, Phys. Lett. A **61**, 431 (1977).
50. E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. VI, ed. by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976).
51. А. А. Владимиров, Д. В. Ширков, УФН **129**, 407 (1979).
52. И. М. Суслов, ЖЭТФ **105**, 560 (1994).
53. А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва (1967).