

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛНОВОДАХ С ПРИМЕСЯМИ

Ч. С. Ким*

*Applied Physics, Yale University, New Haven,
Connecticut 06520-8284, USA*

О. Н. Рознова, А. М. Сатанин**, В. Б. Штенберг

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 23 ноября 2001 г.

Исследованы эффекты интерференции между распространяющимися и локализованными состояниями в квазиодномерных электронных волноводах, содержащих притягивающие примеси (квантовые точки) конечных размеров. Матрица рассеяния электрона вычисляется в рамках теории Фешбаха [1, 2], когда резонансные состояния в закрытых каналах учитываются точно, а нерезонансные — по теории возмущений. Показано, что притягивающие примеси с конечными размерами могут порождать серию асимметричных резонансов Фано в прозрачности волновода. При этом вследствие интерференции электронных состояний характеристики резонансов могут осциллировать при изменении параметров примеси. Найдены условия, при которых эффекты интерференции электронных волн приводят к «схлопыванию» (коллапсу) и «качанию» (свингу) резонансов Фано.

PACS: 73.20.Dx, 73.40.Gk, 73.20.Fz, 03.65.Ge

1. ВВЕДЕНИЕ

В квазиодномерных электронных волноводах с примесями (квантовыми точками) возможны принципиально новые когерентные эффекты, когда распространяющаяся электронная волна интерферирует с локализованным примесным состоянием. В этом случае на фоне ступеней проводимости (прозрачности) волновода [3–5] могут существовать асимметричные резонансы — резонансы Фано [6]. В последнее время интерференционные явления, тесно связанные с резонансами Фано, активно изучаются как теоретически, так и экспериментально. Резонансы Фано имеют универсальную природу и потому ранее наблюдались в различных системах: при фотоионизации атомов [7], электронном и нейтронном рассеянии [8, 9], рамановском рассеянии [10], фотоабсорб-

ции в квантовых ямах и сверхрешетках [11–13], электронном транспорте через интерферометр [14]. Резонансы Фано обусловлены интерференцией волн, возникающих за счет рассеяния на гетероструктуре; они несут важную информацию о ее геометрическом рельефе и внутренних потенциальных полях. Изучение механизмов управления прозрачностью электронных волноводов имеет большое значение для приложений, поскольку на этом эффекте можно создавать резонансные наноэлектронные приборы нового типа [15]. Для решения такого рода задач необходимо развить теорию рассеяния электронных состояний в волноводах с примесями. Ранее изолированные резонансы изучались в оптике, при рассеянии электронов на атомах и молекулах и в теории ядерных реакций. В работах [1, 2] было получено дисперсионное представление для матрицы рассеяния многоканальных систем. Эффекты перекрытия резонансов впервые обсуждались в работе [16]. Следует отметить, что полюсная структура

*C. S. Kim

**E-mail: satanin@phys.unn.runnet.ru

матрицы рассеяния, определяющая пики прозрачности, хорошо понята, тогда как эффекты, обусловленные полным отражением (существование провалов в прозрачности), недостаточно изучены. В недавних публикациях [17–19] в основном изучалось влияние короткодействующих примесей на прозрачность и было показано, что такие примеси приводят к появлению дополнительных пиков и провалов на фоне ступеней прозрачности.

В данной работе исследуется рассеяние электронных волн в квазиодномерном волноводе на примесях, имеющих конечные размеры. Принципиально новым моментом здесь является то, что возможна интерференция (конфигурационное взаимодействие) распространяющейся волны с волной, запертой в области примеси, причем это взаимодействие может качественно менять прозрачность волновода. Прежде всего, сформулируем резонансную теорию рассеяния, которая может быть использована для решения широкого круга вопросов теории электронного транспорта в наноканалах. Некоторые элементы процедуры, которая здесь применяется, основываются на работах Фешбаха [1, 2] и уже были использованы в работах [20, 21] в случае уединенных резонансов. В основе предлагаемой теории лежит представление о резонансной группе состояний, возникающих в ямах, отщепившихся от подзон размерного квантования. Матрица рассеяния электрона вычисляется в предположении, согласно которому резонансные состояния в закрытых каналах учитываются точно, а нерезонансные — по теории возмущений. Развитая теория позволяет описать интерференцию между распространяющимися и локализованными состояниями, которая приводит к возникновению асимметричных резонансов. При этом в случае примеси с конечными размерами может существовать серия резонансов Фано [22], а интерференция квантовых состояний в открытых и закрытых каналах рассеяния может приводить к осцилляции характеристик резонанса Фано при изменении параметров системы [23]. Для конкретных моделей примесей мы более детально исследуем, при каких условиях эффекты когерентного взаимодействия состояний могут приводить к коллапсу резонансов Фано, когда ширина резонансов обращается в нуль. Мы покажем, что рассматриваемое явление аналогично аннигиляции частицы (резонанса) с дыркой (нулем резонанса). В работе предложена простая численная процедура, позволяющая вычислять характеристики волновода с примесями в квазиодномерном приближении, и приведены результаты моделирования при изменении параметров примеси.

2. МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЛНОВОДА И УРАВНЕНИЯ

Будем изучать рассеяние электронных волн в двумерном электронном волноводе шириной W , который расположен вдоль оси x . Пусть запирающий потенциал в поперечном направлении описывается функцией $V_c(y)$. Потенциал примесей будем описывать функцией $V(x, y)$. Схематически геометрия волновода представлена на рис. 1, где показаны линии уровней потенциального поля в волноводе.

Волновая функция электрона может быть найдена из уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) + V_c(y) \Psi(x, y) + V(x, y) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y), \quad (1)$$

где m — эффективная масса электрона. Для канала без примесей $V(x, y) = 0$, и в этом случае имеем решение уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} \psi_{n,k}^{(0)}(x, y) &= e^{ik_n x} \varphi_n(y), \\ E &= \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + E_n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_n(y)$ и E_n определены решениями

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_c(y) \right\} \varphi_n(y) = E_n \varphi_n(y). \quad (3)$$

Волновую функцию $\Psi(x, y)$ удобно разложить по полному базису функций поперечного движения:

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \varphi_n(y). \quad (4)$$

Рис. 1. Схематическое изображение двумерного электронного волновода, содержащего притягивающую примесь. Показаны изолинии потенциала; разные цветовые оттенки характеризуют изменение потенциала

Подставив (4) в (1), находим уравнения для $\psi_n(x)$ в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_n(x) + \sum_{n'=1}^{\infty} V_{nn'}(x) \psi_{n'}(x) = (E - E_n) \psi_n(x), \quad (5)$$

где

$$V_{nn'}(x) = \int \varphi_n(y) V(x, y) \varphi_{n'}(y) dy \quad (6)$$

— матричные элементы примесного потенциала. Система уравнений (5) полностью эквивалентна двумерному уравнению Шредингера. Следует отметить, что бесконечная система связанных уравнений типа (5) часто встречается в физике (линейная теория взаимодействия волн), а развитие методов решения таких уравнений представляет самостоятельный интерес.

Как показано в работах [24, 25], вычисление кондактанса волновода с примесями в баллистическом режиме сводится к задаче рассеяния. Будем интересоваться амплитудой прохождения $t_{nn'}$, которая описывает рассеяние электронов из канала с номером n' в канал с номером n . Амплитуда прохождения может быть найдена решением (5). Кондактанс, измеряемый двухзондовым методом, определяется формулой Буттикера–Ландауэра [24, 25]

$$G = \frac{2e^2}{h} T, \quad T = \sum_{n, n'} \frac{k_n}{k_{n'}} |t_{nn'}|^2, \quad (7)$$

где T — прозрачность волновода, n и n' означают номера каналов падающих и рассеянных волн, а суммирование в (7) проводится по всем распространяющимся для данной энергии E состояниям в квантовом волноводе. Отметим, что полюсы амплитуды рассеяния $t_{nn'}(E)$ в комплексной плоскости E соответствуют уровням или резонансам, а ветвления — пороговым особенностям [26].

3. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И РЕЗОНАНСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Теория резонансов, обусловленная связью локализованного состояния с состояниями открытых каналов, была сформулирована много лет назад Фешбахом [1, 2]. В настоящем разделе в рамках теории Фешбаха получим выражение для матрицы рассеяния электрона в волноводе, содержащем примесь конечного размера. При этом будем принимать во внимание произвольное число возможных связанных состояний в поле примеси.

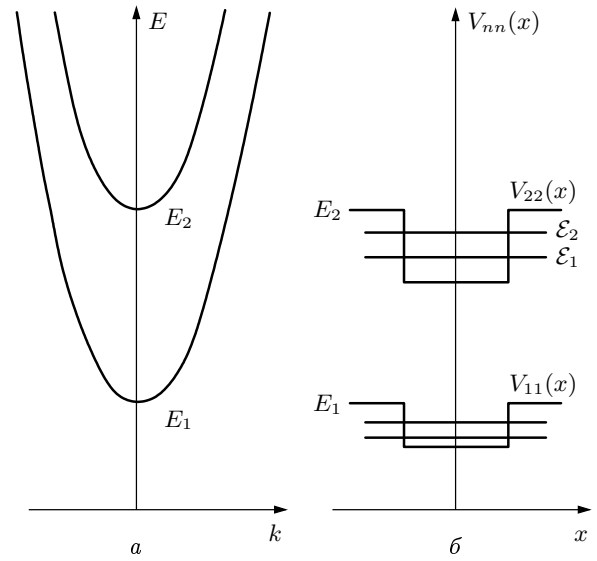


Рис. 2. Закон дисперсии носителей в идеальном волноводе (а) и схема расположения дискретных уровней в эффективных ямах (б)

А. Матрица рассеяния

Начнем рассмотрение со случая, когда имеется только один открытый канал, т. е. энергия рассеивающегося электрона лежит в интервале $E_1 < E < E_2$ (см. рис. 2а). Действуя согласно [1], сохраним только самые близкие по энергии (резонансные) слагаемые в системе уравнений (5), а отброшенные слагаемые затем можно будет учесть по теории возмущений. Другими словами, удержим в (5) слагаемые, содержащие ψ_1 и ψ_2 :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{11}(x) \right) \psi_1(x) + V_{12}(x) \psi_2(x) = (E - E_1) \psi_1(x), \quad (8)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{22}(x) \right) \psi_2(x) + V_{21}(x) \psi_1(x) = (E - E_2) \psi_2(x), \quad (9)$$

в предположении, что матричный элемент V_{12} , описывающий связь между каналами, мал по сравнению с расстоянием между подзонами квантования.

Удобней начать анализ с уравнения (9). Если в (9) пренебречь слагаемым с V_{21} , то оно приобретает вид одномерного уравнения Шредингера:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{22}(x) \right) \psi_2(x) = (E - E_2) \psi_2(x). \quad (10)$$

Если потенциал $V_{22}(x)$ является притягивающим и достаточно велик по абсолютной величине, то при некоторых значениях энергии E будут существовать связанные состояния. В зависимости от параметров ямы $V_{22}(x)$ в интервале энергий $E_2 - \max|V_{22}(x)| < E < E_2$ уравнение (10) может иметь серию связанных состояний u_j с энергиями \mathcal{E}_j ($j = 1, \dots, N$) (см. рис. 2б), где функции u_j нормированы условиями

$$\langle u_j | u_{j'} \rangle = \delta_{jj'}. \quad (11)$$

Помимо дискретных уровней в поле потенциала $V_{22}(x)$ обычно имеются состояния непрерывного спектра, которые мы обозначим через $u_\nu(x)$. Принимая во внимание локализованные состояния и состояния сплошного спектра, будем искать решение (9) в виде

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \sum_{j=1}^N A_j u_j(x) + \int A_\nu u_\nu(x) d\nu \equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda} A_\lambda u_\lambda(x), \end{aligned} \quad (12)$$

где $A_\lambda = (A_j, A_\nu)$ — пока произвольные амплитуды, $\lambda = (j, \nu)$ — полный набор квантовых чисел, $u_\lambda = (u_j, u_\nu)$.

Подставляя (12) в (9) и учитывая ортогональность состояний $u_\lambda(x)$, получим формальные уравнения для амплитуд A_λ :

$$(E - \mathcal{E}_\lambda) A_\lambda = \langle u_\lambda | V_{21} | \psi_1(x) \rangle. \quad (13)$$

Теперь обратимся к уравнению (8). Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \left[E - E_1 - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{11}(x) \right) \right] \psi_1(x) = \\ = V_{12}(x) \psi_2(x). \end{aligned} \quad (14)$$

В данном случае мы имеем дело с задачей рассеяния электрона в потенциальном поле $V_{11}(x)$. Формальное решение уравнения (14) может быть записано с помощью функции Грина:

$$|\psi_1\rangle = |\chi_E^+\rangle + G_1^+ V_{12} |\psi_2\rangle, \quad (15)$$

где $\langle x | \chi_E^+ \rangle$ представляет собой решение уравнения (14) с нулевой правой частью. Мы выбрали частное решение, соответствующее источникам, находящимся при $x \rightarrow -\infty$. Подставляя (15) в (13), получим явное уравнение для нахождения амплитуд A_λ :

$$(E - \mathcal{E}_\lambda) A_\lambda - \sum_{\lambda'} U_{\lambda, \lambda'} A_{\lambda'} = F_\lambda, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\lambda, \lambda'} &= \langle u_\lambda | V_{21} G_1 V_{12} | u_{\lambda'} \rangle, \\ F_\lambda &= \langle u_\lambda | V_{21} | \chi_E^+ \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Функция ψ_1 , в свою очередь, получается из (15), если в правую часть подставить ψ_2 , определяемое уравнением (12):

$$|\psi_1\rangle = |\chi_E^+\rangle + \sum_{\lambda} G_1^+ V_{12} |u_\lambda\rangle A_\lambda. \quad (18)$$

Чтобы найти матрицу рассеяния t_{11} , определяемую асимптотическим поведением $\psi_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$: $\psi_1(x) = t_{11} e^{ik_1 x}$, нам потребуется выражение для функции Грина:

$$G_1^+(x, x') = \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} \begin{cases} \chi_E^+(x) \chi_E^-(x'), & x > x', \\ \chi_E^+(x') \chi_E^-(x), & x < x', \end{cases} \quad (19)$$

где $\chi_E^+(x)$ и $\chi_E^-(x)$ — соответственно, решения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{11}(x) \right) \chi_E^\pm(x) = (E - E_1) \chi_E^\pm(x) \quad (20)$$

с источниками при $x \rightarrow \pm\infty$. Функция $\chi_E^+(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$\chi_E^+(x) = \begin{cases} t e^{ik_1 x}, & x \rightarrow +\infty, \\ e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (21)$$

а $\chi_E^-(x)$ —

$$\chi_E^-(x) = \begin{cases} e^{-ik_1 x} + r' e^{ik_1 x}, & x \rightarrow +\infty, \\ t e^{-ik_1 x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (22)$$

где t — амплитуда прохождения, а r и r' — амплитуды отражения при рассеянии в поле $V_{11}(x)$.

После рассмотрения асимптотики волновой функции $\psi_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, исходя из (18) с учетом (19) и (20), получим

$$\psi_1(x) = t e^{ik_1 x} + \frac{m e^{ik_1 x}}{ik_1 \hbar^2} \sum_{\lambda} \langle (\chi_E^-)^* | V_{12} | u_\lambda \rangle A_\lambda. \quad (23)$$

Следовательно, матрица рассеяния в канале $1 \rightarrow 1$ определяется выражением

$$\begin{aligned} t_{11} = t \left\{ 1 + \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} \sum_{\lambda, \lambda'} \langle (\chi_E^-)^* | V_{12} | u_\lambda \rangle \times \right. \\ \left. \times (E - \mathcal{E} - U)_{\lambda\lambda'}^{-1} \langle u_{\lambda'} | V_{21} | \chi_E^+ \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Формула (24) позволяет описать взаимодействие резонансов при рассеянии электрона на примесях в электронном волноводе и интервале энергий (E_1, E_2) . Отметим, что в интервале энергий (E_2, E_3) следует учесть дополнительные резонансные состояния, обусловленные каналом 3, т.е. рассмотреть систему трех связанных уравнений и т.д.

В. Резонансное приближение

Если энергия электрона близка к группе уровней в потенциальной яме $V_{22}(x)$, то именно эти связанные состояния будут наиболее сильно интерферировать с падающей волной. В данной группе связанных состояний важны те, для которых модули матричных элементов, связывающих эти состояния с состояниями непрерывного спектра, будут сравнимы с расстоянием между ближайшими уровнями.

Удержим в (16) только резонансные слагаемые, опустив нерезонансные состояния непрерывного спектра. Пусть число удерживаемых амплитуд определяется числом N связанных состояний в яме. При этом явное уравнение для нахождения амплитуд A_j примет вид

$$\sum_{j'=1}^N M_{jj'} A_{j'} = F_j, \quad M_{jj'} = (E - \mathcal{E}_j) \delta_{jj'} - U_{jj'}, \quad (25)$$

где

$$U_{jj'} = \langle u_j | V_{12} G_1 V_{12} | u_{j'} \rangle, \quad F_j = \langle u_j | V_{21} | \chi_E^+ \rangle. \quad (26)$$

Следовательно, в резонансном приближении матрица рассеяния в канале $1 \rightarrow 1$ определяется выражением

$$t_{11} = t \left\{ 1 + \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} \times \sum_{j,j'} \langle (\chi_E^-)^* | V_{12} | u_j \rangle (M^{-1})_{jj'} \langle u_{j'} | V_{21} | \chi_E^+ \rangle \right\}. \quad (27)$$

Представление для амплитуды рассеяния в виде (27) замечательно тем, что оно позволяет в общем случае выявить резонансную структуру прозрачности канала. Формальное решение системы (25) пишется как

$$A_j = \frac{1}{\det M} \sum_{j'=1}^N (M^c)_{jj'} F_{j'}, \quad (28)$$

где M^c — кофактор матрицы M . Амплитуда рассеяния может быть записана в виде

$$t_{11}(E) = t(E) \frac{\mathcal{N}(E)}{\mathcal{D}(E)}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(E) &= \mathcal{D}(E) + \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} \times \\ &\times \sum_{j,j'} \langle (\chi_E^-)^* | V_{12} | u_j \rangle (M^c)_{jj'} \langle u_{j'} | V_{21} | \chi_E^+ \rangle, \quad (30) \\ \mathcal{D}(E) &= \det M. \end{aligned}$$

Как видно из приведенного выражения, полюсы амплитуды рассеяния определяются нулями функции $\mathcal{D}(E)$, а ее нули — нулями числителя $\mathcal{N}(E)$.

Резонансная структура матрицы рассеяния существенно образом зависит от свойств матрицы U , определяемой, в свою очередь, свойствами функции Грина и примесного потенциала $V(x, y)$. Будем специально выделять случай, когда матричный элемент обладает четностью относительно отражений $x \rightarrow -x$ ($V_{n,n'}(x) = V_{n,n'}(-x)$). Обсудим также случай потенциала общего положения, когда $V_{n,n'}(x) \neq V_{n,n'}(-x)$. Согласно теореме взаимности функция Грина обладает следующим свойством:

$$G_1(x, x') = G_1(x', x). \quad (31)$$

Если же потенциал примеси таков, что $V_{11}(x) = V_{11}(-x)$, то из уравнения для функции Грина вытекает дополнительное соотношение

$$G_1(x, x') = G_1(-x, -x'). \quad (32)$$

Используя теорему взаимности, нетрудно убедиться, что матрица U является симметричной ($U_{jj'} = U_{j'j}$). Для случая, когда потенциал примеси обладает четностью, легко показать, что матричные элементы U между состояниями с разной симметрией — симметричным s и антисимметричным a — равны нулю: $U_{sa} = 0$.

Как видно из приведенных выше выражений, поведение амплитуды рассеяния определяется матричными элементами $U_{jj'}$. С помощью (19) для функции Грина нетрудно преобразовать матричный элемент $U_{jj'}$ к виду

$$U_{jj'} = \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} F_j R_{j'} + Q_{jj'}, \quad (33)$$

где

$$Q_{jj'} = -\frac{2m}{k_1 \hbar^2 |t|^2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_j(x) V_{12}(x) \chi^+(x) \times \right. \\ \left. \times \int_x^{\infty} u'_j(x') V_{12}(x') \chi^{+*}(x') \right), \quad (34)$$

$$R_j = \langle (\chi_E^-)^* | V_{12} | u_j \rangle. \quad (35)$$

С учетом известных соотношений между волновыми функциями задачи рассеяния,

$$\begin{aligned} \chi_E^+ &= r \chi_E^{+*} + t \chi_E^{-*}, \\ \chi_E^- &= r' \chi_E^{-*} + t \chi_E^{+*}, \end{aligned} \quad (36)$$

матричным элементам $U_{jj'}$ можно придать форму

$$\begin{aligned} U_{jj'} &= \frac{m}{2ik_1 \hbar^2} (F_j F_{j'}^* + R_j R_{j'}^*) + \\ &+ \frac{m}{2ik_1 \hbar^2} \left(\frac{r}{t} R_j F_{j'}^* - \frac{r^*}{t^*} F_j R_{j'}^* \right) + \frac{1}{2} (Q_{jj'} + Q_{j'j}). \end{aligned} \quad (37)$$

Отсюда, в частности, диагональные элементы можно записать как

$$\begin{aligned} U_{jj} &= -i \frac{m}{2k_1 \hbar^2} (|F_j|^2 + |R_j|^2) + \\ &+ \frac{m}{k_1 \hbar^2} \operatorname{Im} \left(\frac{r}{t} R_j F_j^* \right) + Q_{jj}, \end{aligned} \quad (38)$$

выделив тем самым явно действительные и мнимые части U_{jj} .

Вид знаменателя (29) может быть установлен в общем случае. Для этого приведем к диагональному виду комплексную симметричную матрицу M . Элементы матрицы, осуществляющей унитарное преобразование, находятся решением системы однородных уравнений

$$\sum_{j'=1}^N (\mathcal{E}_j \delta_{jj'} + U_{jj'}) \Omega_{j'} = \tilde{\mathcal{E}} \Omega_j. \quad (39)$$

Пусть найден набор комплексных решений $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha$, которые можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha^R - i\Gamma_\alpha, \quad (40)$$

тогда мы сможем записать знаменатель (30) как

$$\mathcal{D}(E) = \prod_{\alpha} (E - \mathcal{E}_\alpha^R + i\Gamma_\alpha). \quad (41)$$

Из структуры выражения для матрицы M ясно, что \mathcal{E}_α^R и Γ_α суть функции энергии, однако, как это следует из последующего анализа, при слабой связи между каналами рассеяния они слабо зависят от энергии.

Выражение $\mathcal{N}(E)$, стоящее в числителе (29), может иметь нули, которые будут означать возможность полного отражения волн в волноводе с примесями. Ниже на конкретных примерах продемонстрируем, как находятся эти нули, и обсудим возможные следствия для прозрачности канала.

В случае, когда параметры ямы таковы, что в ней имеется небольшое число уровней (число резонансов), можно получить общее выражение для амплитуды рассеяния. Рассмотрим случай симметричной примеси. Пусть в яме имеется одно связанное состояние. После использования выражений (29) и (30) с учетом (37) найдем

$$t_{11}(E) = t(E) \frac{E - \mathcal{E}_1^0}{E - \mathcal{E}_1^R + i\Gamma_1}, \quad (42)$$

где введены действительные параметры резонанса

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^0 &= \mathcal{E}_1 + Q_{11}, \quad \mathcal{E}_1^R = \mathcal{E}_1 + Q_{11} + \Delta_{11}, \\ \Delta_{11} &= \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_1|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{r}{t} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Gamma_1 = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_1|^2. \quad (44)$$

Как следует из (42), амплитуда прохождения, а следовательно, и прозрачность имеют структуру резонанса Фано: на потенциальном фоне, определяемом амплитудой $t(E)$, при энергии равной \mathcal{E}_1^R имеется пик шириной Γ_1 и нуль при энергии \mathcal{E}_1^0 . Отметим, что ширина пика определяется матричным элементом, связывающим локализованное состояние с континуумом состояний зоны 1.

В том случае, когда в симметричной яме имеются два уровня, возможно взаимодействие уровней только за счет виртуальных переходов в континуум. Амплитуда прозрачности теперь приобретает вид

$$t_{11}(E) = t(E) \frac{(E - \mathcal{E}_1^0)(E - \mathcal{E}_2^0) + \gamma_1 \gamma_2}{(E - \mathcal{E}_1^R + i\Gamma_1)(E - \mathcal{E}_2^R + i\Gamma_2)}, \quad (45)$$

где

$$\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1 + Q_{11}, \quad \mathcal{E}_2^0 = \mathcal{E}_2 + Q_{22},$$

$$\gamma_1 = \Gamma_1 + \Delta_{11}, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 + \Delta_{22},$$

$$\Delta_{11} = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_1|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{r}{t} \right),$$

$$\Delta_{22} = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_2|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{r}{t} \right),$$

$$\Gamma_1 = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_1|^2, \quad \Gamma_2 = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_2|^2,$$

$$\mathcal{E}_1^R = \mathcal{E}_1 + Q_{11} + \Delta_{11}, \quad \mathcal{E}_2^R = \mathcal{E}_2 + Q_{22} + \Delta_{22}.$$

Видно, что «затравочные» уровни непосредственно не взаимодействуют ($U_{12} = 0$), но они связаны матричным элементом, описывающим переход с локализованного уровня в зону 1. Это приводит к тому, что положения двух имеющихся на действительной оси энергии нулей зависят от параметра связи локализованных состояний с континуумом. Амплитуда рассеяния имеет также два полюса. Таким образом, резонансы Фано могут эффективно взаимодействовать. Ниже покажем, что это может привести к ряду интересных следствий.

В случае трех уровней возможно как взаимодействие уровней с континуумом, так и их непосредственное взаимодействие, поскольку теперь отличен от нуля матричный элемент между состояниями с одинаковой четностью, т. е. $U_{13} \neq 0$. Амплитуда прозрачности записывается в виде

$$t_{11}(E) = t(E) \left(\frac{\mathcal{N}_{13}(E)}{\mathcal{D}_{13}(E)} - \frac{mF_2^2}{ik_1 \hbar^2 t(E) (E - \mathcal{E}_2^R + i\Gamma_2)} \right), \quad (46)$$

где

$$\mathcal{N}_{13}(E) = (E - \mathcal{E}_1^0)(E - \mathcal{E}_3^0) - Q_{13}^2, \\ \mathcal{D}_{13}(E) = \mathcal{N}_{13}(E) + \mathcal{S}_{13}(E),$$

$$\mathcal{S}_{13}(E) = -\frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} \times \\ \times (2Q_{13}F_1F_3 + (E - \mathcal{E}_3^0)F_1^3 + (E - \mathcal{E}_1^0)F_3^2),$$

$$\mathcal{E}_2^R = \mathcal{E}_1 + Q_{22} + \Delta_{22}, \quad \Delta_{22} = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_2|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{r}{t} \right),$$

$$\Gamma_2 = \frac{m}{\hbar^2 k_1} |F_2|^2.$$

Нетрудно показать, что выражение в числителе (46), которое можно переписать как

$$\mathcal{N}(E) = (E - \mathcal{E}_2^0) \mathcal{N}_{13}(E) - \frac{m}{\hbar^2 k_1 t} F_2^2 \mathcal{S}_{13}(E),$$

есть действительная функция, имеющая три нуля в рассматриваемом интервале энергии, т. е. вблизи трех соответствующих уровней ямы.

Наконец, приведем выражение для амплитуды, когда в яме имеются четыре уровня. В этом случае можно записать

$$t_{11}(E) = t(E) \left(\frac{\mathcal{N}_{13}(E)\mathcal{N}_{24}(E) - \mathcal{S}_{13}(E)\mathcal{S}_{24}(E)}{\mathcal{D}_{13}(E)\mathcal{D}_{24}(E)} \right), \quad (47)$$

где входящие в (47) выражения устроены вполне аналогично рассмотренным выше случаям взаимодействия пар резонансов. Как видно, резонансы напрямую взаимодействуют попарно. Нетрудно убедиться в действительности функции

$$\mathcal{N}(E) = \mathcal{N}_{13}(E)\mathcal{N}_{24}(E) - \mathcal{S}_{13}(E)\mathcal{S}_{24}(E)$$

и найти четыре действительных нуля. При этом полюсная функция $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D}_{13}(E)\mathcal{D}_{24}(E)$ определяет две пары полюсов.

Фактический расчет матрицы рассеяния в резонансном приближении нетрудно выполнить численными методами для любой примеси. Для этого необходимо построить локализованные состояния в одномерной яме $V_{22}(x)$ и состояния рассеяния в яме $V_{11}(x)$. Затем нужно найти матричные элементы и решить линейную систему (25). Полученное выражение позволяет исследовать зависимость прозрачности от параметров потенциала рассеяния. Результаты таких расчетов будут приведены ниже.

4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ

Теперь используем общие выражения, полученные выше для амплитуды рассеяния в резонансном приближении, чтобы исследовать интересные интерференционные эффекты в электронных волноводах с рассеивателями различного типа.

А. Уединенный резонанс

Для начала изучим резонанс в случае примеси, которая имеет конечный поперечный размер, при этом ее размер вдоль канала считаем малым по сравнению с длиной волны электрона (см. рис. 3а). Матричные элементы потенциала определяются выражением

$$V_{nn'}(x) = -\frac{\hbar^2}{m} v_{nn'} \delta(x), \quad (48)$$

где $v_{nn'} > 0$. В этом случае от подзоны $n = 2$ отщепляется один уровень, который будет взаимодействовать с состояниями подзоны $n = 1$. Решение уравнения (10) может дать только одно связанное состояние в энергетическом интервале $E_1 < E < E_2$:

$$\mathcal{E}_1 = E_2 - \frac{\hbar^2 v_{22}^2}{2m} \quad (49)$$

с волновой функцией

$$u_1(x) = \sqrt{v_{22}} \exp(-v_{22}|x|). \quad (50)$$

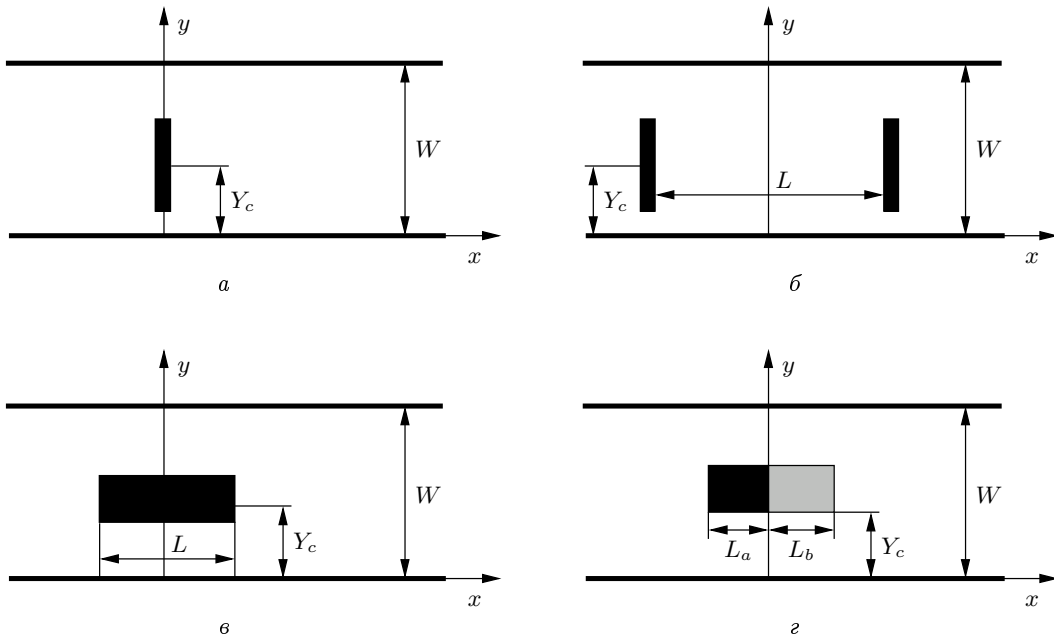


Рис. 3. Модели искусственных примесей (квантовых точек)

Амплитуда рассеяния $t \equiv t(E)$ находится решением (20); ее можно записать в виде

$$t(E) = \frac{ik_1}{ik_1 + v_{11}}. \quad (51)$$

При этом $t(E)$ является монотонной функцией энергии, поскольку ее полюс лежит вне интервала $E_1 < E < E_2$. Матричные элементы, определяющие резонансную структуру t_{11} , равны

$$F_1^2 = \frac{\hbar^2 v_{12}^2 v_{22} t}{m}, \quad U_{11} = \frac{\hbar^2 v_{12}^2 v_{22} t}{imk_1}. \quad (52)$$

В результате подстановки полученных выражений в (29) получим

$$\mathcal{N}(E) = E - \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{D}(E) = E - (\mathcal{E}_1 + \Delta_1) + i\Gamma_1, \quad (53)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\hbar^2 v_{12}^2 v_{22} v_{11}}{m(k_1^2 + v_{11}^2)}, \quad \Gamma_1 = \frac{\hbar^2 v_{12}^2 v_{22} k_1}{m(k_1^2 + v_{11}^2)}. \quad (54)$$

Подчеркнем, что именно конфигурационное взаимодействие уровня в яме $V_{22}(x)$ с состоянием непрерывного спектра подзоны $n = 1$ приводит к возникновению асимметричного резонанса в прозрачности.

Полезно сопоставить полученное выражение для амплитуды прохождения в резонансном приближении с выражением, которое получается путем точно-

го решения уравнений (8) и (9) для потенциала (48). Нетрудно получить

$$t_{11}(E) = \frac{ik_1(ik_2 + v_{22})}{(ik_1 + v_{11})(ik_2 + v_{22}) - v_{12}^2}. \quad (55)$$

Формально это выражение отличается от выражения (29) с $\mathcal{N}(E)$ и $\mathcal{D}(E)$, определяемыми (53), однако оно может быть приведено к такому же виду, если выполнить разложение числителя и знаменателя $t_{11}(E)$ соответственно вблизи нуля и полюса и опустить малые нерезонансные слагаемые. Полученный результат демонстрирует тот очевидный факт, что резонансное приближение правильно передает структуру прозрачности в интервале энергий $E_1 < E < E_2$.

В. Интерференция резонансной пары

Более интересные интерференционные эффекты возникают в том случае, когда возможно взаимодействие резонансов. Как известно, резонансы Брейта-Вигнера при взаимодействии отталкиваются, тогда как для резонансов Фано возможно новое явление, которое ранее было названо коллапсом резонансов [23]. В рамках развитой выше теории исследуем коллапс резонансов на примере двух ям (см. рис. 3б), каждая из которых описывается матрицей типа (48). Для этого нам потребуются явные выражения для соответствующих матричных элементов.

Матричные элементы $V_{n,n'}(x)$ для двухъямной системы определяются выражением

$$V_{n,n'}(x) = -\frac{\hbar^2}{m} v_{n,n'} \left(\delta \left(x - \frac{L}{2} \right) + \delta \left(x + \frac{L}{2} \right) \right). \quad (56)$$

В рассматриваемом случае четность сохраняется и можно по отдельности рассмотреть четные и нечетные состояния рассеяния. Решая (10) для четных состояний, находим

$$u_s(x) = \begin{cases} a_s \operatorname{ch}(|k_2|x), & |x| < L/2, \\ b_s e^{-|k_2||x|}, & |x| > L/2, \end{cases} \quad (57)$$

где a_s и b_s — константы, которые определяются граничными условиями и нормировкой. Условие существования симметричного уровня с энергией \mathcal{E}_s , лежащего ниже E_2 , гласит

$$\operatorname{th}(|\theta_2|) = \frac{2v_{22}L}{|\theta_2|} - 1. \quad (58)$$

Аналогично может быть найдена энергия нечетного состояния \mathcal{E}_s (этот уровень существует только при определенных параметрах системы). Столь же просто решить задачу рассеяния в поле двух ям, т. е. получить амплитуды волн в канале $n = 1$. Нам потребуются в дальнейшем только амплитуды прохождения и отражения, которые имеют вид

$$t = \frac{k_1^2}{e^{-2i\theta_1} (k_1 + iv_{11})^2 + e^{2i\theta_1} v_{11}^2}, \quad (59)$$

$$r = -1 + \frac{t}{k_1} \left((k_1 + iv_{11}) e^{-2i\theta_1} + iv_{11} e^{2i\theta_1} \right).$$

Легко видеть, что для рассматриваемого потенциала все матричные элементы, определяющие резонансную амплитуду рассеяния, выражаются через r , t и функции связанных состояний (приведем явное выражение только для симметричных состояний):

$$F_s = -\frac{\hbar^2 v_{12} u_s(L/2)}{m} (1 + r + t), \quad R_s = F_s, \quad (60)$$

$$U_{ss} = 2 \frac{\hbar^2 v_{12}^2 u_s^2(L/2)}{m i k_1} (1 + r + t). \quad (61)$$

В результате вычисления резонансной амплитуды прохождения получим

$$t_{11}(E) = t \left\{ 1 + \frac{m}{i k_1 \hbar^2 t} \left(\frac{F_s^2}{E - \mathcal{E}_s - U_{ss}} - \frac{F_a^2}{E - \mathcal{E}_a - U_{aa}} \right) \right\}. \quad (62)$$

С помощью явных выражений для r и t выделим действительные и мнимые части у матричных элементов U_{ss} симметричного состояния:

$$U_{ss} = \Delta_s - i\Gamma_s, \quad (63)$$

$$\Delta_s = 4 \frac{\hbar^2 v_{12}^2 u_s^2(L/2)}{m} \times \frac{(k_1 \sin \theta_1 + 2v_{11} \cos \theta_1) \cos \theta_1}{(k_1 \sin \theta_1 + 2v_{11} \cos \theta_1)^2 + k_1^2 \cos^2 \theta_1},$$

$$\Gamma_s = 4 \frac{\hbar^2 v_{12}^2 u_s^2(L/2)}{m} \times \frac{k_1 \cos^2 \theta_1}{(k_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2v_{11} \cos \theta_1)^2 + k_1^2 \cos^2 \theta_1}.$$

Аналогично для нечетного состояния

$$U_{aa} = \Delta_a - i\Gamma_a, \quad (64)$$

$$\Delta_a = -4 \frac{\hbar^2 v_{12}^2 u_a^2(L/2)}{m} \times \frac{(k_1 \cos \theta_1 - 2v_{11} \sin \theta_1) \sin \theta_1}{(k_1^2 \cos^2 \theta_1 - 2v_{11} \sin \theta_1)^2 + k_1^2 \sin^2 \theta_1},$$

$$\Gamma_a = 4 \frac{\hbar^2 v_{12}^2 u_a^2(L/2)}{m} \times \frac{k_1 \sin^2 \theta_1}{(k_1^2 \cos^2 \theta_1 - 2v_{11} \sin \theta_1)^2 + k_1^2 \sin^2 \theta_1}.$$

Следовательно, полюсная часть амплитуды рассеяния может быть записана как

$$\mathcal{D}(E) = (E - (\mathcal{E}_s + \Delta_s) + i\Gamma_s)(E - (\mathcal{E}_a + \Delta_a) + i\Gamma_a). \quad (65)$$

Выражение, стоящее в числителе амплитуды прохождения и определяющее ее нули, имеет вид

$$\mathcal{N}(E) = (E - \mathcal{E}_s)(E - \mathcal{E}_a) - 4 \frac{\hbar^2 v_{12}^2}{m k_1} \left((E - \mathcal{E}_a) u_s^2 \left(\frac{L}{2} \right) - (E - \mathcal{E}_s) u_a^2 \left(\frac{L}{2} \right) \right) \times \sin \theta_1 \cos \theta_1. \quad (66)$$

Важное наблюдение заключается в том, что характеристики резонансов суть осциллирующие функции параметров системы. Будем менять расстояние между ямами. В этом случае одна из ширин, например ширина симметричного резонанса Γ_s , может обратиться в нуль. При этом произойдет схлопывание (коллапс) резонанса. Из (63) следует, что для этого должно выполняться условие

$$\cos \theta_1 = 0. \quad (67)$$

При выполнении условия (67) полюс перемещается на действительную ось, а его энергия будет в точности совпадать с энергией нуля.

Таким образом, чтобы в данной системе имел место коллапс резонансов, необходимо обращение в нуль матричных элементов F_s или F_a . Подробнее обсудим, как это может произойти, на примере F_s . Волновую функцию $\chi^+(x)$ представим в виде суперпозиции симметричной и антисимметричной составляющих:

$$\chi^+(x) = \chi_s^+(x) + \chi_a^+(x). \quad (68)$$

Согласно (17) матричный элемент можно записать в виде

$$F_s = \int_{-\infty}^{\infty} dx u_s(x) V_{21}(x) \chi_s^+(x). \quad (69)$$

В случае точечных потенциалов вклад в интеграл возникает от окрестностей точек $x = \pm L/2$. В открытом канале в качестве волновой функции возьмем $\chi_s^+(x) = a \cos k_1 x$. Матричный элемент может обратиться в нуль, если будет выполнено условие $\chi_s^+(\pm L/2) = a \cos k_1 L/2 = 0$. Это означает, что узлы волны в канале рассеяния должны будут в точности совпасть с положением примесей. Очевидно, что для этого необходимо одновременное выполнение условий (58) и (67). Такое может произойти, если те уровни в яме $V_{22}(x)$, которые возникают ниже E_2 , будут пересекаться с виртуальными уровнями в прямоугольной яме шириной L . Об этом свидетельствует выражение (67).

С. Интерференция резонансных состояний

Теперь проанализируем случай, когда потенциальная яма может порождать большое число резонансов и изучим их взаимодействие. Следует ожидать, что здесь возможно как нетривиальное взаимодействие между уровнями, так и нетривиальное поведение асимметричных резонансов [23]. Рассмотрим двумерную примесь в канале (см. рис. 3б). Потенциал примеси можно записать в виде

$$V(x, y - Y_s) = -V_{att} \vartheta \left(\frac{L}{2} - |x| \right) \vartheta \left(\frac{W_{att}}{2} - |y - Y_s| \right), \quad (70)$$

где $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$; $X_s = 0$ и Y_s — координаты центра ямы, V_{att} — глубина ямы, W_{att} — ее поперечный размер. Матричные элементы $V_{nn'}$ легко могут быть найдены в явном виде для такой ямы. Будем интересоваться прозрачностью электронного волновода, содержащего данный рассеиватель. Отметим, что несмотря на кажущуюся просто-

ту, данная задача не имеет точного решения. Действуя согласно предложенной выше схеме, найдем сначала решения для уровней в яме $V_{22}(x)$. Уровни для симметричных и антисимметричных состояний находятся путем решения трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\kappa}{q_2}, \quad \operatorname{ctg} \theta_2 = -\frac{\kappa}{q_2}, \quad (71)$$

где

$$q_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - E_2 + |V_{22}|)}, \quad \theta_2 = \frac{L}{2} q_2, \\ \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E_2 - E)}.$$

Число уровней в яме определяется параметром $v = L\sqrt{m|V_{22}|/2\hbar^2}$. Нетрудно получить соответствующие уровням волновые функции $u_j^s(x)$ и $u_j^a(x)$. Например, для четных состояний

$$u_j^s(x) = \begin{cases} A_j^s \cos(q_2 x), & |x| < L/2, \\ B_j^s e^{-\kappa|x|}, & |x| > L/2, \end{cases} \quad (72)$$

где A_j^s и B_j^s — константы, которые определяются граничными условиями и нормировкой (для нечетных состояний они обозначаются A_j^a и B_j^a). Решение задачи рассеяния дает

$$t = \frac{ik_1}{(q_1 \sin \theta_1 + ik_1 \cos \theta_1)(-q_1 \cos \theta_1 + ik_1 \sin \theta_1)}, \quad (73)$$

где q_1 — волновой вектор частицы в яме:

$$q_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - E_1 + |V_{11}|)}, \quad \theta_1 = \frac{L}{2} q_1,$$

а k_1 — волновой вектор в канале рассеяния 1:

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - E_1)}.$$

Как следует из (73), амплитуда потенциального рассеяния имеет полюсную структуру, обусловленную отражениями на краях ямы. Такие полюсы соответствуют резонансам Брейта–Вигнера.

Приведем выражения для матричных элементов, определяющих резонансную структуру амплитуды рассеяния:

$$F_j^s(E) = 2V_{12}A_j^s C f_j^s(E), \quad R_j^s(E) = F_j^s(E), \\ F_j^a(E) = 2V_{12}A_j^a i S f_j^a(E), \quad R_j^a(E) = -F_j^a(E), \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \left(\cos \theta_1 - i \frac{k_1}{q_1} \sin \theta_1 \right) t, \\ S &= \left(-i \sin \theta_1 + \frac{k_1}{q_1} \cos \theta_1 \right) t, \end{aligned} \quad (75)$$

причем C и S связаны соотношением

$$CS = \frac{k_1}{q_1} t. \quad (76)$$

Мы ввели также функции

$$\begin{aligned} f_j^s(E) &= \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \times \\ &\times \left(q_2 \sin \frac{q_2 L}{2} \cos \frac{q_1 L}{2} - q_1 \cos \frac{q_2 L}{2} \sin \frac{q_1 L}{2} \right), \\ f_j^a(E) &= \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \times \\ &\times \left(q_2 \sin \frac{q_2 L}{2} \cos \frac{q_1 L}{2} + q_1 \cos \frac{q_2 L}{2} \sin \frac{q_1 L}{2} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Матричные элементы $U_{jj'}$ представим в виде

$$U_{jj'} = \frac{m}{ik_1 \hbar^2 t} F_j R_{j'} + Q_{jj'}, \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{jj'} &= \frac{2mV_{12}^2}{q_1 \hbar^2} \times \\ &\times \int_{-L/2}^{L/2} u_j(x) \int_x^{L/2} u_{j'}(x') \sin q(x-x'), \end{aligned} \quad (79)$$

причем $\text{Im} Q_{jj'} = 0$. В случае симметричной ямы матричные элементы $U_{jj'}$ между состояниями с различной четностью равны нулю. Удобно ввести матричные элементы $U_{ss'}$ и $U_{aa'}$, соответственно связывающие пары симметричных (ss') и антисимметричных (aa') состояний:

$$\begin{aligned} U_{ss'} &= \frac{mV_{12}^2 A_s A_{s'}}{ik_1 \hbar^2 t} C^2 f_s f_{s'} + Q_{ss'}, \\ U_{aa'} &= \frac{mV_{12}^2 A_a A_{a'}}{ik_1 \hbar^2 t} S^2 f_a f_{a'} + Q_{aa'}. \end{aligned} \quad (80)$$

Для небольшого числа резонансов выражение для амплитуды прохождения было получено в общем виде в разд. 2. Если параметр v таков, что $v < \pi/2$, то в яме имеется один уровень и, следовательно, один резонанс Фано в прозрачности (42). При этом в данном интервале параметры резонанса монотонно зависят от ширины ямы. При $\pi/2 < v < \pi$ в прозрачности

имеются два резонанса Фано (45), однако в этом интервале параметры резонансов уже могут осциллировать, поскольку в данном случае

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^0 &= \mathcal{E}_1 + Q_{11}, \quad \mathcal{E}_2^0 = \mathcal{E}_2 + Q_{22}, \\ \mathcal{E}_1^R &= \mathcal{E}_1 + Q_{11} + \frac{mV_{12}^2 A_1^2}{k_1 \hbar^2} f_1^2(E) \text{Im} \left(\frac{C^2}{t} \right), \\ \mathcal{E}_2^R &= \mathcal{E}_2 + Q_{22} + \frac{mV_{12}^2 A_2^2}{k_1 \hbar^2} f_2^2(E) \text{Im} \left(\frac{C^2}{t} \right), \\ \gamma_{12}^2 &= \left(\frac{mV_{12}^2}{\hbar^2} \right)^2 q_1^2 A_1^2 A_2^2 f_1^2 f_2^2, \end{aligned} \quad (81)$$

а ширины резонансов определяются выражением

$$\Gamma_j = \frac{mV_{12}^2 A_j^2}{k_1 \hbar^2} f_j^2(E) \text{Re} \left(\frac{C^2}{t} \right), \quad j = 1, 2. \quad (82)$$

При $\pi < v < 3\pi/2$ появляются три резонанса Фано, при $3\pi/2 < v < 2\pi$ будут существовать четыре резонанса Фано и т. д.

Приведем результаты численных расчетов для случая двумерной примеси прямоугольной формы (рис. 3б). Фиксируем глубину ямы и будем менять ее длину L . На рис. 4 изображена вероятность прохождения через волновод с протяженной симметричной притягивающей примесью как функция энергии E (E измеряется в единицах $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mW^2$, W — ширина волновода) для различных параметров L . Можно видеть, что при $L = 0.7W$, когда имеется один уровень в потенциале $V_{22}(x)$, в прозрачности имеется один резонанс Фано. Для случаев $L = 1.3W$, $L = 2.7W$, $L = 3.6W$ видны соответственно два, три и четыре резонанса Фано. Проведенный выше анализ показывает, что изменяя параметры примеси (в данном случае L), мы изменяем число уровней и число резонансов в прозрачности. При этом нули амплитуды прохождения всегда лежат на действительной оси, тогда как полюсы лежат в комплексной плоскости. Видна также эволюция резонансов Брейта–Вигнера, которые возникают вследствие интерференции волн в канале $n = 1$. Причем при выбранных параметрах они лежат далеко в комплексной плоскости. Когда резонансы Брейта–Вигнера пересекают резонансы Фано, происходит их эффективное взаимодействие.

Обсудим теперь возможность коллапса резонансов в данной системе. Будем изучать зависимость характеристик резонансов от параметров ямы, например, от ее ширины L . Анализ (82) показывает, что функция $\text{Re}(C^2/t)$ не может обращаться в нуль. Нетрудно убедиться, что только функции $f_j(E)$ могут иметь нули, а это происходит тогда, когда об-

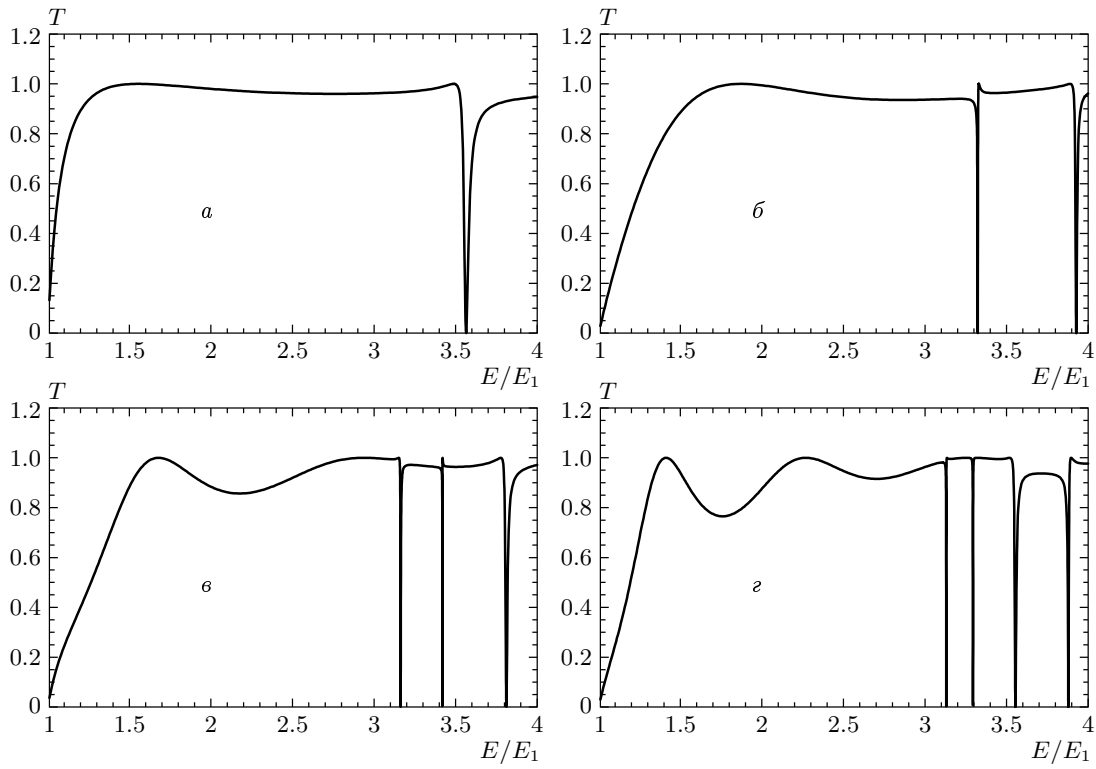


Рис. 4. Резонансная структура проводимости волновода с протяженной примесью при различных L : $0.7W$, $1.3W$, $2.7W$ и $3.6W$ (за единицу измерения энергии взята величина $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mW^2$) и следующих параметрах примеси: $V_{11} = 1.515 E_1$, $V_{12} = 0.521 E_1$, $V_{22} = 1.0 E_1$

ращаются в нуль матричные элементы F_s или F_a . Рассмотрим подробнее матричный элемент

$$F_s = \int_{-\infty}^{\infty} dx u_s(x) V_{21}(x) \chi_s^+(x) = V_{12} A_s C \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos q_2 x \cos q_1 x, \quad (83)$$

где было использовано $\chi_s^+(x) = C \cos q_1 x$ для волновой функции в области ямы. Из уравнения (83) следует, что интеграл может обратиться в нуль, если $\chi_s^+(x)$ изменяет знак и положительный вклад в интеграл в точности компенсируется отрицательным. Это возможно, если соответственно для четных и нечетных уровней имеет место одно из равенств (71). Таким образом, для четных состояний условия коллапса имеют место при одновременном выполнении условий

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\kappa}{q_2}, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\kappa}{q_1}, \quad (84)$$

а для нечетных

$$\operatorname{ctg} \theta_2 = -\frac{\kappa}{q_2}, \quad \operatorname{ctg} \theta_1 = -\frac{\kappa}{q_1}. \quad (85)$$

Остановимся подробнее на смысле полученных выражений в случае четных состояний. Будем отсчитывать энергию от E_2 . Тогда первое равенство в (84) можно интерпретировать как условие существования уровней в яме глубиной $|V_{22}|$, а второе равенство — как условие существования уровней в яме глубиной $E_2 - E_1 + |V_{11}|$ (показана штриховой линией на рис. 5). Увеличим теперь размер ямы L . При изменении параметра L уровни более глубокой ямы будут более резко опускаться вниз и пересекать уровни более мелкой. Пересечение уровней приводит к коллапсу резонансов. На рис. 6 представлено графическое решение уравнений для двухпараметрической спектральной задачи (84) и (85). Пересечение непрерывных кривых позволяет определить критические параметры (E_i^c, L_i^c) для симметричных состояний ($i = 1, 2, \dots$). Аналогично, пересечения штриховых кривых дают критические параметры асимметричных состояний системы. Например, при выбранных выше параметрах приме-

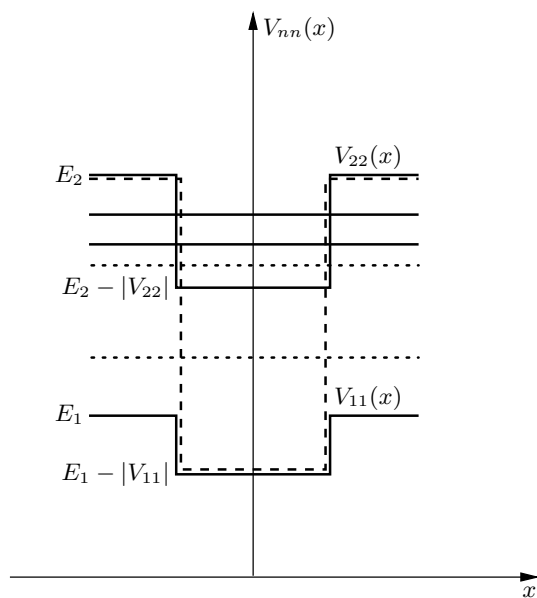


Рис. 5. Схема пересечения уровней в эффективных потенциальных ямах $|V_{22}|$ и $E_2 - E_1 + |V_{11}|$

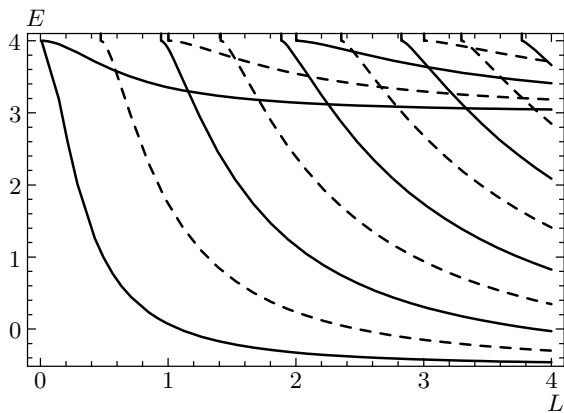


Рис. 6. Графическое решение уравнений для двухпараметрической задачи (84) и (85). Пересечение непрерывных кривых дает критические параметры симметричных состояний; пересечения штриховых — критические параметры асимметричных состояний системы

си приведем несколько пар критических параметров для симметричных состояний: $(1.1562 W, 3.2987 E_1)$, $(2.2512 W, 3.1188 E_1)$, $(3.3310 W, 3.0633 E_1)$ и т. д. На рис. 7 изображена прозрачность как функция энергии для трех продольных размеров примеси L : $1.95 W$, $L_2^c = 2.25116 W$ и $2.45 W$. Как видно на рисунке, при прохождении L критического значения происходит изменение знака матричного элемента взаимодействия состояний, благодаря чему можно

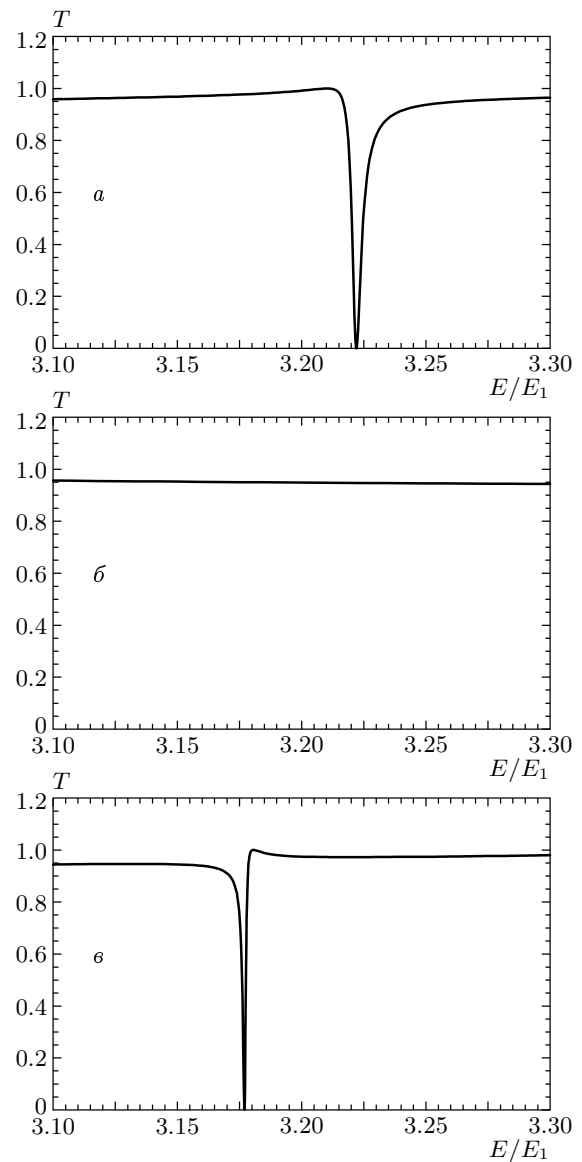


Рис. 7. Свинг резонанса Фано, соответствующий изменению положений «нуль-полос» на «полос-нуль» при трех значениях параметра L : $1.95 W$, $L_2^c = 2.25116 W$ и $2.45 W$

наблюдать коллапс и свинг (изменение положений «нуль-полос» на «полос-нуль») резонансов Фано.

Д. Резонансы в волноводе с несимметричной примесью

Исследуем теперь случай, когда потенциал примеси не обладает четностью относительно преобразования $x \rightarrow -x$: $V(x, y) \neq V(-x, y)$. Для определенности рассмотрим двумерную двухкомпонент-

ную примесь (см. рис. 4*z*), потенциальное поле которой возьмем в виде

$$V(x, y - Y_s) = \begin{cases} -V_a \vartheta(L_a + x) \vartheta\left(\frac{W_{att}}{2} - |y - Y_s|\right), & x < 0, \\ -V_b \vartheta(L_b - x) \vartheta\left(\frac{W_{att}}{2} - |y - Y_s|\right), & x > 0. \end{cases} \quad (86)$$

Положение уровней в яме $V_{22}(x)$ в данном случае зависит от соотношения между величинами V_a и V_b

в (86) (для определенности положим $|V_a| > |V_b|$). Энергетические уровни находятся из уравнения

$$(1 + \beta \operatorname{tg} \theta_{2a})(\alpha - \operatorname{tg} \theta_{2b}) = (1 + \alpha \operatorname{tg} \theta_{2b})(\gamma \operatorname{tg} \theta_{2a} - \alpha), \quad (87)$$

где $\alpha = \kappa/q_{2b}$, $\beta = \kappa/q_{2a}$, $\gamma = q_{2a}/q_{2b}$, $\theta_{2a} = q_{2a}L_a$, $\theta_{2b} = q_{2b}L_b$, $L = L_a + L_b$. Коэффициент прохождения частицы над ямой $V_{11}(x)$ имеет вид

$$t = \frac{1}{\cos \theta_{1a} \left(\cos \theta_{1b} - \frac{i}{2}(\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^{-1}) \sin \theta_{1b} \right) - \frac{i}{2} \sin \theta_{1a} (\cos \theta_{1b} (\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^{-1}) - i(\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}^{-1}) \sin \theta_{1b})}, \quad (88)$$

где $\tilde{\alpha} = k_1/q_{1b}$, $\tilde{\beta} = k_1/q_{1a}$, $\tilde{\gamma} = q_{1a}/q_{1b}$, $\theta_{1a} = q_{1a}L_a$, $\theta_{1b} = q_{1b}L_b$, $q_{1a,b} = \sqrt{2m(E - E_1 + |V_{11,a,b}|)}/\hbar$. Отметим, что при рассеянии в несимметричном поле $V_{11}(x)$ прозрачность, обусловленная потенциальным рассеянием (88), также имеет ряд чередующихся максимумов и минимумов, но в отличие от симметричной задачи значения амплитуды прохождения в максимумах могут быть меньше единицы.

Чтобы найти резонансный вклад в амплитуду прохождения, необходимо вычислить матричные элементы F_j , R_j и $U_{jj'}$, учитывая, что теперь $V_{12}(x)$ — ступенчатая функция, поэтому интегрирование ведется по двум областям: $(-L_a, 0)$ и $(0, L_b)$. Матричные элементы $U_{jj'}$ по-прежнему можно записать в виде (33), где $Q_{jj'}$ теперь вычисляется по формуле

$$Q_{jj'} = -\frac{2m}{k_1 \hbar^2} \int_{-L_a}^0 dx V_{12}(x) u_j(x) \times \left(\int_x^0 dx' V_{12}(x') u_{j'}(x') \sin q_{1a}(x - x') + \int_0^{L_b} dx' V_{12}(x') u_{j'}(x') \sin q_{1b}(x - x') \right) + \frac{2m}{k_1 \hbar^2} \int_0^{L_b} dx V_{12}(x) u_j(x) \times \int_x^{L_b} dx' V_{21}(x') u_{j'}(x') \sin q_{1b}(x - x'). \quad (89)$$

Видно, что утверждение $\operatorname{Im} Q_{jj'} = 0$ сохраняется и для несимметричной ямы, однако в общем случае матрица $U_{jj'}$ может содержать ненулевые недиаго-

нальные элементы. Выясним, как это повлияет на структуру резонансов.

Понятно, что в случае, когда яма $V_{22}(x)$ содержит один уровень, выражение для прозрачности канала формально совпадает с (42), однако параметры резонанса зависят от вида ямы. Если в яме $V_{22}(x)$ имеются два уровня, то

$$t_{11}(E) = t(E) \frac{(E - \mathcal{E}_1^0)(E - \mathcal{E}_2^0) - Q_{12}Q_{21}}{(E - \mathcal{E}_1 - U_{11})(E - \mathcal{E}_2 - U_{22}) - U_{12}U_{12}}, \quad (90)$$

где

$$\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1 + Q_{11}, \quad \mathcal{E}_2^0 = \mathcal{E}_2 + Q_{22}.$$

Нетрудно видеть, что нули резонанса также лежат на действительной оси энергии. Как отмечалось выше, знаменатель (90) можно представить в виде $\mathcal{D}(E) = (E - \tilde{\mathcal{E}}_1)(E - \tilde{\mathcal{E}}_2)$, где положения полюсов $\tilde{\mathcal{E}}_1$ и $\tilde{\mathcal{E}}_2$ определяются решениями

$$(\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E}_1 - U_{11})(\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E}_2 - U_{22}) - U_{12}U_{12} = 0.$$

Если считать, что параметр асимметрии потенциальной ямы $V(x, y)$ мал ($V_b/V_a \approx 1$), то положение полюсов будет определяться согласно

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 \approx \mathcal{E}_1 + U_{11} - \frac{U_{12}^2}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_2 \approx \mathcal{E}_2 + U_{22} + \frac{U_{12}^2}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}.$$

Это означает, что в данном случае имеет место непосредственное взаимодействие резонансов Фано, обусловленное матричным элементом U_{12} . На рис. 8 представлена прозрачность канала с двухкомпонентной примесью (размер примеси $L = L_a + L_b = 1.7W$, $V_b/V_a = 0.5$). Потенциальное рассеяние частицы над

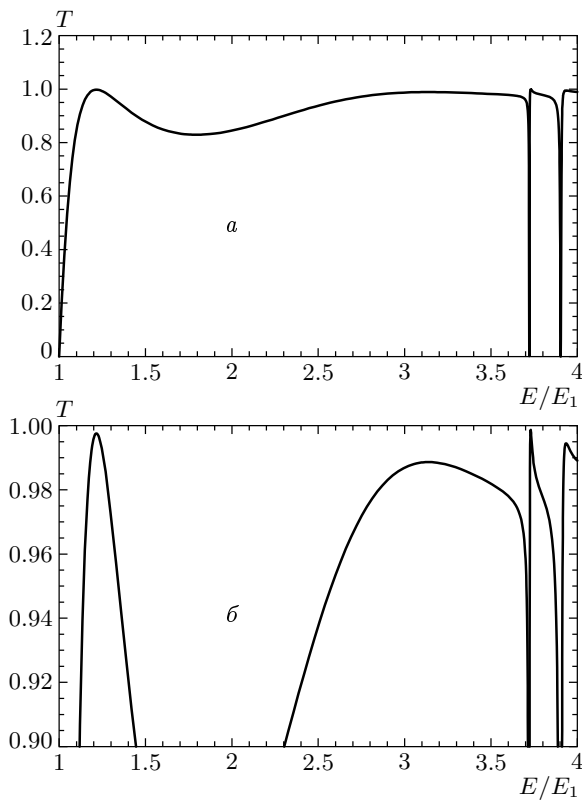


Рис. 8. Прозрачность канала с двухкомпонентной примесью (размер примеси $L = L_a + L_b = 1.7W$, $V_b/V_a = 0.5$). Остальные параметры как на рис. 4

ямой $V_{11}(x)$ дает серию максимумов и минимумов на зависимости T от E (резонансы Брейта–Вигнера), а резонансы Фано связаны с примесными уровнями, отщепившимися от зоны E_2 . Рассмотренный пример показывает, что в отсутствие симметрии структура резонансов Фано не меняется: прозрачность имеет нули на действительной оси и полюсы, соответствующие максимумам прозрачности. Однако максимумы как резонансов Фано, так и резонансов Брейта–Вигнера, становятся меньше единицы, что обусловлено потерей когерентности отражения от краев несимметричной ямы.

Если параметр асимметрии мал, то возможно сужение резонансов, но в случае несимметричной примеси коллапса резонансов не происходит. Расписывая F_1R_1 и F_2R_2 в явном виде по областям $(-L_a, 0)$ и $(0, L_b)$, как это было сделано в случае симметричной примеси, нетрудно убедиться, что в отсутствие четности состояний ширины резонансов Фано не могут точно обращаться в нуль. В этом случае под интегралами будут стоять комплексные функции и для обращения в нуль резонансов Фано необходимо обра-

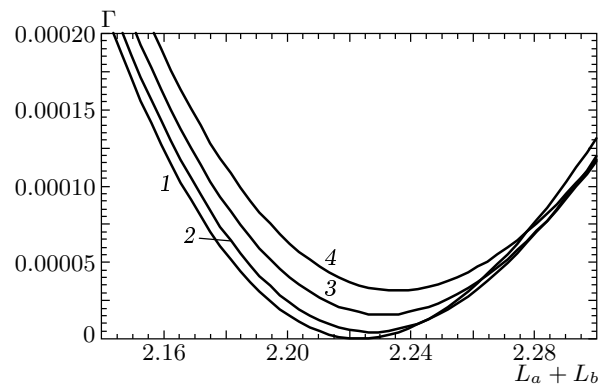


Рис. 9. Зависимости ширины резонанса Фано от параметра $L = L_a + L_b$ при различных параметрах асимметрии примеси V_b/V_a : 1 — $V_b = V_a$, 2 — $V_b = 0.95 V_a$, 3 — $V_b = 0.9 V_a$ и 4 — $V_b = 0.85 V_a$

тить в нуль одновременно действительные и мнимые части матричных элементов, а этого нельзя добиться, имея один свободный параметр (например, продольный размер ямы). Однако, как и в симметричном случае, при изменении параметров примеси может происходить пересечение уровней эффективных ям, которое приводит к свингу резонанса Фано. Отметим, что взаимодействующие состояния в данной системе не имеют определенной четности. На рис. 9 продемонстрированы зависимости ширины резонанса Фано от параметра $L = L_a + L_b$ при различных параметрах асимметрии примеси. На рис. 10 показан свинг резонанса Фано, когда параметр L проходит значение, близкое к критическому для симметричной примеси (параметр асимметрии $V_b/V_a = 0.85$). На рис. 10 видно, что полюс и нуль выделенного резонанса Фано меняются местами при изменении параметра L , при этом ширина резонанса остается конечной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенный подход позволяет исследовать резонансную структуру амплитуды прохождения частицы через электронный волновод, в котором присутствуют притягивающие примеси произвольной формы. Выше показано, что примеси, имеющие конечную протяженность, создают серию квазисвязанных состояний, которые проявляются как резонансно-антирезонансные пары в прозрачности. Приведенные результаты явно демонстрируют, что во всех рассмотренных случаях резонансы Фано обусловлены интерференцией распространяюще-

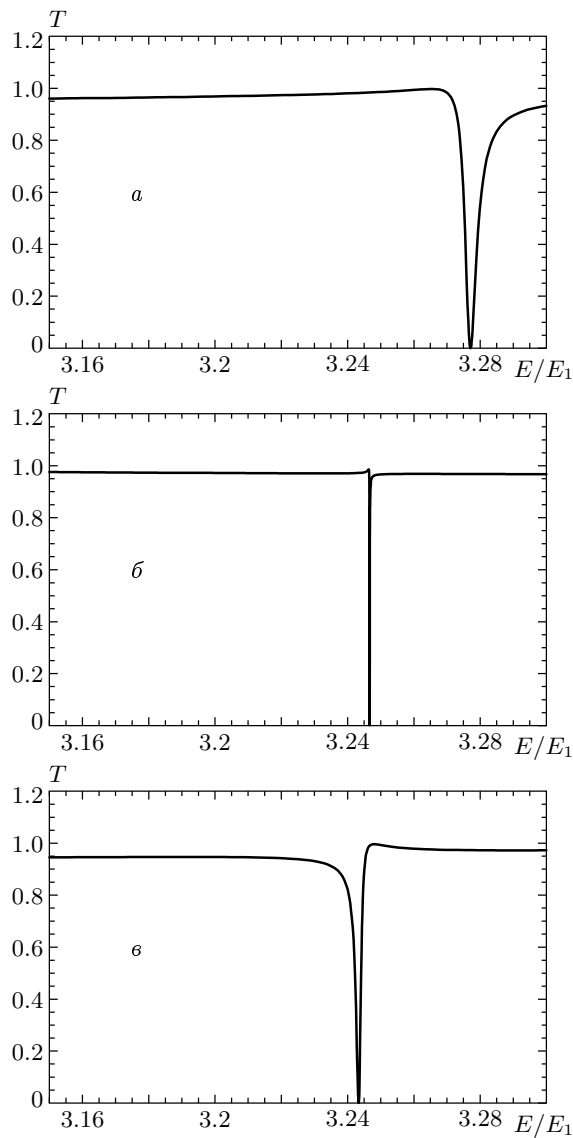


Рис. 10. Свинг резонанса Фано. Параметр асимметрии примеси $V_b/V_a = 0.85$; параметр $L = L_a + L_b$ принимает следующие значения: $1.95 W$ в случае (а), $2.25 W$ в случае (б) и $2.45 W$ в случае (в)

гося электронного состояния с квазисвязанными состояниями. Резонансы Фано имеют универсальную структуру и характеризуются тремя действительными параметрами ($\mathcal{E}^R, \mathcal{E}^0, \Gamma$). При изменении параметров примеси нули и полюсы резонансов движутся в соответствии с изменением положения уровней в яме. В случае симметричной примеси возможно столкновение полюса и нуля, которое приводит к коллапсу и свингу резонанса Фано. Развита теория позволяет изучать взаимодействие асимметричных резонансов в ямах произвольного вида. Предсказан-

ные эффекты могут быть обнаружены в электронных волноводах с искусственными примесями [15].

Отметим также, что предложенный подход позволяет рассматривать задачи о резонансной трансформации волн любой природы, например, электромагнитных или акустических.

Авторы выражают признательность В. А. Волкову, А. А. Горбачевичу, Д. Э. Квону и Ю. А. Романову за внимание к работе и полезные обсуждения. Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-02-16569, 02-02-17495). Один из авторов (Ч. С. К.) признателен Корейскому исследовательскому фонду (the Korea Research Foundation) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Feshbach, *Ann. Phys.* **5**, 357 (1958).
2. H. Feshbach, *Ann. Phys.* **19**, 287 (1962).
3. *Quantum Transport in Ultrasmall Devices*, Vol. 342 of NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics, ed. by D. K. Ferry, H. L. Grubin, C. Jacoboni, and A.-P. Jauho, Plenum, New York (1995).
4. B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker et al., *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
5. D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury et al., *J. Phys.* **21**, L209 (1988).
6. U. Fano, *Phys. Rev.* **104**, 1866 (1961).
7. U. Fano and J. W. Cooper, *Phys. Rev. A* **137**, 1364 (1965).
8. R. K. Adair, C. K. Bockelman, and R. E. Peterson, *Phys. Rev.* **76**, 308 (1949).
9. J. A. Simpson and U. Fano, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 158 (1963).
10. F. Cardeira, T. A. Fjeldly, and M. Cardona, *Phys. Rev. B* **8**, 4734 (1973).
11. J. Feist, F. Capasso, C. Sirtori et al., *Nature (London)* **390**, 589 (1997).
12. H. Schmidt, K. L. Campman, A. C. Gossard, and A. Imamoglu, *Appl. Phys. Lett.* **70**, 3455 (1997).
13. C. P. Holfeld, F. Löser, M. Sudzius et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 874 (1998).
14. О. А. Ткаченко, В. А. Ткаченко, Д. Г. Бакшеев и др., *Письма в ЖЭТФ* **71**, 366 (2000).

-
15. S. Yamada and M. Yamamoto, J. Appl. Phys. **79**, 8391 (1996).
 16. F. H. Mies, Phys. Rev. **175**, 164 (1968).
 17. C. S. Chu and R. S. Sorbello, Phys. Rev. B **40**, 5941 (1989).
 18. P. F. Bagwell, Phys. Rev. B **41**, 10354 (1990).
 19. E. Tekman and S. Ciraci, Phys. Rev. B **42**, 9098 (1990).
 20. S. A. Gurvitz and Y. B. Levinson, Phys. Rev. B **47**, 10578 (1993).
 21. J. U. Nöckel and A. D. Stone, Phys. Rev. B **50**, 17415 (1994).
 22. Ч. С. Ким, А. М. Сатанин, ЖЭТФ **115**, 211 (1999).
 23. C. S. Kim, A. M. Satanin, Y. S. Joe, and R. M. Cosby, Phys. Rev. B **60**, 10962 (1999).
 24. R. Landauer, Phil. Mag. **21**, 863 (1970).
 25. M. Buttiker, Phys. Rev. B **35**, 4123 (1987).
 26. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).