

СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВОГО КОЛЛАПСА В СРЕДЕ С НОРМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 8 октября 2002 г.

Аналитически и численно исследованы особенности динамики самовоздействия трехмерных аксиально-симметричных волновых пакетов, описываемой нелинейным уравнением Шредингера с гиперболическим пространственным оператором. Рассмотрен класс начальных распределений волнового поля, для которых эффекты самофокусировки преобладают над дисперсионным распылением и приводят к реализации волнового коллапса. Показано, что коллапс трубчатых волновых пакетов сопровождается модификацией их формы в процессе схлопывания к оси системы. Нелинейная стабилизация коллапса приводит к дроблению волнового поля в продольном направлении и последующему разлету образующихся сгустков вдоль оси. Численно исследована динамика коллапса при учете насыщения нелинейности среды и нелинейной диссипации.

PACS: 42.65.Tg, 42.25.Bs, 42.65.Re

1. ВВЕДЕНИЕ

Самовоздействие волнового поля является одним из основных процессов, определяющих динамику взаимодействия мощного излучения с веществом. Амплитуда огибающей трехмерных волновых пакетов, $E = E_{NL}\psi(x, y, z, \tau) \exp(-i\omega t + ikz)$, распространяющихся вдоль оси z в среде с характерным полем E_{NL} локальной кубической нелинейности, описывается нелинейным эволюционным уравнением [1]

$$2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi + \frac{\partial v_{gr}}{\partial \omega} \frac{\omega^2}{kc^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + k^2 |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

где $v_{gr} = (dk/d\omega)^{-1}$ — групповая скорость импульса, $\tau = (t - z/v_{gr})$, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Дисперсия групповой скорости, $\partial v_{gr}/\partial \omega$, в конденсированных средах в оптическом диапазоне частот, как правило, является нормальной, чему соответствует отрицательная производная $\partial v_{gr}/\partial \omega < 0$ [2–8]. К средам с нормальной дисперсией относится и физический (электрон-позитронный) вакуум [9]. В таких средах уравнение (1) содержит не эллиптический пространственный оператор, как стандартное

нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), а оператор гиперболического типа. В безразмерных переменных

$$\tilde{t} = \frac{kz}{2}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = k(x, y), \quad \tilde{z} = \frac{\tau k^{3/2} c^2}{\omega |\partial v_{gr}/\partial \omega|^{1/2}}$$

(в дальнейшем для простоты знак «тильда» опускаем) уравнение (1) можно представить в виде

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}} + \Delta_{\perp} \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z}^2} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) также используется для описания самовоздействия волн (верхнегибридных, циклотронных и др.) в замагниченной плазме [2, 10, 11].

Особенности самовоздействия волновых полей в рамках уравнения (2) связаны с конкуренцией процессов самофокусировочного сжатия волнового пакета в поперечных направлениях (x, y) и продольного дисперсионного распыления. Исследование динамики самовоздействия волновых пакетов гауссовой формы показало, что при неоднородном поперечном сжатии волнового пакета происходит его дробление пополам в продольном направлении [2, 3] с последующим каскадным повторением этого про-

*E-mail: zhani@appl.sci-nnov.ru

цесса (множественное дробление) [2]. Такой сценарий развития самовоздействия заметно отличается от хорошо известных режимов самофокусировки и коллапса волновых полей. Особенности каскадного дробления и его пороговые характеристики исследованы в работах [4–7]. Нетривиальная динамика этого процесса привлекается для интерпретации аномального уширения спектра лазерного импульса в конденсированных средах [8, 12]. Особо следует отметить работы, в которых продемонстрировано совпадение результатов численного моделирования и данных специально поставленного эксперимента по наблюдению дробления импульса гауссовой формы [4, 5].

В работе [13] для двумерного случая ($\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$) показано, что эффекты концентрации энергии волнового поля при самосжатии должны наиболее сильно проявляться для пакетов, имеющих первоначально гиперболические поверхности уровня интенсивности, что отвечает топологии пространственного оператора уравнения (2). Очевидно, что в трехмерном случае роль эффектов самофокусировки должна усиливаться [14]. Данная работа посвящена более детальному аналитическому и численному исследованию нелинейной динамики класса трехмерных волновых пакетов, для которых имеет место коллапс.

В разд. 2 дан качественный анализ динамики аксиально-симметричных трехмерных распределений подковообразной формы. В разд. 3 приведены результаты численного исследования эволюции более широкого класса начальных распределений трубчатой формы.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим сначала структурные особенности динамики аксиально-симметричных распределений волнового поля, локализованных вблизи гиперболических поверхностей.

2.1. Качественное исследование структурных особенностей НУШ с гиперболическим пространственным оператором

Прежде всего обратим внимание на то, что уравнение (2) для функции, зависящей от автомодельной

переменной $\eta = \sqrt{r^2 - z^2}$ ($r^2 = x^2 + y^2$), преобразуется к виду

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (3)$$

В результате мы получили уравнение (3), которое описывает «сферически-симметричный» коллапс. Он относится к числу распределенных [15, 16] и отличается от более хорошо известного режима самофокусировки аксиально-симметричных пучков тем, что в зафокальной области происходит формирование протяженной во времени сингулярности. При этом важно отметить, что мощность, втекающая (безотражательно) в особенность, может заметно превышать критическую. Однако воспользоваться непосредственно известными результатами работ [15, 16] затруднительно. В рассматриваемом нами случае поле является нелокализованным вдоль гипербол $\eta_0^2 = r^2 - z^2$ и, следовательно, «точка», в которой возникает особенность, представляет собой поверхность конуса $|z| = r$. Внутри этой области ($|z| > r$) динамика соответствующего автомодельного распределения поля $\psi = \psi(t, \sqrt{z^2 - r^2})$ подчиняется уравнению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) отличается от (3) фактически лишь знаком перед «дифракционным» членом и, следовательно, описывает самодефокусировку волнового поля, т.е. имеет место смена режима самовоздействия. Сингулярные решения уравнения (3) с конечным потоком энергии в особенность найдены в работах [15, 16]. Они имеют особенность сходящейся сферической волны, модифицированной нелинейностью ($|\psi| \propto 1/\eta(\ln \eta)^{1/2}$). Очевидно, что эти решения описывают лишь возможную тенденцию поведения волнового поля, локализованного в фокусирующей области ($r > |z|$). Кроме того, они не отражают специфических особенностей задачи, связанных со сменой режима самовоздействия на конусе $r = |z|$.

2.2. Коллапс волновых пакетов, локализованных вблизи гипербол

Проведенное выше рассмотрение указывает на возможность нового сценария самовоздействия. В связи с этим возникает задача отыскания начальных распределений волнового поля, для которых автомодельный режим схлопывания является аттрактором.

Будем ориентироваться на распределения, локализованные вблизи гиперболических поверхностей. Далее удобно перейти к новым переменным

$$\zeta = (r^2 - z^2)/4, \quad z = z. \quad (5)$$

Такое преобразование позволяет исследовать единообразно эволюцию четного по z распределения волнового поля как в области с фокусирующей нелинейностью (вне конуса, $|z| < r$, что соответствует $\zeta > 0$), так и в дефокусирующей области (внутри конуса, $|z| > r$, или $\zeta < 0$). Для определенности будем рассматривать динамику самовоздействия в области пространства $0 < z < \infty$, $0 < r < \infty$ (в новых переменных $0 < z < \infty$, $-\infty < \zeta < \infty$). Преобразование уравнения и некоторые упрощения удобно провести, используя вариационный подход на основе лагранжиана. Действие для уравнения (2) имеет вид

$$S = \int \left(\frac{i}{2}(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) + |\nabla_{\perp}\psi|^2 - |\psi_z|^2 - \frac{|\psi|^4}{2} \right) r dr dz. \quad (6)$$

В новых переменных (5) приходим к следующему выражению для действия:

$$S = \int \left(\frac{i}{2}(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) + \zeta \left| \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|^2 + \frac{z}{2}(\psi_{\zeta}^*\psi_z + \psi_{\zeta}\psi_z^*) - \frac{|\psi|^4}{2} \right) d\zeta dz. \quad (7)$$

Для иллюстрации процессов в системе воспользуемся приемом, традиционно используемым в теории самофокусировки волн: предположим, что структура волнового поля по z не изменяется в процессе эволюции и имеет, например, фиксированную гауссову форму:

$$\psi = \frac{u(\zeta, t)}{\sqrt{b}} \exp\left(-\frac{z^2}{2b^2}\right). \quad (8)$$

В результате приходим к следующему выражению для укороченного действия:

$$S_c = \int \left(\frac{i}{2}(uu_t^* - u^*u_t) + \zeta \left| \frac{\partial u}{\partial\zeta} \right|^2 - \frac{|u|^4}{2b\sqrt{2}} \right) d\zeta. \quad (9)$$

Отсюда находим уравнение Эйлера, которое описывает эволюцию волнового поля по «гиперболам»:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\zeta} \zeta \frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{|u|^2 u}{2b\sqrt{2}} = 0. \quad (10)$$

Оно представляет собой вариационное обобщение уравнений (3) и (4) для распределений поля, ограниченных вдоль гипербол (5). Видно, что при таком подходе удалось выделить явно основную особенность рассматриваемой задачи, связанную со смелой режима самовоздействия. В области с $\zeta > 0$ дифракционный член в (10) положителен и возможна самофокусировка волнового поля. При $\zeta < 0$ дисперсионный член отрицателен и уравнение (10) описывает самодефокусировку. На границе ($\zeta = 0$), где дифракция волнового поля компенсируется нормальной дисперсией среды, дисперсионный член обращается в нуль. Отметим здесь, что имеют смысл решения уравнения (10) с ненулевым потоком энергии к особенности при $\zeta \approx 0$.

Рассмотрим сначала некоторые особенности самовоздействия с помощью анализа точных интегральных соотношений, следующих из (10). Прежде всего отметим, что, как и исходное (2), уравнение (10) имеет интегралы: число квантов и гамильтониан:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 d\zeta, \quad H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\zeta \left| \frac{\partial u}{\partial\zeta} \right|^2 - \frac{u^4}{2b\sqrt{2}} \right) d\zeta. \quad (11)$$

Используя их, можно показать, что характерный «радиус» распределения (8), локализованного вблизи однополостного гиперboloида ($r^2 - z^2 = \rho$),

$$\rho(t) = \int \frac{\zeta |u|^2 d\zeta}{I}, \quad (12)$$

изменяется равноускоренно,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{2H}{I}. \quad (13)$$

В наиболее интересном случае отрицательного гамильтониана ($H < 0$) характерный радиус волнового пакета, сосредоточенного в фокусирующей области ($\rho \geq 0$), «ускоряется» к границе раздела областей, пересекает границу и оказывается в дефокусирующей области ($\rho < 0$), где продолжает двигаться вдоль оси z с тем же темпом ускорения. Отрицательные значения ρ соответствуют распределениям поля, локализованным вблизи двухполостного гиперboloида. Отметим здесь, что момент первого порядка, ρ , распределения (8) связан с моментами второго порядка в цилиндрической системе координат соотношением

$$\rho(t) = \int (r^2 - z^2) |\psi(r^2 - z^2, z, t)|^2 r dr dz. \quad (14)$$

Для распределений, локализованных вблизи гипербола, он приобретает самостоятельный смысл, поскольку определяет центральную гиперболу, около которой сосредоточено распределение поля. Уравнение (13) для его изменения в рассматриваемом нами приближении является очевидным следствием уравнений для моментов второго порядка [2].

Для определения изменения характерного масштаба волнового пакета,двигающегося с ускорением (13), воспользуемся вариационной процедурой. Минимизируем укороченное действие (9) на классе пробных функций гауссовой формы

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{a}} \exp -\frac{(\zeta - \rho)^2}{2a^2} + i\phi(\zeta - \rho)^2, \quad (15)$$

локализованных вблизи центральной гиперболы (12). Подставляя (15) в (9) и интегрируя по ζ , найдем соответствующее укороченное действие и уравнение (Эйлера) движения

$$\rho a_{tt} - a_t \rho_t = \frac{\rho^3}{a^3} - \frac{\rho^2 u_0^2}{4a^2 b}, \quad (16)$$

описывающее изменение характерного размера области локализации волнового поля $a(t)$ в процессе эволюции системы.

В интересующем нас случае отрицательного гамма-контраста ($H < 0$) можно найти приближенное решение уравнений (13), (16). Вблизи границы, на которой «дисперсия» меняет знак ($\zeta \approx 0$), характерный радиус уменьшается с постоянной скоростью по закону

$$\rho \approx 2(\rho_0 |H|/I)^{1/2} (t_0 - t), \quad (17)$$

где ρ_0 — начальное положение центральной гиперболы, $t_0 = (\rho_0 I/|H|)^{1/2}$ — момент времени, когда центральная гипербола пересекает границу $\zeta = 0$. В этих условиях уравнение (16) имеет линейное по $t_0 - t$ решение:

$$a \approx A_0 (t_0 - t), \quad A_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{u_0^2}{b}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_0}{a_0}\right)^{1/6}. \quad (18)$$

Это означает, что по мере приближения центральной гиперболы к границе смены режима самовоздействия (самофокусировки на самодефокусировку) амплитуда поля обращается в бесконечность по закону

$$\psi(\zeta \rightarrow 0, t \rightarrow t_0) \propto (t_0 - t)^{-1/2}, \quad (19)$$

т. е. реализуется коллапс волнового пакета.

2.3. Автомодельные структуры

Следует отметить, что вблизи особенности (т. е. в условиях уменьшения характерного радиуса распределения (15) по закону (17)), имеет место и точное автомодельное решение обсуждаемого уравнения (10) вида

$$u = \frac{v(\zeta/(t - t_0))}{\sqrt{2b\sqrt{2}(t - t_0)}} \times \exp \left\{ i \left[\phi_0(t - t_0) + \frac{\zeta}{2(t - t_0)} \right] \right\}. \quad (20)$$

Структура автомодельного решения определяется уравнением

$$\eta \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \frac{dv}{d\eta} + \frac{\eta}{4} v - hv + v^3 = 0, \quad (21)$$

где $\eta = \zeta/t$. Параметр h связан с ϕ_0 соотношением $\partial\phi_0/\partial t = h/t$.

Рассматриваемая автомодельная мода, локализованная вблизи равномерно движущейся центральной гиперболы, не является строго локализованной при $\eta \rightarrow \infty$. Подбором условий при $\eta = 0$ удается существенным образом уменьшить амплитуду убегающей волны. Для $\eta \rightarrow 0$ из (21) нетрудно найти при $v(\zeta \rightarrow 0) \rightarrow 0$ соотношение

$$\frac{dv}{d\eta}(\eta = 0) = hv(\eta = 0). \quad (22)$$

Таким образом, задача отыскания автомодельной моды определяется одним параметром $v(\eta = 0) = v_0$. Использование соотношения (22) для заданного значения h дает возможность посредством изменения v_0 минимизировать амплитуду убегающей волны. На рис. 1 представлена структура автомодельной моды для $h = 10$. Для значения $v_0 = 3.15941666 \cdot 10^{-7}$ амплитуда убегающей волны составляла $2 \cdot 10^{-5}$ (см. вставку на рис. 1). «Энергия» I (см. (11)) в автомодельной моде возрастает с увеличением h . Увеличивая v_0 (при фиксированном h), можно найти автомодельную моду с двумя максимумами. Соответствующее значение I возрастет.

В заключение этого раздела оценим темп расплывания волнового поля по z в условиях коллапса (19). Из исходного уравнения (2) для эффективного продольного размера локализованного распределения, $b^2 = \int z^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}$, можно получить соотношение

$$\frac{d^2 b^2}{dt^2} = 8 \int \left(|\psi_z|^2 + \frac{|\psi|^4}{2} \right) d\mathbf{r}.$$

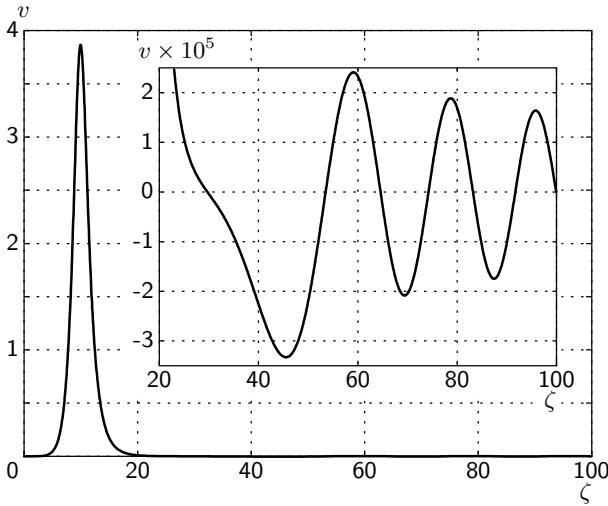


Рис. 1. Структура локализованной автомоделной моды для $h = 10$, $v(\zeta = 0) = v_0 = 3.15941666 \cdot 10^{-7}$. На вставке показано в увеличенном масштабе асимптотическое поведение решения при больших ζ

Подставляя в это соотношение (12), (15), получим уравнение

$$\frac{d^2 b^2}{dt^2} \approx \frac{u_0^2}{4ab}, \tag{23}$$

описывающее изменение характерного продольного размера поля. Интегрируя (23) для a , определяемого выражением (18), в случае коллимированного волнового пакета ($db/dt(t = 0) = 0$) нетрудно найти

$$b^2 \approx b_0^2 + \frac{u_0^2}{4A_0 b_0} (t_0 - t) \ln |t - t_0|. \tag{24}$$

Отсюда видно, что характерный размер волнового поля в продольном направлении практически не изменяется в процессе «схлопывания» волнового поля к оси. Более того, полученное изменение $b(t)$ не меняет характера поведения поля вблизи особенности ($\zeta \rightarrow 0$). Это оправдывает сделанное выше приближение фиксированной структуры поля вдоль гипербола (8), при сохранении которой имеет место коллапс.

Таким образом, динамика самовоздействия волнового пакета, локализованного вблизи гипербола $\rho_0 = r^2 - z^2 > 0$, в среде с нормальной дисперсией групповой скорости представляется следующей. Волновой пакет с погонной мощностью, превышающей критическую (соответствующую отрицательному гамильтониану (11)), практически не расплываясь вдоль гипербол, сжимается в поперечном

направлении и схлопывается к оси системы. В результате «падения волнового пакета на центр» происходит неограниченное усиление поля вблизи оси системы, т. е. происходит волновой коллапс.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Продолжим исследование динамики системы численными методами. Рассмотрим характерные особенности долговременной эволюции трубчатых волновых пакетов. Численное моделирование динамики аксиально-симметричных локализованных распределений проводилось с помощью кода, использующего быстрое преобразование Фурье по z и метод сеток по r .

Детальные численные исследования позволили выделить довольно широкий класс начальных распределений, которые в своей эволюции сначала локализовались вблизи гиперboloидов, затем смещались к оси системы. В результате поле вблизи начала координат быстро возрастало и решение, точность которого контролировалась по интегралам уравнения (2), теряло смысл. Для стабилизации коллапса и исследования дальнейшей эволюции системы были использованы ставшие уже общепринятыми модельные способы регуляризации исходного уравнения (2). Они связаны с учетом насыщения нелинейности или нелинейного поглощения излучения в сильных полях. В консервативном случае исследование эволюции поля проводилось на основе следующего обобщения уравнения (2):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{|\psi|^2 \psi}{1 + |\psi|^2 / \psi_s^2} = 0, \tag{25}$$

где ψ_s — поле насыщения нелинейности.

Другой механизм стабилизации коллапса, связанный с учетом нелинейной диссипации, используется при численном моделировании для иллюстрации безотражательного поглощения волнового поля в сингулярности. Особенности коллапса в рассматриваемом случае в условиях смены режима самовоздействия исследовались на основе уравнения

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (|\psi|^2 + i\delta |\psi|^{2n}) \psi = 0, \tag{26}$$

где δ — параметр нелинейной диссипации. Расчеты проводились при $n = 3$ и 4.

Сначала исследуем динамику самовоздействия специального вида начальных распределений волнового поля, локализованных вблизи гиперболических

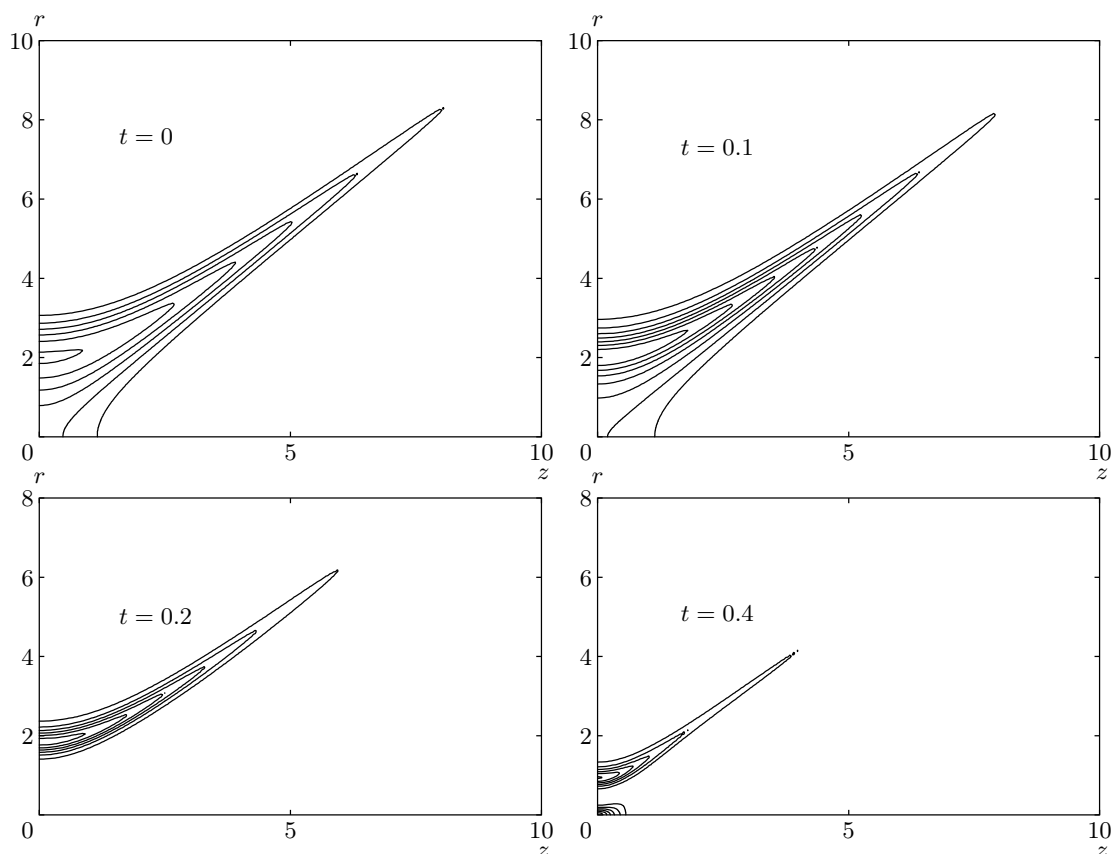


Рис. 2. Эволюция аксиально-симметричного волнового пакета подковообразной формы в процессе «падения на центр». Изображены линии уровня $|\psi(r, z, t = t_n)|^2$

поверхностей. Основные этапы эволюции системы в этом случае рассмотрены выше аналитически. Для сравнения результатов с данными численного моделирования исследовано поведение моментов распределения волнового поля. Особенности эволюции более реального распределения волнового поля типа трубчатого волнового пакета рассмотрены в конце этого раздела.

3.1. Численное исследование коллапса волновых пакетов, локализованных вблизи гипербол

Описанная выше картина самовоздействия подтверждается численным исследованием динамики распределений с начальной гауссовой формой

$$\psi = \frac{\psi_0}{a_r} \exp \left[-\frac{(r^2 - z^2 - a_r^2)^2}{2a_r^4} - \frac{z^2}{2a_z^2} \right], \quad (27)$$

локализованной вблизи гипербол $r^2 - z^2 = a_r^2$. На рис. 2 изображены линии уровня функции $|\psi(r, z, t)|^2$ в последовательные моменты времени для параметров $\psi_0 = 7$, $a_r = 2$, $a_z = 6$. Соответствующее значение гамильтониана (11) является отрицательным. Видно, что на начальной стадии эволюция волнового пакета происходит преимущественно в поперечном направлении. В результате распределение поля сжимается к «центральной» гиперболе $r^2 - z^2 = 4$. При $t > 0.2$ заметным становится процесс смещения распределения волнового поля к прямой (конической поверхности), разделяющей области с разными режимами самовоздействия. Этим, а также отсутствием дробления волнового пакета вдоль «опорной» гиперболы эволюция системы отличается от соответствующей картины в двумерном случае [13]. Видимо, в результате смещения волнового поля к оси системы неустойчивость продольного дробления не успевает развиваться. Такой вывод можно сделать, анализируя тонкие детали структурных изменений линий уровня $|\psi|$ (а не $|\psi|^2$), соответству-

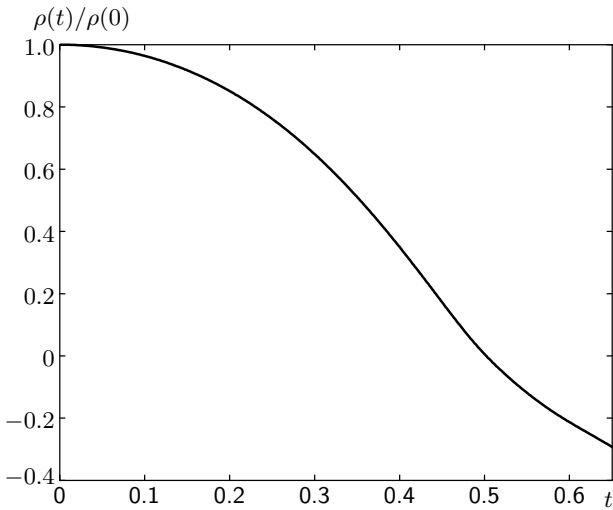


Рис. 3. Зависимость нормированной (на начальную) координаты центра масс волнового пакета, $\rho(t)/\rho(0)$, от времени

ющих начальным условиям, при которых процесс падения на центр замедлен. Один из таких вариантов мы приводим ниже при рассмотрении трубчатого волнового пакета. В результате указанных процессов (сжатия и смещения) поле вблизи начала координат начинает быстро возрастать, и при $t \approx 0.45$ численное решение уравнения (2) теряет смысл.

Рассмотрим сначала структуру волнового поля в фокальной области при $t > 0.4$ в консервативном случае на основе уравнения (25) (при значении поля насыщения нелинейности $\psi_s = 10$).

Прежде всего отметим, что в течение процесса схлопывания характерный радиус волнового пакета (рис. 3) ускоренно движется к оси системы ($z = 0$). Чтобы подчеркнуть тонкие детали в эволюции распределения волнового поля, на рис. 4 изображены линии уровня $|\psi|$ (а не $|\psi|^2$). Видно, что сжатие волнового пакета к центру системы ($r = 0, z = 0$) сопровождается образованием сильнонеоднородной (абerrационной) структуры в фокальной области. Сравнение структуры линий уровней $|\psi|$ и $|\psi|^2$ свидетельствует о формировании двухмасштабного распределения поля, локализованного вблизи центра системы ($r \approx 0, z \approx 0$). Амплитуда поля в максимуме достигает значения, на порядок превышающего поле насыщения нелинейности (рис. 5), что свидетельствует о высоком темпе схлопывания.

В динамике схлопывания отчетливо представлены два процесса (см. рис. 4). Прежде всего отметим, что часть поля отражается и уходит от оси системы. Поведение другой части качественно такое же, как в

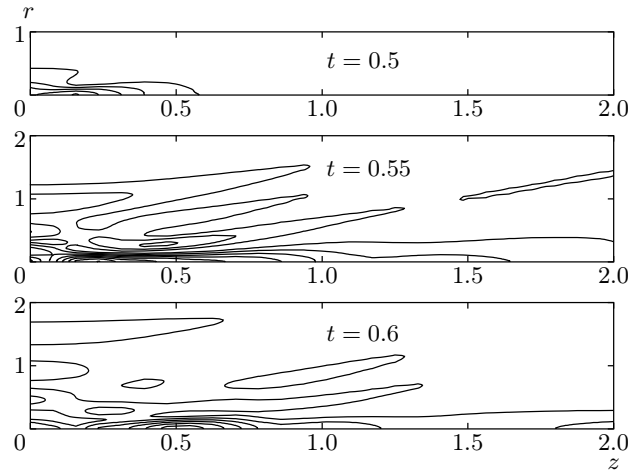


Рис. 4. Дальнейшая эволюция (см. рис. 2) волнового пакета в фокальной области при учете насыщения нелинейности. Изображены линии уровня поля $|\psi|$

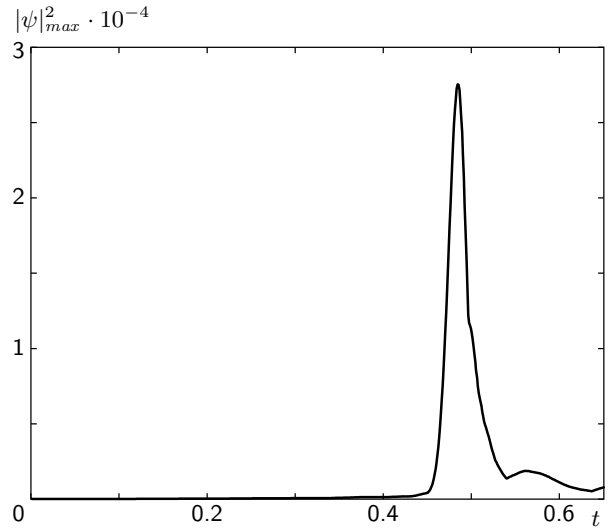


Рис. 5. Зависимость квадрата амплитуды поля в максимуме от времени в процессе консервативного коллапса

случае начальных распределений гауссовой формы [2–5], но протекает в условиях сильного насыщения нелинейности. В результате неоднородного сжатия по z (центральная часть распределения, где амплитуда больше, интенсивнее сжимается по радиусу) в центре образуется перетяжка (см. рис. 4). Она углубляется, и волновой пакет, таким образом, делится на две части, которые двигаются по оси z в разные стороны. Поскольку амплитуда поля в волновом пакете больше насыщающей ($|\psi| > \psi_s$), пакет расширяется

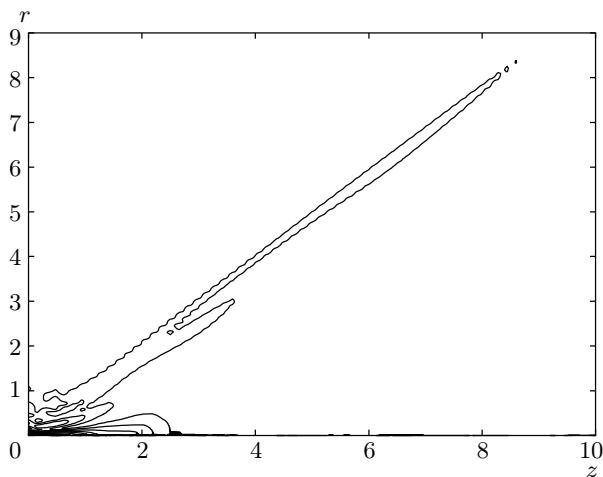


Рис. 6. Структура поля при диссипативной стабилизации коллапса (параметр диссипации $\delta = 2 \cdot 10^{-8}$) в момент времени, соответствующий пересечению центром масс волнового пакета (см. рис. 3) границы смены режимов самовоздействия ($\rho(t = 0.5) = 0$). Изображены линии уровня поля $|\psi(r, z)|$ для тех же начальных условий, что и на рис. 2

по z и дробится практически без изменения поперечного размера.

Перейдем к обсуждению диссипативного случая. Прежде всего отметим, что положение характерного радиуса распределения поля зависит от времени практически так же, как и при учете насыщения нелинейности (см. рис. 3) — приближается равноускоренно к оси системы. Амплитуда максимума поля в процессе коллапса возрастает примерно (больше) на порядок. Это соответствует выбранным параметрам, однако она заметно меньше, чем в случае насыщения нелинейности. Энергия волнового пакета в процессе схлопывания уменьшалась на 30 %.

Основные структурные различия проявляются в области сильного поля. На рис. 6 представлены линии уровня $|\psi|$. Из сравнения с соответствующей картиной для консервативного случая (см. рис. 4) можно видеть две отличительные особенности. Во-первых, следует отметить отсутствие «отражения» от оси системы. Во-вторых, волновой пакет вблизи конической поверхности (на рис. 6 это прямые $r = z$), разделяющей области с разными режимами самовоздействия, как бы задерживается на время, сравнимое с временем коллапса. В этом смысле рассматриваемая ситуация более похожа на сферически-симметричный коллапс. Однако полностью поглощения волнового поля в области особенно-

сти ($r = |z|$) не происходит, и ослабленный волновой пакет проникает в дефокусирующую область.

Непосредственно вблизи центра ($r \approx z \approx 0$) структура поля оказывается существенно более неоднородной, чем в консервативном случае.

3.2. Исследование коллапса трубчатых волновых пакетов

Далее рассмотрим эволюцию более реального распределения волнового пакета:

$$\psi = \frac{\psi_0 r^4}{a_r^5} \exp \left[-\frac{r^2}{2a_r^2} - \frac{z^2}{2a_z^2} \right], \quad (28)$$

моделирующего, например, структуру поля полого (около оси системы) пространственно-ограниченного волнового пакета. Хорошо известно, что однородные по z трубчатые волновые пучки при мощности, превышающей критическую, сжимаются в поперечном направлении и самофокусируются к оси z . Поэтому можно ожидать, что в неоднородном (по z) распределении типа (28) центральная часть ($z \approx 0$) будет фокусироваться к оси ($r = 0$) быстрее, чем периферийная ($z \sim a_z$). В результате образуется распределение волнового поля подковообразной формы, особенности динамики которого мы исследовали выше.

Численные расчеты подтверждают сделанный прогноз. Для определенности рассмотрим сначала консервативный случай с насыщением нелинейности на основе уравнения (25) с тем же самым значением насыщающего поля ($\psi_s = 10$), затем приведем дополнительные результаты, относящиеся к диссипативной стабилизации коллапса. Значения параметров выбирались следующими: $\psi_0 = 0.2$, $a_r = 2$, $a_z = 12$. При этом максимум поля оказывался на расстоянии от оси системы в два раза большем, чем в предыдущих вариантах. В этих условиях система выходила на режим, исследованный ранее.

Результаты численного расчета представлены на рис. 7. Видно, что довольно продолжительное время занимает самофокусировка волнового пучка, которая происходит без изменения характерного радиуса трубчатого распределения поля. На следующем этапе происходит формирование подковообразной структуры. Этот процесс сопровождается развитием неустойчивости дробления. Однако в рассматриваемом нами случае, в отличие от двумерного [13], она не играет заметной роли и стабилизируется смещением подковообразного распределения к оси системы. В процессе падения на центр импульс дробит-

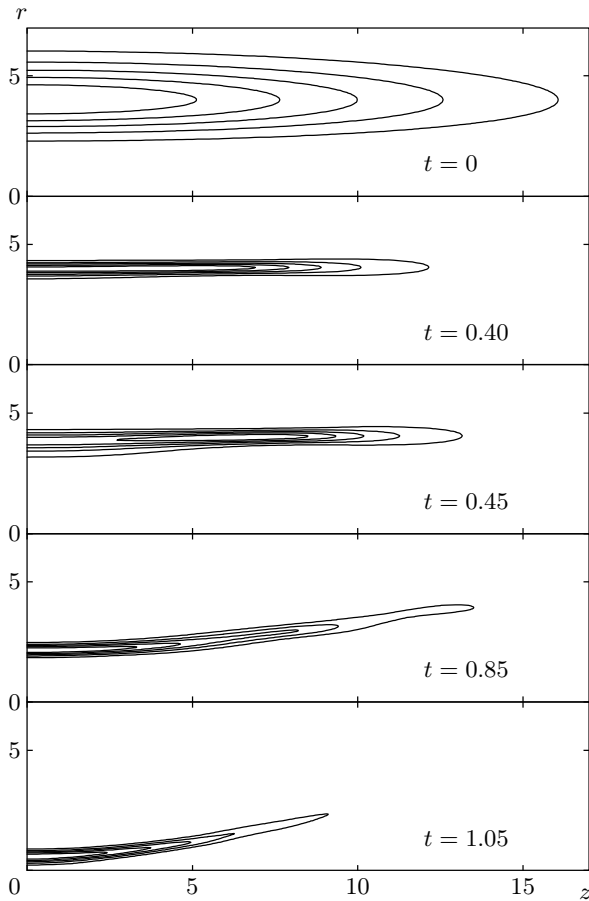


Рис. 7. Эволюция трубчатого волнового пакета при коллапсе в консервативном случае. Изображены линии уровня $|\psi(r, z, t = t_n)|^2$

ся пополам. Изображение линий уровня $|\psi|$ в увеличенном масштабе (рис. 8) дает представление о точной структуре волнового поля в фокальной области. Сравнение этой картины со структурой линий уровня $|\psi|^2$ показывает, что распределение волнового поля является двухмасштабным. Центральная часть импульса имеет амплитуду несколько меньшую, чем в соответствующем варианте первоначального подковообразного распределения, локализованного вблизи гипербол. Периферийная часть волнового пакета состоит из отраженной волны (позади импульса) и расплывшегося вдоль «подковы» волнового поля, которое продолжает двигаться к оси системы. Из-за аксиальной симметрии задачи эта часть волнового поля усиливается вблизи оси системы (оси z). Благодаря последнему обстоятельству, видимо, максимальная амплитуда волнового пакета, линии уровня которого представлены на рис. 8, в процессе довольно длительной эволюции практически не

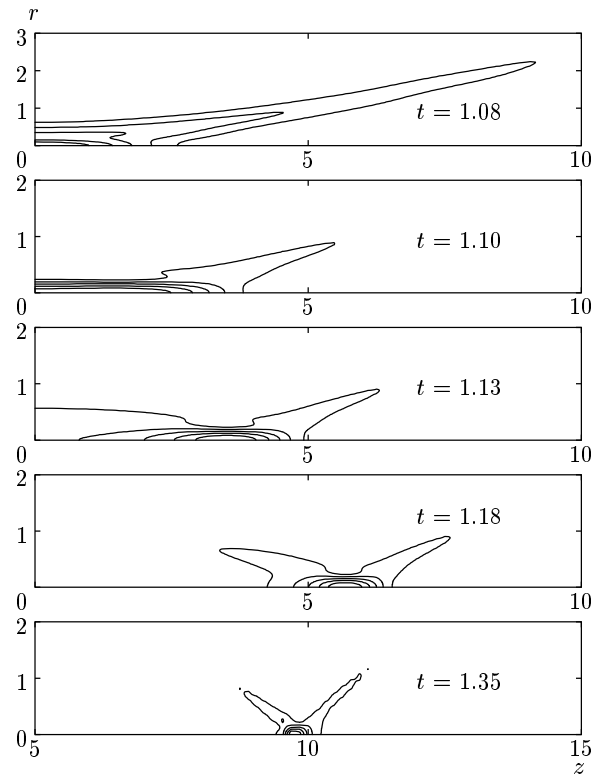


Рис. 8. Дальнейшая эволюция (см. рис. 7) трубчатого волнового пакета в консервативном случае вблизи оси системы. Изображены линии уровня $|\psi(r, z, t = t_n)|$

меняется.

В диссипативном случае картина динамики самовоздействия во многом похожа. Различие состоит в том, что отсутствует отраженная волна. Область сильного поля, создаваемая периферийной частью подковообразной структуры вблизи оси системы (оси z), становится областью сильного поглощения. Полное нелинейное поглощение электромагнитного импульса на трассе распространения в этом варианте численного счета составило около 50%. Особенности динамики самовоздействия детально описаны в [14].

Рассмотрим более подробно эволюцию трубчатого волнового пакета (28) с амплитудой, большей в полтора раза ($\psi_0 = 0.3$). В консервативном случае такое увеличение начальной амплитуды приводит к заметному усложнению численных расчетов, требуя уменьшения счетного шага, увеличения размерности массивов, уменьшения и так небольшого значения насыщающего поля и др. Поэтому дальнейшие результаты приведем для диссипативного механизма стабилизации коллапса. Из рис. 9 видно,

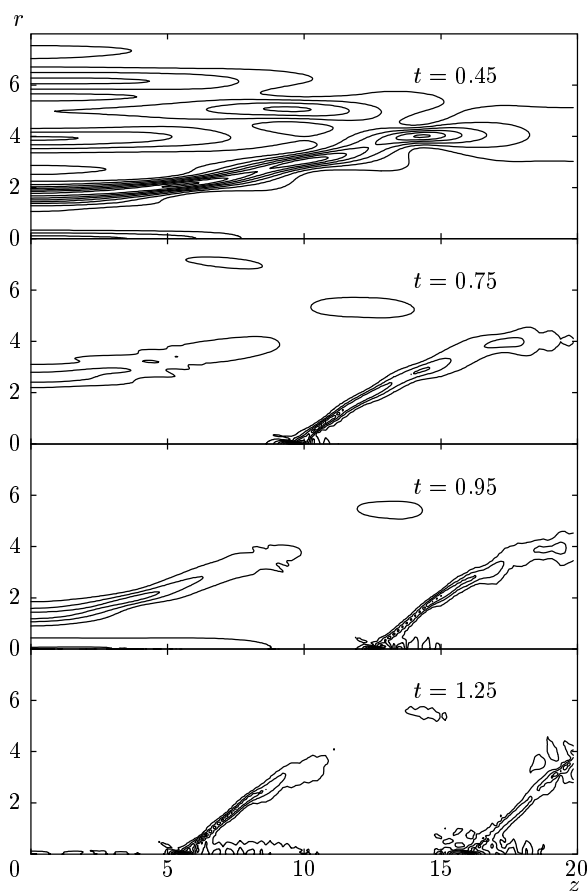


Рис. 9. Эволюция аксиально-симметричного первоначально трубчатого волнового пакета с амплитудой $\psi_0 = 0.3$ при диссипативной стабилизации коллапса, $\delta = 1.8 \cdot 10^{-5}$. Изображены линии уровня $|\psi(r, z, t = t_n)|$

что сначала наряду с самофокусировкой трубчатого волнового пучка, как и на рис. 7, начинается его дробление в продольном направлении. На следующем этапе происходит формирование подковообразной структуры и смещение ее к оси системы. При этом заметная часть волнового пакета остается локализованной в области первоначального расположения трубчатого пучка. Отметим, что и в этом варианте развитие неустойчивости дробления не приводит к каким-либо катастрофическим последствиям ни для подковообразной структуры, ни для оставшейся части волнового пакета. Можно сказать, что дробление ослабляется развитием самофокусировочной неустойчивости по радиусу пучка. После формирования подковообразной структуры образуется второй кольцевой слой, который эволюционирует подобным же образом. В результате деления в цеп-

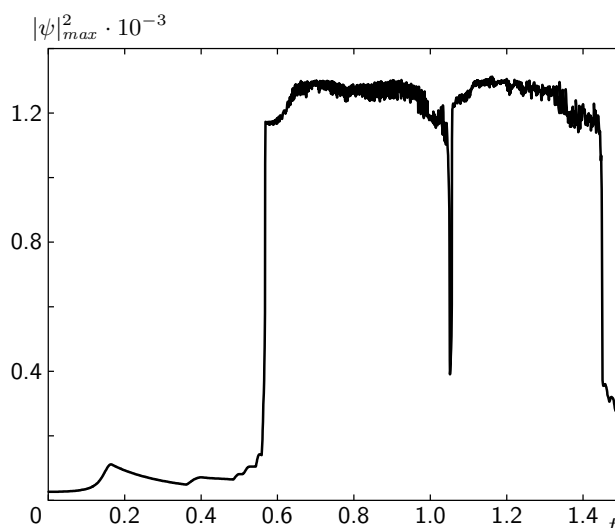


Рис. 10. Зависимость максимальной амплитуды поля, $|\psi|_{max}^2$, от времени

тре ($r_{\perp} = 0, z = 0$) образуются две пары областей сильного поля конической формы, которые движутся вдоль оси системы в противоположные стороны. Максимальное значение амплитуды поля в фокальной области остается практически постоянным (рис. 10). Резкий минимум на зависимости $|\psi|_{max}^2(t)$ при $t \approx 1.1$ связан со смещением области сильного поглощения от первого импульса ко второму. Полное нелинейное поглощение электромагнитного поля на трассе распространения возросло до 70 %.

Таким образом, можно сказать, что представленные выше численные расчеты динамики самовоздействия трубчатых начальных распределений поля подтверждают аналитические выводы разд. 2. Главным образом, это касается формирования подковообразных полевых структур автомодельного типа и последующего ускоренного движения к оси системы. Следует отметить также возможность существования автомодельной моды более высокого порядка (с двумя и более максимумами) в рамках уравнения (21), которая проявляется в виде возбуждения двух последовательных подковообразных структур.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели новый сценарий динамики самовоздействия аксиально-симметричного волнового пакета в системе, описываемой нелинейным уравнением Шредингера с гиперболическим простран-

ственным оператором. Определен класс начальных распределений волнового поля, эволюция которых позволяет проиллюстрировать специфические особенности исследуемого уравнения (2). В конкуренции процессов самофокусировочного сжатия и дисперсионного расплывания волнового поля по ортогональным направлениям преобладающим для этих начальных условий оказывается самофокусировка. Она приводит к сужению трубчатых волновых пакетов в поперечном направлении, формированию подковообразной структуры, смещению волнового поля к оси системы, что, в конечном счете (в силу цилиндрической симметрии задачи), создает режим коллапса. Расплывание подковообразного распределения в продольном направлении практически не сказывается на динамике образования сингулярности. Однако очевидно, что в режиме падения на центр периферийная часть волнового пакета достигнет оси системы на более поздних временах и будет способствовать поддержанию поля на высоком уровне в течение всего времени взаимодействия. В этом смысле рассмотренный тип коллапса следует отнести к распределенным. Он во многом аналогичен сферически-симметричному коллапсу в НУШ с эллиптическим пространственным оператором. Однако отсутствие симметризации распределения волнового пакета в рассматриваемом случае и преобладание самофокусировки над дисперсией делают его похожим и на аксиально-симметричный коллапс в НУШ. Гиперболичность исходного уравнения (2) приводит к тому, что дробление волнового пакета вдоль оси (вблизи $r = 0$, $z = 0$) сопровождается формированием нескольких пар областей сильного поля («горячих» точек), которые двигаются в разные стороны. Численное исследование этого процесса в условиях нелинейной стабилизации коллапса показывает, что горячие точки проходят расстояния, превышающие продольную длину импульса, без заметного изменения пространственной структуры.

В приложении к нелинейной оптике рассмотренный режим самовоздействия заслуживает детального экспериментального исследования. В связи с этим следует, в первую очередь, дополнительно исследовать устойчивость коллапса по отношению к потере аксиальной симметрии, нарушению в процессе коллапса приближения медленности изменения огибающей и параксиального приближения [17]. Эти эффекты могут играть существенную роль при коллапсе волновых пакетов с мощностью, намного превышающей критическую мощность самофокусировки. Довольно очевидной представляется перспективность использования

такого режима самовоздействия, например, для создания искусственных фотонных кристаллов и каналов в конденсированных средах с целью применения таких структур в дальнейшем для преобразования частоты излучения и ускорения заряженных частиц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 02-02-17277, 01-02-17388). Авторы признательны А. А. Балакину за определение структуры автомодельной моды (см. рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. ВУЗов, Радиофизика **10**, 539 (1967).
2. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова и др., Письма в ЖЭТФ **44**, 12 (1986); Изв. ВУЗов, Радиофизика **29**, 1137 (1986).
3. J. E. Rothenberg, Opt. Lett. **17**, 583 (1992); P. Cherven and V. Petrov, Opt. Lett. **17**, 172 (1992); Opt. Comm. **87**, 28 (1992).
4. J. E. Ranka, R. W. Schrimmer, and A. L. Gaeta, Phys. Rev. Lett. **77**, 3783 (1996).
5. A. A. Zozulya, S. A. Diddams, A. G. Van Engen, and T. S. Clement, Phys. Rev. Lett. **83**, 1430 (1999); A. A. Zozulya, S. A. Diddams, and T. S. Clement, Phys. Rev. A **58**, 3303 (1998).
6. G. G. Luther, A. C. Newell, and J. V. Moloney, Physica A **49**, 4085 (1994); G. G. Luther, A. C. Newell, J. V. Moloney et al., Opt. Lett. **19**, 789, 862 (1994).
7. L. Berge and J. J. Rasmussen, Phys. Plasmas **3**, 824 (1996); L. Berge, J. J. Rasmussen, E. A. Kuznetsov et al., J. Opt. Soc. Amer. B **20**, 1879 (1996); L. Berge, E. A. Kuznetsov, and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E **53**, R1340 (1996); G. Fibich, V. M. Malkin, and G. C. Papanicolaou, Phys. Rev. A **52**, 4218 (1995); K. Germashevski, B. Grauer, L. Berge et al., Physica D **151**, 175 (2001).
8. A. Brouder and S. I. Chin, Phys. Rev. Lett. **80**, 4406 (1998).
9. Н. Н. Розанов, ЖЭТФ **113**, 513 (1998).
10. А. Г. Литвак, Т. А. Петрова, А. М. Сергеев, А. Д. Юнаковский, Физика плазмы **9**, 495 (1983); А. Г. Литвак, А. М. Сергеев, Н. А. Шахова, Письма в ЖТФ **5**, 862 (1979).

11. J. R. Myra and C. S. Liu, *Phys. Fluids* **23**, 2258 (1980).
12. I. G. Koprnikov, Akira Suda, Peggian Wang, and Katsuma Midorikawa, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3847 (2000).
13. А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Э. М. Шер, *ЖЭТФ* **118**, 1463 (2000); A. G. Litvak, V. A. Mironov, and E. V. Sher, *Phys. Rev. E* **61**, 891 (2000).
14. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 655 (2002).
15. С. Н. Власов, Л. В. Пискунова, В. И. Таланов, *ЖЭТФ* **95**, 1945 (1989); С. Н. Власов, *Изв. ВУЗов, Радиофизика* **42**, 468 (1999).
16. В. Е. Захаров, Н. Е. Косматов, В. Ф. Швец, *Письма в ЖЭТФ* **49**, 431 (1989); В. М. Малкин, *Письма в ЖЭТФ* **48**, 603 (1988).
17. В. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ РАН, Н. Новгород (1997); Н. Н. Розанов, Н. В. Высотина, А. Г. Владимиров, *ЖЭТФ* **118**, 1307 (2000).