

О СПОНТАННОМ ИЗЛУЧАТЕЛЬНОМ МЕХАНИЗМЕ РЕЛАКСАЦИИ ПРИМЕСНОГО АТОМА В ФОТОННОМ КРИСТАЛЛЕ

*А. М. Башаров**

*Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 февраля 1999 г.

На основе представлений о радиационном взаимодействии атомов двух разных сортов предложен новый электродипольный механизм излучательной спонтанной релаксации примесного атома в среде со щелью в плотности фотонных состояний на частоте перехода примесного атома. Получено кинетическое уравнение для примесного атома и рассмотрены поляризация фотонного кристалла и индуцированная электромагнитная волна на частоте спонтанного излучения примесного атома по предложенному механизму. Показано, что параметры индуцированного поля определяются параметрами предложенного механизма излучательной релаксации, что может служить основой их экспериментального исследования.

PACS: 42.50.Lc; 42.70.Qs

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительный интерес представляет изучение процессов излучения и распространения электромагнитного поля в условиях, когда какие-либо структурные и/или динамические факторы препятствуют этому в некоторых диапазонах параметров. Например, в случае периодических диэлектрических слоев отражение Брэгга [1-3] препятствует проникновению и распространению слабой волны определенной частоты, тогда как достаточно интенсивное поле той же частоты распространяется в режиме щелевой солитонной волны [4, 5]. Вследствие взаимодействия света с плотной средой возникающие поляритонная ветвь и щель в спектре возбуждения [6-9] также мешают проникновению слабой волны соответствующей частоты и приводят к мультистабильным режимам отражения интенсивной волны, ее самопульсациям [10] и проникновению в такую среду. Существуют и другие причины появления в специально созданной среде щели в плотности состояний электромагнитного поля. В настоящее время имеется достаточно широкий класс материалов, в которых распространение света определенных частот в классическом смысле запрещено [11]. Мы будем называть такие среды фотонными кристаллами, хотя обычно под этим названием подразумевают более узкий круг сред, образованных периодическими диэлектрическими структурами. Мы также будем абстрагироваться от геометрических факторов, не позволяющих в некоторых направлениях распространения излучения рассматривать фотонный кристалл как среду со щелью в плотности фотонных состояний.

*E-mail: ashata@ashata.mephi.msk.su

Если каким-либо образом поместить возбужденный примесный атом в фотонный кристалл, так что частота перехода примесного атома будет в щели спектра фотонных состояний, то время жизни такого возбужденного примесного атома окажется чрезвычайно большим. О таком состоянии возбужденного атома в фотонном кристалле говорят либо как о локализованном свете, либо как о связанном состоянии атома и фотона [1–3, 12–14]. Исследование динамики возбужденных атомов в фотонном кристалле представляет общефизический интерес и перспективно для применений в различных схемах и устройствах квантового компьютера [15].

Вычислению времени жизни возбужденных примесных атомов в фотонном кристалле посвящен ряд работ [16–26]. Как правило, рассматриваются ситуации, когда частоты переходов примесного атома лежат вблизи края запрещенной зоны фотонного спектра. Здесь динамика спонтанного излучения становится аномальной с рядом особенностей [16–18], поскольку в расчетах нельзя использовать марковское приближение. Своеобразие в подобную задачу вносит рассмотрение двух одинаковых взаимодействующих между собой примесных атомов [23]. Увеличение числа примесных атомов приведет к заполнению щели примесными уровнями [24]. Другой подход к проблеме локализованного фотона продемонстрирован в работах [25, 26]. Следует также упомянуть, что различные подходы иногда сочетают с учетом дополнительного воздействия внешних электромагнитных полей [27].

Если охарактеризовать роль среды фотонного кристалла в подходах к рассмотрению динамики возбужденного атома в условиях локализации фотона, то она, как правило, сводится к взаимодействию с атомом коллективных мод кристалла, которые так или иначе связаны со спектром возбуждений кристалла [22–26]. В настоящей статье хотелось бы обратить внимание на общий механизм, определяющий излучательную спонтанную релаксацию возбужденного примесного атома в фотонном кристалле в условиях, когда обычная излучательная спонтанная релаксация невозможна из-за щели в плотности фотонных состояний. При этом взаимодействие примесного атома с атомами фотонного кристалла рассматривается локально без учета коллективных процессов в предположении, что из среды фотонного кристалла задействованы лишь атомы ближайшие к примесному, которые выступают изолированно от остальных атомов фотонного кристалла. Безусловно, задача о динамике возбужденного примесного атома в фотонном кристалле весьма сложна. При последовательном подходе необходимо учитывать всю иерархию процессов взаимодействия, выделяя из них определяющие и анализируя их влияние на развитие разного рода неустойчивостей. Предлагаемый механизм имеет все основания для учета в последовательной теории и особенно в задачах, рассматривающих дополнительное воздействие на примесный атом внешнего электромагнитного поля [27].

Идею предлагаемого механизма излучательной спонтанной релаксации легко понять на основании следующих соображений (см. рис. 1). Известно, что в поле электромагнитной волны с частотой Ω взаимодействие между атомами двух сортов, энергетические уровни у которых связаны оптически разрешенным переходом $E_b^{im} \rightarrow E_a^{im}$ (примесный атом или атом сорта I) и двухквантовым переходом $E_C^{cr} \rightarrow E_A^{cr}$ (атом фотонного кристалла или атом сорта II), происходит при выполнении резонансных условий

$$E_b^{im} - E_a^{im} \approx E_C^{cr} - E_A^{cr} + \hbar\Omega \quad (1)$$

с передачей возбуждения от одного атома к другому и с излучением или поглощением фотона с частотой Ω в зависимости от начальных заселенностей уровней. Напри-

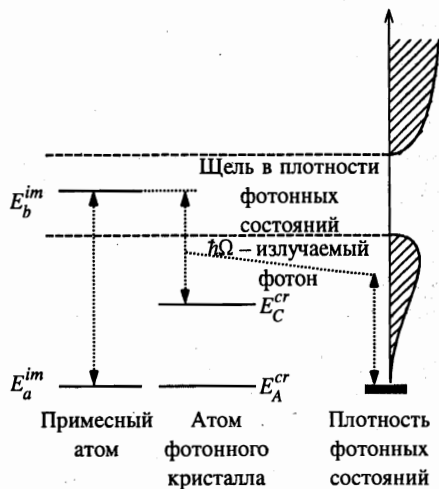


Рис. 1

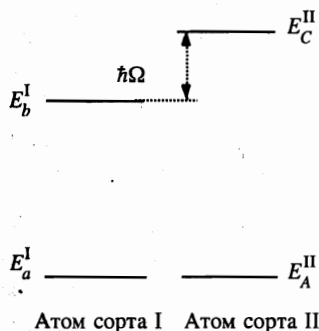


Рис. 2

Рис. 1. Схема существенных для рассматриваемого механизма энергетических уровней примесного атома и атома фотонного кристалла и плотность фотонных состояний вблизи частоты перехода в примесном атоме

Рис. 2. Другое расположение уровней в радиационных процессах

мер, если примесный атом возбужден, а атом фотонного кристалла не возбужден, то в результате межатомного взаимодействия в поле световой волны примесный атом переходит из возбужденного состояния E_b^{im} в невозбужденное состояние E_a^{im} , а в атоме фотонного кристалла осуществляется двухквантовый переход с нижнего энергетического уровня E_A^{cr} на верхний энергетический уровень E_C^{cr} . При этом происходит излучение фотона, частота которого Ω уже может находиться за пределами щели в плотности фотонных состояний. Эти процессы открыты и довольно подробно исследованы в физике атомных столкновений, получив название радиационных атомных столкновений [28–30]. Они наблюдаются в достаточно интенсивных когерентных световых полях, причем в зависимости от конфигурации энергетических атомных уровней возможны самые разнообразные процессы в добавление к обсуждаемому (см. рис. 2 и [29, 30]).

В данной статье радиационный двухквантовый механизм передачи возбуждения при атомных столкновениях предлагается в качестве возможного механизма спонтанной излучательной релаксации примесного атома в фотонном кристалле. В отличие от развитого подхода [28–30], в котором релаксационная динамика атома определялась классической теорией деполяризующих атомных столкновений [31–33], для определения релаксационной динамики примесного атома в фотонном кристалле необходимо в представлении о радиационном атомном столкновении использовать последовательное квантовомеханическое описание электромагнитного поля излучаемого фотона, учесть плотность фотонных состояний в кристалле и выбрать адекватную модель фотонного термостата. В качестве модельной системы в данной работе выбирается примесный атом, атом фотонного кристалла и фотонный термостат. Поскольку частоты излучаемых фотонов в предложенном механизме лежат вне области щели плотности фотонных

состояний фотонного кристалла, а уширения линий примесного атома малы по сравнению с характерным масштабом частот, определяющим изменения в плотности фотонных состояний, фотонный термостат данной задачи можно рассматривать как широкополосный. Тогда для определения релаксационной динамики примесного атома удобно воспользоваться аппаратом квантового уравнения Ито [34] и унитарным преобразованием исходного гамильтониана задачи в эффективный гамильтониан [30]. Параметры плотности фотонных состояний при этом окажутся включенными в константу связи в уравнении Ито. Основной параметр, характеризующий релаксационную динамику примесного атома, определяет также поляризацию фотонного кристалла на частоте спонтанного излучения в предлагаемой модели. В работе рассмотрен когерентный механизм появления поляризации фотонного кристалла при когерентной накачке примесных атомов и их окружения. В данной модели никак не рассматриваются коллективные эффекты, связанные с переносом возбуждения атома фотонного кристалла по кристаллу. Эти процессы безусловно влияют на параметры обсуждаемого излучательного механизма, но в целом не могут сами собой воспрепятствовать его проявлению. Их учет может быть сделан при дальнейшем развитии теории.

Данная работа является естественным продолжением и дополнением работы [35], в которой рассматривался двухквантовый механизм релаксации атомных состояний за счет процессов одновременного излучения и/или поглощения двух фотонов, один из которых относился к мощной когерентной волне, описываемой классическим образом, а другой — к квантовому фотонному термостату. В [35] соответствующие константы релаксации оказались пропорциональными интенсивности когерентной волны. В рассматриваемом здесь случае фотон мощной когерентной волны заменен на возбуждение атома фотонного кристалла. За счет комбинационного преобразования частоты излученный фотон оказывается за пределами щели в плотности фотонных состояний. Двухквантовый механизм релаксации определяет весьма малую константу данного спонтанного излучательного механизма, зависящую от плотности фотонных состояний и параметров взаимодействия между примесным атомом и ближайшими атомами фотонного кристалла, что позволяет пренебрегать указанным механизмом релаксации в обычной ситуации. Однако в фотонном кристалле из-за отсутствия плотности фотонных состояний, отвечающих излучению фотона при обычном переходе из возбужденного состояния в основное, обычный радиационный механизм релаксации оказывается запрещенным. Тогда малая константа релаксации и отвечающий ей механизм вполне могут стать определяющими для решения вопроса о времени жизни возбужденного примесного атома и каналах диссипации его энергии. Возможно, учет коллективных свойств фотонного кристалла в контексте данного механизма изменит значение этой константы, но это — тема отдельного исследования.

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 сформулированы исходный и эффективный гамильтонианы задачи. В разд. 3 выводятся квантовое уравнение Ито, кинетическое уравнение для примесного атома и релаксационный оператор примесного атома. В разд. 4 обсуждаются поляризация фотонного кристалла и излучение когерентной волны на частоте спонтанного излучения после предварительного когерентного возбуждения среды. В Заключение анализируются факторы, влияющие на значение константы релаксации примесного атома. В Приложении установлена связь между параметрами унитарного преобразования гамильтониана задачи в представлениях взаимодействия и Шредингера.

2. ИСХОДНЫЙ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТониАНЫ МОДЕЛИ

Полный гамильтониан системы, состоящей из примесного атома, атома фотонного кристалла и фотонного термостата, примем в виде

$$H = H_{im} + H_{cr} + H_{th} + V_{im-cr} + V_{im} + V_{cr}, \quad (2a)$$

в котором слагаемые H_{im} , H_{cr} и H_{th} представляют собой гамильтонианы изолированных компонент рассматриваемой системы соответственно, слагаемые V_{im} и V_{cr} описывают взаимодействие фотонного термостата с примесным атомом и атомом фотонного кристалла, а слагаемое V_{im-cr} определяет диполь-дипольное взаимодействие между атомами. Удобно воспользоваться одномерным приближением для фотонного термостата и принять следующие выражения для слагаемых полного гамильтониана:

$$H_{im} = \sum_{\alpha} E_{\alpha}^{im} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha}, \quad H_{cr} = \sum_{\beta} E_{\beta}^{cr} b_{\beta}^{+} b_{\beta}, \quad H_{th} = \sum_{\lambda} \int d\omega \hbar \omega c_{\lambda\omega}^{+} c_{\lambda\omega},$$

$$V_{im} = -i\hbar \sum \int d\omega K(\omega) (\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{\alpha\alpha'}^{im}) a_{\alpha}^{+} a_{\alpha'} c_{\lambda\omega} + \text{H.c.},$$

$$V_{cr} = -i\hbar \sum \int d\omega K(\omega) (\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{\beta\beta'}^{cr}) b_{\beta}^{+} b_{\beta'} c_{\lambda\omega} + \text{H.c.}, \quad (26)$$

$$V_{im-cr} = \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta'}} U_{\alpha\beta, \alpha'\beta'} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha'} b_{\beta}^{+} b_{\beta'}, \quad U_{\alpha\beta, \alpha'\beta'} = ((\mathbf{d}_{\alpha\alpha'}^{im} \mathbf{d}_{\beta\beta'}^{cr}) l^2 - 3(\mathbf{d}_{\alpha\alpha'}^{im} l)(\mathbf{d}_{\beta\beta'}^{cr} l)) l^{-5}.$$

Здесь индексы im и cr относятся к величинам, характеризующим соответственно примесный атом и атом фотонного кристалла. Например, величина E_{α}^{im} представляет собой энергию изолированного покоящегося примесного атома, заселяющего уровень с квантовыми числами α . Операторы рождения и уничтожения примесного атома в состоянии с энергией E_{α}^{im} обозначены через a_{α}^{+} и a_{α} , тогда как аналогичные величины для атома фотонного кристалла суть b_{β}^{+} и b_{β} . Через $c_{\lambda\omega}$ и $c_{\lambda\omega}^{+}$ обозначены операторы уничтожения и рождения фотонов с частотой ω и вектором поляризации $\mathbf{e}_{\lambda\omega}$. Центральная частота фотонного термостата обозначена через Ω . Считаем, что операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям Бозе. Что касается атомных операторов, это лишь вопрос удобства, так как окончательные результаты получаются те же, что и для коммутационных соотношений Ферми. Далее, \mathbf{d} представляет собой оператор дипольного момента атома, а l — расстояние между примесным атомом и ближайшим к нему атомом фотонного термостата. Константа связи $K(\omega)$ пропорциональна плотности фотонных состояний $g(\omega)$: $K(\omega) = (2\pi\omega/\hbar)^{1/2} g(\omega)$.

Подчеркнем, что в отличие от работ [12–14, 16–27] возбужденный уровень примесного атома E_{β}^{im} , расположенный в щели в плотности фотонных состояний, здесь рассматривается как отстоящий достаточно далеко от краев щели так, чтобы соответствующая отстройка Δ_g^{im} существенно превышала сдвиг частоты рассматриваемого перехода, вызванный взаимодействием с фотонами у края щели. Тогда влиянием поля локализованного фотона [12, 13] на примесный атом можно пренебречь, а механизмы релаксации, обсуждаемые в [12–14, 16–27], становятся несущественными. Расстояние l между примесным атомом и атомом фотонного кристалла считаем много меньшим характерной длины волны, тогда диполь-дипольное взаимодействие между атомами разного

сорта осуществляется за счет продольного электромагнитного поля и практически не зависит от щели в плотности состояний поперечного электромагнитного поля. Это также отличает обсуждаемую ситуацию от резонансного диполь-дипольного взаимодействия одинаковых атомов, эффективность которого зависит от малости Δ_g^{im} , т. е. от близости возбужденного уровня примесных атомов к краю щели в плотности фотонных состояний [12, 13, 20–22]. Наконец, в операторах взаимодействия V_{im} и V_{cr} , которые по виду сходны с оператором резонансного диполь-дипольного взаимодействия, центральная частота Ω поля фотонов отличается от частоты перехода примесного атома на величину частоты двухквантового перехода атома фотонного кристалла и расположена вдали от краев щели в плотности фотонных состояний так, чтобы ансамбль фотонов можно было рассматривать как широкополосный термостат. Этим настоящее рассмотрение отличается от [13], где частоты фотонов, участвующих в процессах переизлучения их примесными атомами, находятся у края щели и важна близость Ω к частоте перехода примесного атома (малость Δ_g^{im}). Резонансное условие (1) для Ω связывает частоты переходов в атомах разных сортов и не накладывает никаких ограничений относительно расположения Ω по отношению к краю щели. Таким образом, рассматриваемые в данной статье условия в определенном выше смысле противоположны обсуждаемым в [12, 13, 20–22], так что механизмами релаксации, связанными с понятиями локализованного фотона, «одевания» примесного атома полем локализованного фотона и переизлучения примесного атома в духе [12, 13], а также соответствующими слагаемыми в гамильтониане (2) пренебрегается.

Рассмотрим уравнение Шредингера системы

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle.$$

Следуя общей методике рассмотрения резонансных процессов [30], перейдем при помощи унитарного оператора e^{-iS} к новому вектору состояния $|\tilde{\Psi}\rangle = e^{-iS} |\Psi\rangle$, подчиняющемуся уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{H} |\tilde{\Psi}\rangle$$

с гамильтонианом

$$\tilde{H} = e^{-iS} H e^{iS} - i\hbar e^{-iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{iS}. \quad (3)$$

Унитарность преобразования обеспечивает неизменность всех наблюдаемых величин системы. Найдем такое преобразование, которое в недиагональных матричных элементах гамильтониана явно выделит доминирующую роль резонансных процессов (1). Для этого S и \tilde{H} представим в виде рядов по степеням констант взаимодействия атомов с электрическим полем фотонного термостата и взаимодействия между атомами:

$$S = S^{(10)} + S^{(01)} + S^{(11)} + \dots, \quad \tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(11)} + \dots, \quad (4)$$

где целые числа m и n каждой пары индексов указывают на m -ый порядок по константе взаимодействия с полем (левый индекс) и n -ый порядок по межатомному взаимодействию (правый индекс). Получим [30]

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^{(00)} &= H_{im} + H_{cr} + H_{th}, \\
\tilde{H}^{(10)} &= V_{im} + V_{cr} - i \left[S^{(10)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} S^{(10)}, \\
\tilde{H}^{(01)} &= V_{im-cr} - i \left[S^{(01)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} S^{(01)}, \\
\tilde{H}^{(11)} &= -\frac{i}{2} \left[S^{(01)}, V_{im} + V_{cr} \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(10)}, V_{im-cr} \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(01)}, \tilde{H}^{(10)} \right] - \\
&\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(10)}, \tilde{H}^{(01)} \right] - i \left[S^{(11)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} S^{(11)}, \\
\tilde{H}^{(20)} &= -\frac{i}{2} \left[S^{(10)}, V_{im} + V_{cr} \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(10)}, \tilde{H}^{(10)} \right] - i \left[S^{(20)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} S^{(20)}, \\
\tilde{H}^{(02)} &= -\frac{i}{2} \left[S^{(01)}, V_{im-cr} \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(01)}, \tilde{H}^{(01)} \right] - i \left[S^{(02)}, \tilde{H}^{(00)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} S^{(02)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и далее квадратными скобками обозначен коммутатор операторов: $[A, B] = AB - BA$.

Поскольку эффективно идут лишь резонансные процессы с участием кванта электромагнитного поля и атомных возбуждений, следует положить $\tilde{H}^{(10)} = \tilde{H}^{(01)} = 0$, откуда в обычном предположении адиабатичности включения электромагнитного поля находим выражения для $S^{(10)}$ и $S^{(01)}$:

$$\begin{aligned}
S^{(10)} &= \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta' \\ \lambda}} \int d\omega K(\omega) \left\{ \frac{(\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{\beta\beta'}^{cr}) b_{\beta}^+ b_{\beta'}}{\omega_{\beta\beta'}^{cr} - \omega} + \frac{(\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{\alpha\alpha'}^{im}) a_{\alpha}^+ a_{\alpha'}}{\omega_{\alpha\alpha'}^{im} - \omega} \right\} c_{\lambda\omega} + \text{H.c.}, \\
S^{(01)} &= i\hbar^{-1} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta'}} \frac{U_{\alpha\beta, \alpha'\beta'}}{\omega_{\beta\beta'}^{cr} + \omega_{\alpha\alpha'}^{im}} a_{\alpha}^+ a_{\alpha'} b_{\beta}^+ b_{\beta'},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\omega_{\alpha\alpha'}^{im} = (E_{\alpha}^{im} - E_{\alpha'}^{im})/\hbar, \quad \omega_{\beta\beta'}^{cr} = (E_{\beta}^{cr} - E_{\beta'}^{cr})/\hbar$$

(заметим, что в конкретных вычислениях удобнее работать в представлении взаимодействия, см. Приложение). Будем оставлять в $\tilde{H}^{(11)}$ помимо диагональных элементов лишь слагаемые, обеспечивающие протекание резонансных процессов (1) и приближенные вращающейся волны. Остальные слагаемые будут определять величины $S^{(11)}$, $S^{(20)}$ и т. п. В дальнейшем они не понадобятся. Их вид лишь подтверждает непротиворечивость подхода, поскольку они не содержат резонансных знаменателей. Процедура эта полностью аналогична описанной в [30, 35]. В результате эффективный гамильтониан можно представить в виде

$$H^{eff} = H_{im} + H_{cr} + H_{th} + \tilde{H}^{(11)} + \tilde{H}^{(02)}, \tag{7}$$

$$\tilde{H}^{(11)} = i\hbar \sum_{\lambda} \int d\omega K(\omega) R_{+} c_{\lambda\omega} + \text{H.c.}, \tag{8a}$$

$$R_+ = h_\lambda(l) a_b^+ a_a b_C^+, \quad h_\lambda(l) = \sum_\beta \left\{ \frac{U_{bA,a\beta}(\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{\beta C}^{cr})}{\hbar(\omega_{\beta A}^{cr} - \omega_{ba}^{im})} + \frac{(\mathbf{e}_{\lambda\omega} \mathbf{d}_{A\beta}^{cr}) U_{b\beta,aC}}{\hbar(\omega_{\beta C}^{cr} + \omega_{ba}^{im})} \right\}, \quad (86)$$

$$\tilde{H}^{(02)} = \sum_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}(l) a_\alpha^+ a_\alpha b_\beta^+ b_\beta, \quad u_{\alpha\beta}(l) = \sum_{\alpha'\beta'} \frac{U_{\alpha\beta,\alpha'\beta'} U_{\alpha'\beta',\alpha\beta}}{\hbar(\omega_{\alpha\alpha'}^{im} + \omega_{\beta\beta'}^{cr})}. \quad (9)$$

При выводе соотношений (86) мы воспользовались условием резонансности рассматриваемого процесса (1) и положили в промежуточных формулах $\omega_{\beta A}^{cr} + \omega \approx \omega_{\beta C}^{cr} + \omega_{ba}^{im}$ и $\omega_{\beta C}^{cr} - \omega \approx \omega_{\beta A}^{cr} - \omega_{ba}^{im}$.

Слагаемое $\tilde{H}^{(02)}$ отвечает ударному уширению и сдвигу атомных уровней примеси. Там, где это возможно, будем либо им пренебрегать, либо учитывать его в простейшем варианте.

Слагаемое $\tilde{H}^{(11)}$ определяет обсуждаемый механизм излучательной релаксации. Основной параметр здесь $h_\lambda(l)$, он зависит как от межатомного расстояния l , так и от структуры энергетических уровней атома фотонного кристалла. В принципе удачный подбор атомов модели может существенно увеличить значение параметра $h_\lambda(l)$, на что указывает характерный вид знаменателей слагаемых, составляющих $h_\lambda(l)$. Большое значение имеют также величины дипольных моментов переходов с рассматриваемых уровней E_A^{cr} и E_C^{cr} на другие уровни, особенно на те, которые минимизируют упомянутые знаменатели. Скорость спонтанной излучательной релаксации можно легко найти по стандартным правилам, используя (86). Однако важнее получить кинетическое уравнение для примесного атома, поскольку на его основе можно решать различные задачи нелинейной оптики. Рассмотренные излучательные процессы будут определять релаксационный оператор кинетического уравнения и поляризуемость фотонного кристалла.

3. УРАВНЕНИЕ ИТО И РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Предположим, что фотонный термостат нашей системы определяется обычными соотношениями [34–36]

$$\begin{aligned} \langle c_\lambda^+(t) c_{\lambda'}(t') \rangle &= N_{ph} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(t - t'), & \langle c_\lambda(t) c_\lambda^+(t') \rangle &= (1 + N_{ph}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta(t - t'), \\ \langle c_\lambda^+(t) c_\lambda^+(t') \rangle &= \langle c_\lambda(t) c_{\lambda'}(t') \rangle = 0, & c_\lambda(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \exp[-i\omega(t - t_0)] c_{\lambda\omega}, \end{aligned} \quad (10)$$

где N_{ph} — плотность фотонов термостата, t_0 — некоторый начальный момент времени, к которому относятся фотонные операторы $c_{\lambda\omega}$ и c_λ^+ . Главное приближение основано на предположении, что константа связи не зависит от частоты, а определяется ее значением для центральной частоты Ω фотонного термостата:

$$K(\omega) = K(\Omega) = \sqrt{\kappa/2\pi}. \quad (11)$$

Это предположение известно как марковское приближение [34].

Запишем уравнение Гейзенберга для некоторого оператора A , относящегося к комплексу, состоящему из примесного атома и ближайшего атома фотонного кристалла:

$$\dot{A} = -\frac{i}{\hbar} [A, H_{im} + V + H_{cr} + \tilde{H}^{(02)}] + \sqrt{\kappa} [A, R_+] c(t) - \sqrt{\kappa} [A, R_+]^+ c^+(t). \quad (12)$$

Здесь предполагается, что: 1) операторы фотонного термостата эволюционируют как операторы не взаимодействующей системы; 2) справедливо марковское приближение; 3) поляризационными эффектами можно пренебречь. Для возможного дальнейшего использования кинетического уравнения в нелинейной оптике примесных атомов в фотонных кристаллах к оператору примесного атома добавлен оператор V , учитывающий возможные различные взаимодействия примесного атома, например с внешними когерентными полями.

Далее вводим в рассмотрение квантовый винеровский процесс [34]

$$B(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' c(t'), \quad [B(t, t_0), B^+(t, t_0)] = t - t_0$$

и обычные правила интегрирования и дифференцирования Ито. Для сохранения некоторой преемственности в обозначениях от работ [35, 36] в обозначении винеровского процесса использована соответствующая буква. После стандартных преобразований [34–36] получаем квантовое уравнение Ито в виде

$$dA = -\frac{i}{\hbar} [A, H_{im} + V + H_{cr} + \tilde{H}^{(02)}] dt + \sqrt{\kappa} [A, R_+] dB(t) - \sqrt{\kappa} [A, R_+^+] dB^+(t) + \frac{\kappa}{2} \{ (1 + N_{ph}) (R_+[A, R_+^+] + [R_+, A]R_+^+) + N_{ph} (R_+^+[A, R_+] + [R_+^+, A]R_+) \} dt, \quad (13)$$

в котором инкременты Ито удовлетворяют алгебре

$$dB^+(t)dB(t) = N_{ph}dt, \quad dB(t)dB^+(t) = (1 + N_{ph})dt,$$

$$dB(t)dB(t) = dB^+(t)dB^+(t) = dB(t)dt = dt dB(t) = dB^+(t)dt = dt dB^+(t) = dt dt = 0$$

и вместо правила Лейбница справедливо правило Ито для дифференцирования произведения:

$$d(A_1 A_2) = (dA_1)A_2 + A_1 dA_2 + (dA_1)(dA_2).$$

Дальнейшие действия для неупреждающих операторов перед инкрементами Ито приводят к уравнению для двухчастичной матрицы плотности комплекса, состоящего из примесного атома и ближайшего атома фотонного кристалла:

$$\frac{d}{dt} \varphi + \hat{\mathcal{S}}\varphi = \frac{i}{\hbar} [\varphi, H_{im} + V + H_{cr} + \tilde{H}^{(02)}] \quad (14)$$

с релаксационным оператором вида

$$\hat{\mathcal{S}}\varphi = -\frac{\kappa}{2} (1 + N_{ph}) (2R_+^+\varphi R_+ - \varphi R_+ R_+^+ - R_+ R_+^+ \varphi) - \frac{\kappa}{2} N_{ph} (2R_+ \varphi R_+^+ - \varphi R_+^+ R_+ - R_+^+ R_+ \varphi). \quad (15)$$

Кинетическое уравнение для матрицы плотности ρ примесного атома получается из уравнения (15) путем нахождения шпура по переменным, относящимся к атому фотонного кристалла:

$$\frac{d}{dt} \rho + \hat{\Gamma}\rho = \frac{i}{\hbar} [\rho, \bar{H}_{im} + V], \quad (16)$$

$$\hat{\Gamma}\rho = -\frac{\kappa}{2}(1 + N_{ph}) \text{Sp}_{cr} (2R_+^+\rho \otimes \rho_0^{cr} R_+ - \rho \otimes \rho_0^{cr} R_+ R_+^+ - R_+ R_+^+ \rho \otimes \rho_0^{cr}) - \frac{\kappa}{2} N_{ph} \text{Sp}_{cr} (2R_+\rho \otimes \rho_0^{cr} R_+^+ - \rho \otimes \rho_0^{cr} R_+^+ R_+ - R_+^+ R_+\rho \otimes \rho_0^{cr}). \quad (17)$$

Здесь ρ_0^{cr} — матрица плотности атомов фотонного кристалла, окружающих и ближайших к примесному атому. Эта матрица плотности взята в начальный момент времени и описывает равновесное распределение атомов по энергетическим уровням и некоторое распределение атомов по расстояниям от примесного атома. При необходимости в более детальном анализе с учетом поляризационных свойств и вырождения энергетических атомных уровней в матрице ρ_0^{cr} содержится распределение по взаимной ориентации примесного атома и атома фотонного кристалла. В формуле (17) шпур берется по переменным атома фотонного кристалла, окружающего примесный атом.

Гамильтониан \bar{H}_{im} примесных атомов учитывает сдвиги атомных энергетических уровней за счет взаимодействия с атомами фотонного кристалла. Последовательный учет этого обстоятельства обуславливает разброс частот перехода $E_b^{im} \rightarrow E_a^{im}$ вокруг некоторой центральной частоты. Ниже этим обстоятельством пренебрегаем.

Матричные элементы релаксационного оператора для энергетических уровней примесного атома, частота перехода между которыми попадает в щель в спектре фотонных состояний, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (\hat{\Gamma}\rho)_{ba} &= \left\{ \frac{\kappa}{2}(1 + N_{ph}) \overline{|h(l)|^2}_A + \frac{\kappa}{2} N_{ph} \overline{|h(l)|^2}_C \right\} \rho_{ba}, \\ (\hat{\Gamma}\rho)_{aa} &= -\kappa(1 + N_{ph}) \overline{|h(l)|^2}_A \rho_{bb} + \kappa N_{ph} \overline{|h(l)|^2}_C \rho_{aa}, \\ (\hat{\Gamma}\rho)_{bb} &= \kappa(1 + N_{ph}) \overline{|h(l)|^2}_A \rho_{bb} - \kappa N_{ph} \overline{|h(l)|^2}_C \rho_{aa}. \end{aligned} \quad (18)$$

Через $\overline{|h(l)|^2}$ обозначено среднее (по межатомному расстоянию) значение квадрата параметра двухатомного радиационного взаимодействия:

$$\overline{|h(l)|^2}_A = \langle A || h(l) |^2 \rho_0^{cr} | A \rangle, \quad \overline{|h(l)|^2}_C = \langle C || h(l) |^2 \rho_0^{cr} | C \rangle.$$

Индекс, описывающий зависимость основного параметра $h(l)$ от поляризации излучаемых фотонов, опущен, поскольку поляризационные эффекты не приняты в учет. Волновые векторы $|A\rangle$ и $|C\rangle$ обозначают состояния с энергиями E_A^{cr} и E_C^{cr} .

Структура релаксационного оператора (18) отражает очевидный факт, что если атом фотонного кристалла возбужден ($\langle C | \rho_0^{cr} | C \rangle \neq 0$), то наряду с описанным процессом идет и обратный, когда поглощается фотон из термостата, атом фотонного кристалла переходит на нижний энергетический уровень E_A^{cr} , а примесный атом возбуждается.

Коэффициенты в релаксационном операторе (18) при матричных элементах определяются вероятностью γ_{im} спонтанного излучения возбужденного примесного атома по предложенному механизму:

$$\gamma_{im} = \kappa \overline{|h(l)|^2}_A. \quad (19)$$

Здесь предполагается, что никаких фотонов в фотонном термостате нет ($N_{ph} = 0$), а атомы фотонного кристалла не возбуждены ($\langle C | \rho_0^{cr} | C \rangle = 0$).

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА

Обсудим, как влияет рассматриваемый механизм излучательной спонтанной релаксации на поляризацию фотонного кристалла. Для удобства предположим, что атомные переходы $E_b^{im} \rightarrow E_a^{im}$ и $E_C^{cr} \rightarrow E_A^{cr}$ когерентно возбуждены, т. е. недиагональные матричные элементы соответствующих матриц плотности отличны от нуля:

$$\rho_{ba} = \rho_{ba}^{in} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{ba}^{im}t - \varphi_{im})], \quad \rho_{CA} = \rho_{CA}^{in} \exp [i(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega_{CA}^{cr}t - \varphi_{cr})], \quad (20)$$

где ρ_{ba}^{in} и ρ_{CA}^{in} — значения матриц плотности в некоторый момент времени t_{in} , \mathbf{k} и \mathbf{K} — волновые векторы, а φ_{im} и φ_{cr} — постоянные фазы. Считаем, что после достигнутого уровня возбуждения в области $t \geq t_{in}$ никакие внешние поля не воздействуют и не распространяются в фотонном кристалле.

Возбуждение перехода $E_b^{im} \rightarrow E_a^{im}$ примесных атомов может быть достигнуто за счет импульсного трехфотонного резонансного взаимодействия с когерентной волной с несущей частотой $\omega_{ba}^{im}/3$, если частота $\omega_{ba}^{im}/3$ не попадает в щель спектра плотности фотонов. Аналогично оптическая когерентность на переходе $E_C^{cr} \rightarrow E_A^{cr}$ может быть реализована за счет импульсного двухфотонного взаимодействия с когерентной волной, несущая частота $\omega_{CA}^{cr}/2$ которой также лежит вне запретных зон. Впрочем, использование многоквантовых процессов с когерентными волнами разных частот позволит обойти попадание частот возбуждающих волн в щели плотности фотонных состояний фотонного кристалла. Подробности упомянутых когерентных процессов опустим. Здесь лишь подчеркнем, что проводимый анализ ограничен моделью, в которой подобные когерентные процессы не влияют существенно на принятую структуру спектра плотности фотонов фотонного кристалла, а импульсный характер когерентного возбуждения рассматриваемых переходов необходим, чтобы исключить из рассмотрения другие многоквантовые процессы, развивающиеся в фотонных кристаллах в условиях подавления основных каналов излучательной релаксации из-за наличия щели в плотности фотонных состояний.

Поляризация \mathbf{P} фотонного кристалла, обусловленная рассмотренным механизмом спонтанной излучательной релаксации и наличием оптической когерентности у примесных атомов и их окружения (20), определяется из общей формулы:

$$\mathbf{P} = \text{Sp} (\rho(\mathbf{d}^{im} + \mathbf{d}^{cr})).$$

При помощи унитарного преобразования данное выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \text{Sp} (e^{-iS} \rho e^{iS} (e^{-iS} \mathbf{d}^{im} e^{iS} + e^{-iS} \mathbf{d}^{cr} e^{iS})) \approx \\ &\approx \text{Sp} (\rho \otimes \rho^{cr} (\mathbf{d}^{im} - i[S, \mathbf{d}^{im}] - i[S, \mathbf{d}^{cr}] + \dots)) \approx \\ &\approx \text{Sp} (\rho \otimes \rho^{cr} (\mathbf{d}^{im} + \mathbf{d}^{cr} - i[S^{(01)}, \mathbf{d}^{im}] - i[S^{(01)}, \mathbf{d}^{cr}])). \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что помимо обычной поляризации примесных атомов в среде наводится поляризация на комбинационных частотах $\omega_{ba}^{im} - \omega_{CA}^{cr}$ ($\mathbf{P}^{(-)}$) и $\omega_{ba}^{im} + \omega_{CA}^{cr}$ ($\mathbf{P}^{(+)}$):

$$P^{(-)} = -\hbar^{-1} \rho_{ba} \rho_{CA}^{cr*} \sum_{\beta} \left(\frac{U_{aC, b\beta} d_{\beta A}^{cr}}{\omega_{\beta C}^{cr} + \omega_{ba}^{im}} + \frac{d_{C\beta}^{cr} U_{a\beta, bA}}{\omega_{\beta A}^{cr} - \omega_{ba}^{im}} \right) + \text{с.с.}, \quad (22)$$

$$P^{(+)} = -\hbar^{-1} \rho_{ba} \rho_{CA}^{cr} \sum_{\beta} \left(\frac{U_{aA, b\beta} d_{\beta C}^{cr}}{\omega_{\beta A}^{cr} + \omega_{ba}^{im}} + \frac{d_{A\beta}^{cr} U_{a\beta, bC}}{\omega_{\beta C}^{cr} - \omega_{ba}^{im}} \right) + \text{с.с.} \quad (23)$$

Здесь и далее опять пренебрегаем поляризационными эффектами и не выписываем явно усреднение по межатомному расстоянию. Тогда (22) можно записать более компактно, используя обозначение (8б):

$$P^{(-)} = -\rho_{ba}\rho_{CA}^{cr*}h^*(l) + \text{с.с.}$$

Поскольку (по предположению) частота $\omega_{ba}^{im} - \omega_{CA}^{cr} \equiv \Omega$ лежит вне щели плотности фотонных состояний, после возбуждения оптических когерентностей в области $t \geq t_{in}$ в фотонном кристалле распространяется индуцированная оптическими когерентностями (20) и процессами межатомных взаимодействий когерентная волна с напряженностью электрического поля вида

$$\begin{aligned} E_{ind}^{(-)} &= \mathcal{E}^{(-)}(t - x/c) \exp\{i[(\mathbf{k} - \mathbf{K})\mathbf{r} - \Omega t - \varphi_{im} + \varphi_{cr}]\} + \text{с.с.}, \\ \mathcal{E}^{(-)}(t) &= -2\pi i \chi L \rho_{ba}^{in} \rho_{CA}^{in*} h^*(l) \exp[-(\gamma_{im} + \gamma_{cr})(t - t_{in})/2]. \end{aligned} \quad (24)$$

Распространение индуцированной волны определяется условием пространственного синхронизма $|\mathbf{k} - \mathbf{K}|^2 = \Omega^2/c^2$, где c — фазовая скорость волны с несущей частотой Ω в фотонном кристалле. Ось x выбрана вдоль направления распространения индуцированной волны, а L — размер (в направлении оси x) области возбуждения оптической когерентности (20).

Видно, что амплитуда индуцированной волны характеризуется параметром $h(l)$, определяющим константу спонтанной излучательной релаксации по предложенному механизму.

Затухание индуцированной волны (24) зависит как от релаксации матрицы оптической когерентности примесного атома по предложенному механизму (γ_{im}), так и от релаксации двухфотонного перехода $E_C^{cr} \rightarrow E_A^{cr}$ (константа γ_{cr}). Если между энергетическими уровнями E_A^{cr} и E_C^{cr} нет других уровней, связанных с E_C^{cr} оптически разрешенным переходом, то в пренебрежении другими релаксационными процессами $\gamma_{cr} \sim \gamma_{im}$ и затухание индуцированной волны позволит судить о времени спонтанного излучения предложенного механизма спонтанного излучения.

При наличии между энергетическими уровнями E_A^{cr} и E_C^{cr} других уровней, связанных с E_C^{cr} оптически разрешенным переходом, частота которого не попадает в какую-либо щель в плотности фотонных состояний, имеем $\gamma_{cr} \gg \gamma_{im}$ и затухание индуцированной волны не зависит от предложенного механизма спонтанного излучения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрен важный представитель многоквантовых процессов, возможность обсуждения которого стала актуальной благодаря современным технологиям создания фотонных кристаллов, в которых обычные одноквантовые процессы оказываются подавленными из-за наличия на соответствующих частотах запрещенной зоны в плотности фотонных состояний. В отличие от механизма двухфотонной (квадрупольной) релаксации примесного атома, предложенного еще в первых работах Джона с соавт. [12, 13], в данной работе двухквантовый механизм спонтанной релаксации реализован еще и как двухатомный механизм, существенно отличающийся от описанного

в [12, 13]. Его эффективность в значительной степени зависит как от среднего расстояния от примесного атома до ближайшего атома фотонного кристалла (и в этом отношении предложенный механизм не уступает в эффективности квадрупольному механизму), так и от структуры энергетических уровней атомов фотонного кристалла. Наиболее благоприятным для рассматриваемых процессов является случай, когда у атома фотонного кристалла имеется энергетический уровень $E_{\beta A}^{cr} > E_C^{cr}$, такой что знаменатель $\omega_{\beta A}^{cr} - \omega_{ba}^{im}$ основного параметра $h(l)$ становится минимальным, а сам параметр резко возрастает. Высокая поляризуемость атомов фотонного кристалла (большие значения дипольных моментов $d_{\beta C}^{cr}$ и $d_{\beta A}^{cr}$) также способствуют эффективному проявлению предложенного механизма излучательной релаксации.

Увеличение скорости спонтанной релаксации примесного атома будет иметь место также в случае, когда не один, а целая группа уровней $E_{C1}^{cr}, E_{C2}^{cr}, \dots$ атома фотонного кристалла, связанных с E_A^{cr} двухфотонным переходом, удовлетворяет условию (1) с различными значениями частот Ω излученных фотонов:

$$E_b^{im} - E_a^{im} \approx E_{Cj}^{cr} - E_A^{cr} + \hbar\Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Если частоты Ω_j с $j = 1, 2, \dots, M$ лежат вне щели в плотности фотонных состояний, а разности $|\Omega_j - \Omega_{j'}|$ превышают ширины соответствующих спектральных линий как атома фотонного кристалла, так и примесного атома, то согласно [37] частоты Ω_j можно рассматривать как центральные частоты независимых фотонных термостатов, которые удобно перенумеровать тем же индексом $j = 1, 2, \dots, M$. Тогда матричные элементы релаксационного оператора (18) и скорость спонтанного излучения возбужденного примесного атома (19) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\hat{\Gamma}\rho)_{ba} &= \rho_{ba} \sum_{j=1}^M \left\{ \frac{\kappa_j}{2} (1 + N_{phj}) \overline{|h_j(l)|_A^2} + \frac{\kappa_j}{2} N_{phj} \overline{|h_j(l)|_{Cj}^2} \right\}, \\ (\hat{\Gamma}\rho)_{aa} &= -\rho_{bb} \sum_{j=1}^M \kappa_j (1 + N_{phj}) \overline{|h_j(l)|_A^2} + \rho_{aa} \sum_{j=1}^M \kappa_j N_{phj} \overline{|h_j(l)|_{Cj}^2}, \\ (\hat{\Gamma}\rho)_{bb} &= \rho_{bb} \sum_{j=1}^M \kappa_j (1 + N_{phj}) \overline{|h_j(l)|_A^2} - \rho_{aa} \sum_{j=1}^M \kappa_j N_{phj} \overline{|h_j(l)|_{Cj}^2}, \\ \gamma_{im} &= \sum_{j=1}^M \kappa_j \overline{|h_j(l)|_A^2}, \end{aligned}$$

где параметры с индексом j получаются из аналогичных параметров путем очевидного обобщения. При этом случай, когда $\Omega_s \approx (E_b^{im} - E_a^{im})/\hbar$ и частота перехода $(E_b^{im} - E_a^{im})/\hbar$ примесного атома лежит вблизи границы щели в плотности фотонных состояний, требует отдельного рассмотрения.

Подчеркнем, что целью данной работы являлось показать, какие новые многоквантовые механизмы активизируются в фотонных кристаллах. При этом в стороне остался вопрос о влиянии рассмотренных процессов на формирование плотности фотонных состояний и пренебрегалось связанными с этим какими-либо коллективными эффектами. Рассмотренные объекты (примесный атом и ближайший к нему атом фотонного

кристалла) выступали изолированно от среды фотонного кристалла. Однако этот недостаток позволил наиболее отчетливо описать предложенный механизм излучательной спонтанной релаксации и формирование поляризации фотонного кристалла.

В работе не рассматривались также сами процессы, индуцирующие оптическую когерентность (20). Дело в том, что особенности фотонного кристалла придают своеобразие и трехфотонному возбуждению примесных атомов. Здесь уже определяющим релаксационным механизмом будет другой двухквантовый процесс, рассмотренный в работе [35]. Нелинейной оптике примесных атомов в фотонном кристалле при трехфотонном возбуждении следует посвятить отдельную работу. В этом же контексте нуждаются в пересмотре работы по когерентному контролю в фотонных кристаллах.

Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-02-17429).

Автор выражает благодарность В. П. Яковлеву и А. И. Маймистову за полезные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, как связаны между собой эрмитовы операторы, определяющие унитарное преобразование гамильтониана при определении эффективного гамильтониана задачи в представлении взаимодействия и в представлении Шредингера. В представлении взаимодействия имеем

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \exp(-iH_0t/\hbar)|\Psi\rangle, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\Psi}\rangle = \bar{H}|\tilde{\Psi}\rangle,$$

$$\bar{H} = \exp(iH_0t/\hbar)(V_{im-cr} + V_{im} + V_{cr})\exp(-iH_0t/\hbar) = \bar{V}_{im-cr} + \bar{V}_{im} + \bar{V}_{cr},$$

$$H_0 = H_{im} + H_{cr} + H_{th}.$$

Если гамильтониан в представлении взаимодействия унитарно преобразовать с целью выделения эффективного гамильтониана:

$$|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle = e^{-iQ}|\tilde{\Psi}\rangle, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle = \tilde{\tilde{H}}|\tilde{\tilde{\Psi}}\rangle, \quad \tilde{\tilde{H}} = e^{-iQ}(\bar{V}_{im-cr} + \bar{V}_{im} + \bar{V}_{cr})e^{iS} - i\hbar e^{-iQ} \frac{\partial}{\partial t} e^{iQ},$$

и провести стандартные разложения в ряды по константам взаимодействия,

$$Q = Q^{(10)} + Q^{(01)} + Q^{(11)} + \dots, \quad \tilde{\tilde{H}} = \tilde{\tilde{H}}^{(10)} + \tilde{\tilde{H}}^{(01)} + \tilde{\tilde{H}}^{(11)} + \dots$$

с очевидными соотношениями

$$\tilde{\tilde{H}}^{(10)} = \bar{V}_{im} + \bar{V}_{cr} + \hbar \frac{\partial}{\partial t} Q^{(10)}, \quad \tilde{\tilde{H}}^{(01)} = \bar{V}_{im-cr} + \hbar \frac{\partial}{\partial t} Q^{(01)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{H}}^{(11)} = & -\frac{i}{2} [Q^{(01)}, \bar{V}_{im} + \bar{V}_{cr}] - \frac{i}{2} [Q^{(10)}, \bar{V}_{im-cr}] - \frac{i}{2} \left[Q^{(01)}, \tilde{\tilde{H}}^{(10)} \right] - \\ & - \frac{i}{2} \left[Q^{(10)}, \tilde{\tilde{H}}^{(01)} \right] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} Q^{(11)}, \end{aligned}$$

$$\tilde{H}^{(20)} = -\frac{i}{2} [Q^{(10)}, \bar{V}_{im} + \bar{V}_{cr}] - \frac{i}{2} [Q^{(10)}, \tilde{H}^{(10)}] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} Q^{(20)},$$

$$\tilde{H}^{(02)} = -\frac{i}{2} [Q^{(01)}, \bar{V}_{im-cr}] - \frac{i}{2} [Q^{(01)}, \tilde{H}^{(01)}] + \hbar \frac{\partial}{\partial t} Q^{(02)}, \dots,$$

то, полагая выполненными равенства $\tilde{H}^{(m,n)} = \exp(-iH_0t/\hbar) \tilde{H}^{(m,n)} \exp(iH_0t/\hbar)$ и $\tilde{H}^{(0,0)} = H_0$, из сравнения с (5) (или прямым вычислением) имеем важное простое соотношение

$$Q^{(m,n)} = \exp(iH_0t/\hbar) S^{(m,n)} \exp(-iH_0t/\hbar),$$

позволяющее находить эффективный гамильтониан и соответствующее унитарное преобразование в представлении Шредингера, используя представление взаимодействия.

Литература

1. S. John, Phys. Rev. Lett. **53**, 2169 (1984).
2. E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
3. S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
4. M. J. Stell and C. M. de Sterke, Phys. Rev. A **48**, 1625 (1993).
5. B. I. Mantsyzov, Phys. Rev. A **51**, 4939 (1995).
6. А. С. Давыдов, *Теория молекулярных экситонов*, Наука, Москва (1968).
7. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).
8. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, УФН **32**, 835 (1989).
9. A. L. Ivanov, H. Haug, and L. V. Keldysh, Phys. Rep. **296**, 237 (1998).
10. V. Malyshev and E. C. Jarque, JOSA B **12**, 1868 (1995).
11. *Photonic gap materials*, ed. by C. M. Soukoulis, NATO ASI Ser. E, Vol. 315, Kluwer Academic, Dordrecht (1996).
12. S. John and J. Wang, Phys. Rev. Lett. **64**, 2418 (1990).
13. S. John and J. Wang, Phys. Rev. B **43**, 12772 (1991).
14. C. Weibuch, *Localization of light in disordered and periodic dielectrics*, Plenum, New York (1995).
15. *Fundamental problems in quantum theory* (Ann. N. Y. Acad. Sci., Vol. 755, ed. by D. M. Greenberger, A. Zeilinger), New York Academy of Sciences, New York (1995).
16. S. John and T. Quang, Phys. Rev. A **50**, 1764 (1994).
17. R. F. Nabiev, P. Yeh, and J. J. Sanchez-Mondragon, Phys. Rev. A **47**, 3380 (1993).
18. S. Bay, P. Lambropoulos, and K. Molmer, Opt. Commun. **132**, 237 (1996).
19. V. I. Rupasov and M. Singh, J. Phys. A **29**, L205 (1996).
20. V. I. Rupasov and M. Singh, Phys. Rev. Lett. **77**, 338 (1996).
21. V. I. Rupasov and M. Singh, Phys. Lett. A **222**, 258 (1996).
22. V. I. Rupasov and M. Singh, Phys. Rev. A **56**, 898 (1997).
23. M. R. Singh and W. Lau, Phys. Lett. A **231**, 115 (1997).
24. M. R. Singh and W. Lau, Phys. Stat. Sol. B **203**, 401 (1997).
25. N. Vats and S. John, Phys. Rev. A **58**, 4168 (1998).
26. H. Huang, X.-H. Lu, and S.-Y. Zhu, Phys. Rev. A **57**, 4945 (1998).
27. T. Quang, M. Woldeyohannes, S. John, and G. S. Agarwal, Phys. Rev. Lett. **79**, 5238 (1997).

28. Д. И. Гудзенко, С. И. Яковленко, ЖЭТФ 62, 1686 (1972).
29. С. И. Яковленко, *Радиационно-столкновительные явления*, Энергоатомиздат, Москва (1984).
30. А. М. Башаров, *Фотоника. Метод унитарного преобразования в нелинейной оптике*, Изд-во МИФИ, Москва (1990).
31. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ 48, 345 (1965).
32. А. П. Казанцев, ЖЭТФ 51, 1751 (1966).
33. А. М. Башаров, ЖПС 51, 106 (1989).
34. С. W. Gardiner, *Quantum noise*, Springer, Berlin (1991).
35. А. М. Башаров, ЖЭТФ 102, 1126 (1992).
36. А. М. Башаров, ЖЭТФ 111, 25 (1997).
37. M. Lax, Phys. Rev. 145, 110 (1966).