

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАССЕЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

А. А. Пантелеев, Вл. К. Рерих, А. Н. Старостин*

*Государственный научный центр Российской Федерации
Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 13 июня 2002 г.

Разработан новый подход к описанию процессов переноса и рассеяния нестационарного лазерного импульса, основанный на цепочке уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ВВГКУ) для редуцированных матриц плотности. В рамках борновского приближения второго порядка получены системы уравнений для атомной и фотонной матриц плотности и оператора корреляции. Полученная система уравнений описывает процессы вынужденного и спонтанного рассеяния лазерного излучения в оптически тонкой среде, для которой можно пренебречь процессами перерассеяния спонтанного излучения. Предлагаемый подход впервые позволил получить корректные выражения для нестационарных спектров интенсивности резонансной флуоресценции, не дающие отрицательных значений. Показано, что в предельных случаях выражения, полученные для спектров резонансного излучения совпадают с результатами, полученными в рамках теоремы о квантовой регрессии.

PACS: 32.50.+d, 42.50.Hz, 42.50.Ct, 42.50.Lc

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию спектров резонансной флуоресценции, возникающей под действием сильной резонансной лазерной волны, в течение многих лет уделяется большое внимание. Такой интерес обусловлен наличием большого числа интерференционных и нелинейных эффектов, исследование которых важно как с общетеоретической точки зрения, так и с учетом их приложений.

Наиболее простой системой, для которой, однако, можно наблюдать большую часть обнаруженных эффектов, является анализ процессов рассеяния излучения на двухуровневом атоме. Одними из первых эта задача была рассмотрена Вигнером и Вайскопфом [1, 2], которые показали, что при возбуждении двухуровневой системы слабым монохроматическим полем спектр флуоресценции определяется когерентным рэлеевским рассеянием. При этом слабость накачивающего излучения определяется малостью отношения частоты Раби возбуждающего излучения к константе радиационной релаксации или

отстройке от резонанса. В сильных полях к когерентной составляющей рассеянного излучения добавляется спонтанное излучение, имеющее две боковые компоненты, при этом спектр рассеянного излучения принимает хорошо известную форму триплета Моллоу [3]. В работе [3] было показано, что для радиационного режима релаксации атомной системы спектр рассеянного излучения имеет симметричную форму независимо от отстройки возбуждающего поля. Дальнейшие исследования показали, что влияние столкновений может приводить к асимметрии в спектре [4, 5], при этом центр тяжести триплета сдвигается в сторону частоты перехода. Необходимо отметить, что результаты, полученные в работах [3–5], нашли хорошее экспериментальное подтверждение [6–8]. Последующее развитие исследований проходило во многих направлениях и связано с изучением рассеяния бигармонического [9, 10] и полигармонического [11] поля, анализом кооперативных эффектов в плотной среде [12, 13], а также изучением рассеяния излучения в многоуровневых средах [14] и др.

Однако до настоящего времени существенные трудности вызывают анализ нестационарных спек-

*E-mail: vroerich@triniti.ru

тров резонансной флуоресценции среды, возбуждаемой коротким лазерным импульсом, а также исследование спектров с учетом влияния кооперативных полей. В настоящее время существуют два альтернативных подхода. Первый, наиболее широко применяемый подход [3] основан на теореме о квантовой регрессии, (см., например, обзор [15]). В рамках этого подхода утверждается, что при определенных предположениях спектр случайного процесса определяется с помощью фурье-преобразования автокорреляционной функции [15]:

$$G(\omega, t) = 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \sigma^+(t) \sigma^-(t + \tau) \rangle d\tau \right], \quad (1)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает автокорреляционную функцию двух операторов, $\sigma^+(t), \sigma^-(t)$ — соответственно, операторы рождения и уничтожения для атомной системы в гейзенберговском представлении. Явный вид автокорреляционной функции определяется с помощью теоремы о квантовой регрессии. Впервые для расчета спектров спонтанного излучения она была применена в работе Лакса [16]. Необходимо подробно остановиться на условиях и предположениях, при которых такой подход применим [15]: описываемая система должна быть марковской, иначе говоря, дальнейшее поведение системы определяется ее текущим состоянием; система стационарна, т. е. инвариантна по отношению к сдвигу во времени, таким образом, вероятности переходов не должны явно зависеть от времени; система линейна, иначе говоря, отклик системы, находящейся под воздействием внешней силы, должен быть линеен по этой силе; система, по крайней мере с микроскопической точки зрения, должна быть обратима во времени; флуктуация случайной величины идет вокруг равновесного состояния; индивидуальные изменения случайных величин достаточно малы для выполнения условия приближения Фоккера–Планка; флуктуации случайной величины обусловлены действием случайной силы — ланжевеновское приближение.

Дальнейшие исследования позволили ослабить ряд ограничений на свойства системы, при которых подход, основанный на фурье-преобразовании автокорреляционной функции, применим. Однако при этом основной смысл этих ограничений не изменился. А именно, система должна быть марковской и квазистационарной. Иначе говоря, спектр случайного процесса можно определить на временах, много больших, чем время релаксации системы к равновесному состоянию, и изменение действия внешних сил также должно происходить на временах, много

больших времени релаксации к равновесному состоянию. Система должна быть квазилинейной, когда малость нелинейной компоненты позволяет искать решение в виде ряда по теории возмущений.

Необходимо отметить, что для большинства современных приложений в квантовой оптике эти условия, как правило, не выполняются. Длительность лазерных импульсов существенно меньше времени как радиационной релаксации, так и столкновительного затухания. Большинство современных лазеров работает в области параметров $N \gg 1$, где $N = n\lambda_L^3$ — число носителей в объеме порядка λ_L^3 ; $\lambda_L = 2\pi\lambda_L$ — длина волны лазерного излучения, n — концентрация. При этом существенную роль играют кооперативные поля, что нарушает условие линейности рассматриваемых систем. Для мощных лазеров с фемтосекундными импульсами также возможны и эффекты нелинейной динамической релаксации [17], при которых не выполняется условие марковости исследуемых систем. Укажем, что теоретически и экспериментально процессы нелинейной релаксации для фемтосекундных импульсов в полупроводниках исследовались в работах [18–20].

Отметим, что анализ нестационарных спектров резонансной флуоресценции с помощью теоремы о квантовой регрессии проводился с помощью выражения для так называемого «физического спектра» [22–27] и др. Оно было получено в работе [22] и связано с конечной шириной детектора. Заметим, что несовершенство такого подхода понимали сами авторы [23].

Необходимо отметить, что получение спектров спонтанного излучения с помощью теорем о квантовой регрессии имеет и проблемы чисто методологического характера. Анализ спектров происходит «сверху вниз», мы изначально из феноменологических или других соображений постулируем характер процесса, в данном случае — радиационную релаксацию атомных населенностей, и по динамике этого процесса вычисляем спектр спонтанно испущенных фотонов. В рамках такого подхода не очевидна связь исходного гамильтониана, описывающего взаимодействие атома с квантованным полем излучения, с феноменологическими уравнениями для атомных населенностей и константами радиационной релаксации.

Альтернативным подходом к анализу спектров резонансной флуоресценции является подход, основанный на решении уравнений для атомно-фотонной матрицы плотности Скалли–Лэмба [29]. Впервые такой подход для расчета спектров флуоресценции в сильном поле был применен Баклановым [30].

В дальнейшем он был развит Саргентом и соавторами в работах, посвященных многоволновому взаимодействию [31–33]. Также этот аппарат был использован нами для исследования процессов перерасcеяния спонтанного излучения [34], нелинейной динамической релаксации [35], анализа процессов квантовой интерференции [36, 37]. Этот аппарат имеет существенное преимущество по сравнению с теоремой о квантовой регрессии, так как он позволяет согласованно получать константы радиационной релаксации и спектры флуоресценции, не прибегая к дополнительным предположениям [38]. Однако прямое использование аппарата атомно-фотонной матрицы плотности для анализа спектров резонансной флуоресценции от коротких лазерных импульсов приводит к парадоксальным результатам: существуют области спектра, для которых интенсивность флуоресценции отрицательна. Также необходимо отметить, что введение кооперативного поля требует использования феноменологической процедуры.

Основной целью представленной работы является попытка устранить возникающие противоречия при исследовании нестационарных спектров резонансной флуоресценции и создание единого аппарата, описывающего процессы нестационарного рассеяния резонансного излучения в двухуровневой среде. Поставленная задача решалась нами в рамках цепочки статистических уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (BBGKY) для редуцированных матриц плотности [39, 40] с помощью аппарата когерентных состояний [41–43]. Необходимо отметить, что аппарат цепочки статистических уравнений Боголюбова применялся в работах [39] (см. также ссылки к монографии) при исследовании уравнений Блоха для полупроводниковых лазеров и при анализе столкновений в поле монохроматической волны. Также аппарат цепочки Боголюбова совместно с представлением Глаубера–Сударшана использовался для получения уравнения для фотонной матрицы плотности в задаче о микролазерной генерации [44].

Работа построена следующим образом. Во втором разделе описывается и обосновывается используемое приближение. В третьем разделе анализируются нестационарные процессы вынужденного (рэлеевского) рассеяния излучения и их связь с кооперативными полями. Четвертый раздел посвящен выводу уравнений, описывающих нестационарные спектры спонтанного излучения. В пятом разделе обсуждается влияние процесса измерения и граничных условий на свойства спектров. В шестом разделе показан предельный переход от полученных урав-

нений, описывающих нестационарные спектры, к результатам, полученным с помощью автокорреляционной функции. Седьмой раздел посвящен анализу нестационарных спектров резонансной флуоресценции в режиме включения постоянного возбуждающего поля со сбоем фазы и проведено сравнение полученных результатов с теоретическими и экспериментальными исследованиями [26, 27].

2. ИСПОЛЬЗУЕМОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим взаимодействие резонансной электромагнитной (лазерной) волны со средой невырожденных двухуровневых атомов, которая резонансна переходам $1 \rightarrow 2$ (см. рис. 1). В работе мы будем использовать следующие основные предположения.

Возбуждающее поле не монохроматично, и огибающая лазерного импульса нестационарна во времени. При этом мы считаем, что скорость изменения огибающей достаточно мала, $\omega_L t_p \gg 1$ (ω_L — несущая частота лазерного импульса, t_p — характерная длительность импульса), и приближение вращающейся волны и резонансное приближение применимы. В работе использовано единое квантовое описание как для возбуждающего поля, так и для рассеянного излучения. Мы не рассматривали поляризационные характеристики. Все поля полагаются скалярными величинами, и в уравнениях поляризационные переменные будут опущены.

Мы будем использовать бесстолкновительное приближение, однако будем считать плотность атомов среды произвольной, в том числе рассматривать и область параметров $N \gg 1$, когда существенную роль играют кооперативные поля. Анализ взаимодействия электромагнитной волны с ансамблем двухуровневых атомов будет проводиться в рамках

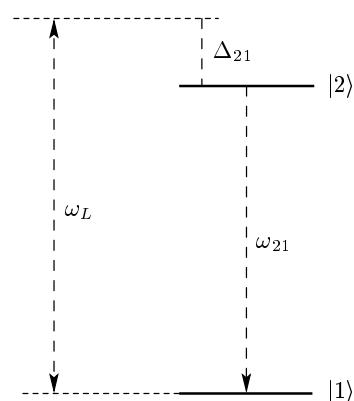


Рис. 1. Схема двухуровневого атома

сосредоточенной модели. При этом мы считаем, что N атомов, находящихся в объеме порядка λ_L^3 , взаимодействуют с электромагнитным полем без сдвига фазы, обусловленной запаздыванием. В рамках выбранного приближения мы не будем учитывать продольное диполь-дипольное взаимодействие, так как при использовании сосредоточенной модели энергия этого взаимодействия бесконечна. Отметим, что вклад диполь-дипольного взаимодействия приводит к появлению столкновительного затухания атомной поляризации, которое мы считаем малым, а также к сдвигу атомных уровней [28], который несуществен для последующего рассмотрения.

В рамках дипольного приближения гамильтониан системы, описывающий взаимодействие N атомов, находящихся в объеме порядка λ_L^3 , и лазерного поля, в единицах $1/\hbar$ имеет вид

$$H = \sum_a^N H_a + \sum_{\mathbf{k}} H_f + \sum_{\mathbf{k}} \sum_a V_{af}, \quad (2)$$

$$H_a = \omega_{21}|2\rangle\langle 2|, \quad H_f = \omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}},$$

$$V_{af} = ig_{\mathbf{k}}(|2\rangle\langle 1|\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - |1\rangle\langle 2|\hat{a}_{\mathbf{k}}^+e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}).$$

В (2) H_a описывает гамильтониан невозмущенной атомной системы, ω_{21} — частота перехода; $|j\rangle, \langle j|$ ($j = 1, 2$) — проекционные операторы соответствующего состояния.

Следующее слагаемое H_f описывает гамильтониан квантованного поля излучения, где $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ — операторы рождения и уничтожения фотонов, $\omega_{\mathbf{k}}$ — частота фотонов с волновым вектором \mathbf{k} . Здесь и далее по тексту символы «*» и «+» обозначают комплексное и эрмитово сопряжение соответственно.

Оператор V_{af} описывает взаимодействие атома с модой квантованного поля, где

$$g_{\mathbf{k}} = \|\mu_{21}\| \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar W}}$$

определяет константу связи взаимодействия, здесь $\|\mu_{21}\|$ — дипольный момент перехода, W — объем квантования.

Необходимо подробно остановиться на использовании квантовом представлении лазерного поля. В рамках классического описания напряженность поля нестационарного лазерного импульса имеет вид

$$E(t, \mathbf{r}) = 2P(t, \mathbf{r}) \sin(\omega_L t - \theta(t)), \quad (3)$$

где $P(t, \mathbf{r})$ — огибающая импульса, $\theta(t)$ — фаза лазерного поля. Разлагая $E(t, \mathbf{r})$ в (3) по модам поля, для выражения напряженности получим

$$E(t, \mathbf{r}) = 2 \sum_{\mathbf{k}} |R_{\mathbf{k}}| \sin(\omega_{\mathbf{k}} t - \theta_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

$$R_{\mathbf{k}} = \iint_W P(t, \mathbf{r}) \times$$

$$\times \exp[i((\omega_L - \omega_{\mathbf{k}})t - \theta(t) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] d\mathbf{r} dt, \quad (4)$$

$$\theta_{\mathbf{k}} = \arccos\left(\frac{R_{\mathbf{k}} + R_{\mathbf{k}}^*}{2|R_{\mathbf{k}}|}\right),$$

при этом $|R_{\mathbf{k}}|$ и $\theta_{\mathbf{k}}$ определяют амплитуду и фазу поля в \mathbf{k} моде. Квантовый аналог такого представления хорошо известен [42]:

$$E(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \langle \alpha_{\mathbf{k}} | \hat{E}_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle =$$

$$= 2 \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar W}} |\alpha_{\mathbf{k}}| \sin(\omega_{\mathbf{k}} t - \theta_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\hat{E}_{\mathbf{k}} = i \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar W}} \times$$

$$\times (\hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})),$$

$$R_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar W}} \alpha_{\mathbf{k}}.$$

Матрица плотности фотонного поля ρ_f^L лазерного излучения имеет вид

$$\rho_f^L = \prod_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}\rangle\langle \alpha_{\mathbf{k}}|,$$

где $|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle$ — когерентное состояние. Считая, что в начальный момент времени атомы среды и лазерное поле не взаимодействуют друг с другом и не коррелированы, уравнения движения для атомно-фотонной матрицы плотности можно записать в форме

$$i \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho], \quad \rho(0) = \prod_a \rho_a(0) \prod_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}\rangle\langle \alpha_{\mathbf{k}}|, \quad (6)$$

здесь ρ_a — матрица плотности одного атома.

3. РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ И КООПЕРАТИВНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе работы будет рассмотрен процесс вынужденного рэлеевского рассеяния и показана его связь с кооперативными полями. Для этого нам будет удобно перейти к резонансному приближению с помощью преобразования

$$\rho = \exp(-i(\omega_L|2\rangle\langle 2| + (1/2)\Delta_{21}I + \omega_L\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}})t) \rho^{(1)} \times$$

$$\times \exp(i(\omega_L|2\rangle\langle 2| + (1/2)\Delta_{21}I + \omega_L\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}})t), \quad (7)$$

здесь I — единичный оператор, $\Delta_{21} = \omega_{21} - \omega_L$ — отстройка лазерной волны от резонанса. В Приложении А приведены свойства операторов рождения

и уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ и операторов когерентного состояния $D(\alpha_{\mathbf{k}})$, $D^+(\alpha_{\mathbf{k}})$, часто используемые в последующем тексте статьи. Полагая $\nu_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_L$ и учитывая (А.5), уравнение (6) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho^{(1)}}{dt} &= [H^{(1)}, \rho^{(1)}], \\ \rho^{(1)}(0) &= \prod_a \rho_a(0) \prod_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}\rangle \langle \alpha_{\mathbf{k}}|, \\ H^{(1)} &= \sum_a H_a^r + \sum_{\mathbf{k}} H_f^r + \sum_{\mathbf{k}} \sum_a V_{af}, \\ H_a^r &= \Delta_{21} \sigma_z, \quad H_f^r = \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}, \\ V_{af} &= i g_{\mathbf{k}} (|2\rangle \langle 1| \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - |1\rangle \langle 2| \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (8)$$

На первом этапе мы получим оператор взаимодействия двухуровневых атомов с лазерным полем. Главная идея этого преобразования заключается в исключении лазерного поля из начальных условий для атомно-фотонной матрицы плотности. При этом матрица плотности, полученная в результате решения уравнения с измененным гамильтонианом, будет описывать состояние системы, в которую будут входить только атомы среды и поле рассеянного излучения. Искомое преобразование имеет следующую явную форму:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \exp(iH_f^r t) \left(\prod_{\mathbf{k}} D(\alpha_{\mathbf{k}}) \right) \exp(-iH_f^r t) \rho^{(2)} \times \\ &\times \exp(iH_f^r t) \left(\prod_{\mathbf{k}} D^+(\alpha_{\mathbf{k}}) \right) \exp(-iH_f^r t). \end{aligned} \quad (9)$$

В этом случае, используя соотношения (А.5), гамильтониан системы приводим к виду

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= \exp(-iH_f^r t) \left[\left(\prod_{\mathbf{k}} D^+(\alpha_{\mathbf{k}}) \right) \times \right. \\ &\times \exp(iH_f^r t) (H - H_f^r) \exp(-iH_f^r t) \times \\ &\times \left. \left(\prod_{\mathbf{k}} D(\alpha_{\mathbf{k}}) \right) + H_f^r \right] \exp(iH_f^r t) = \\ &= \sum_a \Delta_{21} \sigma_z + \sum_{\mathbf{k}} \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} \sum_a i g_{\mathbf{k}} (|2\rangle \langle 1| (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \\ &- |1\rangle \langle 2| (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \alpha_{\mathbf{k}}^*) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \\ &= \sum_a (H_a^r + V_a) + \sum_{\mathbf{k}} H_f^r + \sum_{\mathbf{k}} \sum_a V_{af}, \end{aligned} \quad (10)$$

где оператор V_a описывает взаимодействие двухуровневого атома с лазерным полем

$$\begin{aligned} V_a &= i(R(t, \mathbf{r})|2\rangle \langle 1| - R^*(t, \mathbf{r})|1\rangle \langle 2|), \\ R(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученный в (10) гамильтониан системы имеет вид, привычный [38, 42] для описания взаимодействия лазерного поля с двухуровневой средой, при котором лазерное поле описывается классическим образом. Заметим, что в уравнении (10) для начального момента времени поле квантованного излучения находится в вакуумном состоянии. Таким образом, полученная в результате решения уравнения (10) и взятия следа по атомным переменным фотонная матрица плотности будет матрицей плотности рассеянного излучения. Однако необходимо отметить, что она не является матрицей плотности наблюдаемого излучения в том случае, если направление наблюдения близко к оси распространения лазерного пучка. Для ее нахождения необходимо выполнить обратное к (9) преобразование.

На следующем этапе уравнение для атомно-фотонной матрицы плотности (10) будем анализировать с помощью цепочки уравнений ВВГКУ [39] для редуцированных матриц плотности. В этом разделе мы будем использовать приближение Хартри-Фока, в рамках которого вторые и более высокого порядка корреляции не учитываются [39]. При такой аппроксимации полных уравнений (10) мы пренебрегаем процессами радиационного распада возбужденных состояний атомов и перерассеянием спонтанного излучения и анализируем только процессы вынужденного (рэлеевского) рассеяния излучения. С учетом вида гамильтониана $H^{(2)}$ система уравнений ВВГКУ, состоящая из двух уравнений для атомной и фотонной матрицы плотности, имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a, \rho_a] - [V_{af}, \rho_a \rho_f]^f &= 0, \\ i \frac{d\rho_f}{dt} - [H_f^r, \rho_f] - [V_{af}, \rho_a \rho_f]^a &= 0, \\ \rho_a(0) = \rho_a^0, \quad \rho_f(0) = |0_{\mathbf{k}}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}}|. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $[\dots]^f$, $[\dots]^a$ обозначают взятие следа от коммутатора по фотонным и атомным переменным соответственно; $\rho_a, \rho_f = \rho_f(\mathbf{k})$ — одночастичные матрицы плотности для двухуровневого атома и моды фотонного поля соответственно. При последующих преобразованиях, если не оговорено особо, начальные условия сохраняются неизменными.

Необходимо отметить, что цепочка уравнений ВВГКУ в выбранном приближении состоит из урав-

нения Блоха для двухуровневого атома в поле лазерной волны с членом $[V_{af}, \rho_a \rho_f]^f$, учитывающим влияние на атом рассеянного излучения, и волнового уравнения для поля, записанного в шредингеровском представлении. При этом компонента уравнения $[V_{af}, \rho_a \rho_f]^a$ является квантовым описанием поляризации среды, наведенной лазерным полем.

На следующем шаге с помощью двух последовательно выполненных преобразований мы в явном виде получим решение уравнения для фотонной матрицы плотности. Для этого перейдем в уравнении для фотонной матрицы плотности к волновому представлению

$$\rho_f = \exp(-iH_f^r t) \rho_f^{(1)} \exp(iH_f^r t).$$

В результате замены переменных система уравнений (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a, \rho_a] - [\tilde{V}_{af}, \rho_a \rho_f^{(1)}]^f &= 0, \\ i \frac{d\rho_f^{(1)}}{dt} - [\tilde{V}_{af}, \rho_a \rho_f^{(1)}]^a &= 0, \\ \tilde{V}_{af} &= ig_{\mathbf{k}} [|2\rangle \langle 1| \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ &- |1\rangle \langle 2| \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(i\nu_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Выпишем явным образом оператор, описывающий поляризацию среды:

$$\begin{aligned} [\tilde{V}_{af}, \rho_a \rho_f^{(1)}]^a &= [P_f, \rho_f^{(1)}] = \sum_N ig_{\mathbf{k}} [(\rho_a)_{12} \hat{a}_{\mathbf{k}} \times \\ &\times \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - (\rho_a)_{21} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \times \\ &\times \exp(i\nu_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \rho_f^{(1)}], \end{aligned} \quad (14)$$

где $(\rho_a)_{12}, (\rho_a)_{21}$ — недиагональные элементы атомной матрицы плотности. Так как рассмотрение идет в рамках сосредоточенной модели, при суммировании по N мы должны положить радиус-вектор \mathbf{r} до атомов равным некоторой постоянной величине для всего анализируемого объема порядка λ_L^3 . Необходимо отметить, что без учета флуктуаций плотности среды в рамках дипольного приближения это предположение выполняется точно. Учитывая приведенное замечание, вид оператора поляризации среды представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} P_f &= iNg_{\mathbf{k}} [(\rho_a)_{12} \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ &- (\rho_a)_{21} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(i\nu_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражения (15) для оператора P_f следует, что операторная экспонента $\exp(-iP_f)$ является коге-

рентным состоянием [43] и выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(-iP_f)(t) &= \exp(-i\phi(t)) D(\beta_{\mathbf{k}}(t)), \\ \frac{d\beta_{\mathbf{k}}}{dt} &= -Ng_{\mathbf{k}} \rho_{21} \exp(i\nu_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \zeta_{\mathbf{k}}(t), \\ \frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{dt} &= -\frac{i(\zeta_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}}^* - \zeta_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}})}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом выполняются операторные соотношения, аналогичные (A.3):

$$\begin{aligned} \exp(i\phi(t)) D^+(\beta_{\mathbf{k}}(t)) \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\phi(t)) D(\beta_{\mathbf{k}}(t)) &= \\ = (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}(t)), \\ \exp(i\phi(t)) D^+(\beta_{\mathbf{k}}(t)) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(-i\phi(t)) D(\beta_{\mathbf{k}}(t)) &= \\ = (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \beta_{\mathbf{k}}^*(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя равенства (17) при выполнении преобразования

$$\rho_f^{(1)} = \exp(-iP_f)(t) \rho_f^{(2)} (\exp(-iP_f)(t))^{-1},$$

приведем систему (13) к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a, \rho_a] - [\tilde{V}_{af} + \tilde{V}_{af}^p, \rho_a \rho_f^{(2)}]^f &= 0, \\ i \frac{d\rho_f^{(2)}}{dt} &= 0, \\ \tilde{V}_{af}^p &= ig_{\mathbf{k}} [|2\rangle \langle 1| \beta_{\mathbf{k}}(t) \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ &- |1\rangle \langle 2| \beta_{\mathbf{k}}^*(t) \exp(i\nu_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполняя суммирование по фотонным переменным (см. Приложение В), преобразуем выражение $[\tilde{V}_{af}^p, \rho_a \rho_f^{(2)}]^f$ к виду

$$\begin{aligned} [\tilde{V}_{af}^p, \rho_a \rho_f^{(2)}]^f &= [V_a^p, \rho_a], \\ V_a^p &= -(iN\gamma/2) (|2\rangle \langle 1| (\rho_a)_{21} - |1\rangle \langle 2| (\rho_a)_{12}), \end{aligned} \quad (19)$$

где γ — константа радиационной релаксации (см. Приложение В). Оператор V_a^p описывает общий вклад рассеянного излучения от атомов среды в уравнение движения для атомных переменных. Заметим, что явный вид функций, стоящих при атомных проекционных операторах в операторе кооперативного поля V_a^p , полностью определяется тем, как в модели вводится поляризация среды. Однако общая структура оператора V_a^p сохранится при любом введении поляризации среды. Это связано с тем, что оператор поляризации P_f линеен по фотонным операторам. В рамках выбранной нами сосредоточенной модели физический смысл оператора кооперативного поля можно интерпретировать следующим образом. Атом, находящийся в лазерном поле, создает дополнительное поле, обусловленное наведенной

поляризацией. В свою очередь, кооперативное поле определяется как прямая сумма поляризационных полей, создаваемых отдельными атомами. По своей форме и по смыслу оператор (19) описывает поле Лоренца. Заметим, что оператор (19) использовался в [46] в рамках классического приближения. Также аналогичный оператор был получен в работе [47] в рамках представления Гейзенберга с использованием адиабатического исключения полевых переменных.

Необходимо подчеркнуть, что оператор V_a^p не описывает процессы свержизлучения Дике [48]. Их вклад будет существенным только в том случае, когда все дипольные моменты атомов, находящихся в объеме порядка λ_L^3 , сильно скоррелированы. Это налагает условие на возможное значение поперечной константы релаксации, $\gamma_2 \ll N\gamma$, при котором возможна реализация свержизлучательного режима [49]. Отметим, что используемое в нашей работе бесстолкновительное приближение гораздо слабее, $\gamma_2 \ll \gamma$.

Используя выражения для оператора кооперативного поля и учитывая, что,

$$\frac{d\rho_f^{(2)}}{dt} \equiv 0,$$

мы имеем

$$\rho_f^{(2)} \equiv |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|, \quad [\tilde{V}_{af}, \rho_a \rho_f^{(2)}]^f \equiv 0,$$

так что систему (18) можно привести к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] &= 0, \\ \rho_f^{(2)}(t) &= |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|. \end{aligned} \quad (20)$$

Выполняя обратные преобразования к заменам переменных, использованных нами при переходе от уравнения (12) к (20), и учитывая свойства операторов когерентного состояния (A.3), (A.5), матрицу плотности фотонного поля для наблюдаемого излучения можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho_f^n &= D(\alpha_{\mathbf{k}}) \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} t) D(\beta_{\mathbf{k}}(t)) |0_{\mathbf{k}}\rangle \times \\ &\times \langle 0_{\mathbf{k}}| D^+(\beta_{\mathbf{k}}(t)) \exp(i\nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} t) D^+(\alpha_{\mathbf{k}}), \\ \rho_f^n &= D(\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t}) |0_{\mathbf{k}}\rangle \times \\ &\times \langle 0_{\mathbf{k}}| D^+(\alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t}). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя преобразование

$$\beta_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t} = \beta'_{\mathbf{k}}(t),$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\beta'_{\mathbf{k}}}{dt} &= -i\nu_{\mathbf{k}} \beta'_{\mathbf{k}} - N g_{\mathbf{k}} \rho_{21} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ \rho_f^n &= |\alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t)\rangle \langle \alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t)|. \end{aligned} \quad (22)$$

Из выражения (22) легко находится среднее значение наблюдаемой напряженности поля [42]:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= i g_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ &- \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \\ E(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t) | \hat{E} | \alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t) \rangle = \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} |R_{\mathbf{k}}^r(t)| \sin(\omega_{\mathbf{k}} t - \theta_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ R_{\mathbf{k}}^r(t) &= \sqrt{\frac{2\pi\omega_{\mathbf{k}}}{\hbar W}} (\alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t)), \\ \theta_{\mathbf{k}}(t) &= \arccos\left(\frac{R_{\mathbf{k}}^r(t) + R_{\mathbf{k}}^{r*}(t)}{2|R_{\mathbf{k}}^r|}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

В последней части данного раздела сформулируем уравнения для процессов вынужденного рассеяния излучения в пространстве (t, \mathbf{r}) . Необходимо отметить, что, так как мы были ограничены рамками сосредоточенной модели и использовали дипольное приближение, фотонная матрица плотности в уравнениях (20) имеет область определения порядка λ_L^3 . Как следствие, необходимо рассматривать зависимость фотонной матрицы плотности от пространственных координат $\rho_f(t, \mathbf{r})$. Заметим, что уравнение для фотонной матрицы плотности в виде (18) представляет собой уравнение переноса электромагнитного поля в пустом пространстве, при этом матрица плотности фотонного поля, сдвинутая на $\mathbf{n}d\mathbf{r}$, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_f^n(t + dr/c, \mathbf{r} + \mathbf{n}d\mathbf{r}) &= \\ &= |\alpha_{\mathbf{k}}^r(t, \mathbf{r}) + \beta'_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r})\rangle \langle \alpha_{\mathbf{k}}^r(t, \mathbf{r}) + \beta'_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r})|, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|k|$, c — скорость света, $\alpha_{\mathbf{k}}^r(t, \mathbf{r})$ описывает поле, внешнее по отношению к рассматриваемому объему среды. Последовательно выполняя сдвиги $(\mathbf{n}d\mathbf{r}_0, \mathbf{n}d\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{n}d\mathbf{r}_i)$ по пространству, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}}^r(t + dr/c, \mathbf{r} + \mathbf{n}d\mathbf{r})[i] &= \\ &= \alpha_{\mathbf{k}}^r(t, \mathbf{r})[i-1] + \beta'_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r})[i-1], \end{aligned} \quad (25)$$

где i — шаг итерации. Учитывая, что произведение когерентных состояний есть когерентное состояние их суммы, умноженное на некоторую фазу (A.3), и

устремляя $\mathbf{n}dr_i \rightarrow 0$, окончательно для фотонной матрицы плотности получаем

$$\rho_f^n(t, \mathbf{r}) = \left| \alpha_{\mathbf{k}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}L} \beta'_{\mathbf{k}}(t - r/c, \mathbf{r}) dr \right\rangle \times \left\langle \alpha_{\mathbf{k}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}L} \beta'_{\mathbf{k}}(t - r/c, \mathbf{r}) dr \right|. \quad (26)$$

Здесь $L = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, \mathbf{r}_0 — координата пересечения луча, вышедшего из точки \mathbf{r} с направлением \mathbf{n} , с границей возбужденной части двухуровневой среды. Используя выражение для фотонной матрицы плотности (26), систему уравнений, описывающих вынужденное рассеяние излучения в пространстве (t, \mathbf{r}) , можно записать в форме

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a(t, \mathbf{r})}{dt} - [H_a^r + V_a(t, \mathbf{r}) + V_a^p(t, \mathbf{r}), \rho_a(t, \mathbf{r})] &= 0, \\ \rho_a(0, \mathbf{r}) &= \rho_a^0(\mathbf{r}), \\ H_a^r &= \Delta_{21} \sigma_z, \quad V_a(t, \mathbf{r}) = |2\rangle \langle 1| R(t, \mathbf{r}) - |1\rangle \langle 2| R^*(t, \mathbf{r}), \\ V_a^p(t, \mathbf{r}) &= -(iN\gamma/2)(|2\rangle \langle 1| \rho_{21}(t, \mathbf{r}) - |1\rangle \langle 2| \rho_{12}(t, \mathbf{r})). \end{aligned} \quad (27)$$

Поле $R(t, \mathbf{r})$ в точке (t, \mathbf{r}) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} R(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \exp \left\{ i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \nu_{\mathbf{k}} t) \right\} \times \\ &\times \left(\alpha_{\mathbf{k}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0 + \mathbf{n}L} \beta'_{\mathbf{k}}(t - r/c, \mathbf{r}) dr \right), \\ \frac{d\beta'_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r})}{dt} &= -i\nu_{\mathbf{k}} \beta'_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{r}) - N g_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \rho_{21}(t, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (28)$$

Подстановка частоты $\nu_{\mathbf{k}}$ в выражение (28) обусловлена использованием в уравнении резонансного приближения.

Проанализируем структуру полученных уравнений (27), (28). Выражение для электромагнитного поля (28) состоит из двух выделенных компонент. Первая компонента поля, стоящая при $\alpha_{\mathbf{k}}$, описывает перенос и дифракцию лазерного поля в пустом пространстве. Вторая компонента, содержащая $\beta'_{\mathbf{k}}$, имеет более сложную структуру и описывает поле вынужденно рассеянного излучения. Необходимо отметить, что выражение для поля в данной точке (28) описывает вклад рассеянного излучения от всего

светового конуса $r - ct < 0$, в том числе и поля, рассеянные назад или вбок по отношению к направлению распространения лазерного пучка. Гамильтониан уравнения для матрицы плотности двухуровневой среды (27) также можно разделить на две основные составляющие. Первая компонента $[H_a^r + V_a, \rho_a]$ линейна по атомным переменным и соответствует классическим уравнениям Блоха для двухуровневого атома в поле лазерной волны. Вторая компонента $[V_a^p, \rho_a]$ описывает вклад рассеянного (кооперативного) излучения в действующее поле. В отличие от первого слагаемого, она квадратична по атомным переменным, и именно эта компонента ответственна за явления бистабильности в рассматриваемой системе.

В заключение раздела коротко остановимся на использовании терминологии вынужденной рэлеевской (упругой) компоненты рассеянного излучения применительно к процессу, рассмотренному в этой части работы. Под вынужденными обычно понимают процессы, пропорциональные числу фотонов, с другой стороны, под рэлеевской или упругой компонентой понимают рассеянное излучение без изменения частоты. В данном случае имеет место своеобразное скрещивание понятий, связанное с тем, что и тот, и другой процессы описываются одним и тем же уравнением (28) в различных предельных случаях: вынужденное рассеяние соответствует $R(t) \ll \gamma$ или $R(t) \ll \Delta$, а рэлеевское рассеяние соответствует $t \rightarrow \infty$. При этом в режиме насыщения и при возбуждении короткими лазерными импульсами рассеянное излучение не будет ни вынужденным, ни упругим в прямом смысле этих терминов. Его интенсивность ограничена сверху величиной $|N\gamma/2\rho_{21}|^2$, и оно будет иметь многокомпонентную структуру. Далее в работе мы будем пользоваться термином «вынужденное излучение», который нам кажется более удачным и подчеркивающим тот факт, что эта компонента рассеянного излучения обусловлена поляризацией среды, наведенной лазерным полем. Заметим, что рассеянное излучения такого типа будет существовать и после выключения лазерного поля в течение времени релаксации дипольного момента среды к равновесному состоянию.

4. РЕЗОНАНСНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ

В этом разделе мы добавим в уравнения (12) процессы, описывающие спонтанный распад верхнего уровня, и получим выражения, описывающие спектр резонансной флуоресценции двухуровневой

среды. Так же, как и в предыдущем разделе, для получения соответствующих уравнений, мы будем использовать цепочку уравнений ВВГКУ [39]. При этом мы будем исходить из предположения о малой интенсивности спонтанно испущенного излучения и при анализе уравнений будем пренебрегать процессами перерассеяния спонтанного излучения. Такой подход обладает двумя существенными недостатками. Первый связан с тем, что полная энергия в полученной системе уравнений сохраняться не будет [39]. Второй недостаток заключается в том, что резонансная флуоресценция рассматривается «пост-процессом» и не дает вклада в материальные уравнения для двухуровневой среды, что может играть существенную роль при анализе переноса излучения в оптически плотной среде. Однако для оптически тонких сред этими явлениями можно пренебречь.

Для получения выражений для оператора радиационного распада и спектра резонансной флуоресценции мы будем использовать цепочку уравнений ВВГКУ вплоть до третьих корреляций, пренебрегая корреляциями более высоких порядков. При этом уравнение для второй корреляции даст спектр спонтанного излучения и константу радиационного затухания в уравнении для атомной матрицы плотности. Уравнение для третьей корреляции даст константу радиационного затухания в уравнении для второй корреляции, что будет определять радиационную ширину линии.

Используя полученное в предыдущем разделе выражение для гамильтониана (10), запишем рассматриваемую систему уравнений в виде

$$\begin{aligned}
i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a, \rho_a] - [V_{af''}, \rho_a \rho_{f''}]^{f''} &= \\
= [V_{af''}, g_{af''}]^{f''}, \\
i \frac{d\rho_f}{dt} - [H_f^r, \rho_f] - [V_{a''f}, \rho_{a''} \rho_f]^{a''} &= \\
= [V_{a''f}, g_{a''f}]^{a''}, \\
i \frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + H_f^r + V_{af}, g_{af}] - \\
- [V_{a''f}, \rho_{a''} g_{af}]^{a''} - [V_{af''}, \rho_{f''} g_{af}]^{f''} &= \\
= [V_{af}, \rho_a \rho_f] + [V_{af''}, \rho_a g_{ff''}]^{f''} + \\
+ [V_{a''f}, \rho_f g_{aa''}]^{a''} + \\
+ [V_{af''}, g_{af''}]^{f''} + [V_{a''f}, g_{aa''f}]^{a''}, \\
i \frac{dg_{ff'}}{dt} - [H_f^r + H_{f'}^r, g_{ff'}] - \\
- [V_{a''f} + V_{a''f'}, \rho_{a''} g_{ff'}]^{a''} &= \\
= [V_{a''f}, \rho_f g_{a''f}]^{a''} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ [V_{a''f'}, \rho_{f'} g_{a''f}]^{a''} + [V_{a''f} + V_{a''f'}, g_{a''f'}]^{a''}, \\
i \frac{dg_{aa'}}{dt} - [H_a^r + H_{a'}^r + V_a + V_{a'}, g_{aa'}] - \\
- [V_{af''} + V_{a''f''}, \rho_{f''} g_{aa'}]^{f''} &= \\
= [V_{af''}, \rho_a g_{af''}]^{f''} + \\
+ [V_{a''f''}, \rho_{a''} g_{af''}]^{f''} + [V_{af''} + V_{a''f''}, g_{aa''f''}]^{f''}, \\
i \frac{dg_{aff'}}{dt} - \\
- [H_a^r + V_a + H_f^r + H_{f'}^r + V_{af} + V_{af'}, g_{aff'}] - \\
- [V_{a''f} + V_{a''f'}, \rho_{a''} g_{aff'}]^{a''}, \\
[V_{af''}, \rho_{f''} g_{aff'}]^{f''} = [V_{af} + V_{af'}, \rho_a \rho_f \rho_{f'}] + \\
+ [V_{af'}, \rho_{f'} g_{af}] + [V_{af}, \rho_f g_{af'}] + \\
+ [V_{af} + V_{af'}, \rho_a g_{ff'}] + O(4), \\
i \frac{dg_{aa'f}}{dt} - \\
- [H_a^r + V_a + H_{a'}^r + V_{a'} + H_f^r + V_{af} + V_{af'}, g_{aa'f}] - \\
- [V_{af''} + V_{a''f''}, \rho_{f''} g_{aa'f}]^{f''} - \\
- [V_{a''f}, \rho_{a''} g_{aa'f}]^{a''} = [V_{af} + V_{af'}, \rho_a \rho_{a'} \rho_f] + \\
+ [V_{af'}, \rho_{a'} g_{af}] + [V_{af}, \rho_a g_{af'}] + \\
+ [V_{af} + V_{af'}, \rho_f g_{aa'}] + O(4).
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь так же, как и в (12), ρ_a и $\rho_f = \rho_f(\mathbf{k})$ — соответственно одночастичные матрицы плотности двухуровневого атома и моды фотонного поля; операторы $g_{af}, g_{ff'}, g_{aa'}$ являются двухчастичными, а операторы $g_{aff'}, g_{aa'f}$ — трехчастичными «функциями» корреляций соответствующих переменных; $O(4)$ обозначает члены четвертого порядка по ρ , влиянием которых мы пренебрежем. С учетом того, что в нулевой момент времени атомы среды и лазерное поле нескоррелированы, начальные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\rho_a &= \rho_a(0), \quad \rho_f = |0_{\mathbf{k}}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}}|, \\
g_{af} &= 0, \quad g_{ff'} = 0, \quad g_{aa'} = 0, \\
g_{aff'} &= 0, \quad g_{aa'f} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь под «0» подразумевается нулевой оператор соответствующей размерности. После выполнения преобразований над системой уравнений (29), повторяющих замены переменных (17), (18), которые были использованы нами при получении оператора кооперативного поля, система уравнений (29) примет вид

$$\begin{aligned}
i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] - [V_{af''}, \rho_a \rho_{f''}]^{f''} &= \\
= [V_{af''} + V_{af''}^p, g_{af''}]^{f''}, \\
i \frac{d\rho_f}{dt} - [H_f^r, \rho_f] = [V_{a''f} + V_{a''f}^p, g_{a''f}]^{a''},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i \frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + H_f^r + V_{af} + g_{af}] - \\
 & - [V_{af''}, \rho_{f''} g_{af}]^{f''} = \\
 & = [V_{af} + V_{af}^p, \rho_a \rho_f] + [V_{af''} + V_{af''}^p, \rho_a g_{ff''}]^{f''} + \\
 & + [V_{a''f} + V_{a''f}^p, \rho_f g_{aa''}]^{a''} + \\
 & + [V_{af''} + V_{af''}^p, g_{afff''}]^{f''} + [V_{a''f} + V_{a''f}^p, g_{aa''f}]^{a''}, \\
 & i \frac{dg_{ff'}}{dt} - [H_f^r + H_{f'}^r, g_{ff'}] = \\
 & = [V_{a''f} + V_{a''f}^p, \rho_f g_{a''f}]^{a''} + \\
 & + [V_{a''f'} + V_{a''f'}^p, \rho_{f'} g_{a''f}]^{a''} + \\
 & + [V_{a''f} + V_{a''f}^p + V_{a''f'} + V_{a''f'}^p, g_{a''ff'}]^{a''}, \\
 & i \frac{dg_{aa'}}{dt} - [H_a^r + H_{a'}^r + V_a + V_a^p + V_{a'} + V_{a'}^p, g_{aa'}] - \\
 & - [V_{af''} + V_{af''}^p, \rho_{f''} g_{aa'}]^{f''} = \\
 & = [V_{af''} + V_{af''}^p, \rho_a g_{a''f''}]^{f''} + \\
 & + [V_{a'f''} + V_{a'f''}^p, \rho_{a'} g_{a''f''}]^{f''} + \\
 & + [V_{af''} + V_{af''}^p + V_{a'f''} + V_{a'f''}^p, g_{aa''f''}]^{f''}, \\
 & i \frac{dg_{aff'}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + \\
 & + H_f^r + H_{f'}^r + V_{af} + V_{af}^p + V_{af'} + V_{af'}^p, g_{aff'}] - \\
 & - [V_{af''}, \rho_{f''} g_{aff'}]^{f''} = \\
 & = [V_{af} + V_{af}^p + V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_a \rho_{f'} \rho_f] + \\
 & + [V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_{f'} g_{af}] + [V_{af} + V_{af}^p, \rho_f g_{af'}] + \\
 & + [V_{af} + V_{af}^p + V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_a g_{ff'}] + O(4), \\
 & i \frac{dg_{aa'f}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + \\
 & + H_{a'}^r + V_{a'} + V_{a'}^p + H_f^r + V_{af} + V_{af'} + g_{aa'f}] - \\
 & - [V_{af''} + V_{af''}^p, \rho_{f''} g_{aa'f}]^{f''} = \\
 & = [V_{af} + V_{af}^p + V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_a \rho_{a'} \rho_f] + \\
 & + [V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_{a'} g_{af}] + [V_{af} + V_{af}^p, \rho_a g_{af'}] + \\
 & + [V_{af} + V_{af}^p + V_{af'} + V_{af'}^p, \rho_f g_{aa'}] + O(4), \\
 & V_{af}^p = i g_{\mathbf{k}} \langle |2\rangle \langle 1| \beta_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - |1\rangle \langle 2| \beta_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rangle.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Начальные условия также имеют вид (30). При рассмотрении системы (31) мы будем пренебрегать членами уравнений, пропорциональными $g_{\mathbf{k}}, Ng_{\mathbf{k}}, g_{\mathbf{k}}^2, (Ng_{\mathbf{k}})^2$ и более высоких степеней, но удерживать слагаемые вида $\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2$, так как данные величины обратно пропорциональны объему квантования W и для не слишком большой плотной газа они много меньше $\gamma \propto \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2$. Как следствие, в левых частях уравнений можно опустить члены, содержащие операторы V_{af} и V_{af}^p . Так как в вы-

бранном приближении система (31) решается без учета перерасеяния спонтанного излучения, то при решении уравнения для фотонной матрицы плотности мы не должны учитывать вклад от правой части уравнения $[V_{a''f} + V_{a''f}^p, g_{a''f}]^{a''}$, что дает $\rho_f(t) \equiv |0_{\mathbf{k}}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}}|$. Как следствие, в правых частях всех уравнений для операторов корреляций $g_{af}, g_{ff'}, g_{aa'}, g_{aa'f}, g_{aff'}$ можно отбросить члены, действующие на фотонную матрицу плотности ρ_f , вклады от которых в уравнения для ρ_a, ρ_f, g_{af} либо нечетны по соответствующим операторам рождения и уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^+$, либо содержат лишь компоненты, пропорциональные $(\hat{a}_{\mathbf{k}})^2, (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+)^2$.

Анализ показывает, что при таких предположениях система (31) может быть сильно упрощена и приведена к виду

$$\begin{aligned}
 & i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] = [V_{af''}, g_{af''}]^{f''}, \\
 & i \frac{d\rho_f}{dt} - [H_f^r, \rho_f] = [V_{a''f}, g_{a''f}]^{a''}, \\
 & i \frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + H_f^r, g_{af}] = \\
 & = [V_{af}, \rho_a \rho_f] + [V_{af''}, g_{aff''}]^{f''}, \\
 & i \frac{dg_{aff''}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + H_f^r + H_{f''}^r, g_{aff''}] = \\
 & = [V_{af''}, \rho_{f''} g_{af}].
 \end{aligned} \tag{32}$$

Необходимо отметить, что система уравнений (32) имеет вид цепочки уравнений ВВГКУ, полученных в рамках обобщенного борновского приближения второго порядка [39]. При рассмотрении кинетических уравнений плазмы в рамках этого приближения может быть получено немарковское уравнение Ландау с поправкой на собственно-энергетическую часть [39].

Формально решая уравнения для $g_{aff''}, g_{af}$ и подставляя решения соответственно в уравнения для g_{af} и ρ_a , в рамках процедуры, аналогичной процедуре Вигнера–Вайскопфа, можно получить классический вид оператора радиационной релаксации (см. Приложение С). При этом мы пренебрегаем эффектами нелинейной динамической релаксации, которые связаны с отношением частоты Раби к частоте перехода $2R/\omega_{21}$ [17, 35]. Заметим, что для оптических переходов эффекты нелинейной динамической релаксации могут играть существенную роль при плотностях энергии лазерного поля порядка 10 ГВт/см^2 . В таких условиях не выполняется двухуровневое приближение и модель, рассматриваемая в работе, неприменима. Используя результаты,

полученные в Приложении В, мы можем привести систему уравнений (32) к виду

$$\begin{aligned}
i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] &= \Gamma^R[\rho_a], \\
i \frac{d\rho_f}{dt} - [H_f^r, \rho_f] &= [V_a''f, g_a''f]^{a''}, \\
i \frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + H_f^r, g_{af}] &= \\
&= [V_{af}, \rho_a \rho_f] + \Gamma^R[g_{af}], \\
\Gamma^R[X] &= \\
&= -i\gamma(|2\rangle\langle 2|X + X|2\rangle\langle 2| - 2|1\rangle\langle 2|X|2\rangle\langle 1|),
\end{aligned} \tag{33}$$

где $\Gamma^R[\dots]$ — оператор радиационной релаксации (см. Приложение С (С.11)). Полученная система уравнений является марковской. Это обусловлено тем, что мы пренебрегли эффектами нелинейной динамической релаксации, вследствие чего оператор релаксации не зависит от предыстории развития системы.

С использованием предположения о малой интенсивности спонтанного излучения можно показать, что система уравнений (33) включает в себя как частный случай систему уравнений для атомно-фотонной матрицы плотности [30, 38]. Действительно, так как мы считаем интенсивность спонтанного излучения малой и пренебрегаем перерассеянием спонтанного излучения, спектр резонансной флуоресценции будет определяться элементом $\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})$ фотонной матрицы плотности (здесь $1_{\mathbf{k}}$ обозначает состояние с одним фотоном в моде). При этом в правых частях уравнений для фотонной матрицы плотности и оператора корреляции мы должны положить $\rho_f \equiv |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|$. С учетом этого явный вид уравнения для $\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})$ может быть сильно упрощен с помощью исключения фотонных операторов рождения и уничтожения из уравнения для оператора корреляции g_{af} и разделения его на два уравнения, как это показано ниже. При этом система (33) примет вид

$$\begin{aligned}
i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] - \Gamma^R[\rho_a] &= 0, \\
i \frac{d\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})}{dt} &= -iN g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu, \mathbf{k}, t), \\
i \frac{dg_{\mathbf{k}}^{(+)}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(+)}] + \\
+ \nu_k g_{\mathbf{k}}^{(+)} - \Gamma^R[g_{\mathbf{k}}^{(+)}] &= -i\rho_a |2\rangle\langle 1|, \\
i \frac{dg_{\mathbf{k}}^{(-)}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(-)}] - \\
- \nu_k g_{\mathbf{k}}^{(-)} - \Gamma^R[g_{\mathbf{k}}^{(-)}] &= -i|1\rangle\langle 2| \rho_a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_a(0) &= \rho_a^0, \quad \rho_f(0) = |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|, \\
g^{(+)(3)}(0) &= 0, \quad g^{(-)(3)}(0) = 0, \\
g^{(+)} &= \langle 1_{\mathbf{k}} | g_{af} | 0_{\mathbf{k}} \rangle, \quad g^{(-)} = \langle 0_{\mathbf{k}} | g_{af} | 1_{\mathbf{k}} \rangle, \\
F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, t) &= \langle 2 | g_{\mathbf{k}}^{(+)} | 1 \rangle + \langle 1 | g_{\mathbf{k}}^{(-)} | 2 \rangle.
\end{aligned} \tag{34}$$

Третье и четвертое уравнения системы (34) почти полностью аналогичны хорошо известным уравнениям для атомно-фотонной матрицы плотности и сопряженному ему уравнению, которые были получены другим способом и использовались в работах [30, 35, 38] для анализа стационарных спектров резонансной флуоресценции и функции перерассеяния. Основное формальное отличие в форме записи уравнений связано с учетом вклада кооперативных полей $[V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(+)}, [V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(-)}]$. Однако заметим, что окончательная форма результатов, полученных при решении данных уравнений, будет сильно отличаться от результатов, полученных в работах [30, 38]. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, необходимостью учета вынужденной компоненты рассеянного излучения, а во-вторых, определением величины, принимаемой за спектр наблюдаемой флуоресценции. Последнее тесно связано с процессом детектирования, который будет обсуждаться в следующем разделе.

Необходимо отметить, что фотонная матрица плотности, полученная в результате решения (33), вообще говоря, не является матрицей плотности наблюдаемого излучения. При переходе от системы уравнений (29) к системе уравнений (31) мы фактически заменой переменных исключили поле вынужденно рассеянного излучения, которое необходимо учитывать при анализе экспериментально наблюдаемых спектров. С учетом использованных приближений уравнения для ненулевых компонент фотонной матрицы $\rho_f(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}})$, $\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})$ примут вид

$$\begin{aligned}
\rho_f(0_{\mathbf{k}}, 0_{\mathbf{k}}) &\equiv 1, \\
\frac{d\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})}{dt} &= N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, t), \\
\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Формально интегрируя уравнение для $\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})$, получим

$$\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})(t) = \int_0^t N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau) d\tau. \tag{36}$$

Используя обратные преобразования, описанные в предыдущем разделе работы, выражение для наблюдаемой матрицы плотности фотонного поля примет вид

$$\rho_f^n = D(\alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t))(|0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}| + \int_0^t N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau) d\tau |1_{\mathbf{k}}\rangle\langle 1_{\mathbf{k}}|) D^+(\alpha_{\mathbf{k}} + \beta'_{\mathbf{k}}(t)). \quad (37)$$

В том случае, если мы анализируем флуоресценцию в не совпадающем с лазерным пучком направлении, $\alpha_{\mathbf{k}} = 0$. Пренебрегая величинами порядка $g_{\mathbf{k}}^4$, выражение (37) сведем к

$$\rho_f^n = D(\beta'_{\mathbf{k}}(t))(|0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}| D^+(\beta'_{\mathbf{k}}(t)) + \prod_{\mathbf{k}} \int_0^t N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau) d\tau |1_{\mathbf{k}}\rangle\langle 1_{\mathbf{k}}|. \quad (38)$$

За наблюдаемую интенсивность рассеянного излучения в выбранной моде мы примем поток энергии (без учета энергии нулевых колебаний), приходящей из этой моды через поверхность детектора. Такое определение напрямую связано с вероятностью фотодетектирования [42] и кажется нам наиболее удачным. Поток энергии через детектор из выбранной моды пропорционален вектору Пойтинга:

$$I_{\mathbf{k}} = \sum_n \rho_f \hat{I}_{\mathbf{k}} = \sum_n \rho_f^n \hat{E}_{\mathbf{k}} \times \hat{H}_{\mathbf{k}} = \frac{c^2}{W} \overline{n_{\mathbf{k}}} \hbar \mathbf{k} = \frac{c}{L} \left(|\beta'_{\mathbf{k}}(t)|^2 + \int_0^t N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \tau) d\tau \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (39)$$

В (39) мы опустили несущественные в данном рассмотрении геометрические факторы, положив объем квантования равным L^3 .

Заметим, что в работах [30, 38], а также в наших предыдущих работах [35–37] и других интенсивность спектра наблюдаемого излучения принималась в виде

$$I_{\mathbf{k}} \propto \frac{d\rho_f(1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}})}{dt} = N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau)$$

с добавкой рэлеевской компоненты спектра в форме дельта-функции. Данное выражение в предельных случаях совпадало с известными теоретическими и экспериментальными результатами [3, 8] для стационарных спектров. Однако анализ нестационарных спектров давал отрицательные значения интенсивности для отдельных спектральных компонент. Этот результат легко объясним в рамках полученного выражения (39) для спектра наблюдаемого излучения. Значения функции $N g_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau)$ определяют скорость изменения числа фотонов в данной моде. При этом эти значения, вообще говоря, могут быть отрицательными. Однако эта функция не

равна вероятности того, что детектор может зарегистрировать (поглотить) фотон из моды. Как будет показано в следующем разделе, в стационарном случае эти две величины равны, но при анализе нестационарных спектров их различие необходимо учитывать.

Коротко остановимся на свойствах выражения для наблюдаемой интенсивности рассеянного излучения (39). Оно состоит из двух слагаемых. Первое описывает процессы вынужденного рассеяния излучения, второе соответствует спонтанному излучению. Необходимо отметить, что слагаемое, описывающее вынужденное излучение, пропорционально $N^2 g_{\mathbf{k}}^2$. Однако в случае малых плотностей, $n\lambda_L^3 \ll 1$, оно пропорционально $g_{\mathbf{k}}^2$ (n — концентрация) и имеет тот же порядок, что и спонтанный член. Это связано с тем, что в случае малых плотностей, $n\lambda_L^3 \approx 1$, неправомерно использовать величину средней плотности газа. Необходимо решать серию уравнений с $N = 0, 1, 2, \dots$ и суммировать результаты в соответствии с их статвесами, определяемыми функцией распределения. Случай $N = 0$ соответствует пустому пространству, где ни рассеянное, ни спонтанное излучение не возникает. При $N = 1$ оба члена имеют одинаковый порядок, и именно результаты, полученные при таком анализе, описывают поведение рассеянного излучения в случае малой плотности среды. В случае $n\lambda_L^3 \gg 1$ рассеянное излучение доминирует над спонтанным и можно ограничиться только его рассмотрением.

Необходимо отметить, что полученное выражение (39) для наблюдаемой интенсивности не может быть принято в качестве окончательного результата, так как несложный анализ показывает, что с течением времени для постоянного поля накачки наблюдаемая интенсивность флуоресценции должна линейно расти. Этот вопрос мы обсудим в следующем разделе.

5. ВЛИЯНИЕ ДЕТЕКТОРА И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СПЕКТРЫ РЕЗОНАНСНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ

Факт роста наблюдаемой интенсивности резонансной флуоресценции, следующий из полученного выражения (39), не является парадоксальным, если принять во внимание, что использованная процедура квантования электромагнитного поля описывает резонатор (объем квантования) с идеально отражающими стенками [38, 42]. Как следствие, с одной стороны, рассеянное излучение не будет покидать объ-

ем резонатора, что обуславливает рост числа фотонов в модах (36). С другой стороны, оно будет полностью отсутствовать и для внешнего наблюдателя. В этом смысле выражение (39) описывает только поток энергии в моде. Для корректного описания спектров наблюдаемого излучения необходимо определить граничные условия, описывающие поглощение излучения на стенках резонатора, связанное либо с работой детектора, либо с любой другой безвозвратной потерей излучения. Именно поток поглощенных фотонов на границах объема квантования может регистрироваться сторонним наблюдателем.

Учет потерь приводит к появлению в гамильтониане (2) добавочного члена, описывающего взаимодействие квантованного поля с термостатом при нулевой температуре [43]:

$$K[\rho] = -i \sum_{\mathbf{k}} (\kappa_{\mathbf{k}}/2) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} \rho - 2\hat{a}_{\mathbf{k}} \rho \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \rho \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}), \quad (40)$$

где константа $\kappa_{\mathbf{k}}$ определяет модовые потери. Так как мы пренебрегаем перерассеянием спонтанного излучения, мы можем отбросить компоненту оператора $K[\rho]$, пропорциональную $\hat{a}_{\mathbf{k}} \rho \hat{a}_{\mathbf{k}}^+$, поскольку в этом приближении она равна нулю. Следствием этого будет появление дополнительных членов в уравнениях для фотонной матрицы плотности и оператора g_{af} :

$$(-i\kappa_{\mathbf{k}}/2) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} \rho_f + \rho_f \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}),$$

$$(-i\kappa_{\mathbf{k}}/2) (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}} g_{af} + g_{af} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}}).$$

После всех тех же преобразований, что и в предыдущем разделе, система (34) и выражение для наблюдаемой интенсивности (39) примут вид

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] - \Gamma^R[\rho_a] &= 0, \\ i \frac{d\rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}})}{dt} &= -i\kappa_{\mathbf{k}} \rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}) - \\ &- iNg_{\mathbf{k}}^2 (\langle 2|g_{\mathbf{k}}^{(+)}|1\rangle + \langle 1|g_{\mathbf{k}}^{(-)}|2\rangle), \\ i \frac{dg_{\mathbf{k}}^{(+)}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(+)}] + \\ &+ (\nu_{\mathbf{k}} + i\kappa_{\mathbf{k}}/2)g_{\mathbf{k}}^{(+)} - \Gamma^R[g_{\mathbf{k}}^{(+)(3)}] &= -i\rho_a|2\rangle\langle 1|, \\ i \frac{dg_{\mathbf{k}}^{(-)}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{\mathbf{k}}^{(-)}] - \\ &- (\nu_{\mathbf{k}} - i\kappa_{\mathbf{k}}/2)g_{\mathbf{k}}^{(-)} - \Gamma^R[g_{\mathbf{k}}^{(-)(3)}] &= -i|1\rangle\langle 2|\rho_a, \\ \rho_a(0) &= \rho_a^0, \quad \rho_f(0) = |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|, \\ g_{\mathbf{k}}^{(+)}(0) &= 0, \quad g_{\mathbf{k}}^{(-)}(0) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta'_{\mathbf{k}}(t)}{dt} &= -(i\nu_{\mathbf{k}} + \kappa_{\mathbf{k}})\beta'_{\mathbf{k}}(t) - Ng_{\mathbf{k}}\rho_{21}(t), \\ I_{\mathbf{k}} &= \kappa_{\mathbf{k}}(|\beta'_{\mathbf{k}}(t)|^2 + \\ &+ e^{-\kappa_{\mathbf{k}}t} \int_0^t Ng_{\mathbf{k}}^2 F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \tau) e^{\kappa_{\mathbf{k}}\tau} d\tau) \hbar\omega_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Нетрудно показать, что полученное выражение для интенсивности ограничено и при $t \rightarrow \infty$ преобразуется к виду

$$I_{\mathbf{k}} = N(g_{\mathbf{k}})^2 \hbar\omega_{\mathbf{k}} (N|(\rho_a)_{21}(\infty)|^2 \frac{\kappa_{\mathbf{k}}}{(\nu_{\mathbf{k}}^2 + \kappa_{\mathbf{k}}^2)} + F(\nu_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, \infty)). \quad (43)$$

Выражение для наблюдаемой интенсивности (43) при $\kappa_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ совпадает с хорошо известным спектром Моллоу, полученным с помощью аппарата атомно-фотонной матрицы плотности [38].

С использованием системы уравнений (41) и выражения для спектра (42) численно были проанализированы как полные спектры резонансной флуоресценции, так и отдельные компоненты, соответствующие вынужденному и спонтанному излучению. Расчеты проводились при помощи пакета программ «DUMKA», разработанных в группе В. И. Лебедева (ИАЭ), реализующие устойчивые явные чебышевские схемы с переменными шагами по времени для решения жестких систем однородных дифференциальных уравнений [50, 51]. Была проведена большая серия расчетов спектров рассеянного излучения в большой области возможных значений параметров. Расчеты показали, что спектры резонансной флуоресценции, полученные с помощью (41), (42) не содержат отрицательных значений. На рис. 2 приведены полный спектр резонансной флуоресценции, а также спектры вынужденного и спонтанного излучения, полученные при возбуждении двухуровневой среды коротким лазерным импульсом, имеющим гауссов профиль по времени:

$$R(t) = R_0 \exp(-t^2/t_p^2).$$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА С ПОМОЩЬЮ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Покажем, что в стационарном случае результаты для спектра наблюдаемого излучения, полученные с помощью формализма, развитого в предыдущих разделах, будут эквивалентны результатам, полученным классическим способом с помощью теории о квантовой регрессии и автокорреляционной

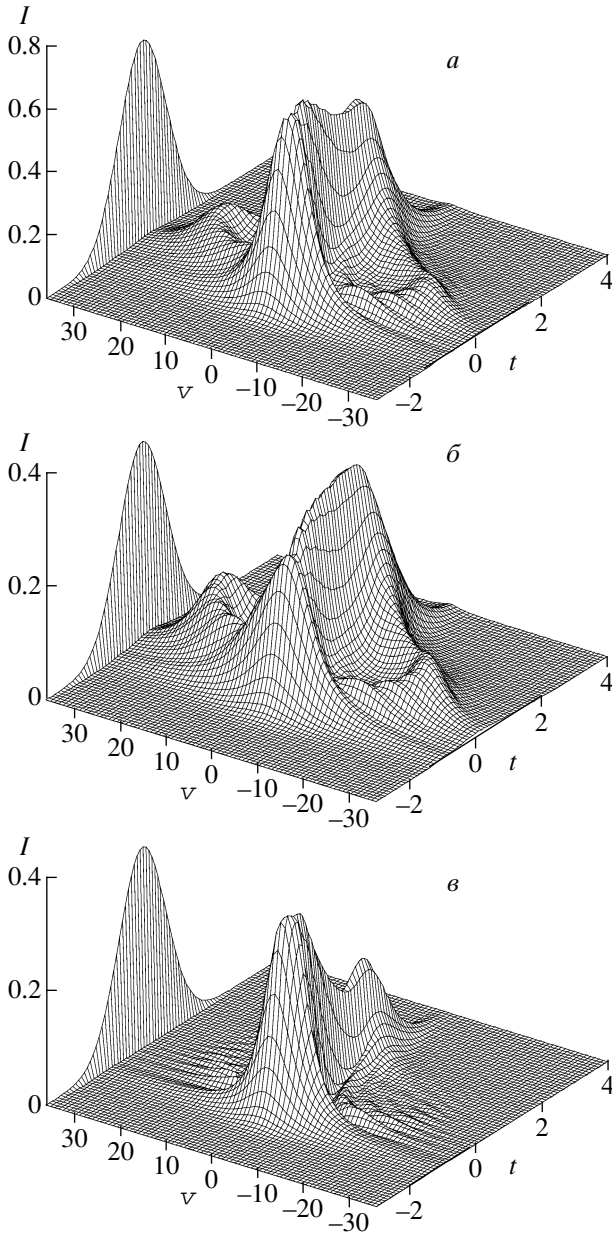


Рис. 2. Нестационарные спектры рассеянного излучения от лазерного импульса, имеющего гауссовский профиль. Значения параметров: $t_p = 1$, $R_0 = 12$, $\Delta = -2$, $\gamma = 2$, $\kappa_{\mathbf{k}} = 3$, $N = 3$; *a* — полный спектр резонансной флуоресценции; *b* — спектр спонтанного излучения; *v* — спектр вынужденного излучения. На заднем фоне графиков изображен профиль лазерного импульса

функции. Отправной точкой для наших рассуждений будет система (41), где для удобства дальнейших преобразований правая часть уравнения для $\rho_f^{(1)}(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}})$ будет записана с помощью операции взя-

тия следа по атомным переменным:

$$i \frac{d\rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}})}{dt} = -i\kappa_{\mathbf{k}}\rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}) - iN g_{\mathbf{k}}^2 \text{Sp}_a[|1\rangle\langle 2|g_{\mathbf{k}}^{(+)} + g_{\mathbf{k}}^{(-)}|2\rangle\langle 1|]. \quad (44)$$

Выпишем формальное решение для оператора $g_{\mathbf{k}}^{(+)}$ в интегральной форме:

$$g_{\mathbf{k}}^{(+)} = \int_0^t \exp(-i\nu_{\mathbf{k}} + \kappa_{\mathbf{k}}/2)(t - \tau) \times \hat{M}(t, \tau) \rho_a(\tau) |2\rangle\langle 1| d\tau, \quad (45)$$

где оператор $\hat{M}(t, \tau)$ представляет собой фундаментальное решение уравнения:

$$i \frac{dg_{\mathbf{k}}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{\mathbf{k}}] - \Gamma^R[g_{\mathbf{k}}] = 0, \\ g_{\mathbf{k}}(0) = g_{\mathbf{k}}^{(0)}, \\ (g_{\mathbf{k}}(t))_{ji} = \sum_{mn} M_{ijmn}(t, 0) (g_{\mathbf{k}}^{(0)})_{nm}, \quad (46) \\ M_{ijmn}(t, \tau) = \sum_{pq} M_{ijqp}(t, 0) M_{pqmn}^{-1}(\tau, 0).$$

Используя (44) в уравнении для $\rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}})$ и формально интегрируя его, приходим к выражению

$$\rho_f(\mathbf{1}_{\mathbf{k}}, \mathbf{1}_{\mathbf{k}}) = \int_0^t \exp[-\kappa_{\mathbf{k}}(t - \tau_1)] \times \int_0^{\tau_1} \exp[(-i\nu_{\mathbf{k}} - \kappa_{\mathbf{k}}/2)(\tau_1 - \tau_2)] \times \text{Sp}_a[|1\rangle\langle 2|\hat{M}(\tau_1, \tau_2)\rho_a(\tau_2)|2\rangle\langle 1| + \text{c.c.}] d\tau_2 d\tau_1. \quad (47)$$

Заметим, что если пренебречь влиянием кооперативного поля, то оператор $\hat{M}(t, 0)$ также будет описывать и фундаментальное решение для уравнения атомной матрицы плотности. С учетом этого выражение в квадратных скобках представляет собой двухвременную корреляционную функцию для произведения атомных операторов рождения и уничтожения [41]:

$$\text{Sp}_a[|1\rangle\langle 2|\hat{M}(\tau_1, \tau_2)\rho_a(\tau_2)|2\rangle\langle 1| + \text{c.c.}] = \langle \sigma^+(\tau_2)\sigma^-(\tau_1) \rangle, \quad (48) \\ \sigma^+(0) = |2\rangle\langle 1|, \quad \sigma^-(0) = |1\rangle\langle 2|,$$

$$\rho_f(\mathbf{1}_k, \mathbf{1}_k) = 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^t \exp[-\kappa_{\mathbf{k}}(t - \tau_1)] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\tau_1} \exp [(-i\nu_{\mathbf{k}} - \kappa_{\mathbf{k}}/2)(\tau_1 - \tau_2)] \times \right. \\ \left. \times \langle \sigma^+(\tau_2) \sigma^-(\tau_1) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right]. \quad (49)$$

Устремляя в (49) $t \rightarrow \infty$, $\kappa_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, получаем классическое выражение [41], определяющее спектр спонтанного излучения:

$$\rho_f(\mathbf{1}_k, \mathbf{1}_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} e^{-i\nu_{\mathbf{k}}\tau} \langle \sigma^+(t) \sigma^-(t + \tau) \rangle d\tau \right]. \quad (50)$$

Необходимо отметить, что выражение для спектра (49) имеет практически ту же форму, что и выражение для спектра нестационарной флуоресценции полученное в работе [22], однако с отличающимся верхним пределом по внутреннему интегралу.

7. АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СПЕКТРОВ РЕЗОНАНСНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ

Анализ нестационарных спектров резонансной флуоресценции начался с конца 70-х годов. В основном исследовался режим «включения» постоянно лазерного поля. Ранние исследования [52–54] показали, что на коротких временах нестационарный спектр флуоресценции будет осциллировать во времени, что связано с изменением населенности верхнего уровня с частотой Раби. Однако он будет сохранять общую симметричную форму триплета Моллоу. В более недавних работах [26, 27] теоретически и экспериментально показано, что нестационарный спектр спонтанного излучения может иметь существенно отличный характер, при котором в момент включения поля один из пиков флуоресценции оказывается подавленным. Такое поведение излучающего атома возможно, если приготовить начальное состояние атома таким образом, что он будет находиться только на одном из уровней одетого атома. В случае, если отстройка возбуждающего поля равна нулю, было показано [27], что создание такого состояния атома возможно с помощью изменения фазы лазерного поля в начальный момент возбуждения [55]. В этом разделе с помощью полученных

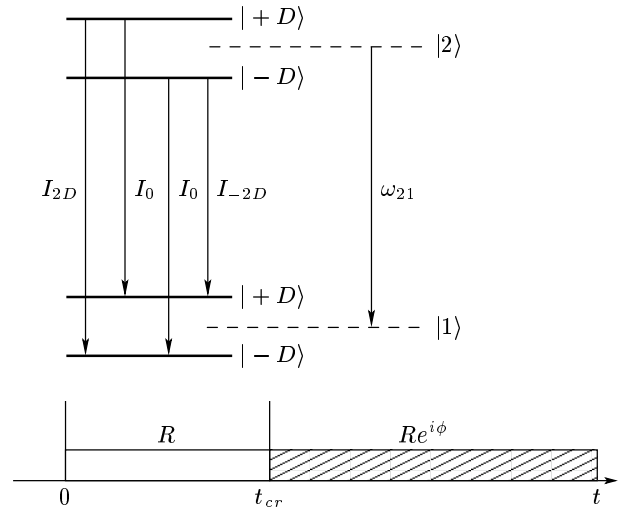


Рис. 3. Схема состояний одетого атома. Схема возбуждения двухуровневого атома постоянным полем со скачком фазы, использованная в эксперименте в работе [27]

уравнений для описания нестационарных спектров мы обобщим результаты работы [26] на случай произвольной отстройки от резонанса.

Для создания атома в одном из состояний одетого атома применялась следующая схема возбуждения [27] (см. рис. 3). На отрезке времени от 0 до t_{cr} ($t_{cr} \approx 1/2R$, $2R$ — частота Раби) атом находился в постоянном лазерном поле, частота которого совпадала с частотой перехода. В момент времени t_{cr} фаза поля скачкообразно изменялась на $\pm\pi/2$. Скачкообразное изменение фазы приводило к изменению волновых функций одетых состояний, при этом проекция волновой функции атома на одно из «новых» состояний оказывалась равной нулю.

Воспользуемся такой же схемой для случая не равной нулю отстройки и получим соотношения на время изменения и величину изменения фазы поля. В пренебрежении спонтанным затуханием и влиянием кооперативного поля для эволюции волновой функции атомной системы в анализируемом случае получим

$$\psi(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (H_a^r + V_a^\phi) t \right] \times \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (H_a^r + V_a) t_{cr} \right] \psi(0), \quad (51)$$

где $\psi(t)$ — вектор волновой функции атомной системы. Выбрав для определенности начальную фазу лазерного поля чисто мнимой, для операторов лазерного поля получим

$$V_a = R|2\rangle\langle 1| + R|1\rangle\langle 2|,$$

$$V_a^\phi = R \exp(i\phi)|2\rangle\langle 1| + R \exp(-i\phi)|1\rangle\langle 2|.$$

Используя явный вид операторов H_a^r, V_a, V_a^ϕ , оператор эволюции для произвольной фазы поля можно записать в следующей форме:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(H_a^r + V_a^\phi)t\right) = S_\phi \Lambda S_\phi^{-1}$$

$$S_\phi = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} c & -B \\ B^* & c \end{pmatrix},$$

$$S_\phi^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} c & B \\ -B^* & c \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \exp(-iDt) & 0 \\ 0 & \exp(iDt) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$A = \Delta/2, \quad B = -iR \exp(-i\phi),$$

$$D = \sqrt{A^2 + |B|^2} = \sqrt{\Delta^2/4 + R^2},$$

$$C = A + D = \Delta/2 + \sqrt{\Delta^2/4 + R^2},$$

$$J^2 = C^2 + |B|^2.$$

Для явного вида оператора эволюции имеем

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(H_a^r + V_a^\phi)t\right) = \frac{1}{J^2} \begin{pmatrix} J^2 \cos(Dt) - i(C^2 - |B|^2) \sin(Dt) & -i2BC \sin(Dt) \\ -i2B^*C \sin(Dt) & J^2 \cos(Dt) + i(C^2 - |B|^2) \sin(Dt) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Учитывая матричное разложение для оператора эволюции, уравнения для амплитуды и времени скачка фазы можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S_\phi^{-1} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_a^r + V_a)t_{cr}\right] \psi(0). \quad (54)$$

В зависимости от выбранного вектора система придет соответственно в состояние $| - D \rangle$ и $| + D \rangle$ (см. рис. 3). Опуская громоздкие выкладки, укажем окончательный результат. Для приведения системы в состояние

$$\begin{aligned} | + D \rangle &\rightarrow \sin(Dt_{cr}) = \frac{\sqrt{C^2 + R^2}}{2R}, \\ \cos(\phi + \pi) &= \frac{C^2 - R^2}{2R^2}, \\ | - D \rangle &\rightarrow \sin(Dt_{cr}) = \frac{\sqrt{C^2 + R^2}}{2C}, \\ \cos(\phi) &= \frac{C^2 - R^2}{2C^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Необходимо отметить, что приведение атомной системы в любое из одетых состояний возможно выполнить только при определенных ограничениях на отстройку лазерного поля, а именно, атом может быть приведен в состояние $| + D \rangle$ при $(-8/3)R \leq \Delta \leq (2/\sqrt{3})R$ и в состояние $| - D \rangle$ при $(-2/\sqrt{3})R \leq \Delta \leq (8/3)R$.

На рис. 4 приведены спектры резонансной флуоресценции, построенные для описанной выше схемы возбуждения. Рисунок 4а соответствует постоянному лазерному полю без сбоя фазы, рис. 4б, в соответ-

ствуют возбуждению, при котором систему приводят в состояния $| + D \rangle$ и $| - D \rangle$. Укажем на одну важную особенность спектров, полученных для чистых состояний одетого атома. Они не испытывают осцилляций с частотой Раби (в отличие от спектра, приведенного на рис. 4а) и фактически являются стационарными спектрами при $t \ll \gamma$. Это непосредственно следует из того, что атом находится в чистом состоянии одетого атома. Так как зависимость волновой функции атома для состояний $| + D \rangle$ и $| - D \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{|-D\rangle}(t) &= \exp(-iD(t - t_{cr}))S_1, \\ \psi_{|+D\rangle}(t) &= \exp(iD(t - t_{cr}))S_2, \end{aligned} \quad (56)$$

где S_1, S_2 — столбцы матрицы S , отсюда сразу следует, что атомная матрица плотности не зависит от времени.

Укажем, что, в отличие от случая с нулевой отстройкой [26], интенсивности боковой и центральной компонент спектра не равны друг другу. Учитывая, что атом находится в стационарном состоянии, используем явный вид волновой функции (56) и воспользуемся выражением (50). После несложных вычислений можно показать, что интенсивность боковой и центральной линий для атома в состоянии $| + D \rangle$ будет иметь вид

$$I_0 = \gamma \rho_{22} \frac{C^2}{C^2 + B^2}, \quad I_{2D} = \gamma \rho_{22} \frac{B^2}{C^2 + B^2}, \quad (57)$$

а для атома в состоянии $| - D \rangle$:

$$I_0 = \gamma \rho_{22} \frac{B^2}{C^2 + B^2}, \quad I_{-2D} = \gamma \rho_{22} \frac{C^2}{C^2 + B^2}. \quad (58)$$

Заметим, что несмотря на кажущуюся несимметричность выражений (57), (58) относительно замены $\Delta \rightarrow -\Delta$, при подстановке реальных значений результаты совпадают. Учитывая полученные ограничения на отношения Δ/R , можно показать, что максимально возможное отношение интенсивности боковой компоненты к центральной можно получить для состояния $|\pm D\rangle$ при соотношении параметров $\Delta = (\pm 2/\sqrt{3})R$, при котором $I_0 : I_{\pm 2D} = 1 : 3$.

В рамках проведенного выше анализа легко объяснить несимметричность нестационарных спектров, полученных при включении постоянного лазерного поля, наблюдавшихся экспериментально в работе [27]. Несимметричность спектра связана с тем, что при ненулевой отстройке разложение основного состояния по состояниям одетого атома не одинаково. С учетом явного вида оператора эволюции (51) запишем населенности верхней пары состояний:

$$\rho_{|+D\rangle} = \frac{C^2}{C^2 + B^2}, \quad \rho_{|-D\rangle} = \frac{B^2}{C^2 + B^2}. \quad (59)$$

Отсюда непосредственно следует, что на промежутке времени установления равновесного состояния центр тяжести триплета смещается в сторону частоты перехода.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведено исследование нестационарной резонансной флуоресценции двухуровневого атома. Разработан новый подход к описанию процессов переноса и рассеяния нестационарного лазерного импульса, основанный на цепочке уравнений Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона для редуцированных матриц плотности. В рамках аппроксимации Хартри–Фока получена система уравнений, описывающая процессы вынужденного рассеяния лазерного излучения в среде. С использованием аппарата когерентных состояний для сосредоточенной модели получен оператор кооперативного поля. Использование предложенной замены переменных позволяет локально в объеме порядка λ_L^3 решить волновое уравнение и получить спектр вынужденно рассеянного излучения и учесть его влияние при переносе лазерного поля.

На следующем этапе в рамках борновского приближения второго порядка получены системы уравнений для атомной и фотонной матриц плотности и оператора корреляции. Полученная система уравнений описывает процессы вынужденного и спонтан-

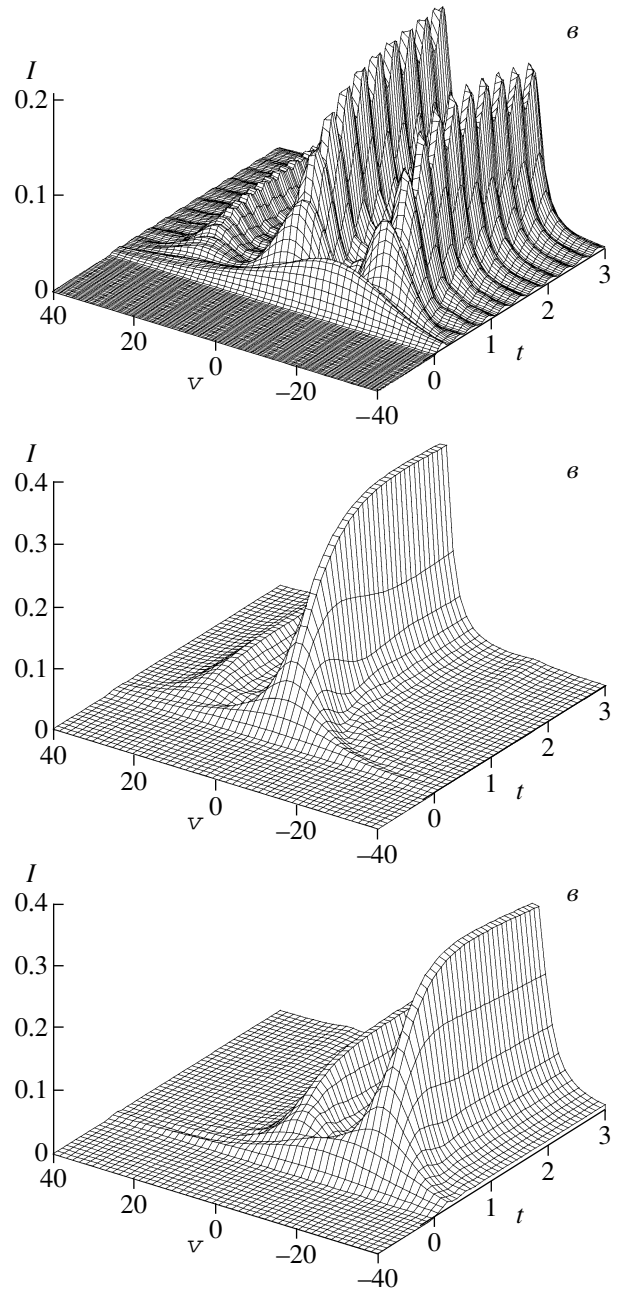


Рис. 4. Нестационарные спектры резонансной флуоресценции, возникающие при включении постоянного лазерного поля. Значения параметров: $R = 10$, $\Delta = (-2/\sqrt{3})R$, $\gamma = 0.1$; *a* – возбуждение без изменения фазы; *б* – атом скачком фазы поля приводится в состояние $|-D\rangle$, $t_{cr} = \frac{1}{D} \arcsin \frac{\sqrt{C^2 + R^2}}{2C}$, $\phi = \arccos \frac{C^2 - R^2}{2C^2}$; *в* – атом скачком фазы поля приводится в состояние $|+D\rangle$, $t_{cr} = \frac{1}{D} \arcsin \frac{\sqrt{C^2 + R^2}}{2R}$, $\phi = \pi + \arccos \frac{C^2 - R^2}{2R^2}$.

ного рассеяния лазерного излучения для оптически тонкой среды, в которой можно пренебречь процессами перерассеяния спонтанного излучения. Получены выражения для нестационарного спектра резонансной флуоресценции, которые учитывают вклад как спонтанно, так и вынужденно рассеянного излучения. Показана необходимость учета «поглощающих» граничных условий для электромагнитного поля при процедуре квантования и их влияние на кинетические уравнения. Подчеркнем, что именно учет поглощения поля на границах детектора в кинетических уравнениях для атомной и фотонной матриц плотности и оператора корреляции впервые позволил получить выражения для нестационарных спектров резонансной флуоресценции, которые не дают отрицательных значений.

Проведено сравнение с результатами, полученными для спектров резонансной флуоресценции с помощью теоремы о квантовой регрессии. Показано, что без учета кооперативного поля в стационарном случае и при стремящихся к нулю значениях констант релаксации мод выражение для спектра переходит в хорошо известное выражение для триплета Моллоу.

Проведен анализ нестационарных спектров резонансной флуоресценции при произвольной отстройке от резонанса для режима включения постоянного поля. Показано, что скачком фазы возбуждающего излучения атомная система может быть приведена в одно из состояний одетого атома, при этом в спектре резонансной флуоресценции будет отсутствовать одна из боковых компонент. Показано, что на временах, много меньших времени радиационной релаксации, спектр резонансной флуоресценции одетого состояния будет стационарным и в нем будут отсутствовать осцилляции с частотой Раби. Найдено соотношение интенсивностей флуоресценции оставшихся двух компонент. Показано, что при определенном соотношении между величиной отстройки от резонанса и мощностью лазерного поля отношение интенсивности центральной компоненты к смещенной может достигать 1 : 3.

Авторы выражают благодарность, М. Vornitz, А. Г. Леонову, Д. И. Чехову за обсуждение и замечания. Авторы также благодарят В. И. Лебедева за помощь в использовании пакета программ «DUMKA». Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-02-17153), в рамках программы поддержки научных школ (00-15-96539) и поддержки молодых ученых (проект 02-02-06400). Работа также поддержана грантом 02-0217153 Президента РФ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства оператора когерентного состояния

Кратко напомним известные свойства фотонных операторов рождения и уничтожения и оператора когерентного состояния, используемые в статьях [41, 43]. Общее выражение для оператора когерентного состояния $D(\alpha_{\mathbf{k}})$ имеет вид

$$D(\alpha_{\mathbf{k}}) = \exp(\alpha_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}}^*\hat{a}_{\mathbf{k}}^+) = \exp(-|\alpha_{\mathbf{k}}|^2/2) \exp(\alpha_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+) \exp(-\alpha_{\mathbf{k}}^*\hat{a}_{\mathbf{k}}). \quad (\text{A.1})$$

Когерентное состояние представимо в виде

$$|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle = D(\alpha_{\mathbf{k}})|0_{\mathbf{k}}\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_{\mathbf{k}}|^2}{2}\right) \sum_n \frac{(\alpha_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Приведем без доказательства свойства оператора когерентного состояния [43]:

$$\begin{aligned} D^+(\alpha_{\mathbf{k}}) &= D(-\alpha_{\mathbf{k}}), \\ D(\alpha_{\mathbf{k}}^1)D(\alpha_{\mathbf{k}}^2) &= \exp(i \operatorname{Im}(\alpha_{\mathbf{k}}^1\alpha_{\mathbf{k}}^{2*}))D(\alpha_{\mathbf{k}}^1 + \alpha_{\mathbf{k}}^2), \\ D^+(\alpha_{\mathbf{k}})\hat{a}_{\mathbf{k}}D(\alpha_{\mathbf{k}}) &= \hat{a}_{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}}, \\ D^+(\alpha_{\mathbf{k}})\hat{a}_{\mathbf{k}}^+D(\alpha_{\mathbf{k}}) &= \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ + \alpha_{\mathbf{k}}^*. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Операторы когерентных состояний для разных мод перестановочны:

$$D(\alpha_{\mathbf{k}_1})D(\alpha_{\mathbf{k}_2}) = D(\alpha_{\mathbf{k}_2})D(\alpha_{\mathbf{k}_1}). \quad (\text{A.4})$$

При переходе к волновому представлению над фотонными операторами часто выполняется преобразование вида

$$X' = \exp(iH_f t)Xn \exp(-iH_f t).$$

Для операторов рождения и уничтожения, входящих в гамильтониан, явный вид преобразования выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t)\hat{a}_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t) &= \\ &= \hat{a}_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t), \\ \exp(i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t)\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t) &= \\ &= \hat{a}_{\mathbf{k}}^+\exp(i\omega_{\mathbf{k}}t). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Учитывая (А.5), аналогичное преобразование для оператора когерентного состояния запишем в виде

$$\begin{aligned} & \exp(i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t)D(\alpha_{\mathbf{k}})\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t) = \\ & = \exp(i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t)\sum_n\frac{(\alpha_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}-\alpha_{\mathbf{k}}^*\hat{a}_{\mathbf{k}}^+)^n}{n!}\times \\ & \quad \times \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\hat{a}_{\mathbf{k}}t) = \\ & = \sum_n\frac{(\alpha_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)-\alpha_{\mathbf{k}}^*\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\exp(i\omega_{\mathbf{k}}t))}{n!} = \\ & = D(\alpha_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)). \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Оператор кооперативного поля

В этом разделе будет получен явный вид оператора кооперативного поля. Нас интересует выражение вида (19)

$$\begin{aligned} & [\tilde{V}_{af}^p, \rho_f \rho_a]^f = \\ & = \sum_{\mathbf{k}} ig_{\mathbf{k}}[(\langle 2 | \langle 1 | \beta_{\mathbf{k}}(t) \exp(-i\nu_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ & \quad - |1\rangle\langle 2 | \beta_{\mathbf{k}}^*(t) \exp(i\nu_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))\rho_f \rho_a - \\ & \quad - \rho_f \rho_a (\langle 2 | \langle 1 | \beta_{\mathbf{k}}(t) \exp(-i\nu_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ & \quad - |1\rangle\langle 2 | \beta_{\mathbf{k}}^*(t) \exp(i\nu_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}))], \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

где уравнение для $\beta_{\mathbf{k}}(t)$ имеет вид

$$\frac{d\beta_{\mathbf{k}}}{dt} = -Ng_{\mathbf{k}}(\rho_a)_{21} \exp(i(\nu_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})). \quad (\text{B.2})$$

Формально решая уравнение для $\beta_{\mathbf{k}}'(t)$, получаем

$$\begin{aligned} & \beta_{\mathbf{k}}'(t) = \\ & = -Ng_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^t (\rho_a)_{21}(\tau) \exp(i(\nu_{\mathbf{k}}\tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) d\tau. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

На следующем шаге подставляем результат в (B.1) и учитываем, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\omega_L}^{\infty} g_{\mathbf{k}}^2 \exp(\pm i\nu_{\mathbf{k}}(t-\tau)) \omega_L^3 d\nu_{\mathbf{k}} = \\ & = \frac{\gamma}{2} \delta(t-\tau) + O(\Delta_L), \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{4\omega_{21}^3 \|\mu_{21}\|^2}{3\hbar c^3}$$

— константа радиационной релаксации, Δ_L — лэмбовский сдвиг уровня, $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция. Тогда получаем

$$\begin{aligned} & [\tilde{V}_{af}^p, \rho_f \rho_a]^f = [V_a^p, \rho_a], \\ & V_a^p = -iN\gamma/2(|2\rangle\langle 1|(\rho_a)_{21} - |1\rangle\langle 2|(\rho_a)_{12}). \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Оператор радиационной релаксации

В этом разделе будет получен явный вид оператора релаксации для атомной матрицы плотности ρ_a . Аналогичным образом может быть получен оператор релаксации и для оператора функции корреляции g_{af} . Нас интересует явный вид выражения

$$\begin{aligned} & [V_{af}, g_{af}]^f, \\ & V_{af} = ig_{\mathbf{k}}(|2\rangle\langle 1|\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - |1\rangle\langle 2|\hat{a}_{\mathbf{k}}^+e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

находящегося в правой части уравнения для матрицы плотности ρ_a в (32). При этом

$$\begin{aligned} & i\frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] = [V_{af}, g_{af}]^f, \\ & i\frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p + H_f^r, g_{af}] = \\ & = [V_{af}, \rho_a \rho_f], \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

где $\rho_f(t) \equiv |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|$, так как мы пренебрегаем перерассеянием спонтанного излучения. Пусть $U(t), C(t)$ — фундаментальные решения уравнений

$$\begin{aligned} & i\frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] = 0, \\ & \rho_a(t) = U(t)\rho_a^0 U^{-1}(t), \\ & i\frac{dg_{af}}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, g_{af}] = 0, \\ & g_{af}(t) = C(t)g_{af}^0 C^{-1}(t). \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Тогда, используя замены переменных вида

$$\rho_a(t) = U(t)\rho_a' U^{-1}(t),$$

$$g_{af}(t) = \exp(-iH_f^r t) C(t) g_{af}' C^{-1}(t) \exp(iH_f^r t)$$

и учитывая, что унитарное преобразование не меняет следа оператора, систему (С.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho'_a}{dt} &= [V_{af}^1, S(t)g'_{af}S^{-1}(t)]^f, \\ i \frac{dg'_{af}}{dt} &= [V_{af}^2, S^{-1}(t)\rho'_a S(t)\rho'_f], \\ V_{af}^i &= ig_{\mathbf{k}}(\sigma_i^+(t)\hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\nu_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \\ &\quad - \sigma_i^+(t)\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \exp(i\nu_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})), \\ \sigma_1^+(t) &= U^{-1}(t)|2\rangle\langle 1|U(t), \\ \sigma_1^-(t) &= U^{-1}(t)|1\rangle\langle 2|U(t), \\ \sigma_2^+(t) &= C^{-1}(t)|2\rangle\langle 1|C(t), \\ \sigma_2^-(t) &= C^{-1}(t)|1\rangle\langle 2|C(t). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Используя результат формального интегрирования уравнения для g_{af} , в уравнении для атомной матрицы плотности получаем

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho'_a}{dt} &= -i \left[V_{af}^1(t), S(t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t [V_{af}^2(\tau), S^{-1}(\tau)\rho'_a S(\tau)\rho'_f] d\tau S^{-1}(t) \right]^f, \\ S(t) &= U^{-1}(t)C(t). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Так как $\rho_f(t) \equiv |0_{\mathbf{k}}\rangle\langle 0_{\mathbf{k}}|$, при вычислении следа оператора по фотонным переменным отличные от нуля члены будут пропорциональны следующим выражениям:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+\rho_f, \rho_f\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \rho_f\hat{a}_{\mathbf{k}}.$$

Выполняя последовательно суммирование по \mathbf{k} и интегрирование по τ и возвращаясь к исходным переменным $\rho'_a \rightarrow \rho_a$, получим

$$\begin{aligned} i \frac{d\rho_a}{dt} - [H_a^r + V_a + V_a^p, \rho_a] &= \Gamma[\rho_a], \\ \Gamma[\rho_a] &= \\ &= -i\gamma/2(|2\rangle\langle 2|\rho_a + \rho_a|2\rangle\langle 2| - 2|1\rangle\langle 2|\rho_a|2\rangle\langle 1|). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

При выводе мы использовали соотношение (В.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Weisskopf and E. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930).
2. V. Weisskopf, Ann. Phys. Leipzig **9**, 23 (1931).
3. B. R. Mollow, Phys. Rev. **188**, 1969 (1969).
4. B. R. Mollow, Phys. Rev. A **15**, 1023 (1977).

5. J. L. Carlsten, A. Szoke, and M. G. Raymer, Phys. Rev. A **15**, 1029 (1977).
6. F. Schuda, C. R. Stroud Jr., and M. J. Hercher, Phys. B **7**, L198 (1974).
7. W. Harting, W. Rasmussen, R. Schieder, and H. Walther, Z. Phys. A **278**, 205 (1976).
8. F. Y. Wu, R. E. Crove, and S. Ezekiel, Phys. Rev. A **15**, 227 (1977).
9. С. П. Гореславский, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **26**, 23 (1979).
10. Y. Zhu, O. Wu, A. Lezama, D. J. Gauthier, and T. W. Mossberg, Phys. Rev. A **41**, 6574 (1990).
11. О. А. Кочаровская, Я. И. Ханин, В. Б. Цареградский, ЖЭТФ **86**, 423 (1984).
12. I. R. Senitzky, Phys. Rev. Lett. **40**, 1334 (1978).
13. Tran Quang, L. H. Lan, and A. S. Shumovsky, J. Opt. Soc. Am. **6**, B7 (1990).
14. А. Г. Леонов, А. А. Пантелеев, А. Н. Старостин, Д. И. Чехов, ЖЭТФ **105**, 1536 (1994).
15. M. Lax, Rev. Mod. Phys. **32**, 25 (1960).
16. M. Lax, Phys. Rev. **129**, 2342 (1962).
17. Э. Г. Пестов, Труды ФИАН **187**, 60 (1988).
18. L. Banyai et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 879 (1997).
19. F. X. Camacasse et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 5429 (1996).
20. M. Bonitz, D. Kremp, D. C. Scott, R. Binder, W. D. Kraeft, and H. S. Kohler, J. Phys.: Cond. Matt. **8**, 6057 (1996).
21. R. Binder, S. H. Kohler, and M. Bonitz, Phys. Rev. B **55**, 5110 (1997).
22. J. H. Eberly and K. Wodkiewicz, J. Opt. Am. **67**, 1255 (1977).
23. J. J. Sanchez-Mondragon, N. B. Narozhny, and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **51**, 550 (1983).
24. T. Ho and H. Rabitz, Phys. Rev. A **37**, 1576 (1988).
25. T. Ho and H. Rabitz, Phys. Rev. A **37**, 4148 (1988).
26. N. Lu, P. R. Berman, Y. S. Bai, J. E. Golub, and T. W. Mossberg, Phys. Rev. A **34**, 319 (1986).
27. J. E. Golub and T. W. Mossberg, Phys. Rev. Lett. **59**, 2149 (1987).

28. P. W. Milloni and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **10**, 1096 (1974).
29. M. O. Scully and W. E. Lamb Jr., *Phys. Rev.* **159**, 208 (1967).
30. Е. В. Бакланов, *ЖЭТФ* **65**, 2203 (1973).
31. D. A. Holm, M. Sargent III, and S. Stenholm, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 243 (1986).
32. P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer, Berlin (1990).
33. А. А. Пантелеев, *ЖЭТФ* **111**, 440 (1997).
34. А. А. Пантелеев, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **102**, 441 (1992).
35. А. А. Пантелеев, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **106**, 1606 (1994).
36. А. А. Пантелеев, Вл. К. Рерих, *ЖЭТФ* **118**, 312 (2000).
37. А. А. Пантелеев, Вл. К. Рерих, *ЖЭТФ* **119**, 243 (2001).
38. С. Стенхолм, *Основы лазерной спектроскопии*, Мир, Москва (1987).
39. M. Bonitz, *Quantum Kinetic Theory*, ed. by B. G. Teubner, Stuttgart–Leipzig (1998).
40. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
41. Л. Мандель, Э. Фольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Наука, Москва (2000).
42. Р. Лоудон, *Квантовая теория света*, Мир, Москва (1976).
43. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, Москва (1987).
44. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, *Quantum. Opt.* **5**, 193 (1993).
45. H. Haug and A. P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York (1996).
46. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
47. Y. Ben-Aryeh, C. M. Bowden, and J. C. Englund, *Phys. Rev. A* **34**, 3917 (1986).
48. R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
49. R. Jodoin and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **9**, 873 (1974).
50. В. И. Лебедев, *Вычислительные процессы и системы*, т. 8, Наука, Москва (1991).
51. V. I. Lebedev, *Numerical Method and Application*, ed. by G. I. Marchuk, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo (1994).
52. J. H. Eberly, C. V. Kunasz, and W. Wodkiewicz, *J. Phys. B* **13**, 217 (1980).
53. J. H. Eberly, in *Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*, ed. by A. O. Barut, Plenum, New York (1984).
54. B. Renaud, R. M. Whitley, and C. R. Stroud Jr., *J. Phys. B* **10**, 19 (1977).
55. Y. S. Bia, A. G. Yodh, and T. W. Mossberg, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1277 (1985).