

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ И ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко*

*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 22 июля 1999 г.

Получено представление для квазиклассических функций Грина уравнений Дирака и Клейна—Гордона с учетом первой неисчезающей поправки в произвольном локализованном потенциале, не обладающем, вообще говоря, сферической симметрией. С ее помощью найдено решение этих уравнений в приближении Фарри—Зоммерфельда—Мауэ. Показано, что квазиклассическая функция Грина не сводится к функции Грина, полученной в приближении эйконала, и имеет более широкую область применимости. Это иллюстрируется на примере вычисления амплитуды рассеяния заряженной частицы на малые углы и амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед. Для амплитуды рассеяния заряженной частицы в потенциале, не обладающем сферической симметрией, найдена поправка, пропорциональная углу рассеяния. Вычислена реальная часть амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед в экранированном кулоновском потенциале.

PACS: 12.20.Ds, 95.30.Cq

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, рассмотрение процессов квантовой электродинамики во внешних полях удобно проводить с помощью волновых функций, являющихся решением уравнения Дирака в данном поле, и соответствующих функций Грина. В случае большой по сравнению с массой энергии частицы и малых углов рассеяния, когда характерные угловые моменты в процессе велики, применимо квазиклассическое приближение. При этом использование квазиклассических функций Грина существенно упрощает вычисления.

Впервые квазиклассическая функция Грина электрона $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ была получена для случая кулоновского потенциала в [1, 2], исходя из точной функции Грина уравнения Дирака [3]. Более удобное представление квазиклассической кулоновской функции Грина для случая почти коллинеарных векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 было получено в [4, 5]. В этой же геометрии квазиклассическая функция Грина для произвольного сферически-симметричного убывающего потенциала была найдена в [6, 7].

В разд. 2 настоящей работы выражения для

квазиклассических функций Грина уравнений Дирака и Клейна—Гордона выводятся для случая локализованного потенциала, вообще говоря, не являющегося сферически-симметричным. Под локализованным понимается потенциал, имеющий максимум в некоторой точке и достаточно быстро убывающий по мере удаления от нее. Функции Грина получены с учетом первой поправки. С их помощью найдены квазиклассические волновые функции уравнений Дирака и Клейна—Гордона и поправки к ним (разд. 3). Эти волновые функции обобщают результаты, полученные в приближении Фарри—Зоммерфельда—Мауэ [8–10] на случай произвольного локализованного потенциала.

Для вычисления амплитуд процессов при высоких энергиях часто используется приближение эйконала. Соответствующие волновые функции и функции Грина, вообще говоря, отличаются от квазиклассических и имеют более узкую область применимости. Поэтому использование эйконального приближения без специального обоснования может приводить к неправильным результатам. В разд. 4 мы продемонстрируем это для задачи рассеяния заряженной частицы во внешнем поле на малые углы. В этом разделе излагается последовательный вывод выражения для амплитуды процесса с исполь-

*E-mail: A.I.Milstein@inp.nsk.su

зованием квазиклассических волновых функций. В частности, оказалось, что в случае экранированного кулоновского потенциала при передачах импульсов больших по сравнению с обратным радиусом экранировки (когда экранировкой можно пренебречь) для получения правильного ответа необходимо использовать именно квазиклассическую волновую функцию, а не эйкональную.

В разд. 5 полученные выражения для квазиклассической функции Грина применяются для вычисления амплитуды упругого рассеяния фотона вперед в электрическом поле атома (дельбрюковское рассеяние вперед). Как показано в [2], при вычислении этой амплитуды необходимо учитывать поправки к квазиклассической функции Грина. Эти поправки существенны в области применимости эйконального приближения, тогда как вклад высших порядков теории возмущений по внешнему полю (кулоновские поправки) определяется областью переменных, где эйкональная функция Грина неприменима. Впервые получена реальная часть амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед для экранированного кулоновского потенциала. При рассеянии вперед уже при сравнительно небольших энергиях фотона реальные части дельбрюковской амплитуды и амплитуды комптоновского рассеяния на атомных электронах оказываются одного порядка. Это может оказаться существенным при описании распространения фотонов в веществе.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Как было показано в работах [6, 4], при вычислении амплитуд различных процессов КЭД удобно использовать функцию Грина квадратированного уравнения Дирака $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$, которая связана с обычной функцией Грина $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ соотношением

$$G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = [\gamma^0(\varepsilon - V(\mathbf{r}_2)) - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}_2 + m] D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon), \quad (1)$$

где γ^μ — матрицы Дирака, $\mathbf{p} = -i\nabla$ — оператор импульса, $V(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия. В квазиклассическом приближении функцию $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ можно представить в виде

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \left[1 - \frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla_1 + \nabla_2)) \right] D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon), \quad (2)$$

где

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \langle \mathbf{r}_2 | \frac{1}{\kappa^2 - H + i0} | \mathbf{r}_1 \rangle, \quad (3)$$

$$H = \mathbf{p}^2 + 2\varepsilon V(\mathbf{r}) - V^2(\mathbf{r}),$$

$\kappa^2 = \varepsilon^2 - m^2$. Таким образом, задача сводится к вычислению квазиклассической функции Грина $D^{(0)}$ уравнения Клейна—Гордона с потенциалом $V(\mathbf{r})$ (уравнения Шредингера с гамильтонианом H).

Перейдем в функции $D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ от переменных \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 к переменным \mathbf{r}_1 и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. В этих переменных функция D_0 удовлетворяет уравнению

$$[\kappa^2 - 2\kappa\phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - \mathbf{p}^2] D^{(0)}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \delta(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $\phi = \lambda V - V^2/2\kappa$, $\lambda = \varepsilon/\kappa$, $\mathbf{p} = -i\nabla_r$. В ультрарелятивистском случае $\lambda = +1$ при $\varepsilon > 0$ и $\lambda = -1$ при $\varepsilon < 0$.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$D^{(0)}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = -\frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1). \quad (5)$$

Заметим, что множитель при F в (5) является функцией Грина уравнения (4) при $\phi = 0$. Функция F удовлетворяет уравнению

$$\left[i\frac{\partial}{\partial r} - \phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \right] F = -\frac{1}{2\kappa} r \Delta(F/r) \quad (6)$$

с граничным условием $F(\mathbf{r} = 0, \mathbf{r}_1) = 1$. Для дальнейших рассуждений определим эффективный прицельный параметр ρ_* прямолинейной траектории Γ , соединяющей точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , как

$$\rho_* = \min_{\mathbf{x} \in \Gamma} \frac{|\phi(\mathbf{x})|}{|\nabla_\perp \phi(\mathbf{x})|}. \quad (7)$$

Пусть этот минимум достигается в некоторой точке $\mathbf{x} = \mathbf{r}_*$. Необходимым условием применимости квазиклассического приближения является условие $\kappa\rho_* \gg 1$, которое мы будем считать выполненным. Введем обозначения $a_{1,2} = |\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{r}_*|$. Рассмотрим две перекрывающиеся области:

$$1) \min(a_1, a_2) \ll \kappa\rho_*^2, \quad 2) \min(a_1, a_2) \gg \rho_*. \quad (8)$$

В первой области правая часть уравнения (6) мала. Решение этого уравнения с нулевой правой частью имеет вид

$$F_0 = \exp \left[-ir \int_0^1 \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) dx \right], \quad (9)$$

что соответствует приближению эйконала. Для вычисления первой поправки к F_0 ищем решение уравнения (6) в виде $F = F_0(1 + g)$ и пренебрегаем g в

правой части этого уравнения. В результате получаем уравнение для g :

$$2i\kappa \frac{\partial}{\partial r} g = \phi^2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) + ir \int_0^1 dx x^2 \Delta_1 \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) + r^2 \left[\int_0^1 dx x \nabla_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) \right]^2, \quad (10)$$

где индекс 1 у производных обозначает дифференцирование по \mathbf{r}_1 , $\nabla_{1\perp}$ есть составляющая градиента, перпендикулярная \mathbf{r} , $\Delta_1 = \nabla_1^2$. После интегрирования по r находим выражение для g :

$$g = \frac{1}{2\kappa} \left[r^2 \int_0^1 dx x(1-x) \Delta_1 \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) - ir \int_0^1 dx \phi^2(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) - 2ir^3 \int_0^1 dx \times (1-x) \nabla_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) \int_0^x dy y \nabla_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + y\mathbf{r}) \right]. \quad (11)$$

Окончательно с учетом поправки функция Грина $D^{(0)}$ в первой области имеет вид

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) = -\frac{1}{4\pi r} \exp \left[i\kappa r - i\lambda r \int_0^1 V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) dx \right] \times \left\{ 1 + \frac{1}{2\kappa} \left[\lambda r^2 \int_0^1 dx x(1-x) \Delta_1 V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) - 2ir^3 \int_0^1 dx (1-x) \nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) \times \int_0^x dy y \nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_1 + y\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (12)$$

В этом выражении мы использовали связь ϕ и V и предполагали, что $\varepsilon \gg m$ (положили $\lambda^2 = 1$). Подставляя (12) в (2), находим выражение для функции D в первой области:

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) = -\frac{1}{4\pi r} \exp \left[i\kappa r - i\lambda r \int_0^1 V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) dx \right] \times \left\{ 1 - \frac{r}{2\kappa} \int_0^1 dx \alpha \nabla_1 V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) + \frac{\lambda r^2}{2\kappa} \int_0^1 dx x(1-x) \Delta_1 V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) - \frac{ir^3}{\kappa} \int_0^1 dx (1-x) \nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) \times \int_0^x dy y \nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_1 + y\mathbf{r}) \right\}. \quad (13)$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй области. В этом случае правая часть уравнения (6) не является малой. Используя сферические координаты, его можно переписать в виде:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial r} - \phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - \frac{\mathbf{L}^2}{2\kappa r^2} \right] F = -\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial^2}{\partial r^2} F, \quad (14)$$

где \mathbf{L}^2 — квадрат оператора углового момента. В этом уравнении \mathbf{r} является независимой переменной. Нас интересует значение функции $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Полярную ось сферической системы координат удобно направить вдоль $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Член в левой части уравнения, содержащий \mathbf{L}^2 , оказывается существенным при $r \geq a_1$. Это становится ясным, если подействовать оператором \mathbf{L}^2 на эйкональную функцию (9). Тогда для вычисления функции $F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1)$ достаточно рассмотреть узкую область полярных углов вектора \mathbf{r} порядка $\theta \sim \rho_*/a_1 \ll 1$. Правая часть уравнения (14) является малой поправкой. Ищем решение этого уравнения в виде

$$F = e^{iA} \mathcal{F}, \quad A = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_1} \right) \frac{\mathbf{L}^2}{2\kappa}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем уравнение для \mathcal{F}

$$\left[i \frac{\partial}{\partial r} - \tilde{\phi} \right] \mathcal{F} = -\frac{1}{2\kappa} \times \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{i\mathbf{L}^2}{\kappa r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} - \frac{i\mathbf{L}^2}{4\kappa r^2} \right) \right] \mathcal{F}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{\phi} = e^{-iA} \phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) e^{iA}. \quad (17)$$

Мы будем искать решение этого уравнения с учетом первой поправки по параметру $1/\kappa\rho_*$. Для этого в

разложении $\tilde{\phi}$ по коммутаторам оператора A с ϕ достаточно удержать только первые два члена:

$$\tilde{\phi} \approx \phi - i[A, \phi].$$

В главном приближении по параметру $1/\kappa\rho_*$ можно пренебречь правой частью в (16) и заменить $\tilde{\phi}$ на ϕ . В этом приближении функция \mathcal{F} совпадает с эйкональной функцией F_0 (см. (9)). Чтобы найти первую поправку, представим \mathcal{F} в виде

$$\mathcal{F} = F_0(1 + g_1).$$

С необходимой точностью получаем для g_1 следующее уравнение:

$$2i\kappa \frac{\partial}{\partial r} g_1 = \phi^2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_1} \right) \times \left[i\mathbf{L}^2\phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) + 2r(\mathbf{L}\phi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})) \times \int_0^1 dx \mathbf{L}\phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) \right]. \quad (18)$$

Интегрируя его по r , находим

$$g_1 = -\frac{ir}{2\kappa} \left[\int_0^1 dx \phi^2(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) + ir \int_0^1 dx x \left(1 - \frac{r}{a_1} x \right) \Delta_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r}) + 2r^2 \int_0^1 dx \left(1 - \frac{r}{a_1} x \right) (\nabla_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r})) \times \int_0^x dy y \nabla_{1\perp} \phi(\mathbf{r}_1 + y\mathbf{r}) \right]. \quad (19)$$

Здесь $\Delta_{1\perp} = \nabla_{1\perp}^2$. С помощью разложения по сферическим функциям можно показать, что при $\beta \ll 1$ для произвольной функции $g(\mathbf{r})$ с нужной точностью выполняется соотношение

$$\exp[-i\beta^2 \mathbf{L}^2] g(\mathbf{r}) \approx \int \frac{d\mathbf{q}}{i\pi} e^{iq^2} g(\mathbf{r} + 2\beta r \mathbf{q}), \quad (20)$$

где \mathbf{q} — двумерный вектор, перпендикулярный \mathbf{r} . Используя (15), (19) и (20), получаем с учетом поправки следующее выражение для функции Грина $D^{(0)}$ во второй области:

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) = \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \times \int d\mathbf{q} \exp \left[iq^2 - i\lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{r}_x) \right] \times \left\{ 1 - \frac{ir}{2\kappa} \left[i\lambda r \int_0^1 dx x \left(1 - \frac{r}{a_1} x \right) \Delta_{1\perp} V(\mathbf{r}_x) + 2r^2 \int_0^1 dx \left(1 - \frac{r}{a_1} x \right) (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_x)) \times \int_0^x dy y \nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_y) \right] \right\}, \quad (21)$$

где $\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{q}x\sqrt{2r(r-a_1)/(\kappa a_1)}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Напомним, что градиенты по \mathbf{r}_1 в этой формуле берутся при фиксированном \mathbf{r} .

Заметим, что в \mathbf{r}_x учет члена, пропорционального \mathbf{q} , необходим только в узкой области $|x - a_1/r| \sim \rho_*/r \ll 1$. Используя этот факт, перепишем формулу (21) в виде, не зависящем явно от a_1 . Для этого представим $\mathbf{r}_x = \mathbf{R}_x + \delta\mathbf{r}_x$, где

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{q}\sqrt{2x(1-x)r/\kappa}, \quad \delta\mathbf{r}_x = \sqrt{2r/\kappa} \left(x\sqrt{r/a_1 - 1} - \sqrt{x(1-x)} \right) \mathbf{q}. \quad (22)$$

Разложим $V(\mathbf{r}_x)$ в фазе по $\delta\mathbf{r}_x$ до первого члена, заменим \mathbf{r}_x на \mathbf{R}_x в предэкспоненте и выполним интегрирование по частям по \mathbf{q} . В результате получаем

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) = \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \times \int d\mathbf{q} \exp \left[iq^2 - i\lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) \right] \left\{ 1 + \frac{ir^3}{2\kappa} \times \int_0^1 dx \int_0^x dy (x-y) (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_x)) (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_y)) \right\}. \quad (23)$$

Как уже говорилось, области применимости формул (12) и (23) перекрываются. Действительно, при $\rho_* \ll \min(a_1, a_2) \ll \kappa\rho_*^2$ можно разложить $V(\mathbf{R}_x)$ по \mathbf{q} до квадратичных членов и выполнить интегрирование по $d\mathbf{q}$. После этого формула (23) переходит в (12) с точностью до членов $O(1/\kappa\rho_*)$ включительно. Поэтому можно написать формулу, которая справедлива в обеих областях при условии $\kappa\rho_* \gg 1$:

$$\begin{aligned}
 D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \int d\mathbf{q} \times \\
 &\times \exp \left[iq^2 - i\lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) \right] \times \\
 &\times \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2\kappa} \left[2 \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) - V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \right] + \right. \\
 &+ \frac{ir^3}{\kappa} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\sqrt{x(1-x)y(1-y)} - (1-x)y \right] \times \\
 &\left. \times (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_x)) (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_y)) \right\}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

величина \mathbf{R}_x определена в (22). Действительно, в первой области можно разложить $V(\mathbf{R}_x)$ по \mathbf{q} до квадратичных членов и выполнить интегрирование по $d\mathbf{q}$, после чего непосредственно получается формула (12). Во второй области нужно учесть, что, как уже говорилось, основной вклад в интегралы дает узкая область x и y вблизи a_1/r с шириной $\delta x \sim \delta y \sim \rho_*/r$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 2 \left[\sqrt{x(1-x)y(1-y)} - (1-x)y \right] &= x - y - (x - y)^2 - \\
 - \left(\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{y(1-y)} \right)^2 &\approx x - y
 \end{aligned}$$

с точностью до квадратичных по ρ_*/r членов. Кроме того, линейные по V члены в предэкспоненте также дают пренебрежимый вклад по параметру ρ_*/r . Таким образом, во второй области (24) переходит в (21).

Используя (2), получаем окончательное выражение для функции Грина $D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \times \\
 &\times \int d\mathbf{q} \exp \left[iq^2 - i\lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) \right] \times \\
 &\times \left\{ 1 - \frac{r}{2\kappa} \int_0^1 dx \alpha \nabla_1 V(\mathbf{R}_x) - \right. \\
 &\left. - \frac{\lambda}{2\kappa} \left[2 \int_0^1 dx V(\mathbf{R}_x) - V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{ir^3}{\kappa} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\sqrt{x(1-x)y(1-y)} - (1-x)y \right] \times \\
 &\left. \times (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_x)) (\nabla_{1\perp} V(\mathbf{R}_y)) \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Достоинством представлений (24) и (25) является то, что они сохраняют свой вид в любой системе координат.

Интегрирование по переменной \mathbf{q} в формулах (24) и (25) можно интерпретировать как учет квантовых флуктуаций вблизи прямолинейной траектории между векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Основной вклад в интеграл по \mathbf{q} дает область $q \sim 1$. Квантовыми флуктуациями можно пренебречь, если

$$\int_0^1 dx \sqrt{x(1-x)r/\kappa} |\nabla_{1\perp} V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r})| \ll \int_0^1 dx |V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r})|,$$

что фактически эквивалентно первому условию в формуле (8), обеспечивающему применимость приближения эйконала.

В формулах (24) и (25) члены в предэкспоненте, содержащие потенциал, определяют поправку к квазиклассической функции Грина. Условие применимости полученных выражений является малость этих поправок. Наши результаты были получены для случая локализованного потенциала. На самом деле в случае малости указанных поправок, они применимы также для потенциалов, не являющихся локализованными, например, для суперпозиции локализованных потенциалов.

Для сферически-симметричного потенциала квазиклассическая функция Грина без поправок может быть получена также из результатов работ [6, 7], в которых она вычислялась для случая почти коллинеарных векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . В этих работах с помощью квазиклассических радиальных волновых функций было получено следующее выражение для функции $D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon)$ при малом угле θ между векторами \mathbf{r}_2 и $-\mathbf{r}_1$:

$$\begin{aligned}
 D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) &= \frac{ie^{i\kappa(r_1+r_2)}}{4\pi\kappa r_1 r_2} \int_0^\infty dl J_0(l\theta) \times \\
 &\times \exp \left\{ i \left[\frac{l^2(r_1+r_2)}{2\kappa r_1 r_2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + 2\lambda\delta \left(\frac{l}{\kappa} \right) + \lambda(\Phi(r_1) + \Phi(r_2)) \right] \right\}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

В этой формуле

$$\Phi(r) = \int_r^\infty V(\zeta) d\zeta,$$

$$\delta(\rho) = - \int_0^\infty V(\sqrt{\zeta^2 + \rho^2}) d\zeta, \quad \lambda = \varepsilon/\kappa.$$

Если мал угол $\theta' = \pi - \theta$ между векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , то

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \times \\ \times \exp\{i\kappa|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| + i\lambda\text{sign}(r_1 - r_2)\} \times \\ \times (\Phi(r_1) - \Phi(r_2)). \quad (27)$$

Для дальнейших преобразований удобно переписать формулу (26) в другом виде, используя тождество

$$\int dl l J_0(l\theta)g(l^2) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{q} \exp(i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}) g(q^2),$$

где $g(x)$ — произвольная функция, а \mathbf{q} — двумерный вектор. Подставим это соотношение в (26) и сделаем замену переменных

$$\mathbf{q} \rightarrow \sqrt{\frac{2\kappa r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \mathbf{q} - \frac{\kappa r_1 r_2}{r_1 + r_2} \boldsymbol{\theta}.$$

Определим прицельный параметр $\boldsymbol{\rho}$ соотношением

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]}{r^3},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Учитывая, что при $\theta \ll 1$ прицельный параметр $\boldsymbol{\rho} \approx \boldsymbol{\theta} r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$ и $\rho \ll r$, можно привести формулу (26) к виду

$$D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \frac{ie^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \int d\mathbf{q} \times \\ \times \exp\left[iq^2 - i\lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{q}\sqrt{2r_1 r_2/\kappa r}) \right]. \quad (28)$$

Здесь \mathbf{q} — двумерный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{r} . Эта формула была получена для малых углов θ . Однако она справедлива и при $\theta \sim 1$, поскольку в этом случае можно пренебречь членом, пропорциональным \mathbf{q} в аргументе потенциала, и функция Грина (28) переходит в эйкональную. В частности, при $\theta' \ll 1$ она совпадает с (27). Если в формуле (24) опустить поправку, то она согласуется с (28), так как в ситуации, когда необходимо удерживать член с \mathbf{q} в аргументе потенциала, можно заменить $\sqrt{x(1-x)}$ на $\sqrt{r_1 r_2 / r^2}$.

3. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Полученные выражения для квазиклассической функции Грина позволяют найти квазиклассические волновые функции с учетом поправок. Ранее

квазиклассические волновые функции были найдены в работах [8, 9] для случая кулоновского поля (функции Фарри—Зоммерфельда—Мауэ) и в [10] для произвольного убывающего центрального потенциала. Эти волновые функции были вычислены в главном приближении. В работе [11] для произвольного потенциала в приближении эйконала были найдены волновые функции и поправки к ним.

Для вычисления волновых функций воспользуемся известными (см., например, [12]) соотношениями

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = -\frac{\exp[i\kappa r_2]}{4\pi r_2} \psi_{\mathbf{p}_2}^{(-)*}(\mathbf{r}_1), \\ \lim_{r_1 \rightarrow \infty} D^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = -\frac{\exp[i\kappa r_1]}{4\pi r_1} \psi_{\mathbf{p}_1}^{(+)}(\mathbf{r}_2). \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{p}_1 = -\kappa \mathbf{r}_1 / r_1$, $\mathbf{p}_2 = \kappa \mathbf{r}_2 / r_2$, $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r})$ ($\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{r})$) обозначает решение уравнения Клейна — Гордона, содержащее на бесконечности плоскую волну с импульсом \mathbf{p} и расходящуюся (сходящуюся) сферическую волну. Из (24) и (29) получаем для уравнения Клейна — Гордона квазиклассические волновые функции с учетом поправки:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \pm \int \frac{d\mathbf{q}}{i\pi} \times \\ \times \exp\left[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \pm iq^2 \mp i\lambda \int_0^\infty dx V(\mathbf{r}_x) \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2\kappa} V(\mathbf{r}) \pm \frac{i}{\kappa} \int_0^\infty dx \int_0^x dy [\sqrt{xy} - y] \times \right. \\ \left. \times (\nabla_\perp V(\mathbf{r}_x)) (\nabla_\perp V(\mathbf{r}_y)) \right\}, \quad (30)$$

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r} \mp \mathbf{p}x/\kappa + \mathbf{q}\sqrt{2x/\kappa}, \quad \kappa = |\mathbf{p}|.$$

Здесь \mathbf{q} — двумерный вектор, перпендикулярный \mathbf{p} , ∇_\perp — составляющая градиента, перпендикулярная \mathbf{p} . Аналогично, для уравнения Дирака квазиклассические волновые функции с поправкой получаются из (25):

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(\mathbf{r}) = & \pm \int \frac{d\mathbf{q}}{i\pi} \times \\ & \times \exp \left[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \pm iq^2 \mp i\lambda \int_0^\infty dx V(\mathbf{r}_x) \right] \times \\ & \times \left\{ 1 \mp \frac{1}{2\kappa} \int_0^\infty dx \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla V(\mathbf{r}_x) + \right. \\ & + \frac{\lambda}{2\kappa} V(\mathbf{r}) \pm \frac{i}{\kappa} \int_0^\infty dx \int_0^x dy (\sqrt{xy} - y) (\nabla_\perp V(\mathbf{r}_x)) \times \\ & \left. \times (\nabla_\perp V(\mathbf{r}_y)) \right\} u_{\mathbf{p}}^\lambda, \end{aligned} \quad (31)$$

где $u_{\mathbf{p}}^\lambda$ — свободные положительно ($\lambda = 1$)- и отрицательно ($\lambda = -1$)-частотные дираковские спиноры с импульсом \mathbf{p} . В случае, когда $V(\mathbf{r}_x)$ можно разложить по \mathbf{q} , формула (31) переходит в волновую функцию в приближении эйконала с поправками и согласуется с результатом, полученным в [11].

4. РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В этом разделе мы используем полученную квазиклассическую функцию Грина для вычисления амплитуды рассеяния на малые углы заряженных частиц высокой энергии в локализованном потенциале. В случае частицы со спином нуль амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = -\frac{\kappa}{2\pi} \int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}_2}^{(-)*}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}. \quad (32)$$

Напомним, что $\phi = \lambda V - V^2/2\kappa$.

Поместим для удобства начало координат в точку максимума потенциала и перейдем к цилиндрическим координатам с осью z вдоль вектора \mathbf{p}_2 . Подставляя (30) в (32), получаем с учетом первой по-

правки

$$\begin{aligned} f = & \frac{i\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dz \int d\rho \int d\mathbf{q} \times \\ & \times \exp \left[-iQ_z z - i\mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} + iq^2 - i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}_x) \right] \times \\ & \times \lambda V(z, \boldsymbol{\rho}) \left[1 + \frac{i}{\kappa} \int_0^\infty dx \int_0^x dy [\sqrt{xy} - y] \times \right. \\ & \left. \times (\nabla_\rho V(x+z, \boldsymbol{\rho}_x)) (\nabla_\rho V(y+z, \boldsymbol{\rho}_y)) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\boldsymbol{\rho}_x = \boldsymbol{\rho} + \sqrt{2x/\kappa} \mathbf{q}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

Продемонстрируем сначала необходимость использования в задаче рассеяния именно квазиклассических, а не эйкональных волновых функций. Для этого вычислим амплитуду в главном приближении, что соответствует замене квадратной скобки в предэкспоненте формулы (33) на единицу. Разобьем область интегрирования по z на две: $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В области от нуля до бесконечности можно заменить $\boldsymbol{\rho}_x$ на $\boldsymbol{\rho}$ (пренебречь квантовыми флуктуациями) и проинтегрировать по \mathbf{q} . Тогда вклад этой области принимает вид

$$\begin{aligned} f_+ = & -\frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \int d\rho \times \\ & \times \exp \left[-iQ_z z - i\mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}) \right] \times \\ & \times \lambda V(z, \boldsymbol{\rho}). \end{aligned} \quad (34)$$

Интегрируя теперь по частям по z с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \lambda V(z, \boldsymbol{\rho}) \exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}) \right] = \\ = -i \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}) \right] - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

получаем

$$f_+ = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int d\rho \times \exp[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \rho] \left(\exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x, \rho) \right] - 1 - iQ_z \int_0^\infty dz \exp[-iQ_z z] \times \left(\exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x, \rho) \right] - 1 \right) \right). \quad (36)$$

Основной вклад в интеграл по z в этой формуле дает область $z \sim \rho$. Относительная величина вклада, пропорционального этому интегралу, по сравнению с внеинтегральным членом есть $Q_z \rho \sim Q_z / Q_\perp \ll 1$, поэтому в главном приближении этим вкладом можно пренебречь. В области от $-\infty$ до нуля в главном приближении можно заменить x на $|z|$ в ρ_x . После этого делаем сдвиг $\rho \rightarrow \rho - \mathbf{q}\sqrt{2|z|/\kappa}$ и получаем

$$f_- = \frac{i\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^0 dz \int d\rho \int d\mathbf{q} \times \exp \left[-i \left(Q_z - \frac{Q_\perp^2}{2\kappa} \right) z - i\mathbf{Q}_\perp \cdot \rho + i \left(\mathbf{q} + \mathbf{Q}_\perp \sqrt{\frac{|z|}{2\kappa}} \right)^2 - i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \rho) \right] \lambda V \left(z, \rho - \mathbf{q}\sqrt{\frac{2|z|}{\kappa}} \right). \quad (37)$$

Заметим, что при $\kappa\rho \gg 1$ для любых z выполняется условие $\sqrt{2|z|/\kappa} \ll \max(|z|, \rho)$, позволяющее пренебречь членом, пропорциональным \mathbf{q} в аргументе потенциала. В приближении малых углов имеем $Q_z = Q_\perp^2 / 2\kappa$, т. е. коэффициент при z в показателе экспоненты обращается в нуль. Вычисляя интеграл по \mathbf{q} , а затем интегрируя по z с использованием тождества (35), находим

$$f_- = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int d\rho \exp[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \rho] \times \left(\exp \left[-i\lambda \int_{-\infty}^\infty dx V(x, \rho) \right] - \exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x, \rho) \right] \right). \quad (38)$$

Складывая f_+ и f_- , получаем ответ, известный как

амплитуда рассеяния в приближении эйконала:

$$f = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int d\rho \exp[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \rho] \times \left(\exp \left[-i\lambda \int_{-\infty}^\infty dx V(x, \rho) \right] - 1 \right). \quad (39)$$

Обычно этот результат получают, используя эйкональную волновую функцию во всей области интегрирования по z и пренебрегая членом $Q_z z$ в показателе экспоненты. Из нашего расчета следует, что при произвольных передачах импульса оба эти приближения, вообще говоря, являются некорректными. Для иллюстрации рассмотрим экранированный кулоновский потенциал с радиусом экранировки r_c . Основной вклад в амплитуду дает область интегрирования $z \sim r_c, \rho \sim 1/Q_\perp$. Если в этой области величина $Q_z z \sim Q_\perp^2 r_c / \kappa$ не мала по сравнению с единицей, то в величине ρ_x нельзя пренебречь членом с \mathbf{q} , поскольку $\rho \sim 1/Q_\perp \leq \sqrt{r_c/\kappa}$. Тем самым использование эйкональной волновой функции оказывается незаконным. Одновременно нельзя пренебрегать величиной $Q_z z$ в показателе экспоненты. Если же сохранить этот член, но использовать эйкональную волновую функцию, то при условии $Q_\perp^2 r_c / \kappa \geq 1$ результат для амплитуды рассеяния получается неверным. В частности, если действовать таким образом, то в пределе $r_c \rightarrow \infty$ (неэкранированный кулоновский потенциал) не воспроизводится хорошо известный результат (формула Резерфорда). Таким образом, формула (39) является справедливой при любых $Q_\perp \ll \kappa$, однако ее корректный вывод невозможен без использования квазиклассической волновой функции.

Перейдем теперь к вычислению амплитуды рассеяния с учетом поправки. Для удобства интегрирование по z будем проводить от $-L$ до $+\infty$, а затем устремим L к бесконечности. Используя тождество

$$\left[\lambda V(z, \rho) + i \frac{\partial}{\partial z} + \lambda \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2\kappa x}} \mathbf{q} \cdot \nabla_\rho V(z+x, \rho_x) \right] \times \exp \left[-i\lambda \int_0^\infty dx V(x+z, \rho_x) \right] = 0, \quad (40)$$

можно провести интегрирование по частям по z в первом члене квадратных скобок формулы (33). В результате выражение для f приобретает вид

$$f = f_0 + f_1,$$

где

$$f_0 = -\frac{\kappa}{2\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int d\rho \int d\mathbf{q} \exp \left[i \frac{\mathbf{Q}_\perp^2}{2\kappa} L - i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} + i \mathbf{q}^2 - i\lambda \int_{-L}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho}_{x+L}) \right], \quad (41)$$

$$f_1 = \frac{i\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d\rho \int d\mathbf{q} \times \exp \left[-i \frac{\mathbf{Q}_\perp^2}{2\kappa} z - i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} + i \mathbf{q}^2 - i\lambda \int_0^{\infty} dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}_x) \right] \times \left[\frac{i\lambda}{\kappa} V(z, \boldsymbol{\rho}) \int_0^{\infty} dx \int_0^x dy (\sqrt{xy} - y) \times (\nabla_\rho V(x+z, \boldsymbol{\rho}_x)) (\nabla_\rho V(y+z, \boldsymbol{\rho}_y)) + \frac{\mathbf{Q}_\perp^2}{2\kappa} - \lambda \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\kappa x}} \mathbf{q} \cdot \nabla_\rho V(z+x, \boldsymbol{\rho}_x) \right]. \quad (42)$$

В выражении для f_0 опущен член, не зависящий от потенциала и обращающийся в нуль при $\mathbf{Q}_\perp \neq 0$. В явном виде мы учтем его в окончательном выражении для амплитуды. Чтобы найти предел в функции f_0 , делаем сдвиг $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}\sqrt{2L/\kappa}$ и $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{Q}_\perp\sqrt{L/2\kappa}$. После этого вычисление предела $L \rightarrow \infty$ и интегрирование по \mathbf{q} становятся элементарными. С учетом первой поправки по Q_\perp/κ получаем

$$f_0 = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int d\rho \exp \left[-i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho}) \right] \times \left[1 + \frac{i\lambda}{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \mathbf{Q}_\perp \cdot \nabla_\rho V(x, \boldsymbol{\rho}) \right]. \quad (43)$$

Перейдем теперь к вычислению f_1 . Интеграл по $\boldsymbol{\rho}$ в (42) сходится в области $\rho \sim 1/Q_\perp$. Квантовые флуктуации важны только при $z < 0$ и x вблизи $-z$. Так как величина f_1 уже является поправкой, в формуле (42) можно заменить $\boldsymbol{\rho}_x$ на $\boldsymbol{\rho}_{|z|}$. Кроме того, $V(z, \boldsymbol{\rho})$ в предэкспоненте можно заменить на $V(z, \boldsymbol{\rho}_{|z|})$, поскольку разница между ними мала при любых z . Интеграл по z от нуля до бесконечности сходится в области $z \leq \rho$. При этом

$$z \mathbf{Q}_\perp^2 / 2\kappa \sim \rho \mathbf{Q}_\perp^2 / \kappa \sim Q_\perp / \kappa \ll 1.$$

Поэтому можно заменить в экспоненте $z \mathbf{Q}_\perp^2 / 2\kappa$ на $-|z| \mathbf{Q}_\perp^2 / 2\kappa$. Проинтегрируем член, пропорциональный \mathbf{q} , по частям по \mathbf{q} так, чтобы в предэкспоненте

этот вектор входил только в аргумент потенциала. После этого выражение для f_1 преобразуется к виду

$$f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d\rho \int \frac{d\mathbf{q}}{i\pi} \exp \left[i \frac{\mathbf{Q}_\perp^2}{2\kappa} |z| - i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} + i \mathbf{q}^2 \right] \times g \left(z, \boldsymbol{\rho} + \sqrt{2|z|/\kappa} \mathbf{q} \right) \quad (44)$$

с некоторой функцией g . После сдвига $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}\sqrt{2|z|/\kappa}$ интеграл по \mathbf{q} становится элементарным. В результате

$$f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d\rho \exp [-i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}] g(z, \boldsymbol{\rho}). \quad (45)$$

Действуя таким образом, получаем следующее выражение для f_1 :

$$f_1 = -\frac{1}{2\pi} \int d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \times \exp \left[-i \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\lambda \int_0^{\infty} dx V(x+z, \boldsymbol{\rho}) \right] \times \left[i\lambda V(z, \boldsymbol{\rho}) \int_0^{\infty} dx \int_0^x dy (\sqrt{xy} - y) (\nabla_\rho V(x+z, \boldsymbol{\rho})) \times (\nabla_\rho V(y+z, \boldsymbol{\rho})) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy (1 - \sqrt{x/y}) \times (\nabla_\rho V(x+z, \boldsymbol{\rho})) (\nabla_\rho V(y+z, \boldsymbol{\rho})) \right]. \quad (46)$$

При получении этой формулы мы проинтегрировали по частям по $\boldsymbol{\rho}$ член, пропорциональный \mathbf{Q}_\perp^2 в предэкспоненте. Можно проверить, что подынтегральное выражение в (46) является полной производной по z , поэтому интегрирование по z оказывается тривиальным. Складывая получившееся выражение с (43) и интегрируя по частям по $\boldsymbol{\rho}$ член, пропорциональный \mathbf{Q}_\perp , окончательно получаем ам-

плитуду рассеяния с учетом первой поправки:

$$f = -\frac{i\kappa}{2\pi} \int d\rho \times \exp[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}] \left\{ \exp\left[-i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho})\right] - 1 + \exp\left[-i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho})\right] \left[\frac{\lambda}{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \Delta_\rho V(x, \boldsymbol{\rho}) - \frac{i}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x dy y (\nabla_\rho V(x, \boldsymbol{\rho})) (\nabla_\rho V(y, \boldsymbol{\rho})) \right] \right\}. \quad (47)$$

Здесь $\Delta_\rho = \nabla_\rho^2$. Используя волновую функцию (31), можно показать (см., например, [13]), что при рассеянии на малые углы амплитуда для частиц со спином 1/2 совпадает с точностью до членов Q_\perp/κ включительно с амплитудой (47) для частиц со спином нуль.

Покажем теперь, что полученная амплитуда обладает правильными свойствами относительно сдвигов начала координат. Из формулы (33) следует, что при замене потенциала $V(\mathbf{r}) \rightarrow V(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$ амплитуда $f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ переходит в $f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) \exp[i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0]$. Амплитуда (47), очевидно, обладает этим свойством при сдвиге в направлении, перпендикулярном \mathbf{p}_2 , вдоль которого направлена ось z . Рассмотрим теперь сдвиг вдоль оси z : $V(z, \boldsymbol{\rho}) \rightarrow V(z + z_0, \boldsymbol{\rho})$. Делая в интегралах по x и y замену переменных $x \rightarrow x - z_0$ и $y \rightarrow y - z_0$, получаем добавку к амплитуде, пропорциональную z_0 :

$$\delta f = \frac{iz_0}{4\pi} \int d\rho \exp\left[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho})\right] \times \left[\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \Delta_\rho V(x, \boldsymbol{\rho}) - i \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \nabla_\rho V(x, \boldsymbol{\rho}) \right)^2 \right] = -\frac{z_0}{4\pi} \int d\rho \exp[-i\mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}] \times \Delta_\rho \left(\exp\left[-i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx V(x, \boldsymbol{\rho})\right] - 1 \right). \quad (48)$$

Интегрируя по частям по $\boldsymbol{\rho}$ и заменяя $\mathbf{Q}_\perp^2/2\kappa$ на Q_z , получаем, что $f + \delta f \approx f \exp(iQ_z z_0)$ при условии $Q_z z_0 \ll 1$. Таким образом, правильный закон преобразования амплитуды рассеяния при трансляциях выполняется с той же точностью, с какой справедлива сама формула (47).

В случае потенциала, удовлетворяющего условию $V(z, \boldsymbol{\rho}) = V(-z, \boldsymbol{\rho})$, выражение (47) согласуется

с полученным в [11] в эйкональном приближении с учетом поправки. Однако, как обсуждалось выше, формула (47) может быть справедлива и при таком соотношении передач импульса и параметров потенциала, когда эйкональное приближение неприменимо.

5. ДЕЛЬБРЮКОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Процесс когерентного рассеяния фотонов в электрическом поле атомов через виртуальные электрон-позитронные пары (дельбрюковское рассеяние) интенсивно изучался как теоретически, так и экспериментально (см., например, обзор [14]). В этом разделе в качестве еще одного примера использования полученной квазиклассической функции Грина мы рассмотрим амплитуду дельбрюковского рассеяния вперед в экранированном кулоновском поле. Энергия фотона ω предполагается большой по сравнению с массой электрона m . В соответствии с оптической теоремой мнимая часть этой амплитуды выражается через сечение рождения электрон-позитронных пар фотоном в поле атома. Для описания распространения света в среде необходимо знать также и вещественную часть амплитуды рассеяния.

При вычислении амплитуд дельбрюковского рассеяния с помощью функций Грина необходимо использовать различные приближения для этих функций при разных передачах импульса $\Delta = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ ($\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — импульсы начального и конечного фотонов). При $\Delta \sim \omega$ квазиклассическое приближение неприменимо, поскольку основной вклад в амплитуду дают орбитальные моменты $l \sim \omega/\Delta \sim 1$. Амплитуда при таких передачах импульса была вычислена в [15]. В области $\omega \gg \Delta \gg m^2/\omega$ можно пользоваться квазиклассической функцией Грина без поправки [1, 16]. Вычисление амплитуды дельбрюковского рассеяния в кулоновском поле при $\Delta \leq m^2/\omega$ потребовало специального рассмотрения (см. [17, 2]). В этом случае вклад в амплитуду дают прицельные параметры ρ вплоть до $\rho \sim \omega/m^2$. При таких прицельных параметрах необходимо учитывать поправку к квазиклассической функции Грина [2]. Для экранированного кулоновского потенциала при $\omega/m^2 \gg r_c$ (r_c — радиус экранировки, в модели Томаса—Ферми $r_c \sim (m\alpha)^{-1} Z^{-1/3} \gg 1/m$) вклад в амплитуду дают прицельные параметры $\rho \leq r_c \ll \omega/m^2$. В этом случае может быть использована квазиклассическая функция Грина без поправки при произвольных $\Delta \ll \omega$ [6, 7]. Если же $\Delta, r_c^{-1} \leq m^2/\omega$, то поправку необходимо учитывать. Более того, выражение для амплитуды рассеяния вперед ($\Delta = 0$), полученное с использованием квазиклассической функции Грина без поправки, оказы-

вается неопределенным. Ниже мы получим амплитуду дельбрюкковского рассеяния вперед при произвольном соотношении между r_c и ω/m^2 .

Как было показано в [6], амплитуду дельбрюкковского рассеяния вперед при высоких энергиях фотона можно представить в виде

$$M = i\alpha \int_0^\omega d\varepsilon \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \times \\ \times \text{Sp} \left[(2\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p}_2 - \hat{\varepsilon}^* \hat{k}) D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \omega - \varepsilon) \right] \times \\ \times \left[(2\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_1 + \hat{\varepsilon} \hat{k}) D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | -\varepsilon) \right], \quad (49)$$

где e, k — поляризация и 4-импульс фотона, $\mathbf{p}_{1,2} = -i\nabla_{1,2}$. В этой формуле подразумевается вычитание из подынтегрального выражения его значения при нулевом внешнем поле. Так как в центральном поле амплитуда рассеяния вперед не зависит от поляризации фотона, удобно в формуле (49) сделать подстановку $e_i^* e_j \rightarrow (\delta_{ij} - k_i k_j / \omega^2) / 2$.

Перейдем в (49) от переменных $\mathbf{r}_{1,2}$ к

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]}{r^3}, \quad z = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2}.$$

Так как $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r} = 0$, интегрирование по $\boldsymbol{\rho}$ проводится в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{r} . Основной вклад в амплитуду дает область интегрирования, в которой $r \sim \omega/m^2$, $|z| \sim 1$ и углы между вектором \mathbf{r} и \mathbf{k} порядка $\theta_r \sim m/\omega \ll 1$. Вследствие малости углов θ_r можно считать вектор $\boldsymbol{\rho}$ перпендикулярным \mathbf{k} . Кроме того, очевидно, что основной вклад дают $\rho \leq 1$, $m^2 r_c / \omega$.

Разобьем область интегрирования по ρ на две: от 0 до ρ_0 и от ρ_0 до ∞ , где $m/\omega \ll \rho_0 \ll 1$, $m^2 r_c / \omega$. В первой области (при $\rho < \rho_0$) для функции Грина можно использовать представление

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \varepsilon) = \frac{i e^{i\kappa r}}{4\pi^2 r} \int d\mathbf{q} \left[1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\kappa r}{2r_1 r_2}} \right] \times \\ \times \exp \left[i q^2 - i \lambda r \int_0^1 dx V(\mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{q} \sqrt{2r_1 r_2 / \kappa r}) \right], \quad (50)$$

которое получается подстановкой (28) в (2). При этом в члене с $\boldsymbol{\alpha}$ мы опустили продольные компоненты градиента, которые по сравнению с поперечными имеют дополнительную малость ρ , и проинтегрировали по частям по \mathbf{q} . Кроме того, в силу определения ρ_0 , в этой области можно пренебречь экранировкой и заменить $V(r)$ на кулоновский потенциал $V_c(r) = -Z\alpha/r$, после чего интеграл по x в фазе легко берется.

Экранировка существенна только во второй области, где можно использовать представление (13), т. е. эйкональную функцию Грина с поправкой. При подстановке (13) в (49) зависящие от потенциала фазы функций Грина сокращаются. Поэтому вклад второй области квадратичен по потенциалу, т. е. соответствует первому борновскому приближению. Кроме того, сокращение фаз приводит к необходимости учета поправки к функции Грина. В этой области вклады в амплитуду от поправки и от главного члена в функции Грина оказываются одного порядка.

Перейдем к вычислению вклада M_1 первой области в амплитуду процесса. Подставим в (49) функцию Грина (50) в случае кулоновского потенциала, проведем дифференцирование и вычислим след γ -матриц. Используя малость угла между векторами \mathbf{r} и \mathbf{k} и соотношение $\sqrt{\varepsilon^2 - m^2} \approx |\varepsilon| - m^2/2|\varepsilon|$, получаем

$$M_1 = -\frac{i\alpha}{(2\pi)^4} \int_0^\omega d\varepsilon \varepsilon \kappa \int dr r^5 d\boldsymbol{\theta}_r \int_{\rho < \rho_0} d\boldsymbol{\rho} \times \\ \times \int_0^1 \frac{dz}{(z(1-z))^3} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \left[\text{Re} \left(\frac{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}_1|}{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}_2|} \right)^{2iZ\alpha} - 1 \right] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i r}{2} \left[\omega \boldsymbol{\theta}_r^2 - \frac{m^2 \omega}{\varepsilon \kappa} + \frac{\varepsilon q_1^2 + \kappa q_2^2}{z(1-z)} \right] \right\} \times \\ \times \left[2\varepsilon \kappa [\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 - z(1-z)\boldsymbol{\theta}_r^2] + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{4(z(1-z))} (\varepsilon \mathbf{q}_1 - \kappa \mathbf{q}_2) \cdot (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - i \frac{\omega}{r} \right], \quad (51)$$

где $\kappa = \omega - \varepsilon$, а $\boldsymbol{\theta}_r$ — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной \mathbf{k} (так же, как и векторы $\mathbf{q}_{1,2}$). Обратим внимание на то, что интеграл по z в этой формуле берется в пределах от нуля до единицы. Дело в том, что вне этого интервала функции Грина имеют эйкональный вид, и фазы, зависящие от потенциала, сокращаются. Для $\rho < \rho_0 \ll 1$ это приводит к малости вклада области интегрирования вне интервала $0 \leq z \leq 1$ по сравнению со вкладом самого этого интервала.

Проинтегрируем теперь по $\boldsymbol{\theta}_r$, перейдем от переменных $\mathbf{q}_{1,2}$ к $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)/2$ и $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)/2$ и сделаем замену $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \boldsymbol{\rho} + \mathbf{Q}$. После этого интеграл по $\boldsymbol{\rho}$ приобретает вид

$$J = \int_{|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{Q}| < \rho_0} d\boldsymbol{\rho} \left[\text{Re} \left(\frac{|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}|}{|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}|} \right)^{2iZ\alpha} - 1 \right]. \quad (52)$$

Основной вклад в амплитуду (51) дают $\mathbf{Q}, q \sim m/\omega \ll \rho_0$, поэтому в (52) можно опустить

\mathbf{Q} в пределе интегрирования. Для вычисления интеграла (52) используем следующий прием. Вычтем и прибавим к подынтегральному выражению функцию $-2(Z\alpha)^2 [2\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}/(\rho^2 + q^2)]^2$, интеграл от которой легко берется:

$$J_1 = \int_{\rho < \rho_0} d\boldsymbol{\rho} \left[-2(Z\alpha)^2 \left(\frac{2\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}}{\rho^2 + q^2} \right)^2 \right] = -4\pi(Z\alpha)^2 q^2 \left(\ln \frac{\rho_0^2}{q^2} - 1 \right). \quad (53)$$

В свою очередь, в интеграле от разности можно заменить ρ_0 на бесконечность. Для вычисления этого интеграла удобно умножить подынтегральное выражение на

$$1 \equiv \int_{-1}^1 dy \delta \left(y - \frac{2\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}}{\rho^2 + q^2} \right) = (\rho^2 + q^2) \times \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y|} \delta((\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q}/y)^2 - q^2(1/y^2 - 1)) \quad (54)$$

и поменять порядок интегрирования по $\boldsymbol{\rho}$ и y . В результате интеграл по $\boldsymbol{\rho}$ становится элементарным, и мы получаем

$$J_2 = 4\pi q^2 \int_0^1 \frac{dy}{y^3} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^{iZ\alpha} - 1 + 2(Z\alpha)^2 y^2 \right]. \quad (55)$$

После замены $y = \operatorname{th} \tau$ интеграл по τ становится табличным, и для $J = J_1 + J_2$ получаем

$$J = 8\pi q^2 (Z\alpha)^2 \left[\ln \frac{2q}{\rho_0} - 1 + \operatorname{Re} \psi(1 + iZ\alpha) + C \right], \quad (56)$$

где $C = 0.577\dots$ — постоянная Эйлера, $\psi(x) = d \times \ln \Gamma(x)/dx$.

После вычисления интеграла по $\boldsymbol{\rho}$ в (51) оставшиеся интегралы удобно брать в таком порядке: по \mathbf{Q} , \mathbf{q} , r , z и ε . Окончательно, вклад первой области равен

$$M_1 = i \frac{28\alpha(Z\alpha)^2 \omega}{9m^2} \times \left[\ln \frac{\omega \rho_0}{m} - i \frac{\pi}{2} - \operatorname{Re} \psi(1 + iZ\alpha) - C - \frac{47}{42} \right]. \quad (57)$$

Вклад высших порядков теории возмущений по внешнему полю (кулоновские поправки) соответствует члену $-\operatorname{Re} \psi(1 + iZ\alpha) - C$ в (57) и совпадает с известным результатом [17]. Таким образом, кулоновские поправки полностью определяются первой областью, в которой квазиклассическая функция Грина не сводится к эйкональной.

Перейдем к вычислению вклада M_2 второй области. После дифференцирования по $\mathbf{r}_{1,2}$, вычисления следа γ -матриц и взятия интеграла по $\boldsymbol{\theta}_r$ приходим к следующему представлению для M_2 :

$$M_2 = \frac{\alpha}{2\pi\omega} \int_0^\omega d\varepsilon \int dr r^2 \exp \left[-i \frac{\omega r m^2}{2\varepsilon \kappa} \right] \times \int_{\rho > \rho_0} d\boldsymbol{\rho} \int_{-\infty}^\infty dz \int_0^1 \int_0^1 dx dy \times \left[2y(1-x)[2\vartheta(x-y) + 1] - \frac{\omega^2}{2\varepsilon \kappa} \right] \times [\nabla_\rho V(R_{z-x})] \cdot [\nabla_\rho V(R_{z-y})], \quad (58)$$

где $R_s = r\sqrt{s^2 + \rho^2}$. В этой формуле опущены члены, антисимметричные относительно замены $\varepsilon \rightarrow \omega - \varepsilon$, $z \rightarrow 1 - z$, интеграл от которых равен нулю. Отметим, что в отличие от первой области, во второй интегрирование по z идет в бесконечных пределах. Выражение (58) упрощается, если в тройном интеграле по x, y, z сделать замену переменных $z \rightarrow z + x$, $y \rightarrow y + x$ и выполнить интегрирование по x . Получаем

$$M_2 = \frac{\alpha}{2\pi\omega} \int_0^\omega d\varepsilon \int dr r^2 \exp \left[-i \frac{\omega r m^2}{2\varepsilon \kappa} \right] \times \int_{\rho > \rho_0} d\boldsymbol{\rho} \int_{-\infty}^\infty dz \int_0^1 dy (1-y) \times \left[\frac{4}{3}(1-y)^2 + 2y - \frac{\omega^2}{\varepsilon \kappa} \right] \times [\nabla_\rho V(R_z)] \cdot [\nabla_\rho V(R_{z-y})]. \quad (59)$$

При $r \ll r_c$ потенциал $V(r) \approx -Z\alpha/r$. Поэтому удобно представить вклад (59) в виде $M_2 = M_2^c + \delta M$, где M_2^c — значение M_2 при $V(r) = V_c(r) = -Z\alpha/r$.

При $V = V_c$ интегралы по r и ε легко берутся, и мы находим

$$M_2^c = -\frac{2i\alpha(Z\alpha)^2 \omega}{m^2} \int_{\rho_0}^\infty d\rho \rho^3 \int_{-\infty}^\infty dz \times \int_0^1 dy (1-y) \frac{2(1-y)^2/9 + y/3 - 1}{[z^2 + \rho^2]^{3/2} [(z-y)^2 + \rho^2]^{3/2}}. \quad (60)$$

Используя фейнмановскую параметризацию знаменателей

$$\frac{1}{(AB)^{3/2}} = \frac{8}{\pi} \int_0^1 dv \frac{\sqrt{v(1-v)}}{[Av + B(1-v)]^3},$$

берем интегралы по ρ и z , а затем по y и v с учетом того, что $\rho_0 \ll 1$. Окончательно для этого (кулоновского) вклада получаем

$$M_2^c = -i \frac{28\alpha(Z\alpha)^2\omega}{9m^2} \left(\ln \frac{\rho_0}{2} + \frac{31}{21} \right). \quad (61)$$

Сумма вкладов (57) и (61) дает известный ответ для случая кулоновского поля [17]:

$$M_c = i \frac{28\alpha(Z\alpha)^2\omega}{9m^2} \times \left[\ln \frac{2\omega}{m} - i \frac{\pi}{2} - \operatorname{Re} \psi(1 + iZ\alpha) - C - \frac{109}{42} \right]. \quad (62)$$

При вычисления добавки δM , связанной с наличием экранировки, благодаря вычитанию из подынтегрального выражения в (59) его значения при $V = V_c$ можно заменить ρ_0 в нижнем пределе интегрирования по ρ на нуль. Для дальнейших преобразований удобно использовать импульсное представление для потенциалов:

$$V(r) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \tilde{V}(p).$$

С помощью этого представления берутся интегралы по ρ и z . Результат этого интегрирования пропорционален $\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$. Интегрируя по \mathbf{p}_2 и углам вектора \mathbf{p}_1 , имеем

$$\begin{aligned} \delta M &= \frac{\alpha}{2\pi^3\omega} \int_0^\omega d\varepsilon \int dr r \exp \left[-i \frac{\omega r m^2}{2\varepsilon\kappa} \right] \times \\ &\times \int_0^1 dy (1-y) \left[\frac{4}{3}(1-y)^2 + 2y - \frac{\omega^2}{\varepsilon\kappa} \right] \times \\ &\times \int_0^\infty dp \left[p^4 \tilde{V}^2(p) - (4\pi Z\alpha)^2 \right] \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta^3} - \frac{\cos \zeta}{\zeta^2} \right), \quad (63) \end{aligned}$$

где $\zeta = rpy$. Переходя от переменной r к ζ , интегрируем по частям по p и берем интеграл по ζ . Делая замену $\varepsilon \rightarrow \omega\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \delta M &= \frac{\alpha\omega}{2\pi^3m^2} \int_0^1 d\varepsilon \varepsilon (1-\varepsilon) \int_0^1 dy \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \times \\ &\times \left[\frac{4}{3}(1-y)^2 + 2y - \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right] \times \\ &\times \int_0^\infty dp \left(\partial_p p^4 \tilde{V}^2(p) \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta-i0} \right) \right], \quad (64) \end{aligned}$$

где $\eta = 2\omega\varepsilon(1-\varepsilon)py/m^2$. Делаем теперь замену переменных $y \rightarrow y/(2\varepsilon(1-\varepsilon))$, меняем местами порядок интегрирования по ε и y и берем интеграл по ε . Окончательно вклад в амплитуду дельбрюкковского рассеяния вперед, связанный с экранировкой, имеет вид

$$\begin{aligned} \delta M &= -\frac{\alpha\omega}{18\pi^3m^2} \int_0^\infty dp \left(\partial_p p^4 \tilde{V}^2(p) \right) \times \\ &\times \int_0^{1/2} \frac{dy}{y} \left[\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta-i0} \right) \right] \times \\ &\times \left[(6y^2 + 7y + 7) \sqrt{1-2y} + 3y(2y^2 - 3y - 3) \right] \times \\ &\times \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-2y}}{1 - \sqrt{1-2y}} \right), \quad (65) \end{aligned}$$

где $\eta = \omega py/m^2$. Эта формула справедлива для произвольного вида экранированного кулоновского потенциала. В частных случаях она может быть существенно упрощена. Так, для потенциала

$$V(r) = -Z\alpha \exp(-\beta r)/r,$$

что соответствует

$$\tilde{V}(p) = -4\pi Z\alpha/(p^2 + \beta^2),$$

все интегралы в (65) берутся:

$$\begin{aligned} \delta M &= \frac{4i\alpha(Z\alpha)^2\omega}{9m^2} \left[33 - 13\tau^2 + \frac{3}{2}\tau^4 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\tau(24 - 13\tau^2 + 3\tau^4)L + \frac{3}{8}(8 - 9\tau^2 + \tau^6)L^2 \right], \quad (66) \\ \tau &= \sqrt{1 + \frac{2im^2}{\omega\beta}}, \quad L = \ln \frac{\tau-1}{\tau+1}. \end{aligned}$$

Более реалистичным является потенциал Мольера [18], для которого

$$\tilde{V}(p) = -4\pi Z\alpha \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_n}{p^2 + \beta_n^2}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.1, & \alpha_2 &= 0.55, & \alpha_3 &= 0.35, & \beta_n &= \beta_0 b_n, \\ b_1 &= 6, & b_2 &= 1.2, & b_3 &= 0.3, & \beta_0 &= \frac{mZ^{1/3}}{121}. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \delta M = & -\frac{4i\alpha(Z\alpha)^2\omega}{9m^2} \int_0^{1/2} \frac{dy}{y} \left[(6y^2 + 7y + 7)\sqrt{1-2y} + \right. \\ & \left. + 3y(2y^2 - 3y - 3) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-2y}}{1 - \sqrt{1-2y}} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ \sum_{n \neq k} \alpha_n \alpha_k \left[1 - \frac{2i}{\gamma_n + \gamma_k} - \frac{2}{\gamma_n^2 - \gamma_k^2} \ln \left(\frac{\gamma_n + i}{\gamma_k + i} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_n \alpha_n^2 \frac{\gamma_n}{\gamma_n + i} \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

где $\gamma_n = \omega\beta_{ny}/m^2$.

Как известно, мнимая часть амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед связана с полным сечением рождения фотоном электрон-позитронных пар во внешнем поле соотношением $\sigma = \text{Im } M/\omega$. Используя (62) и (68), получаем сечение рождения электрон-позитронных пар для случая потенциала Мольера:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{28\alpha(Z\alpha)^2}{9m^2} \left\{ \ln \frac{2\omega}{m} - \text{Re } \psi(1 + iZ\alpha) - C - \frac{109}{42} - \right. \\ & - \int_0^{1/2} \frac{dy}{y} \left[\left(\frac{6}{7}y^2 + y + 1 \right) \sqrt{1-2y} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{7}y(2y^2 - 3y - 3) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-2y}}{1 - \sqrt{1-2y}} \right) \right] \times \\ & \times \left[\sum_{n \neq k} \alpha_n \alpha_k \left[1 - \frac{1}{\gamma_n^2 - \gamma_k^2} \ln \left(\frac{1 + \gamma_n^2}{1 + \gamma_k^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_n \alpha_n^2 \frac{\gamma_n^2}{1 + \gamma_n^2} \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

которое согласуется с известными в литературе (см., например, [19]) выражениями.

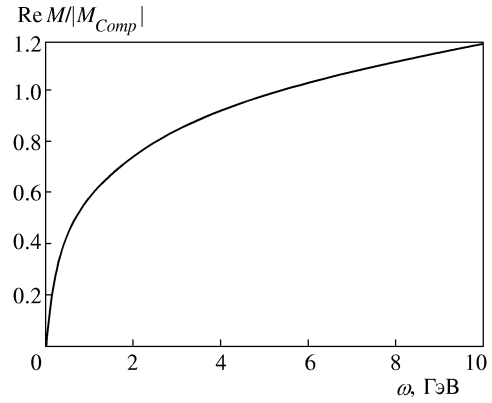
Обсудим теперь зависимость реальной части дельбрюковской амплитуды от энергии фотона ω . Пока $\omega/m^2 \ll r_c$, экранировкой можно пренебречь и

$$\text{Re } M = \text{Re } M_c = 14\pi\alpha(Z\alpha)^2\omega/9m^2.$$

С увеличением ω рост реальной части замедляется, и при $\omega/m^2 \gg r_c$ из (62) и (65) получаем

$$\text{Re } M \approx \frac{\alpha}{2\pi^3} \ln^2 \left(\frac{\omega}{m^2 r_c} \right) \int_0^\infty \frac{dp}{p} \left(\partial_p p^4 \tilde{V}^2(p) \right). \quad (70)$$

В этой асимптотике мы сохранили только член, содержащий старшую степень большого логарифма. В



Зависимость от ω реальной части амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед для потенциала $V(r) = -Z\alpha \exp(-m\alpha Z^{1/3}r)/r$ в единицах $4\pi Z\alpha/m$, $Z = 82$

качестве иллюстрации на рисунке показана зависимость от ω реальной части амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед при $Z = 82$ для потенциала

$$V(r) = -Z\alpha \exp(-m\alpha Z^{1/3}r)/r.$$

Одним из основных механизмов упругого рассеяния фотона является комptonовское рассеяние на атомных электронах. Для рассеяния вперед амплитуда этого процесса является вещественной величиной и не зависит от ω :

$$M_{Comp} = -4\pi Z\alpha/m.$$

Из рисунка видно, что при рассеянии фотона вперед необходимо учитывать интерференцию между амплитудами комptonовского и дельбрюковского рассеяний уже при сравнительно небольших энергиях.

На примере дельбрюковского рассеяния мы еще раз убеждаемся, что использование эйконального приближения для описания процессов рассеяния на малые углы при высоких энергиях без должного обоснования может приводить к неправильным результатам. Так, если вычислять амплитуду дельбрюковского рассеяния вперед, используя эйкональную функцию Грина, то в ответе для мнимой части амплитуды, пропорциональной сечению рождения электрон-позитронных пар, будут отсутствовать кулоновские поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мильштейн и В. М. Страховенко, Phys. Lett. A **95**, 135 (1983).
2. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **85**, 14 (1983).

3. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko, Phys. Lett. A **90**, 447 (1982).
4. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **112**, 1921 (1997).
5. R. N. Lee, A. I. Milstein, and V. M. Strakhovenko, Phys. Rev. A **57**, 2325 (1998).
6. R. N. Lee and A. I. Milstein, Phys. Lett. A **198**, 217 (1995).
7. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, ЖЭТФ **107**, 1393 (1995).
8. W. Furry, Phys. Rev. **46**, 391 (1934).
9. A. Sommerfeld and A. Maue, Ann. Phys. **22**, 629 (1935).
10. H. Olsen, L. C. Maximon, and H. Wergeland, Phys. Rev. **106**, 27 (1957).
11. А. И. Ахиезер, В. Ф. Болдышев, Н. Ф. Шульга, Теор. и мат. физ. **23**, 11 (1975).
12. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
13. В. Н. Байер, В. М. Катков, ДАН СССР **227**, 325 (1976).
14. A. I. Milstein and M. Schumacher, Phys. Rep. **243**, 183 (1994).
15. A. I. Milstein and R. Zh. Shaisultanov, J. Phys. A **21**, 2941 (1988).
16. Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **116**, 78 (1999).
17. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **2**, 2444 (1970).
18. G. Z. Molière, Z. Naturforsch. A **2**, 133 (1947).
19. H. Davies, H. A. Bethe, and L. C. Maximon, Phys. Rev. **93**, 788 (1954).