

# ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОНОВ, ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

*П. Д. Григорьев*<sup>1,2\*</sup>, *А. М. Дюгаев*<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

<sup>2</sup> *Grenoble High Magnetic Field Laboratory,  
MPI-FRF and CNRS, BP166, F-38042, Grenoble, France*

<sup>3</sup> *Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme  
D-01187, Dresden, Germany*

Поступила в редакцию 1 февраля 2001 г.

В рамках модели независимых бозонов решена задача о форме линии оптического перехода электрона между связанными состояниями на поверхности жидкого гелия. Такие состояния реализуются, например, в потенциале положительно заряженной примеси, находящейся на подложке, или в поле иона  $\text{He}^+$ , расположенного под поверхностью. Указано на важность процессов релаксации деформации поверхности жидкости (лунки) под электроном. Адиабатическое приближение, при котором лунка не изменяется за время электронного перехода, справедливо не всегда. При низких температурах возможно появление двух максимумов на линии поглощения. Показано, что далекие хвосты линии оптического поглощения имеют универсальную (правило Урбаха) экспоненциальную зависимость от энергии электронного перехода.

PACS: 67.55.-s

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Электроны на поверхности жидкого гелия представляют собой объект многочисленных исследований [1]. Они образуют двумерный электронный газ, удерживаясь на поверхности силами изображения и электрическим полем. Мы рассматриваем задачу о линии оптического перехода электрона между связанными состояниями, которые реализуются в потенциале примеси и в магнитном поле. Если на подложку под тонкой пленкой гелия поместить заряженную примесь, то она создает притягивающий потенциал на поверхности жидкости, который может удерживать один электрон. Нижние уровни такого потенциала совпадают с уровнями гармонического осциллятора. Более точное определение уровней с учетом образования лунки, т. е. статической деформации поверхности под электроном, было получено численно [2] путем вариации полной энергии электрона и поверхности жидкости. Электроны мо-

гут быть локализованы также и с помощью магнитного поля, перпендикулярного поверхности гелия. Здесь образование лунки также существенно. Поэтому энергия лунки различна для разных уровней электрона, происходит сдвиг частоты циклотронного резонанса [3]. Эффекты уширения электронных уровней были рассмотрены лишь недавно [4]. Форма линии оптического поглощения или линии циклотронного резонанса определяется не только естественной шириной уровней электронов, но и процессами релаксации статической деформации поверхности гелия под электроном. Приближение, при котором лунка не успевает измениться за время перехода электрона с уровня на уровень, хорошо определяет энергию перехода, но не форму и ширину линии поглощения. Более того, указанное адиабатическое приближение применимо не всегда. Мы покажем, что при некоторых условиях возможно появление двух максимумов на линии поглощения.

Рассматриваемая система электронов на дискретных поверхностных уровнях интересна еще и потому, что является хорошей реализацией точно ре-

\*E-mail: pashag@itp.ac.ru

шаемой модели независимых бозонов, к рассмотрению которой мы и переходим.

## 2. МОДЕЛЬ

Эффекты релаксации лунки под электроном в связанных состояниях могут быть описаны гамильтонианом модели независимых бозонов [5]:

$$\hat{H} = \sum_i \varepsilon_i C_i^+ C_i + \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q + \sum_{i,q} M_{q,i} (a_q^+ + a_q) C_i^+ C_i, \quad (1)$$

где  $C_i^+$  — оператор рождения электрона на уровне с номером  $i$  и энергией  $\varepsilon_i$ ;  $a_q^+$  — оператор рождения риплона, т. е. кванта капиллярно-гравитационной волны на поверхности гелия с волновым вектором  $q$ . Закон дисперсии риплонов

$$\omega_q^2 = \frac{\alpha}{\rho} q(q^2 + \kappa^2) \operatorname{th} qd, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\kappa$  — обратная гравитационно-капиллярная длина,  $d$  — толщина пленки гелия. Значение  $\kappa \approx 20 \text{ см}^{-1}$  намного меньше характерных волновых векторов в рассматриваемой задаче. Поэтому почти всегда можно положить  $\kappa = 0$ . Матричный элемент электрон-риплонного взаимодействия  $M_{qi}$  будет определен ниже.

В гамильтониане (1) отсутствуют члены типа  $a_q^+ C_i^+ C_j$ , ответственные за переходы электрона с испусканием риплона. Это объясняется малостью матричного элемента

$$M_{qij} \propto \exp\left(-\frac{a^2 q^2}{4}\right),$$

где волновой вектор  $q$  излученного риплона имеет энергию  $\omega_q$  равную энергии электронного перехода,  $a$  — размер волновой функции электрона в связанном состоянии. Спектр риплонов очень мягкий, поэтому для указанных  $q$  всегда  $aq \gg 1$ . Исключением являются только переходы между очень слабо расщепленными дискретными уровнями [4]. В потенциале положительно заряженной примеси основной и первый возбужденный уровни не расщеплены. Подавлены также и риплонные переходы в сильном магнитном поле. Гамильтониан (1) диагонализуеться с помощью унитарного преобразования [5]:

$$\bar{H} = e^S H e^{-S}, \quad (3)$$

где оператор  $S$  определен выражением

$$S = \sum_i C_i^+ C_i \sum_q \frac{M_{qi}}{\omega_q} (a_q^+ - a_q). \quad (4)$$

Новый гамильтониан  $\bar{H}$  диагонален:

$$\bar{H} = \sum_i (\varepsilon_i - \Delta_i) C_i^+ C_i + \sum_q \omega_q \bar{a}_q^+ \bar{a}_q. \quad (5)$$

Сдвиг электронных уровней  $\Delta_i$  есть не что иное, как энергия образования лунки под электроном в  $i$ -м связанном состоянии:

$$\Delta_i = \sum_q \frac{M_{qi}^2}{\hbar \omega_q}. \quad (6)$$

Спектр риплонов не меняется, но смещается положение равновесия риплонных мод:

$$\bar{a}_q = a_q - \sum_i \frac{M_{qi}}{\omega_q} C_i^+ C_i. \quad (7)$$

Новые электронные операторы  $\bar{C}_i$  связаны с  $C_i$  унитарным преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= e^S C_i e^{-S}, \\ \bar{C}_i &= C_i \exp\left\{-\sum_q \frac{M_{iq}}{\omega_q} (a_q^+ - a_q)\right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Интенсивность поглощения света пропорциональна проводимости электронной системы  $\sigma$ , которая может быть определена по формуле Кубо [5]:

$$\operatorname{Re} \sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \langle j_\alpha(t) j_\beta(0) \rangle dt, \quad (9)$$

где  $j_\alpha$  — оператор тока:  $j_\alpha = \sum_{ij} P_{ij,\alpha} \bar{C}_i^+ \bar{C}_j$ . Матричный элемент оптического перехода  $P_{ij}$  принимается равным константе. Вычисление корреляционной функции ток-ток на основе (8), (9) приводит к выражению [5]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{1}{2\omega} \sum_{ij} n_i (1 - n_j) P_{ij,\alpha} P_{ij,\beta} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{it}{\hbar} (\omega \hbar + \varepsilon_i - \varepsilon_j - \Delta_i + \Delta_j) - \Phi_{ij}(t)\right\} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta_i$  — энергия лунки (6), а функция  $\Phi_{ij}(t)$  определена соотношением

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(t) &= \sum_q \frac{(M_{qi} - M_{qj})^2}{\omega_q^2} \times \\ &\times \left[ (n_q + 1) (1 - e^{-i\omega_q t}) + n_q (1 - e^{i\omega_q t}) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$n_i$  и  $n_q$  — числа заполнения электронов и риплонов. При низких температурах  $n_i$  равны 0 или 1, а  $n_q$  — функция Бозе:

$$n_q = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/T} - 1}.$$

Наша цель теперь исследовать общее решение (10), (11) применительно к оптическим переходам электронов на поверхности жидкого гелия. В отличие от аналогичной задачи о переходах электронов с уровня на уровень в потенциале примеси в твердом теле [5] спектр риплонов непрерывный и дается выражением (2). Спектр оптических фононов не зависит от волнового вектора [5].

Матричный элемент электрон-риплонного взаимодействия  $M_{qi}$  дается выражением [1]

$$M_{qi} = \int d^2r |\psi_i|^2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} Q(q) F(q), \quad (12)$$

$$Q^2(q) = \frac{\hbar q \operatorname{th} qd}{2\rho\omega_q},$$

$$F(q) = eF_{\perp} + \int_0^{\infty} \frac{(\epsilon - 1)e^2 q}{4(\epsilon + 1)Z} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{qZ} - K_1(qZ) \right) \varphi^2(Z) dZ,$$

$\varphi(Z)$  — волновая функция электрона вдоль оси  $Z$  перпендикулярной поверхности гелия,  $\psi(r)$  — волновая функция электрона вдоль поверхности,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость гелия. Прижимающее электрическое поле  $E_{\perp}$  включает в себя внешнее поле  $E_{ext}$ , поле примеси и поле изображения подложки

$$E_{\perp} = E_{ext} + \frac{Z^*e}{d^2} + \frac{\delta}{4} \frac{e}{d^2}, \quad (13)$$

$$Z^* = \frac{2Z}{1 + \epsilon_S}, \quad \delta = \frac{\epsilon_S - 1}{\epsilon_S + 1},$$

$Z^*$  — эффективный заряд примеси,  $\epsilon_S$  — диэлектрическая проницаемость подложки. Второе слагаемое в  $F(q)$  (12) является вкладом взаимодействия электрона с поверхностью жидкости. В нашем случае среднее значение  $\langle Z \rangle$  много меньше  $a$ , где  $a$  — характерный масштаб функции  $\psi(r)$ . Поскольку будут важны риплонные импульсы  $q < a^{-1}$ , можно разложить функцию Бесселя

$$K_1(qZ) \approx \frac{1}{qZ} - qZ$$

при  $qZ \ll 1$  (12), что упрощает выражение для  $F(q)$ :

$$F(q) = eE_{\perp} + \frac{(\epsilon - 1)e^2 q^2}{4(\epsilon + 1)}. \quad (14)$$

Вклад этих двух слагаемых в  $F(q)$  сравнивается для характерных  $qa \leq 1$  при  $E_{\perp} \sim 300$  В/см.

Так как задача аксиально-симметричная, удобно разложить плоскую волну в (12) по цилиндрическим функциям. При этом вклад в  $M_{qi}$  (12) дает только гармоника с нулевой проекцией момента, и из (12) получаем

$$M_{qi} = \int_0^{\infty} 2\pi r dr |\psi_i|^2 J_0(qr) Q(q) F(q), \quad (15)$$

где  $J_0(qr)$  — функция Бесселя. Заряженная примесь создает на поверхности жидкости потенциал

$$V(r) = \frac{Z^*e^2}{\sqrt{r^2 + d^2}} \approx \frac{Z^*e^2}{d} \left( 1 - \frac{r^2}{2d^2} \right),$$

который может быть разложен по параметру  $r/d \ll 1$ . Поэтому в потенциале примеси, так же как и в магнитном поле, квадраты волновых функций двух нижних уровней даются выражениями

$$\psi_0^2 = \frac{1}{\pi a^2} e^{-r^2/a^2}, \quad \psi_1^2 = \frac{1}{\pi a^2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 e^{-r^2/a^2}, \quad (16)$$

где  $a^2 = \hbar/m\omega_0$ ,  $\hbar\omega_0$  — расстояние между уровнями электрона. Из (15), (16) находим матричные элементы  $M_{q0}$  и  $M_{q1}$ :

$$M_{q0} = \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{4}\right) F(q) Q(q), \quad (17)$$

$$M_{q1} = \left(1 - \frac{q^2 a^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{4}\right) F(q) Q(q).$$

На основе (6), (17) получаем выражение для энергии лунок в основном  $\Delta_0$  и в первом возбужденном  $\Delta_1$  состояниях электрона:

$$\Delta_0 = \int_0^{\infty} \frac{q dq}{4\pi\alpha} \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{2}\right) \frac{F^2(q)}{q^2 + \kappa^2}, \quad (18)$$

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \frac{q dq}{4\pi\alpha} \left(1 - \frac{q^2 a^2}{4}\right)^2 \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{2}\right) \frac{F^2(q)}{q^2 + \kappa^2}.$$

Представляет интерес только разность  $\Delta_0 - \Delta_1$ . Полагая для простоты  $F(q) = \text{const} = F$  и  $\kappa = 0$ , из (18) получаем

$$\Delta_0 - \Delta_1 = \frac{3F^2}{32\pi\alpha}. \quad (19)$$

Из (10), (11) следует выражение для интенсивности оптического поглощения  $I(\omega)$ :

$$I(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dt \cos\{(\omega - \omega_0)t - J_1(t)\} e^{-J_2(t)}, \quad (20)$$

где  $\omega_0 \hbar = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Delta_0 - \Delta_1$ ,

$$J_1(t) = \sum_q \frac{(M_{q0} - M_{q1})^2}{\hbar^2 \omega_q^2} \sin \omega_q t, \quad (21)$$

$$J_2(t) = \sum_q \frac{(M_{q0} - M_{q1})^2}{\hbar^2 \omega_q^2} \operatorname{cth} \frac{\omega_q}{2T} (1 - \cos \omega_q t).$$

С учетом (17) из (20), (21) получаем

$$J_1(t) = \int_0^{\infty} \frac{q dq (qa)^4}{64\alpha} \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{F^2}{(q^2 + \kappa^2) \hbar \omega_q} \sin \omega_q t, \quad (22)$$

$$J_2(t) = \int_0^{\infty} \frac{q dq (qa)^4}{64\alpha} \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{2}\right) \frac{F^2}{q^2 + \kappa^2} \times$$

$$\times \frac{(1 - \cos \omega_q t)}{\hbar \omega_q} \operatorname{cth} \frac{\omega_q \hbar}{2T}.$$

Интегралы, определяющие функции  $J_1(t)$ ,  $J_2(t)$ , быстро сходятся при  $qa > 1$  (22). Значение  $a \sim \sim 100 \text{ \AA}$  соответствует энергии перехода  $\hbar \omega_0 = \hbar^2 / ma^2 \sim 10 \text{ К}$ . Важным параметром задачи является риплонная частота  $\omega(q)$  при  $q^2 = 2/a^2$ . Она приближенно определяет обратное время релаксации лунки. При  $a = 100 \text{ \AA}$  эта частота  $\omega(a) \approx 10^9 \text{ с}^{-1}$ , а энергия риплона  $\hbar \omega(a) \approx 0.03 \text{ К}$ . Риплоны с большей энергией имеют экспоненциально малый матричный элемент взаимодействия с электроном. Коротковременная асимптотика функций  $J_1(t)$ ,  $J_2(t)$  (22) легко определяется в классическом пределе  $\hbar \omega(a) \ll T$ , когда частота  $\omega(a)$ , связанная достаточно сложным соотношением (2) с волновым вектором  $q$ , выпадает совсем при интегрировании (22) в области  $\omega_q t \ll 1$ :

$$J_1(t) = \frac{F^2 t}{32\pi \hbar \alpha}, \quad J_2(t) = J_1(t) \frac{tT}{\hbar}. \quad (23)$$

Ограничиваясь этим приближением, из (20), (23) находим

$$I(\omega) \sim \exp\left\{-\frac{(\omega \hbar + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \Delta)^2}{\Delta T}\right\}. \quad (24)$$

Сдвиг энергии перехода  $\Delta$ , вызванный деформацией поверхности гелия, равен

$$\Delta = \Delta_0 - \Delta_1 + \frac{J_1(t)}{t} = \frac{F^2}{8\pi \alpha}. \quad (25)$$

Это значение  $\Delta$  в точности совпадает с результатом, полученным в [6] в этом же пределе численно. Представляет интерес рассмотреть случай тонкой пленки,  $d < a$ , не исследованный экспериментально.

### 3. ТОНКАЯ ПЛЕНКА

В этом предельном случае риплонная частота  $\omega(q) \propto q^2$  (2). При интегрировании в (22) удобно ввести переменную  $X = (qa)^2/2$ , определив характерную частоту  $\omega(a)$  соотношением (2):

$$\omega(q) = \omega(a)X, \quad \omega^2(a) = 4\frac{\alpha}{\rho} \frac{d}{a^4}. \quad (26)$$

На основе (22), (26) находим

$$J_1(t) = A \frac{t_*}{1 + t_*^2}, \quad t_* = \omega(a)t, \quad (27)$$

$$A = \frac{F^2}{32\alpha \hbar \omega(a)}.$$

В (27) параметр  $A$  есть отношение разности энергий лунок  $\Delta_1 - \Delta_0$  к  $\hbar \omega(a)$ , а время  $t$  приведено к безразмерному виду умножением на характерную частоту  $\omega(a)$ .

Из (22), (26) получаем выражение для функции  $J_2(t_*)$ :

$$J_2(t_*) = A \int_0^{\infty} e^{-X} (1 - \cos t_* X) \operatorname{cth} \frac{X}{2T_*} dX, \quad (28)$$

где  $T_*$  — приведенная температура:  $T_* = T/\hbar \omega(a)$ . В классическом пределе  $T_* \gg 1$  и из (28) получаем зависимость функции  $J_2$  от приведенного времени  $t_*$ :

$$J_2(t_*) = AT_* \ln(1 + t_*^2) \quad (29)$$

В этом же пределе на основе (20), (27), (29) находим зависимость интенсивности поглощения от приведенной частоты  $\omega_* \equiv (\omega - \omega_0)/\omega(a)$ :

$$I(\omega_*) \sim \int_0^{\infty} \cos\left(\omega_* t_* - A \frac{t_*}{1 + t_*^2}\right) \times$$

$$\times \frac{dt_*}{(1 + t_*^2)^\nu}, \quad \nu \equiv AT_*. \quad (30)$$

Следует различать два случая,  $A > 1$  и  $A < 1$ . Предел сильной связи,  $A > 1$ , реализуется в сильном электрическом поле (14), (27), когда в интеграле (30) существенны только малые времена  $t_*$ :

$$I(\omega_*) \sim \exp\left\{-\frac{(\omega_* - A)^2}{4\nu}\right\}. \quad (31)$$

С учетом определения приведенных величин  $T_*$ ,  $\omega_*$  и параметра  $A$  видно, что выражения для  $I(\omega)$  (31), (24) совпадают и не зависят от характерной рипплонной частоты  $\omega(a)$ . Следовательно, и не проявляется специфика рассматриваемого случая тонкой пленки гелия. В слабом электрическом поле  $A < 1$ , а форма линии оптического поглощения  $I(\omega^*)$  определяется значением параметра  $\nu = AT_*$  (30). Так как  $T_* \gg 1$ , реализуются оба предела,  $\nu > 1$  и  $\nu < 1$ :

$$I(\omega_*) \sim \int_0^\infty \cos \omega_* t_* \frac{dt_*}{(1+t_*^2)^\nu} = K_{\nu-1/2}(\omega_*) \left(\frac{\omega_*}{2}\right)^{\nu-1/2} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu)}, \quad (32)$$

где  $K_{\nu-1/2}(\omega_*)$  — цилиндрическая функция, а  $\Gamma$  — гамма-функция [7].

Асимптотические разложения  $I(\omega_*)$  имеют вид [7, 8]

$$I(\omega_*) = I(0) \left(1 - \frac{\omega_*^2}{4(\nu-3/2)}\right), \quad |\omega_*| \ll 1, \quad (33)$$

$$I(\omega_*) \propto e^{-|\omega_*|} |\omega_*|^{\nu-1}, \quad |\omega_*| \gg \nu. \quad (34)$$

Если параметр  $\nu$  велик ( $\nu \gg 1$ ), реализуется и промежуточная асимптотика при  $1 < |\omega_*| < \nu$  [8]:

$$I(\omega_*) = I(0) \frac{1}{(1+Z^2)^{1/4}} e^{-\chi(Z)\nu}, \quad (35)$$

где функция  $\chi(Z)$  определена выражением

$$\chi(Z) = (1+Z^2)^{1/2} - 1 - \ln \frac{1+\sqrt{1+Z^2}}{2}, \quad (36)$$

а параметр  $Z$  есть отношение  $\omega_*$  к  $\nu$ :  $Z = \omega_*/\nu$ . Сравнение (33), (36) показывает, что асимптотики  $I(\omega_*)$  при  $\omega_* \ll 1$  и  $1 \ll \omega_* \ll \nu$  сшиваются, так как разложение функции  $\chi(Z)$  при  $Z \ll 1$  имеет вид

$$\chi(Z) = \frac{1}{4}Z^2 \left(1 - \frac{Z^2}{8}\right). \quad (37)$$

Интересно проследить переход от предела сильной связи ( $\nu \gg 1$ ) к пределу слабой связи ( $\nu \leq 1$ ). В сильном электрическом поле при высоких температурах ( $\nu \gg 1$ ) форма линии поглощения почти гауссовская (35), (37). Экспоненциальная зависимость  $I(\omega_*)$  (34) имеет место при  $|\omega_*| \gg \nu$ , когда интенсивность поглощения очень мала. При  $1/2 < \nu < 3/2$  величина  $I(\omega_*)$  неаналитически зависит от  $\omega_*$ : при  $\omega^* = 0$  функция  $I(\omega^*)$  имеет излом. При  $\nu < 1/2$  значение

$I(0)$  не определено, так как интеграл (32) расходится, если  $\omega_* = 0$ . По-видимому этот случай, когда линия поглощения не гауссовская и не лоренцевская, и представляет основной интерес. Сходимость интеграла (32) обеспечивается или учетом естественной ширины линии поглощения, или учетом взаимодействия локализованного электрона с паром гелия [1, 9], плотность которого очень сильно зависит от температуры. Интересно, что учет ширины уровней влияет лишь на детали зависимости центральной части линии поглощения от приведенной частоты  $\omega_*$ . Асимптотика  $I(\omega_*)$  при  $|\omega_*| > \nu$  (34) не зависит от  $\nu$ , т. е. от температуры и электрического поля, только благодаря предэкспоненциальному множителю  $|\omega_*|^\nu$ . Иначе говоря, даже в классическом пределе,  $T_* \gg 1$ , экспоненциальные крылья линии поглощения не зависят от температуры. При обработке экспериментальных данных в слабых электрических полях  $E_\perp$  возникает неопределенность в вычислении ширины линии поглощения. Существует общепринятое определение этой ширины для лоренцевской или гауссовской линии. В области малых  $\nu$ , т. е. слабых электрических полях, это определение может не иметь места. Немонотонная зависимость ширины линии поглощения от  $E_\perp$  обнаружена в эксперименте [9] по циклотронному резонансу, что может быть следствием неаналитической зависимости  $I(\omega^*)$  от  $\omega^*$  при  $\nu < 3/2$ .

При исследовании квантового предела  $T_* \ll 1$  удобно в выражении (28) для функции  $J_2(t_*)$  выделить главную часть, не зависящую от температуры:

$$J_2(t_*) = A \frac{t_*^2}{1+t_*^2} + 2A \int_0^\infty \frac{(1 - \cos t_* X) e^{-X}}{e^{X/T_*} - 1} dX. \quad (38)$$

Интеграл в (38) может быть представлен в виде суммы

$$\int_0^\infty dX = \sum_{n=1}^\infty \frac{t_*^2 T_*^3}{(T_* + n)[t_*^2 T_*^2 + (T_* + n)^2]}. \quad (39)$$

Когда  $T_* \ll 1$ , но  $t_* T_* \gg 1$  при суммировании по  $n$  в (39) существенны большие  $n$  и из (38), (39) получаем

$$J_2(t_*) = A \frac{t_*^2}{1+t_*^2} + \nu \ln(1+t_*^2 T_*^2). \quad (40)$$

Это выражение справедливо и в другом пределе,  $T_* t_* \ll 1$ , так как при этом второй член в (40) несуществен. На основе (20), (27), (40) получаем оконча-

тельное выражение для интенсивности поглощения в квантовом пределе  $T_* \ll 1$ :

$$I(\omega_*) \propto \int_0^\infty \cos\left(\omega_* t_* - A \frac{t_*}{1+t_*^2}\right) \times \exp\left\{-A \frac{t_*^2}{1+t_*^2}\right\} (1+t_*^2 T_*^2)^{-\nu} dt_*. \quad (41)$$

Параметр  $\nu$  определен выше:  $\nu = T_* A$ .

В области сильной связи,  $A \gg 1$ , при интегрировании в (41) существенны малые  $t_*$  и работает адиабатическое приближение

$$I(\omega_*) \propto \exp\left\{\frac{-(\omega_* - A)^2}{4A}\right\}. \quad (42)$$

В области слабой связи,  $A \ll 1$ , первый член разложения  $I(\omega_*)$  (41) по степеням  $A$  имеет вид

$$I(\omega_*) \propto A \left[ \frac{T_*}{|\omega_*|} e^{-|\omega_*|/T_*} + e^{-\omega_* \theta(\omega_*)} \right], \quad (43)$$

где  $\theta(\omega_*)$  — ступенчатая функция:  $\theta(\omega_*) = 1$  при  $\omega_* > 0$ ;  $\theta(\omega_*) = 0$  при  $\omega_* < 0$ . Выражение (43) не допускает буквального предела  $T_* = 0$ , так как при  $\nu = T_* A = 0$  интеграл (41) расходится. Нефизическая сингулярность  $I(\omega_*)$  при  $\omega_* = 0$  обрезается на  $\omega_* \sim \gamma/\omega(a)$ , где  $\gamma$  — естественная ширина уровня электрона в возбужденном состоянии с энергией  $\varepsilon_1$ . Мы видим, что в квантовом пределе слабой связи ( $T_* \ll 1$ ,  $A \ll 1$ ) линия поглощения  $I(\omega_*)$  имеет максимум при  $\omega_* = 0$  и сильно несимметрична. При пороговой энергии  $\hbar\omega_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \Delta_0 - \Delta_1$  происходит смена режима поглощения. При  $\omega_* > 0$  частотная экспоненциальная зависимость  $I(\omega_*)$  определяется излучением риплонов, не зависящим от температуры. Однако при  $\omega_* < 0$  эта зависимость связана с поглощением реальных, т. е. тепловых риплонов, плотность которых экспоненциально мала при  $T_* \ll 1$ . Сдвиг энергии электронного перехода, т. е. разница между  $\hbar\omega_0$  и  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ , отличается от адиабатического значения  $\Delta$  из (25) только множителем  $3/4$ :

$$\begin{aligned} \hbar\omega_0 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \Delta', \\ \Delta' &= \Delta_0 - \Delta_1 = \frac{3F^2}{32\pi\alpha} = \frac{3}{4}\Delta. \end{aligned} \quad (44)$$

Параметр  $F \sim E_\perp$  (14), поэтому переход от случая сильной связи ( $A \gg 1$ ) к слабой связи ( $A \ll 1$ ) приводит к излому на зависимости сдвига линии поглощения  $\hbar\omega$  от квадрата электрического поля  $E_\perp$ . Можно показать, что этот результат носит общий характер и не зависит от температуры  $T_*$ . В классическом

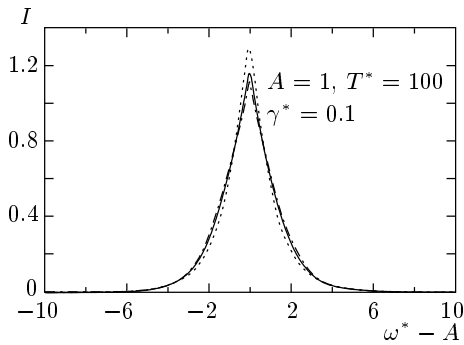
пределе ( $T_* \gg 1$ ) адиабатическое приближение нарушается, если  $\nu = AT_* < 1/2$ , когда интеграл (30) расходится при  $\omega_* = 0$ . Указанный излом наблюдался в эксперименте по циклотронному резонансу [9] в слабых электрических полях  $E_\perp$ .

Мы видели, что в квантовом случае,  $T_* \gg 1$ , положения максимумов на линии поглощения в пределах сильной и слабой связи смещены на  $A$ . Интересен промежуточный случай  $A \approx 1$ , когда на линии поглощения возникают оба максимума. Если первый, адиабатический, максимум при  $\omega_* = A$  возникает от интегрирования в (41) по области  $t_* \ll 1$ , то второй, «антиадиабатический», пик при  $\omega_* = 0$  связан с интегрированием в (41) по области  $t_* \gg 1$ . Его величина пропорциональна  $e^{-A}$ . На первый взгляд может показаться, что второй («антиадиабатический») пик не может наблюдаться, поскольку время жизни возбужденного уровня всегда много меньше времени релаксации лунки. Однако при электронном переходе нет глобального перестроения лунки, меняется только ее малая часть. Это видно уже из того, что разница энергий лунок для разных уровней электрона много меньше самой энергии лунки. Лунка набирается в основном от длинноволновых риплонов, которые деформируют поверхность на масштабах порядка  $1/\kappa \gg a$ . Однако длинноволновая часть лунки почти не зависит от номера уровня электрона. Электронные переходы меняют лунку на масштабах порядка  $a$ , что происходит намного быстрее, чем глобальная перестройка лунки.

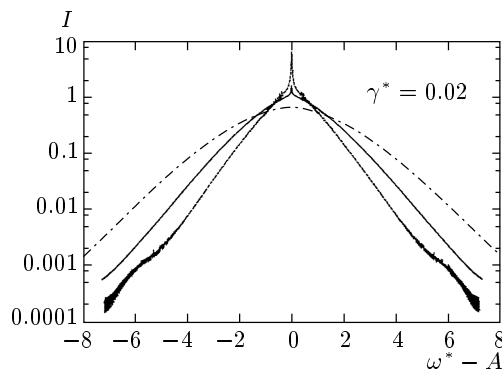
#### 4. ТОЛСТАЯ ПЛЕНКА И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе работы покажем, что между случаями толстой ( $d \gg a$ ) и тонкой ( $d \ll a$ ) пленок гелия нет качественного различия для рассматриваемого круга явлений. Это связано с близостью спектров  $\omega(q) \propto q^2 (d \ll a)$  и  $\omega(q) \propto q^{3/2} (d \gg a)$ . Мы также приведем результаты численного расчета по формулам (20), (22), (2), которые иллюстрируют выводы, полученные выше.

На рисунке 1 приведена частотная зависимость  $I(\omega^*)$  в классическом пределе ( $T_* = 100$ ) при  $\nu = 1$  ( $A = 0.01$ ) при разных толщинах пленки гелия:  $d/a = 0.01, 1, 100$ . Чтобы не возникало нефизических сингулярностей в расчетах в формуле (20) введен обрезающий фактор  $e^{-\gamma t_*}$ , где  $\gamma = 0.02$ . Видно, что спектр поглощения совсем не похож на гауссовский или лоренцевский, а изменение толщины пленки гелия на четыре порядка не приводит к качественным



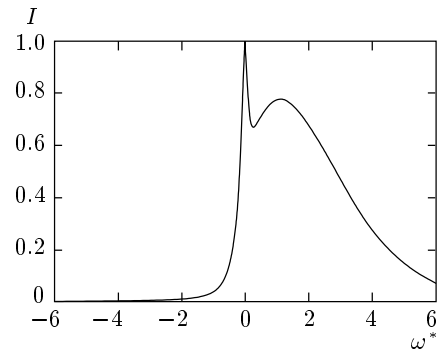
**Рис. 1.** Линия поглощения при разной толщине пленки гелия. Сплошная линия отвечает  $d/a = 1$ , пунктирная —  $d/a = 0.01$ , штрихпунктирная —  $d/a = 100$ . Несмотря на очень широкий диапазон значений  $d/a$ , линии поглощения при разных  $d/a$  отличаются слабо



**Рис. 2.** Интенсивность поглощения в логарифмическом масштабе как функция приведенной частоты  $\omega^* \equiv (\omega - \omega_0 - \Delta)/\omega(a)$ . При постоянной температуре  $T^* = 100$  меняется константа связи. Сплошная линия отвечает  $\nu = 1$  ( $A = 0.01$ ); штрихпунктирная соответствует  $\nu = 2$ , а пунктирная отвечает  $\nu = 0.5$  ( $A = 0.005$ ). При малом  $\nu$  отчетливо видны линейные участки зависимости  $\ln I(\omega^*)$  (правило Урбаха (34)). Если  $\nu < 1$ , наблюдается также острый пик при  $\omega^* = 0$

различиям  $I(\omega_*)$ . Графики построены на основе численного счета по формулам (20), (22), (2).

Чтобы проанализировать форму линии поглощения, ее зависимость от  $\omega_*$  приведена в логарифмическом масштабе (рис. 2) для различных значений  $\nu = 0.5, 1, 2$ . При этом температура  $T_*$  фиксировалась ( $T_* = 100$ ), а менялась константа связи  $A$ . Это отвечает экспериментальной ситуации, когда меняется прижимающее электрическое поле при постоянной  $T$  [9]. На рисунке 2 видны участки линейной за-



**Рис. 3.** Линия поглощения в квантовом пределе:  $T^* = 0.2$ ,  $d/a = 100$ . Отчетливо видны два максимума

висимости  $\ln I(\omega_*)$ , которые тем продолжительнее, чем меньше  $\nu$ . С увеличением  $\nu$  зависимость  $\ln I(\omega_*)$  переходит в перевернутую параболу, что соответствует гауссовской форме линии поглощения. Напротив, при уменьшении  $\nu$  зависимость  $I$  от  $\omega_*$  все лучше отвечает правилу Урбаха (34) и более явным становится острый пик при  $\omega^* = 0$ . График построен на основе численного счета по формулам (20), (22), (2) при  $d/a = 100$ .

Рисунок 3 иллюстрирует квантовый предел  $T^* < 1$ , когда возможно появление двух максимумов на линии поглощения. Экспериментальная реализация этого предела требует понижения температуры до  $T \sim 10^{-2}$  К. Факт наличия двух максимумов не зависит от того, рассматривается тонкая или толстая пленка гелия. Отчетливой всего эти два максимума видны при  $A \approx 2$  для толстой и  $A \approx 3$  для тонкой пленок гелия.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе показано, что для описания оптических переходов между состояниями электрона, локализованного на поверхности жидкого гелия, применима точно решаемая модель независимых бозонов [5]. Результаты, полученные в рамках этой модели, используются для анализа формы, ширины и сдвига линии поглощения при таких переходах. Показано, что даже в классическом пределе ( $T^* \gg 1$ ) линия поглощения в области слабой связи  $\nu = AT_* < 1$  не является гауссовской или лоренцевской. В широком интервале,  $\omega_* > \nu$ , имеет место правило Урбаха (34).

Отметим, что экспоненциальная зависимость

поглощения от энергии электронного перехода  $\hbar(\omega - \omega_0)$  типична для многих оптических экспериментов, но она не была обоснована теорией [10]. В данном случае речь идет, скорее, не об эмпирическом правиле Урбаха, а о законе Урбаха. Если  $\nu < 1$ , линия поглощения  $I(\omega_*)$  имеет пик при  $\omega_* = 0$ , который тем острее, чем меньше  $\nu$ .

В квантовом пределе в области слабой связи линия поглощения сильно несимметрична. Ее форма отвечает правилу Урбаха (43). В области  $A \sim 1$  линия поглощения имеет два максимума (см. рис. 3). Определен сдвиг энергии электронного перехода, связанный с деформацией поверхности гелия (2), (25), (44).

Детальное экспериментальное изучение рассматриваемых явлений для циклотронного резонанса электронов на поверхности гелия проведено в [3, 9] при  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \hbar\omega_H$ , где  $\omega_H$  — циклотронная частота. В сильных магнитных полях ( $\hbar\omega_H \gg T$ ) электроны заселяют только один уровень Ландау. К сожалению, мы не готовы к сравнению наших результатов с экспериментом [3, 9]. Дело в том, что задача о циклотронном резонансе электронов на поверхности жидкого гелия не сводится к «тривиальной» проблеме взаимодействия двухуровневой электронной системы с риплонами. Она по самой своей сути усложнена бесконечнократным вырождением уровней Ландау в сильном магнитном поле. Нашей целью является, скорее, не объяснить старые эксперименты [3, 9], а спровоцировать новые, более простые для теории.

Интересной реализацией рассматриваемых явлений могут быть также оптические переходы между уровнями диплонов вблизи поверхности гелия. Диплон — это связанное состояние электрона в поле иона  $\text{He}^+$ , расположенного под поверхностью гелия. Энергию связи диплона можно варьировать в широких пределах, меняя прижимающее электрическое поле [1].

Другое возможное приложение полученные результаты могут найти в электронных приборах, покрытых пленкой жидкого гелия. Поскольку

из гелия вымораживаются все примеси, возможна реализация низкоразмерных идеально чистых электронных систем методом, предложенным в [11]. Это кольцевые электронные структуры, квантовые точки, электронные нити.

В заключение приятно поблагодарить В. Б. Шикина и А. С. Иоселевича за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-17729).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Шикин, Ю. П. Монарха, *Двумерные заряженные системы в гелии*, Наука, Москва (1989).
2. G. A. Farias and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **55**, 3763 (1997).
3. В. С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ **24**, 510 (1976).
4. П. Д. Григорьев, Письма в ЖЭТФ **66**, 630 (1997).
5. G. Mahan, *Many-Particle Physics*, Plenum Publ. Corp. (1990).
6. A. Cheng and P. M. Platzman, *Sol. St. Comm.* **25**, 813 (1978).
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
8. Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, Москва (1973).
9. В. С. Эдельман, ЖЭТФ **77**, 673 (1979).
10. Б. И. Шкловский, А. Л. Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Наука, Москва (1979), с. 365, 366.
11. А. М. Дюгаев, А. С. Рожавский, И. Д. Вагнер, П. Видер, Письма в ЖЭТФ **67**, 410 (1998).