

О НЕЛИНЕЙНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИ ОДНООСНЫХ СРЕДАХ

С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский*

*Калининградский государственный университет
236041, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 13 февраля 2002 г.,
после переработки 4 февраля 2003 г.

На основе квантовомеханической модели материального отклика получены нелинейные волновые уравнения, описывающие распространение оптических импульсов длительностью до одного периода электромагнитных колебаний в прозрачных средах с одноосной оптической анизотропией. Учтены электронная и электронно-колебательная нелинейности, электронная и ионная дисперсии, а также дифракция. Показано, что учет только электронного отклика приводит к системе двух материальных уравнений для обыкновенной и необыкновенной компонент поляризации, которая при распространении импульса поперек оптической оси сводится к неоднородной модели типа Хенона–Хейлеса и обобщает, таким образом, классическую электронную модель Лоренца. Для учета процессов вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) получен анизотропный аналог квантовомеханической модели Бломбергера–Шена, учитывающий динамику населенностей ВКР-подуровней. Исследован вопрос о генерации видеоимпульса необыкновенной волны с помощью высокочастотной обыкновенной составляющей в режиме резонанса Захарова–Бенни. Рассмотрены некоторые аналитические солитоноподобные решения в виде бегущих связанных состояний обыкновенного и необыкновенного видеоимпульсов, соответствующие различным режимам двулучепреломления, и проведен их анализ на устойчивость по отношению к самофокусировке.

PACS: 42.50.Md

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время все большую популярность приобретают работы по взаимодействию световых импульсов длительностью до одного периода электромагнитных колебаний (видеоимпульсов или предельно коротких импульсов (ПКИ)) с веществом. Не в последнюю очередь это вызвано генерацией ПКИ в лабораторных условиях [1–6]. При этом абсолютная длительность τ_p таких сигналов колеблется в пределах от сотен [6] до единиц [7] фемтосекунд. Термин «предельно короткие импульсы» к настоящему времени получает все большее распространение (см. обзоры [4, 5, 8], а также статью [9]). Английским эквивалентом данного термина являются «extremely short pulses» или «ultimately short pulses». Правда, к настоящему времени еще заме-

чается некоторый разнобой в соответствующей терминологии: иногда говорят и пишут об «ультракоротких» или «сверхкоротких» импульсах. Данные термины нам представляются не совсем удачными, так как их иногда применяют к квазимонохроматическим импульсам, подчеркивая их малую длительность в абсолютном смысле. Часто говорят об «импульсах в несколько периодов колебаний» (английский вариант «few-cycle pulses»). Последний термин особенно распространен в зарубежной литературе [3]. Иногда можно встретить термин «видеоимпульсы».

Вследствие того, что ПКИ содержит порядка одного периода колебаний, его спектр настолько широк, что понятие несущей частоты теряет свой смысл. По понятным причинам при теоретических исследованиях взаимодействия ПКИ с веществом неприменимо стандартное для оптики квазимонохроматических импульсов приближение медленно

*E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

меняющихся амплитуд и фаз (ММАФ). Условие квазимонохроматичности состоит в том, что спектральная ширина импульса $\delta\omega \sim 1/\tau_p$ значительно меньше его несущей частоты ω , т. е. $\omega\tau_p \gg 1$. Эффекты нелинейного распространения ПКИ в изотропных средах исследованы достаточно подробно [8–26]. Из-за наличия в таких средах центра симметрии в разложении поляризации \mathbf{P} по степеням электрического поля \mathbf{E} присутствуют лишь нечетные степени последнего. Такое разложение можно провести, если спектр импульса принадлежит области оптической прозрачности среды, т. е. при условиях [10, 13, 22–26]

$$(\omega_0/\bar{\omega})^{-1} \ll 1, \quad (\omega_0/\delta\omega)^{-1} \ll 1, \quad (1)$$

где ω_0 — характерная резонансная частота среды, $\bar{\omega}$ — частота, соответствующая центру спектра импульса.

Смысл условий (1) заключается в том, что частоты Фурье-компонент импульса лежат значительно ниже частот резонансного электронно-оптического поглощения. В случае квазимонохроматических импульсов $\bar{\omega} \approx \omega$, $\delta\omega \ll \omega$. Тогда первое условие (1) имеет вид $(\omega_0/\omega)^{-1} \ll 1$, а второе выполняется автоматически. В другом предельном случае $\bar{\omega}\tau_p \ll 1$, соответствующем видеоимпульсам, $\bar{\omega} \ll \delta\omega \sim 1/\tau_p$, достаточно потребовать выполнения второго условия, которое можно переписать в виде $(\omega_0\tau_p)^{-1} \ll 1$. В общем случае необходимо выполнение обоих условий (1).

В силу данного условия в спектре ПКИ отсутствуют резонансные Фурье-компоненты, поэтому взаимодействие со средой является относительно слабым [12].

Анизотропия среды является необходимым условием наличия четных степеней электрического поля в упомянутом выше разложении. В общем случае электромагнитная волна в такой среде является не вполне поперечной. В одноосной среде имеются два выделенных направления, при распространении в которых поле волны оказывается строго поперечным: вдоль и поперек оптической оси [27]. В первом случае остаются нелинейности лишь нечетных порядков [28, 29], во втором появляются четные степени и главную роль играет квадратичная нелинейность [30]. При распространении импульса поперек оптической оси необходимо учитывать, вообще говоря, две компоненты его электрического поля: обыкновенную E_o и необыкновенную E_e , а нелинейные восприимчивости считать тензорными величинами. В некоторых работах используется скалярная модель, при этом учитывается лишь одна компонента электрического поля ПКИ [31–33]. Отметим,

что в средах с наведенной анизотропией квадратичная нелинейность не возникает [34, 35] из-за слабости приложенных полей (электрического, магнитного, деформационного) в сравнении с внутриатомными полями.

Теоретические модели, предложенные в работах [28, 30, 31, 33, 35] носят феноменологический характер. При этом либо используется разложение $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ в присутствии тензора нелинейных восприимчивостей второго и (или) третьего порядков [30, 35], либо в качестве материальной модели предлагается анизотропный осциллятор с кубической или квадратичной нелинейностью [28]. При условии (1) оба подхода приводят к идентичным системам нелинейных волновых уравнений для обыкновенной E_o и необыкновенной E_e компонент импульса.

Здесь мы предлагаем простую квантовомеханическую модель оптически одноосной среды, включающую в себя электронный, электронно-колебательный и ионный отклики. Анизотропию будем считать естественной, образованной сильным внутренним электрическим полем, в котором находятся как электроны, так и ионы. Такими свойствами могут обладать одноосные монокристаллы, органические молекулярные структуры и т. д. [36]. В случае монокристаллов, вообще говоря, необходима привязка к какому-либо классу симметрии [36, 37]. В таких случаях весьма непросто до конца провести соответствующие квантовомеханические расчеты для учета перечисленных выше видов материального отклика. К одноосным относятся кристаллы тетрагональной, тригональной и гексагональной систем, имеющие одинаковую структуру тензора линейной восприимчивости, приведенного к главным осям: $\chi_{xx} = \chi_{yy} \neq \chi_{zz}$ [38]. В спектральном диапазоне оптической прозрачности основной вклад в поляризационный отклик среды определяется линейными эффектами, нелинейности при этом отводятся роль возмущающего фактора. Поскольку структура тензора линейной восприимчивости нечувствительна к изменению класса симметрии одноосных кристаллов, а нелинейность при условии (1) является малой, зависимостью нелинейной восприимчивости от класса симметрии можно пренебречь. В этой связи предлагаемая нами квантовомеханическая модель объединяет оптические свойства всех сред с естественной одноосной анизотропией в их спектральной области прозрачности. На основе данной материальной модели и уравнений Максвелла можно прийти к нелинейным волновым уравнениям, описывающим динамику ПКИ в спектральной области прозрачно-

сти одноосных сред и в некоторых случаях провести их анализ, чему и посвящена настоящая работа.

2. ЭЛЕКТРОННЫЙ И ИОННЫЙ ОТКЛИКИ

Пусть электромагнитный импульс распространяется в одноосной среде вдоль оси z под углом φ к оптической оси (рис. 1). Обыкновенная компонента E_o электрического поля ПКИ перпендикулярна плоскости рисунка и параллельна оси x , а необыкновенная E_e лежит в данной плоскости и нормальна к оси z (параллельна оси y).

Эволюция состояния среды описывается уравнениями для элементов матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i\omega_{\mu\nu}\rho_{\mu\nu} + \frac{i}{\hbar}V_{\mu\nu}(\rho_{\mu\mu} - \rho_{\nu\nu}) - \frac{i}{\hbar} \sum_{j \neq \mu, \nu} (V_{\mu j}\rho_{j\nu} - \rho_{\mu j}V_{j\nu}), \quad (2)$$

где \hbar — постоянная Планка, $V_{\mu\nu}$ — матричный элемент гамильтониана электродипольного взаимодействия импульса с полем, $\omega_{\mu\nu}$ — частота квантового перехода $\mu \leftrightarrow \nu$. Нижние индексы в (2) пробегают значения $\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, K$, где K — общее число электронных квантовых уровней, формируемых сильным внутренним полем и участвующих во взаимодействии с полем ПКИ (значение $K \geq 3$ считается произвольным). Уравнения для диагональных элементов получаются из (2) при $\mu = \nu$.

В сильном внутреннем электрическом поле среды у электронных уровней нет вырождения по модулю проекции M полного углового момента [39]. В

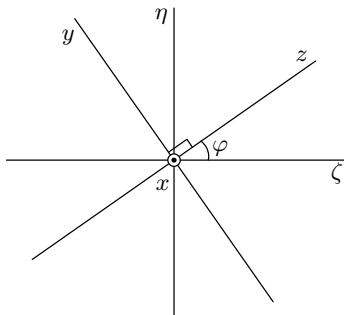


Рис. 1. Геометрия распространения ПКИ в одноосной двулучепреломляющей среде; ζ — оптическая ось, импульс распространяется вдоль оси z , под углом φ к ζ . Обыкновенная компонента поляризована в плоскости xz , нормальной к плоскости рисунка, необыкновенная — в плоскости рисунка, вдоль оси y

результате в электронной подсистеме образуются π - ($\Delta M = 0$) и σ -переходы ($\Delta M = \pm 1$), разрешенные согласно электродипольным правилам отбора.

Из-за одноосной анизотропии $[\hat{H}_0, \hat{M}^2] \neq 0$ (\hat{H}_0 — собственный гамильтониан электронов во внутреннем электрическом поле среды, \hat{M} — оператор углового момента). В то же время $[\hat{H}_0, \hat{M}_\zeta] = 0$, где \hat{M}_ζ — оператор проекции углового момента на ось ζ , имеющий собственные значения, равные M . Поэтому волновая функция оптического электрона, находящегося в поле осевой симметрии, может быть представлена в виде

$$\psi_{\mu M} = R_\mu(\zeta, r) \exp(iM\varphi), \quad (3)$$

где r, φ, ζ — компоненты цилиндрической системы координат (ось ζ аксиальной симметрии совпадает с оптической осью), μ — совокупность квантовых чисел, отвечающих цилиндрической симметрии.

Выберем, кроме того, декартову систему координат x, η, ζ , повернутую относительно системы x, y, z в плоскости (yz) на угол φ (рис. 1). Используя приведенные выражения для $\psi_{\mu M}$, получим декартовы компоненты вектора $\mathbf{d}_{\mu\nu}$ дипольного момента перехода $\mu \leftrightarrow \nu$ в координатной системе x, η, ζ :

$$d_{\mu\nu}^x = \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} |\Delta M_{\mu\nu}|, \quad d_{\mu\nu}^\eta = i \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Delta M_{\mu\nu},$$

$$d_{\mu\nu}^\zeta = D_{\mu\nu} (1 - |\Delta M_{\mu\nu}|),$$

где $\Delta M_{\mu\nu} \equiv M_\mu - M_\nu = 0, \pm 1$. Максимальные величины дипольных моментов для σ - ($\varphi = 0$) и π -переходов ($\varphi = \pi/2$) записываются соответственно в виде

$$d_{\mu\nu} = -\sqrt{2} \pi e \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\infty}^\infty R_\mu(z, r) R_\nu(z, r) dz,$$

$$D_{\mu\nu} = -2\pi e \int_0^\infty r dr \int_{-\infty}^\infty z R_\mu(z, r) R_\nu(z, r) dz,$$

где e — элементарный заряд.

Совершая далее упомянутое выше преобразование поворота на угол φ вокруг оси x , $\mathbf{d}' = \hat{L} \mathbf{d}$, где $\mathbf{d}' = (d_{\mu\nu}^x, d_{\mu\nu}^y, d_{\mu\nu}^z)^T$, $\mathbf{d} = (d_{\mu\nu}^x, d_{\mu\nu}^\eta, d_{\mu\nu}^\zeta)^T$, найдем

$$d_{\mu\nu}^x = \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} |\Delta M_{\mu\nu}|,$$

$$d_{\mu\nu}^y = i \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Delta M_{\mu\nu} \cos \varphi - D_{\mu\nu} (1 - |\Delta M_{\mu\nu}|) \sin \varphi, \quad (4)$$

$$d_{\mu\nu}^z = i \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Delta M_{\mu\nu} \sin \varphi + D_{\mu\nu} (1 - |\Delta M_{\mu\nu}|) \cos \varphi.$$

Соответственно, для матричных элементов гамильтониана взаимодействия \hat{V} будем иметь

$$\begin{aligned}
 V_{\mu\nu} &= -\mathbf{d}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \\
 &= \left[D_{\mu\nu} (1 - |\Delta M_{\mu\nu}|) \sin \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Delta M_{\mu\nu} \cos \varphi \right] E_e - \\
 &- \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} |\Delta M_{\mu\nu}| E_o - \left[D_{\mu\nu} (1 - |\Delta M_{\mu\nu}|) \cos \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{d_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Delta M_{\mu\nu} \sin \varphi \right] E_z. \quad (5)
 \end{aligned}$$

В поле осевой симметрии квантовые уровни не обладают определенной четностью. Данное обстоятельство решающим образом сказывается на правилах отбора для электродипольных переходов в сильном поле среды. В силу примешивания состояний с различной четностью к определенным квантовым уровням в такой среде, в отличие от изотропной, может быть разрешено значительно большее количество переходов. Именно это является причиной возникновения квадратичных и всех четных нелинейностей. Внутреннее поле среды является сильным и само изначально формирует электронные квантовые уровни. Поэтому условие (1) будем считать выполненным для всех (в том числе и для запрещенных) электронно-оптических переходов, за исключением переходов между колебательными подуровнями основного состояния (см. ниже). Электрическое поле \mathbf{E} импульса зависит от координат \mathbf{r} и времени t . Данная зависимость подразумевает выполнение условий (1). В этом случае систему (2) можно решать методом последовательных приближений по малым в смысле (1) параметрам, пропорциональным производным по времени в (2), а также слагаемым под знаком суммы в правой части данного уравнения. Тогда в нулевом приближении из (2) получаем

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{V_{\mu\nu}(\rho_{\mu\mu} - \rho_{\nu\nu})}{\hbar\omega_{\mu\nu}}.$$

Подставляя это выражение в ранее отброшенные слагаемые, найдем $\rho_{\mu\nu}$ в первом приближении и т. д. В результате во втором приближении будем иметь

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mu\nu} &= -\frac{\rho_{\nu\nu} - \rho_{\mu\mu}}{\hbar\omega_{\mu\nu}} V_{\mu\nu} + \frac{1}{\hbar\omega_{\mu\nu}} \times \\
 &\times \sum_{\lambda \neq \mu, \nu} \left[(\alpha_{\nu\lambda} - \alpha_{\lambda\mu}) V_{\mu\lambda} V_{\lambda\nu} + \frac{V_{\lambda\nu}}{\hbar\omega_{\mu\lambda}} \times \right. \\
 &\times \sum_{\eta \neq \mu, \nu} (\alpha_{\eta\mu} V_{\mu\lambda} V_{\eta\lambda} - \alpha_{\lambda\eta} V_{\mu\eta} V_{\eta\lambda}) + \\
 &\left. + \frac{V_{\mu\lambda}}{\hbar\omega_{\nu\lambda}} \sum_{\eta \neq \lambda, \nu} (\alpha_{\eta\lambda} V_{\lambda\eta} V_{\eta\nu} - \alpha_{\nu\eta} V_{\lambda\eta} V_{\eta\nu}) \right] - \\
 &- i \frac{\alpha_{\nu\mu}}{\omega_{\mu\nu}} \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial t} + \frac{\alpha_{\nu\mu}}{\omega_{\mu\nu}^2} \frac{\partial^2 V_{\mu\nu}}{\partial t^2}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где $\alpha_{\mu\nu} \equiv (W_\nu - W_\mu)/\hbar\omega_{\mu\nu}$, W_μ — начальная населенность μ -го уровня. В выражении (6) учтена нелинейность не выше третьей степени, а также принято во внимание то обстоятельство, что при условии (1) нелинейность и дисперсия (два последних слагаемых в (6)) проявляют себя аддитивным образом [12].

Подставляя (6) в правую часть (2) и учитывая эрмитовость оператора \hat{V} , после интегрирования найдем выражения для диагональных элементов $\hat{\rho}$:

$$\rho_{\mu\mu} = W_\mu - \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{W_\mu - W_\lambda}{\hbar^2 \omega_{\lambda\mu}^2} |V_{\mu\lambda}|^2. \quad (7)$$

Значения поляризационных составляющих, соответствующих компонентам электрического поля E_o , E_e и E_z импульса, получим с помощью соотношений

$$P_{o,e,z} = N \sum_{\mu,\nu} d_{\mu\nu}^{(x,y,z)} \rho_{\mu\nu}^* + \text{с.с.},$$

где N — концентрация валентных электронов, а также с использованием выражений (4)–(7). В результате после достаточно громоздких, но простых выкладок получим

$$\begin{aligned}
 P_o &= \chi_\perp E_o + 2\chi_{e_o}^{(2)} E_e E_o + \chi_o^{(3)} E_o^3 + \\
 &\quad + \chi_{e_o}^{(3)} E_e^2 E_o - \kappa_\perp \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_e &= \chi_e E_e + \chi_z E_z + \chi_e^{(2)} E_e^2 + \chi_{e_o}^{(2)} E_o^2 + \\
 &\quad + \chi_e^{(3)} E_e^3 + \chi_{e_o}^{(3)} E_o^2 E_e - \kappa_e \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$P_z = \chi_z E_z + \chi_{ez} E_e, \quad (10)$$

где χ_e , χ_z и χ_{ez} выражаются через главные диагональные компоненты χ_\perp и χ_\parallel тензора линейной безынерционной восприимчивости как

$$\begin{aligned}
 \chi_e &= \chi_\perp \cos^2 \varphi + \chi_\parallel \sin^2 \varphi, \\
 \chi_z &= \chi_\perp \sin^2 \varphi + \chi_\parallel \cos^2 \varphi, \\
 \chi_{ez} &= (\chi_\perp - \chi_\parallel) \sin \varphi \cos \varphi,
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\perp} &= N \sum_{\mu \neq \nu} \frac{d_{\mu\nu}^2 |\Delta M_{\mu\nu}|}{\hbar \omega_{\mu\nu}} (W_{\nu} - W_{\mu}), \\ \chi_{\parallel} &= 2N \sum_{\mu \neq \nu} D_{\mu\nu}^2 \frac{1 - |\Delta M_{\mu\nu}|}{\hbar \omega_{\mu\nu}} (W_{\nu} - W_{\mu}), \end{aligned} \quad (12)$$

а отличные от нуля компоненты тензора нелинейной восприимчивости второго порядка равны

$$\begin{aligned} \chi_{e_o}^{(2)} &= \chi_{xxy}^{(2)} = \chi_{xyx}^{(2)} = \chi_{yxx}^{(2)} = \\ &= \frac{4N}{\hbar} \sin \varphi \sum_{\mu \neq \nu} \frac{D_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}} \sum_{\lambda \neq \mu, \nu} d_{\mu\lambda} d_{\nu\lambda} (\alpha_{\mu\lambda} - \alpha_{\nu\lambda}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \chi_e^{(2)} &= \chi_{yyy}^{(2)} = \frac{2N}{\hbar} \sin^3 \varphi \times \\ &\times \sum_{\mu \neq \nu} \frac{D_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}} \sum_{\lambda \neq \mu, \nu} D_{\mu\lambda} D_{\nu\lambda} (\alpha_{\mu\lambda} - \alpha_{\nu\lambda}). \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения для нелинейных восприимчивостей третьего порядка $\chi_o^{(3)}$, $\chi_e^{(3)}$ и $\chi_{e_o}^{(3)}$, ввиду их громоздкости, приведены в Приложении.

Благодаря условию (1), как отмечалось выше, частоты фурье-компонент спектра далеки от резонансных частот среды. Поэтому для $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ реализовано бездисперсионное приближение, когда справедливо правило Клеймана [36], согласно которому компоненты тензоров нелинейных восприимчивостей инвариантны по отношению к любой перестановке их индексов.

При получении (8) и (9) учитывался отмеченный выше факт вырождения электронных состояний по модулю M . Действительные части слагаемых в (6), содержащих первые производные по времени, соответствуют σ -переходам (см. также (5)). При суммировании в выражениях для компонент поляризации из-за вырождения члены с $\Delta M = \pm 1$ и с равными значениями $\omega_{\mu\nu}$ попарно уничтожаются. Мнимые части обсуждаемых слагаемых, которые содержат $|\Delta M_{\mu\nu}|$ в π - и σ -переходах (см. (5) и (6)), также в выражениях для компонент \mathbf{P} уничтожаются при суммировании с комплексно-сопряженными величинами.

В связи с последними замечаниями отметим, что при наложении внешнего постоянного магнитного поля вырождение по модулю M снимается. Тогда из каждого вырожденного уровня образуются дуплеты, для которых $\Delta M = \pm 1$, а частоты соответствующих переходов $\omega_{\mu\nu}$ уже не равны друг другу. Вследствие этого в правых частях разложений типа (8) и (9) появляются первые производные \mathbf{E} по времени [29], что приводит к фарадеевскому вращению плоскости поляризации импульса. В нашем же

случае внешнее магнитное поле отсутствует, а внутрикристаллическое электрическое поле снимает вырождение лишь по модулю M .

Происхождение вторых производных по времени в (8) и (9) проще всего понять, используя зависимость линейных электронных восприимчивостей от частоты ω :

$$\chi_{e,\perp}(\omega) = \chi_{e,\perp} \frac{\omega_{e,o}^2}{\omega_{e,o}^2 - \omega^2}.$$

При $\omega/\omega_{e,o} \ll 1$ (см. (1)) имеем разложение

$$\chi_{e,\perp}(\omega) \approx \chi_{e,\perp} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{e,o}^2} \right).$$

С помощью замены $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$ приходим ко вторым производным по времени в соотношениях (8) и (9). В выражении (10) дисперсия не учитывается, так как $P_z \ll P_e, P_o$, а дисперсия в приближении (1) является эффектом более высокого порядка малости, чем линейный безынерционный отклик.

Дисперсионные параметры κ_{\perp} и κ_e в (8) и (9), учитывающие обсуждаемую выше слабую в смысле (1) инерционность электронного отклика, могут быть представлены через χ_{\perp} и χ_e соответственно в виде

$$\kappa_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi_{\perp}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0}, \quad \kappa_e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi_e}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0}$$

и выражают степень зависимости линейных восприимчивостей от частоты ω . В явном виде

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \kappa_{\perp} \cos^2 \varphi + \kappa_{\parallel} \sin^2 \varphi, \\ \kappa_{\perp} &= N \sum_{\mu \neq \nu} \frac{d_{\mu\nu}^2 |\Delta M_{\mu\nu}|}{\omega_{\mu\nu}^2} \alpha_{\mu\nu}, \\ \kappa_{\parallel} &= 2N \sum_{\mu \neq \nu} D_{\mu\nu}^2 \frac{1 - |\Delta M_{\mu\nu}|}{\omega_{\mu\nu}^2} \alpha_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обычно $|\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}| \ll \chi_{\perp}, \chi_{\parallel}$ [40]. Тогда, как видно из (11), $\chi_{ez} \ll \chi_{\perp}, \chi_e$. Следствием данного обстоятельства является относительная малость продольной компоненты электрического поля ПКИ: $E_z \ll E_o, E_e$ (см. разд. 4). По этой причине в разложениях (8)–(10) учтен лишь линейный локальный отклик на компоненту E_z .

Разложения (8), (9) можно обратить и записать в виде системы дифференциальных уравнений для P_o и P_e с правыми частями, зависящими от электрического поля импульса. В нулевом приближении из (8) и (9) следует $E_o = P_o/\chi_{\perp}$, $E_e = P_e/\chi_e$. Подставляя

данные соотношения в следующие члены разложений (8) и (9), найдем

$$\frac{\partial^2 P_o}{\partial t^2} + \omega_o^2 P_o - 2\beta_{oe}^{(2)} P_e P_o - \beta_o^{(3)} P_o^3 - \beta_{oe}^{(3)} P_e^2 P_o = \omega_o^2 \chi_{\perp} E_o, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} + \omega_e^2 P_e - \beta_e^{(2)} P_e^2 - \beta_{eo}^{(2)} P_o^2 - \beta_e^{(3)} P_e^3 - \beta_{eo}^{(3)} P_o^2 P_e = \omega_e^2 \chi_e E_e. \quad (17)$$

Здесь

$$\omega_o^2 = \frac{\chi_{\perp}}{\kappa_{\perp}}, \quad \omega_e^2 = \frac{\chi_e}{\kappa_e}, \quad \beta_{oe}^{(2)} = \frac{\chi_{eo}^{(2)}}{\chi_e \kappa_{\perp}},$$

$$\beta_{eo}^{(2)} = \frac{\chi_{eo}^{(2)} \chi_e}{\chi_{\perp}^2 \kappa_e}, \quad \beta_e^{(2)} = \frac{\chi_e^{(2)}}{\chi_e \kappa_e}, \quad \beta_o^{(3)} = \frac{\chi_o^{(3)}}{\chi_{\perp}^2 \kappa_{\perp}},$$

$$\beta_e^{(3)} = \frac{\chi_e^{(3)}}{\chi_e^2 \kappa_e}, \quad \beta_{oe}^{(3)} = \frac{\chi_{eo}^{(3)}}{\chi_e^2 \kappa_{\perp}}, \quad \beta_{eo}^{(3)} = \frac{\chi_{eo}^{(3)}}{\chi_{\perp}^2 \kappa_e}.$$

Данная система обобщает классическую анизотропную модель Лоренца [41] на случай учета нелинейности электронного отклика. Отметим, что здесь она получена на основе квантовомеханических представлений о среде с использованием низкочастотного нерезонансного приближения (1). При этом собственные частоты ω_o и ω_e определяются всем набором электронных квантовых уровней (см. (11), (12), (15) и выражения для ω_o, ω_e). Кроме того, следует заметить, что частота ω_e , вообще говоря, зависит (хотя и слабо) от угла φ . Ясно, что в нерезонансном случае, $\omega \ll \omega_o, \omega_e$ (или выполнено условие (1)), практически невозможно выделить какой-либо квантовый переход, наиболее сильно взаимодействующий с полем. Этим и объясняется коллективный характер частот ω_o и ω_e . Обычно $\omega_o, \omega_e \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$ [24]. Поэтому условию $\omega \ll \omega_o, \omega_e$ (см. также (1)) вполне могут удовлетворять частоты ω видимого диапазона.

Система (16), (17), как и разложения (8)–(10), инвариантна относительно замен $P_o \rightarrow -P_o, E_o \rightarrow -E_o$, но не инвариантна по отношению к преобразованию $P_e \rightarrow -P_e, E_e \rightarrow -E_e$. Справедливость данного утверждения легко объясняется осевой симметрией среды: отражения в плоскостях, нормальных к оптической оси, являются преобразованиями симметрии, в то время как отражения в плоскостях, параллельных данной оси, таковыми не являются (см. рис. 1). Исключение здесь составляют отражения, перпендикулярные к оптической оси и соответствующие $\varphi = 0$. Данное обстоятельство

объясняет отсутствие в (16) нелинейностей типа P_o^2, P_e^2 и $P_o^2 P_e$, а в (17) — нелинейностей типа $P_e P_o$ и $P_e^2 P_o$.

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $\varphi = 0$. Тогда из соотношений (11)–(15), формул Приложения, выражений для ω_o, ω_e и нелинейных констант следует $\chi_e = \chi_{\perp}, \omega_o = \omega_e, \beta_e^{(2)} = \beta_{oe}^{(2)} = \beta_{eo}^{(2)} = 0, \beta_o^{(3)} = \beta_e^{(3)} = \beta_{oe}^{(3)} = \beta_{eo}^{(3)} = \beta^{(3)}$. В этом случае (16), (17) можно записать в виде уравнения Дюффинга для комплексной поляризации $P \equiv P_o + iP_e$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_o^2 P - \beta^{(3)} |P|^2 P = \omega_o^2 \chi_{\perp} E,$$

где $E = E_o + iE_e$.

Здесь разбиение поляризации на обыкновенную P_o и необыкновенную P_e компоненты сугубо условное, так как обе составляющие ведут себя как обыкновенные компоненты. С помощью операции поворота вокруг оптической оси одну из компонент можно приравнять нулю и тогда для поляризации получим обычную модель Дюффинга, часто используемую в качестве материального уравнения для изотропных диэлектриков [15].

2. Пусть теперь $\varphi = \pi/2$. В этом случае доминирующую роль играет квадратичная нелинейность. Пренебрегая кубической нелинейностью, из (16), (17) приходим к системе материальных уравнений типа обобщенной модели Хенна–Хейлеса

$$\frac{\partial^2 P_o}{\partial t^2} + \omega_o^2 P_o - 2\beta_{oe}^{(2)} P_e P_o = \omega_o^2 \chi_{\perp} E_o, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} + \omega_e^2 P_e - \beta_e^{(2)} P_e^2 - \beta_{eo}^{(2)} P_o^2 = \omega_e^2 \chi_{\parallel} E_e, \quad (19)$$

где $\omega_{\parallel} = \chi_{\parallel} / \kappa_{\parallel}$.

Отметим, что система Хенна–Хейлеса в зависимости от соотношений между ее коэффициентами допускает как хаотическую, так и регулярную динамику [42].

Важное влияние на характер дисперсии могут оказывать ионные (колебательные) степени свободы [24], соответствующие оптической ветви колебаний атомных ядер в узлах кристаллической решетки. Характерные частоты данных колебаний $\omega_i \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Тогда при временном масштабе ПКИ $\tau_p \sim 10^{-14} - 10^{-15} \text{ с}$ для обыкновенной $P_o^{(i)}$ и необыкновенной $P_e^{(i)}$ ионных поляризаций имеем $\omega_i \tau_p \ll 1$.

В этом приближении можно пренебречь ионным ангармонизмом, а также упругими возвращающимися силами в осцилляторных уравнениях движения [24]. В результате

$$\frac{\partial^2 P_{o,e}^{(i)}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2 E_{o,e}}{4\pi}, \quad (20)$$

где ω_p — ионная плазменная частота [43].

3. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ БЛОМБЕРГЕНА–ШЕНА

Перейдем теперь к рассмотрению процессов вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), соответствующих электронно-колебательной нелинейности. Из-за осевой симметрии ВКР-активные центры имеют минимум по две нормальные колебательные моды с частотами $\omega_{v\parallel}$ — вдоль и $\omega_{v\perp}$ — поперек оптической оси. Вначале получим замкнутую систему уравнений для матричных элементов $\hat{\rho}$, соответствующих колебательным подуровням основного электронного состояния (рис. 2), исключив в рамках адиабатического приближения (1) остальные элементы. Ниже индексы соответствующих матричных элементов будем нумеровать латинскими буквами. Тогда, согласно (2) ($j, k = 1, 1', 1''$), запишем

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial t} = -i\omega_{jk}\rho_{jk} - \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda > 1''} (V_{j\lambda}\rho_{\lambda k} - \rho_{j\lambda}V_{\lambda k}). \quad (21)$$

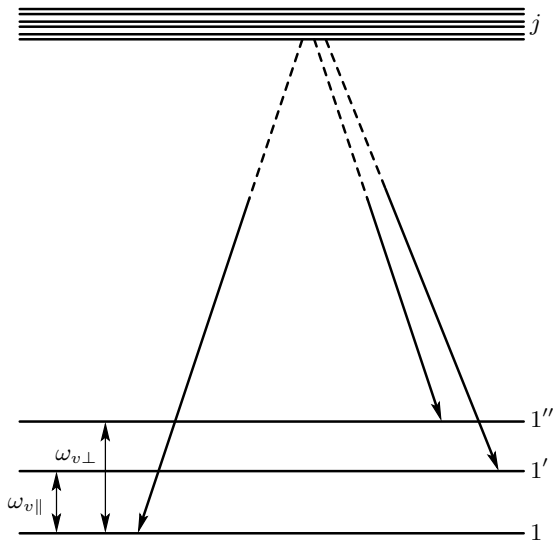


Рис. 2. Схемы переходов, учитывающих процессы ВКР; 1' и 1'' — ВКР-подуровни вблизи основного электронного состояния в оптически одноосной среде; $\omega_{v\perp}$ и $\omega_{v\parallel}$ — частоты нормальных оптических мод колебаний ионов соответственно поперек и вдоль оптической оси, j — вышележащие электронные уровни

Здесь учтено, что электронные переходы между обсуждаемыми подуровнями запрещены. Полагая в (21) $j = k$, получим уравнения для диагональных элементов $\hat{\rho}$.

Выражения для $\rho_{\lambda j}$ ($\lambda > 1'', j = 1, 1', 1''$) найдем из (2) при $\partial \rho_{\lambda j} / \partial t = 0$ (см. (1)):

$$\rho_{\lambda j} = -\frac{1}{\hbar\omega_{\lambda j}} \sum_{k=1}^{1''} V_{\lambda k}\rho_{kj} - \frac{1}{\hbar\omega_{\lambda j}} \sum_{\mu > 1''} (V_{\lambda\mu}\rho_{\mu j} - \rho_{\lambda\mu}V_{\mu j}). \quad (22)$$

Слагаемые, стоящие в круглых скобках (22), были учтены выше. Они дают вклад в электронную поляризацию. Поэтому здесь их отбросим. Подставляя с учетом этого (22) в (21), получим

$$\frac{\partial R_{jk}}{\partial t} = -i\omega_{jk}R_{jk} + i \left[\hat{G}, \hat{R} \right]_{jk}, \quad (23)$$

где элементы матрицы \hat{G} имеют вид

$$G_{jl} = \hbar^{-2} \frac{\sum_{\lambda > 1''} V_{j\lambda}V_{\lambda l}}{\omega_{\lambda 1}},$$

а матрица \hat{R} содержит лишь те элементы $\hat{\rho}$, которые соответствуют трем нижним квантовым уровням 1, 1' и 1'' (рис. 2):

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \rho_{1''1''} & \rho_{1''1'} & \rho_{1''1} \\ \rho_{1'1''} & \rho_{1'1'} & \rho_{1'1} \\ \rho_{11''} & \rho_{11'} & \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

Здесь мы пренебрегли разницей частот $\omega_{\lambda j}$ электронно-оптических переходов ($\lambda > 1'', j = 1, 1', 1''$) для различных j , положив $\omega_{\lambda j} \approx \omega_{\lambda 1}$. Из рисунка видно, что $\omega_{1''1} = \omega_{v\perp}$, $\omega_{1'1} = \omega_{v\parallel}$.

В нашем случае подуровни 1' и 1'' имеют строго колебательную природу, поэтому они наряду с первым уровнем обладают одинаковыми проекциями M_j ($j = 1, 1', 1''$) углового момента. Для простоты положим, что $M_j = 0$. В силу близости колебательных подуровней друг к другу, следуя подходу Бломбергера–Шена [44], будем считать $D_{\lambda j} \approx D_{\lambda 1}$ и $d_{\lambda j} \approx d_{\lambda 1}$. С учетом сказанного, используя (5), для матрицы \hat{G} в пренебрежении компонентой E_z будем иметь

$$\hat{G} = \frac{1}{4\hbar N} (\chi_e E_e^2 + \chi_{\perp} E_o^2) (\hat{\Sigma} - \hat{I}), \quad (24)$$

где \hat{I} — единичный оператор, а $\hat{\Sigma}$ — матрица, все элементы которой равны единице.

Можно сказать, что полученная нами система (23) в совокупности с соотношением (24) обобщает квантовомеханическую модель Бломбергена–Шена [45] на случай описания процессов ВКР в оптически одноосной среде. В этой связи заметим, что система (23) полностью эквивалентна уравнениям для матрицы плотности для трехуровневого атома, в котором разрешены все три перехода, возбуждаемые квадратом поля. Модель Бломбергена–Шена, как известно [44, 45], имеет соответствующую аналогию с двухуровневым атомом.

Так как $\omega_{v\perp}, \omega_{v\parallel} \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, то $\omega_{v\perp(\parallel)}\tau_p \ll 1$. Поэтому первым слагаемым в правой части (23) в нулевом приближении можно пренебречь и записать данное уравнение в символической форме:

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = i [\hat{G}, \hat{R}].$$

Матрица $\hat{\Sigma}$ коммутирует сама с собой в различные моменты времени. В этом случае решение данного операторного уравнения можно записать в виде

$$\hat{R}(t) = \hat{U} \hat{R}(-\infty) \hat{U}^+, \quad \hat{U} = \exp(i\hat{\theta}/3). \quad (25)$$

При этом

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \theta (\hat{\Sigma} - \hat{I}), \\ \theta &= \frac{3}{4\hbar N} \int_{-\infty}^t (\chi_e E_e^2 + \chi_{\perp} E_o^2) dt'. \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, что $\hat{\Sigma}$ и \hat{I} коммутируют между собой, следовательно

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i\theta}{3}\right) \exp\left(\frac{i\hat{\Sigma}\theta}{3}\right).$$

Так как $\hat{\Sigma}^2 = (K+1)\hat{\Sigma}$, $\hat{\Sigma}^3 = (K+1)^2\hat{\Sigma}$, ..., $\hat{\Sigma}^k = (K+1)^{k-1}\hat{\Sigma}$, ..., то ряд, соответствующий экспоненте в последнем выражении, легко суммируется. В результате, отбрасывая несущественный C -числовой множитель $\exp(-i\theta/3)$, находим

$$\hat{U} = \hat{I} - \frac{\hat{\Sigma}}{3} \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i \sin \theta \right). \quad (27)$$

Матрица $\hat{R}(-\infty)$ диагональна. Соответствующие населенности электронного состояния и ВКР-подуровней равны $W_1, W_{1'}, W_{1''}$. Тогда из выражений (25)–(27) получим для $j \neq k$

$$\begin{aligned} R_{kj} &= \frac{1}{9} \left[2(3W_l - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} - \right. \\ &\quad \left. - 3i(W_k - W_j) \sin \theta \right], \quad l \neq j, k. \end{aligned} \quad (28)$$

Выражение для электронно-колебательного вклада $P^{(ev)}$ в поляризацию имеет вид

$$\begin{aligned} P^{(ev)} &= N_v \sum_{\lambda > 1''} \sum_{j=1}^{1''} d_{\lambda j}^* \rho_{\lambda j} + \text{с.с.} \approx \\ &\approx N_v \sum_{\lambda > 1''} d_{\lambda 1}^* \sum_{j=1}^{1''} \rho_{\lambda j} + \text{с.с.}, \end{aligned}$$

где N_v — концентрация молекул, дающих вклад в ВКР.

Подставляя сюда (22), за вычетом второй суммы, учитывающей рассмотренную выше электронную поляризацию, найдем

$$P^{(ev)} = -N_v \sum_{\lambda > 1''} \frac{d_{\lambda 1}^* V_{\lambda 1}}{\hbar \omega_{\lambda 1}} \sum_{k > j} R_{kj} + \text{с.с.} \quad (29)$$

Из (5) нетрудно видеть, что множители перед второй суммой в (29) вещественны как для обыкновенной, так и для необыкновенной компонент. Тогда, используя (28), получим

$$\sum_{k > j} R_{kj} + \text{с.с.} = 0.$$

В первом приближении по параметру $\omega_{v\perp(\parallel)}\tau_p$ из (21) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k > j} R_{kj} + \text{с.с.} = i \sum_{k > j} \omega_{kj} (R_{kj}^* - R_{kj}).$$

Отсюда и из (29) найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k > j} R_{kj} + \text{с.с.} = \frac{2}{3} \sum_{k > j} \omega_{kj} (W_j - W_k) \sin \theta.$$

Интегрируя данное выражение по t и подставляя в (29), получим после использования (5)

$$P_{e,o}^{(ev)} = \frac{N_v}{3N} \omega_v \chi_{e,o} E_{e,o} \int_{-\infty}^t \sin \theta dt', \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_v &= \omega_{v\parallel} (W_1 - W_{1'}) + \omega_{v\perp} (W_1 - W_{1''}) + \\ &\quad + (\omega_{v\perp} - \omega_{v\parallel}) (W_{1'} - W_{1''}). \end{aligned}$$

Оценим величину θ под знаком синуса в выражении (30). Учитывая, что $E^2 \approx (4\pi/c)I$, где I — интенсивность ПКИ, найдем

$$\theta \sim 3\pi \frac{\chi}{N} \frac{I \tau_p}{\hbar c}.$$

Взяв поляризуемость $\chi/N \sim 10^{-26}$ см³, $I \sim 10^{13}$ Вт/см², $\tau_p \sim 10^{-14}$ с, будем иметь $\theta \sim 10^{-2}$ – $10^{-3} \ll 1$. В этих случаях в (30) можно положить $\sin \theta \approx \theta$. Тогда выражение для P при $\varphi = 0$ приобретает вид, полученный в работе [24] для изотропного диэлектрика без учета изменения населенностей ВКР-подуровней. Приведенная оценка показывает, что при интенсивностях 10^{13} Вт/см² и длительностях ПКИ 10 фс действительно можно пренебречь динамикой населенностей ВКР-подуровней. Однако, например, при $I \sim 10^{15}$ Вт/см² и $\tau_p \sim 100$ фс необходимо учитывать изменение данных населенностей, так как в этом случае $\theta \sim 1$.

Оценим относительный вклад в поляризацию электронной кубической нелинейности и нелинейности ВКР. Из только что приведенной оценки и соотношений (8), (9), (12), (30), а также выражений для $\chi^{(3)}$ (см. Приложение) получаем

$$\chi \sim \frac{Nd^2}{\hbar\omega_0}, \quad \chi^{(3)} \sim \frac{Nd^4}{(\hbar\omega_0)^3}, \quad P^{(ev)} \sim \frac{Nd^4\omega_v\tau_p^2 E^3}{\hbar^3\omega_0^2}$$

(здесь $N_v \approx N$, d — характерное значение дипольных моментов электронно-оптических переходов). Тогда искомое отношение

$$\frac{P^{(ev)}}{P^{(3)}} \sim \frac{\omega_v}{\omega_0} (\omega_0\tau_p)^2,$$

где $P^{(3)}$ — нелинейная электронная поляризация третьего порядка. Взяв $\omega_v \sim 10^{13}$ с⁻¹, $\omega_0 \sim 10^{16}$ с⁻¹, $\tau_p \sim 10^{-15}$ с, найдем $P^{(ev)}/P^{(3)} \sim 0.1$, т. е. при длительности ПКИ в несколько фемтосекунд вкладом ВКР по сравнению с электронной кубической нелинейностью можно пренебречь. Эта оценка согласуется с данными, приведенными в работе [24].

Аналогичная оценка показывает, что

$$\frac{P^{(ev)}}{P^{(2)}} \sim d \frac{(\omega_v\tau_p)^2}{\hbar\omega_v} \sqrt{\frac{I}{c}}.$$

При $d \sim 10^{-19}$ ед. СГСЭ, $(\omega_v\tau_p)^2 \sim 0.1$, $\omega_v \sim 10^{13}$ с⁻¹, $I \sim 10^{13}$ Вт/см² получаем $P^{(ev)}/P^{(2)} \sim 0.1$. Учитывая, что при распространении поперек оптической оси основную роль в электронном отклике играет квадратичная нелинейность, приходим к выводу, что при длительностях порядка нескольких десятков фемтосекунд данная нелинейность в такой геометрии доминирует также и над механизмом ВКР.

Теперь оценим относительный дисперсионный

вклад ионной $P^{(i)}$ и электронной P степеней свободы. Из соотношений (8), (9), (15) и (20) имеем

$$\frac{P^{(i)}}{P} \sim \frac{\omega_p^2}{\omega_0\omega_c} (\omega_0\tau_p)^4,$$

где $\omega_c = 4\pi d^2 N/\hbar$ — кооперационная частота.

Полагая $\omega_p \sim \omega_c \sim 10^{12}$ – 10^{13} с⁻¹, $\omega_0 \sim 10^{16}$ с⁻¹, $\tau_p \sim 10^{-15}$ с, получим оценку $P^{(i)}/P \sim 1$ – 10 . Видно, что обсуждаемое отношение очень сильно зависит от параметра $\omega_0\tau_p$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Чтобы исследовать самосогласованную динамику импульсов и среды, полученные выше выражения для материальных откликов необходимо дополнить уравнениями Максвелла

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^\Sigma}{\partial t^2}, \quad (31)$$

где суммарная поляризация $\mathbf{P}^\Sigma = \mathbf{P} + \mathbf{P}^{(i)} + \mathbf{P}^{(ev)}$.

Ниже эффекты дифракции будем считать слабыми, полагая, что компоненты поля импульса зависят главным образом от z и t . Как отмечалось выше, продольная компонента поля значительно меньше поперечной составляющей. Поэтому в уравнении для E_z можно пренебречь производными по поперечным координатам, учтя их только для компонент E_o и E_e . Тогда после двукратного интегрирования проекции (31) на ось z с учетом того, что $P_z^{(i)} = P_z^{(ev)} = 0$, найдем $E_z = -4\pi P_z$. Отсюда и из (10) получим

$$E_z = -\frac{4\pi\chi_{ez}E_e}{1 + 4\pi\chi_z}.$$

Чтобы записать уравнения для E_o и E_e , представим вначале компоненты P_o и P_e электронной части поляризации в виде

$$P_{o,e} = \chi_{\perp,e} E_{o,e} - \kappa_{\perp,e} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial t^2} + P_{o,e}^{(nl)},$$

где $P_{o,e}^{(nl)}$ — части электронной поляризации, содержащие квадратичную и кубическую нелинейности.

Тогда из (31) в проекциях на оси x и y получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial z^2} - \frac{n_{o,e}^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[P_{o,e}^{(nl)} - \kappa_{\perp,e} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial t^2} + P_{o,e}^{(i)} + P_{o,e}^{(ev)} \right] + \Delta_{\perp} E_{o,e}, \end{aligned}$$

где $n_{o,e} = \sqrt{1 + 4\pi\chi_{\perp,e}}$ — показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн, Δ_{\perp} — поперечный лапласиан.

Правые части данных уравнений описывают нелинейность, дисперсию и дифракцию (являющиеся эффектами более высокого порядка малости, нежели безынерционный линейный отклик, вошедший в левые части) путем перенормировки скоростей полевых компонент с помощью показателей преломления n_o и n_e .

Данное обстоятельство позволяет использовать приближение медленно меняющегося профиля в сопутствующей системе координат [46]. Согласно этому методу, в нулевом приближении по нелинейности и дисперсии правые части можно положить равными нулю и считать, что обе компоненты распространяются лишь в одном направлении, вдоль оси z . Тогда $E_{o,e} = E_{o,e}(\tau_{o,e})$, где $\tau_{o,e} = t - n_{o,e}z/c$. В первом приближении влияние правых частей учтем введением в аргументах E_o и E_e , помимо $\tau_{o,e}$, «медленной» координаты $z' = \varepsilon z$ [46]: $E_{o,e} = E_{o,e}(\tau_{o,e}; z')$, где $\varepsilon \ll 1$ — малый безразмерный параметр, учитывающий влияние правых частей последних уравнений. Переходя в уравнениях для E_o и E_e от переменных t и z к переменным $\tau_{o,e}$ и z' , запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau_{o,e}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{n_{o,e}}{c} \frac{\partial}{\partial \tau_{o,e}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{n_{o,e}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau_{o,e}^2} - \frac{2\varepsilon n_{o,e}}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau_{o,e} \partial z'},$$

где в последнем соотношении мы пренебрегли членом порядка ε^2 . Последнее обстоятельство позволяет нам проинтегрировать волновые уравнения для E_o и E_e соответственно по τ_o и τ_e с учетом того, что на бесконечности поле импульса со всеми его производными стремится к нулю:

$$-\frac{2n_{o,e}\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{o,e}}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c^2} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \tau_{o,e}} \left[P_{o,e}^{(nl)} - \kappa_{\perp,e} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial \tau_{o,e}^2} + P_{o,e}^{(i)} + P_{o,e}^{(ev)} \right] +$$

$$+ \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau_{o,e}} E_{o,e} d\tau'_{o,e}.$$

Возвращаясь к исходным переменным t и z , а также используя выражения (8), (9), (20) и (29), приходим к системе нелинейных волновых уравнений для

обыкновенной и необыкновенной компонент импульса:

$$\frac{\partial E_o}{\partial z} + \frac{n_o}{c} \frac{\partial E_o}{\partial t} + a_2 \frac{\partial(E_e E_o)}{\partial t} + a_3 \frac{\partial(E_e^2 E_o)}{\partial t} +$$

$$+ b_{3o} E_o^2 \frac{\partial E_o}{\partial t} + \Lambda_o \frac{\partial}{\partial t} \left(E_o \int_{-\infty}^t \sin \theta dt' \right) -$$

$$- \delta_o \frac{\partial^3 E_o}{\partial t^3} + \sigma \int_{-\infty}^t E_o dt' = \frac{c}{2n_o} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E_o dt', \quad (32)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial z} + \frac{n_e}{c} \frac{\partial E_e}{\partial t} + a_2 E_o \frac{\partial E_o}{\partial t} + b_{2e} E_e \frac{\partial E_e}{\partial t} +$$

$$+ a_3 \frac{\partial(E_o^2 E_e)}{\partial t} + b_{3e} E_e^2 \frac{\partial E_e}{\partial t} + \Lambda_e \frac{\partial}{\partial t} \left(E_e \int_{-\infty}^t \sin \theta dt' \right) -$$

$$- \delta_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial t^3} + \sigma \int_{-\infty}^t E_e dt' = \frac{c}{2n_e} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E_e dt'. \quad (33)$$

Здесь

$$a_2 = \frac{4\pi\chi_{eo}^{(2)}}{n_o c}, \quad b_{2e} = \frac{4\pi\chi_e^{(2)}}{n_o c}, \quad a_3 = \frac{2\pi\chi_{eo}^{(3)}}{n_o c},$$

$$b_{3e} = \frac{6\pi\chi_e^{(3)}}{n_o c}, \quad b_{3o} = \frac{6\pi\chi_o^{(3)}}{n_o c}, \quad \Lambda_o = \frac{2\pi N_v \omega_v \chi_o}{3N n_o c},$$

$$\Lambda_e = \frac{2\pi N_v \omega_v \chi_e}{3N n_o c}, \quad \delta_o = \frac{2\pi\kappa_{\perp}}{n_o c},$$

$$\delta_e = \frac{2\pi\kappa_e}{n_o c}, \quad \sigma = \frac{\omega_p^2}{2n_o c},$$

а динамический параметр θ определяется выражением (26).

Система нелинейных волновых уравнений (32), (33) описывает распространение ПКИ в одноосной среде под произвольным углом к оптической оси. В данных уравнениях учтены электронная и электронно-колебательная нелинейности, электронная и ионная дисперсии. Слагаемые в правых частях описывают дифракцию импульса.

Отметим, что приближение медленно меняющегося профиля никак не связано с традиционным для оптики квазимонохроматических импульсов приближением медленно меняющихся огибающих [47], где редукция по производным достигается благодаря тому, что под огибающей поля ущемляется большое число электромагнитных колебаний. Система (32), (33) записана не для огибающих (которые невозможно ввести для ПКИ), а непосредственно для компонент электрического поля E_o и E_e .

При распространении сигнала вдоль оптической оси ($\varphi = 0$) коэффициенты a_2 , b_{2e} и χ_{ez} обращаются в нуль, при этом $n_e = n_o$, $\chi_e = \chi_o$, $\delta_o = \delta_e$, $a_3 = 3b_{3o} = 3b_{3e}$, $\Lambda_o = \Lambda_e$, и система (32), (33) переходит в уравнение для $E = E_o + iE_e$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} + a_3 \frac{\partial}{\partial \tau} (|E|^2 E) - \delta_o \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + \\ + \sigma \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' + \Lambda_o \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E \int_{-\infty}^{\tau} \sin \theta d\tau' \right) = \\ = \frac{c}{2n_o} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau', \end{aligned}$$

где $\tau = t - n_o z/c$.

Если пренебречь динамикой населенностей ВКР-подуровней, то

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{3\chi_o}{4\hbar N} \int_{-\infty}^{\tau'} |E|^2 d\tau''.$$

В этом случае последнее уравнение в точности совпадает с таковым, полученным в [24] для распространения ПКИ в изотропных диэлектриках.

Пусть теперь $\varphi = \pi/2$. Тогда, как было отмечено в предыдущем разделе, для импульсов интенсивностью $I \sim 10^{13}$ Вт/см² и длительностью $\tau_p \sim 1-100$ фс можно пренебречь электронной кубической и электронно-колебательной нелинейностями. Кроме того, $\chi_{ez} = 0$ (см. (11)). В этом случае уравнения (32), (33) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_o}{\partial z} + \frac{n_o}{c} \frac{\partial E_o}{\partial t} + a_2 \frac{\partial(E_e E_o)}{\partial t} - \delta_o \frac{\partial^3 E_o}{\partial t^3} + \\ + \sigma \int_{-\infty}^t E_o dt' = \frac{c}{2n_o} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E_o dt', \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial z} + \frac{n_e}{c} \frac{\partial E_e}{\partial t} + a_2 E_o \frac{\partial E_o}{\partial t} + b_{2e} E_e \frac{\partial E_e}{\partial t} - \\ - \delta_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial t^3} + \sigma \int_{-\infty}^t E_e dt' = \frac{c}{2n_o} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E_e dt'. \quad (35) \end{aligned}$$

Заметим, что если на вход среды подавать импульс, поляризованный в плоскости главного сечения (в плоскости, образованной оптической осью и направлением распространения импульса), то, как видно из (34), (35), $E_o = 0$. В анизотропной среде будет распространяться лишь необыкновенная компо-

нента ПКИ. Если к тому же пренебречь ионной дисперсией, то одномерная динамика данной компоненты будет описываться с помощью уравнения Кортевега-де Вриза, имеющего среди прочих солитонные видеоимпульсные решения. Однако для их реализации входные сигналы также должны представлять собой видеоимпульсы, которые затем способны разбиться на несколько солитонов. Более любопытным представляется рассматриваемый в следующем разделе случай, когда ПКИ (или видеоимпульсы) способны порождаться импульсами огибающей.

5. ГЕНЕРАЦИЯ ВИДЕОИМПУЛЬСА НЕОБЫКНОВЕННОЙ КОМПОНЕНТЫ В РЕЖИМЕ РЕЗОНАНСА ЗАХАРОВА-БЕННИ С ОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНОЙ

Запишем обыкновенную составляющую импульса в виде импульса огибающей с несущей частотой ω и волновым числом k :

$$E_o = \xi(t, z, \mathbf{r}_{\perp}) \exp [i(\omega t - kz)] + \text{с.с.}, \quad (36)$$

где ξ — медленноменяющаяся комплексная огибающая: $|\partial \xi / \partial t| \ll \omega |\xi|$, $|\partial \xi / \partial z| \ll k |\xi|$. При этом E_e не имеет несущей частоты.

Подставляя (36) в (34), (35) и пренебрегая быстройосциллирующими членами, а также используя асимптотическое разложение [24, 47]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t E_o dt' &= \int_{-\infty}^t \xi \exp [i(\omega t' - kz)] dt' + \text{с.с.} = \\ &= \left(-i \frac{\xi}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{i}{\omega^3} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \exp [i(\omega t - kz)] + \text{с.с.}, \end{aligned}$$

после простых преобразований получим систему уравнений для ξ и E_e , взаимодействующих в режиме резонанса Захарова-Бенни:

$$i \frac{\partial \xi}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = a_2 \omega \xi E_e + \frac{c}{2n_o \omega} \Delta_{\perp} \xi, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial z} + b_{2e} E_e \frac{\partial E_e}{\partial \tau} - \delta_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial \tau^3} + \sigma \int_{-\infty}^{\tau} E_e d\tau' = \\ = -a_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (|\xi|^2) + \frac{c}{2n_o} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E_e d\tau'. \quad (38) \end{aligned}$$

Здесь $g = 3\delta_o\omega - \sigma/\omega^3$, $\tau = t - z/v_g$, групповая скорость v_g обыкновенной компоненты определяется соотношением

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n_o}{c} + 3\delta_o\omega^2 + \frac{\sigma}{\omega^2},$$

а дисперсионное уравнение имеет вид

$$k = \frac{n_o\omega}{c} + \delta_o\omega^3 - \frac{\sigma}{\omega}.$$

В уравнении (38) принято во внимание условие резонанса Захарова–Бенни [48], согласно которому групповая скорость коротковолновой (обыкновенной) волны равна фазовой скорости длинноволновой (необыкновенной) составляющей: $v_g = c/n_e$.

При пренебрежении дифракцией ($\Delta_{\perp} = 0$) и ионной дисперсией ($\sigma = 0$) приходим к системе, исследованной в работе [49]. Если, кроме того, $b_{2e} = \delta_e = 0$, система (37), (38) переходит в уравнения Ядзими–Ойкавы [50], являющиеся однонаправленным вариантом уравнений Захарова [51]. Система Ядзими–Ойкавы является интегрируемой с помощью метода обратной задачи рассеяния [50]. Соответствующее односолитонное двухпараметрическое решение в лабораторной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_m \exp[-i(\Omega t - qz)] \operatorname{sch}\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right), \\ E_e &= -E_m \operatorname{sch}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau_p}\right). \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{6\delta_o}{a_2\tau_p} \sqrt{\omega\Omega}, \quad E_m = \frac{6\delta_o}{a_2\tau_p^2}, \\ q &= \frac{\Omega}{v} + g\left(\Omega^2 + \frac{1}{\tau_p^2}\right), \end{aligned}$$

скорость импульса выражается соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_g} - 2g\Omega, \quad (40)$$

параметр Ω определяет нелинейный частотный сдвиг коротковолновой компоненты в красную область, так как $\Omega > 0$ (см. выражение для ξ_m и (36)), другой свободный параметр τ_p , имея смысл длительности солитона, определяет его спектральную ширину: $\Delta\omega \sim 1/\tau_p$.

Обыкновенная компонента импульса представляет собой солитон огибающей, в то время как необыкновенная — видеосолитон. Из уравнений (37), (38) видно, что если на входе $E_e = 0$, то в среде импульс огибающей обыкновенной волны способен породить ПКИ необыкновенной волны. При этом каждый фотон обыкновенной компоненты увеличивает

длину волны, отдавая свою энергию в необыкновенную волну, чем и объясняется нелинейное смещение импульсного спектрального максимума: $\omega \rightarrow \omega - \Omega$. При этом из-за положительности электронной дисперсии групповая скорость обыкновенной составляющей (а вместе с ней и необыкновенной) получает положительный сдвиг:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} &= \frac{n_o}{c} + 3\delta_o\omega^2 \rightarrow \frac{n_o}{c} + 3\delta_o(\omega - \Omega)^2 \approx \\ &\approx \frac{n_o}{c} + 3\delta_o\omega^2 - 6\delta_o\omega\Omega = \frac{1}{v_g} - 2g\Omega, \end{aligned}$$

что совпадает с (40).

Следует заметить, что механизм порождения ПКИ, вызванный резонансом Захарова–Бенни, очень близок к соответствующему черенковскому механизму, впервые рассмотренному в работе [52]. Отличие состоит в том, что в последнем случае режим генерации неколлинеарен: угол γ между направлениями распространения ПКИ и порождающего его импульса в квадратично нелинейной среде, имеющего в своем спектре две близкие крайние частоты ω_1 и ω_2 , соответствующие волновым числам k_1 и k_2 , определяется выражением [52, 47]

$$\cos\gamma = \frac{k_2(\omega_2) - k_1(\omega_1)}{k(\omega_2 - \omega_1)}.$$

При этом скорость волны нелинейной поляризации на частоте $\omega_2 - \omega_1$ должна быть больше фазовой скорости волны в данной среде на этой же частоте:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2(\omega_2) - k_1(\omega_1)} > \frac{\omega_2 - \omega_1}{k(\omega_2 - \omega_1)}.$$

Совершая в последнем неравенстве предельный переход $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ и полагая в предыдущем равенстве $\gamma = 0$, приходим к условию $d\omega/dk = v_{ph}(0)$, где $v_{ph}(0)$ — фазовая скорость в низкочастотном бездисперсионном пределе. Именно этот случай соответствует условию резонанса Захарова–Бенни. Обычно данному условию синхронизма трудно удовлетворить в коллинеарном режиме распространения [47]. В нашем случае условие резонанса Захарова–Бенни можно переписать в виде

$$\frac{n_e - n_o}{c} = 3\delta_o\omega^2. \quad (41)$$

Так как в области прозрачности электронная дисперсия положительна ($\delta_o > 0$), условию резонанса Захарова–Бенни можно удовлетворить при $n_e > n_o$, т. е. среда должна обладать положительным двулучепреломлением. Этот вывод не меняется при учете

ионной дисперсии (как легко видеть из выражения для v_g , в правой части последнего соотношения в этом случае сделана замена $3\delta_o\omega^2 \rightarrow 3\delta_o\omega^2 + \sigma/\omega^2$). Учитывая близость значений n_e и n_o , запишем

$$n_e - n_o \approx \frac{n_e^2 - n_o^2}{2n_o} = \frac{2\pi(\chi_e - \chi_o)}{n_o}.$$

Кроме того,

$$\delta_o = \frac{2\pi\kappa_{\perp}}{n_o c} \approx \frac{2\pi\chi_o}{n_o c\omega_0^2}.$$

Тогда условие (41) можно представить в виде

$$\frac{\chi_e - \chi_o}{3\chi_o} \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Для кристаллического кварца $n_e = 1.55$, $n_o = 1.54$ [40]. Тогда $(\chi_e - \chi_o)/3\chi_o \approx 0.01$. Следовательно, $\omega/\omega_0 \approx 0.1$. Взяв $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$, найдем $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Для входного импульса $\omega\tau_p \gg 1$, поэтому его длительность $\tau_p \sim 10\text{--}100 \text{ фс}$. Длительностью примерно такого же порядка, согласно (39), будет обладать и генерируемый ПКИ (или видеосолитон). Таким образом, подбирая должным образом несущую частоту входного сигнала, можно добиться выполнения условия резонанса Захарова–Бенни и тем самым осуществить эффективную генерацию ПКИ.

Нелинейность и дисперсия необыкновенной составляющей в уравнении (38) суть эффекты одного порядка малости. Поэтому условие пренебрежения ими, при котором записаны решения (39), можно представить в виде $b_{2e}E_m^2 \ll a_2\xi_m^2$. Подставляя сюда приведенные выше выражения для E_m^2 и ξ_m^2 , получим $\omega\tau_p \cdot \Omega\tau_p \gg b_{2e}/a_2$.

Учитывая, что b_{2e} и a_2 — величины одного порядка, а также условие квазимонохроматичности $\omega\tau_p \gg 1$ обыкновенной компоненты, приходим к выводу, что обсуждаемому условию легко удовлетворить в широком диапазоне свободных параметров Ω и τ_p .

В работе [30] рассмотрено порождение необыкновенной компоненты с помощью обыкновенной в режиме генерации второй гармоники. Рассмотренная же здесь ситуация длинно-коротковолнового резонанса соответствует перекачке энергии из высокочастотной обыкновенной волны в нулевую гармонику, в результате чего генерируется ПКИ необыкновенной волны. Легко показать, что, используя для E_e представление вида (36) с учетом замен $\omega \rightarrow 2\omega$, $\xi \rightarrow \xi_e$, из (34), (35) в приближении ММАФ следует хорошо известная система [47], описывающая

нестационарный процесс генерации второй гармоники. Условие фазового синхронизма для генерации второй гармоники, $2k_o(\omega) = k_e(2\omega)$, в нашем случае, как легко получить из дисперсионных соотношений при учете только электронной дисперсии, имеет вид

$$\frac{n_o - n_e}{c} = (4\delta_e - \delta_o)\omega^2 \approx 3\delta_o\omega^2,$$

что прямо противоположно по знаку условию (41). То есть коллинеарный режим генерации второй гармоники может быть реализован в средах с отрицательным двулучепреломлением. Это должно позволить отделить в условиях эксперимента один эффект от другого.

Здесь не менее важен вопрос об устойчивости решений (39). Исследуем его, используя метод усредненного лагранжиана типа Ритца–Уизема [53]. Поскольку решение (39) соответствует случаю $b_{2e} = \delta_e = \sigma = 0$, в этих же условиях рассмотрим вопрос об устойчивости. Заметим, что поставленную задачу можно решить и при $b_{2e}, \delta_e, \sigma \neq 0$, но выражения будут выглядеть достаточно громоздко. При сделанных замечаниях система (37), (38) может быть получена из плотности лагранжиана

$$L = \frac{i}{2\omega} \left(\xi \frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \xi^* \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + 3\delta_o \left| \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{c}{2n_o\omega^2} |\nabla_{\perp} \xi|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{c}{2n_o} (\nabla_{\perp} U)^2 + a_2 |\xi|^2 \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (42)$$

Здесь электрическое поле необыкновенной волны $E_e = \partial U / \partial \tau$.

Пробное решение в соответствии с (39) выберем в виде

$$\xi = A \exp \left[-i \left(\Omega t + \omega n_o \frac{\Phi}{c} \right) \right] \text{sch} \left[R \left(t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad (43)$$

$$U = B \text{th} \left[R \left(t - \frac{z}{v} \right) \right],$$

где A , B и R — медленноменяющиеся функции, зависящие от z и \mathbf{r}_{\perp} , а Φ — быстроменяющаяся функция тех же переменных, Ω и v — постоянные параметры, связанные между собой соотношением (40).

Подставляя (43) в (42) и учитывая производные лишь от «быстрых» переменных [53], после интегрирования по t найдем «средний» лагранжиан

$$\langle L \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} L dt = \frac{n_o}{cR} A^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \delta_o A^2 R - \frac{3\delta_o \Omega^2 A^2}{R} + \frac{n_o}{2cR} A^2 (\nabla_{\perp} \Phi)^2 - 2\delta_o \omega \Omega B^2 R - \frac{2}{3} a_2 A^2 B,$$

варьирование которого по динамическим параметрам A , B , R и Φ приводит к системе уравнений плоской гидродинамики идеальной жидкости (уравнению непрерывности и интегралу Коши)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp}(\rho \mathbf{v}_{\perp}) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\mathbf{v}_{\perp}^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} &= 3 \frac{c}{n_o} \delta_o \Omega^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь роль времени играет координата z , $\mathbf{v}_{\perp} = \nabla_{\perp} \Phi$, «давление» P связано с «плотностью» $\rho = A^2/R$ с помощью уравнения

$$\frac{dP}{d\rho} = 6 \frac{c}{n_o} \delta_o \left(\frac{a_2}{6\delta_o \sqrt{\omega \Omega}} \right)^4 \rho^2. \quad (45)$$

При этом имеем

$$A = \frac{6\delta_o R \sqrt{\omega \Omega}}{a_2}, \quad B = -\frac{6\delta_o R}{a_2}.$$

В одномерном случае, $R = 1/\tau_p$, полученные здесь решения переходят в (39) с учетом того, что $E_e = \partial U/\partial \tau$. Очевидно, устойчивость обсуждаемых решений эквивалентна устойчивости течения идеальной жидкости типа (44), (45). Тогда солитон (39) устойчив при $dP/d\rho > 0$, что и видно из (45). Таким образом, на основе проделанного анализа приходим к выводу о поперечной устойчивости солитонных решений (39). Следовательно, генерация видеоимпульса необыкновенной волны с помощью обыкновенной компоненты за счет механизма резонанса Захарова–Бенни вполне может быть реализована в условиях эксперимента.

Оценим интенсивность входного импульса, при которой в среде способен формироваться видеосолитон. Из уравнения (38) при $b_{2e} = \delta_e = \sigma = \Delta_{\perp} = 0$ имеем

$$E_e \sim \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_g} \right)^{-1} a_2 |\xi|^2 \sim -\frac{a_2 |\xi|^2}{2g\Omega}.$$

Подставляя данную оценку в (37), приходим к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \xi}{\partial z} + g \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + q |\xi|^2 \xi = 0,$$

где $q = \omega a^2/2g\Omega$ (разумеется, здесь можно лишь условно говорить об уравнении, так как в выражении для коэффициента q содержится параметр Ω солитонного решения системы (37), (38)). Известно [48], что для формирования солитона НУШ должно выполняться пороговое условие

$$\xi_0 > \frac{\chi_o}{\chi_{eo}} \frac{\sqrt{\omega \Omega}}{\omega_0^2}.$$

Так как

$$\frac{\chi_o}{\chi_{eo}} \sim \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(2)}} \sim \frac{\hbar \omega_0}{d}$$

(см. [3]), где d — характерное значение дипольного момента квантовых переходов, участвующих во взаимодействии с импульсом, то

$$\xi_0 > \xi_{th} \sim \frac{\hbar \sqrt{\omega \Omega}}{d \omega_0 \tau_p}.$$

Взяв $\Omega \sim 1/\tau_p \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $d \sim 10^{-20} \text{ СГСЭ}$, получим для пороговой интенсивности $I_{th} \sim c \xi_{th}^2/4\pi \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ Вт/см}^2$. Тогда интенсивность генерируемого видеосолитона

$$\begin{aligned} I_e \sim c E_m^2/4\pi \sim c \xi_m^2/4\pi \omega \tau_p \sim \\ \sim 0.1 I_{th} \sim 10^{12} - 10^{13} \text{ Вт/см}^2. \end{aligned}$$

Данная процедура оценки, не претендуя на строгость, дает, тем не менее, разумные значения пороговых интенсивностей, вполне достижимые для современных лазеров.

6. СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА ВИДЕОИМПУЛЬСОВ

В настоящем разделе рассмотрим два решения системы (34), (35) в виде связанных состояний обыкновенной и необыкновенной компонент ПККИ, распространяющихся поперек оптической оси. При этом, как и выше, будем пренебрегать ионной дисперсией.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что при условии $b_{2e}/a_2 = 6\delta_e/\delta_o$ система (34), (35) имеет одномерные решения

$$\begin{aligned} E_o &= \pm E_{om} \text{sch} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \\ E_e &= -E_{em} \text{sch} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$E_{om} = \frac{2}{a_2 \tau_p} \sqrt{\delta_o \left(\frac{n_e - n_o}{c} - \frac{4\delta_e - \delta_o}{\tau_p^2} \right)},$$

$$E_{em} = \frac{12\delta_e}{b_{2e} \tau_p^2},$$

а скорость v связана с длительностью τ_p соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n_o}{c} - \frac{\delta_o}{\tau_p^2}. \quad (47)$$

Ширины спектров обыкновенной и необыкновенной компонент (46) оцениваются соответственно как $\Delta\omega_o \sim 1/\tau_p$, $\Delta\omega_e \sim 2/\tau_p \sim 2\Delta\omega_o$. Таким образом, спектр необыкновенной составляющей в два раза шире, чем у обыкновенной. Поэтому решения (46) можно рассматривать как аналог генерации второй гармоники для квазимонохроматических импульсов.

Из выражений для E_{om} и E_{em} следует, что решение (46) может быть реализовано, например, в среде с положительным двулучепреломлением ($n_e > n_o$), в области прозрачности которой можно пренебречь различием в дисперсии обыкновенного и необыкновенного показателей преломления, т.е. считать $\delta_e \approx \delta_o$. При равенстве $\delta_e = \delta_o$ условие существования точного решения (46) имеет вид $b_{2e} = 6a_2$, что соответствует одному из случаев интегрируемости модели Хенона–Хейлеса [42].

Анализ показывает, что в обсуждаемой ситуации существует ограничение снизу на длительность ПКИ, а вместе с ней и на скорость его распространения. Этот вопрос тесно связан с устойчивостью решения (46), поэтому обсудим его подробнее. При этом, как и в предыдущем разделе, используем метод усредненного лагранжиана. Плотность лагранжиана, соответствующего системе (38), (39), без учета ионной дисперсии имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=o,e} \left[\frac{\partial U_i}{\partial z} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{n_i}{c} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 + \delta_i \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \right)^2 - \frac{c}{2n_o} (\nabla_{\perp} U_i)^2 \right] + \frac{b_{2e}}{6} \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} \right)^3 + \frac{a_2}{2} \left(\frac{\partial U_o}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial U_e}{\partial t}. \quad (48)$$

Здесь компоненты поля ПКИ выражаются через «потенциалы» U_o и U_e как $E_o = \partial U_o / \partial t$, $E_e = \partial U_e / \partial t$.

В соответствии с (46) пробные решения выберем в виде

$$U_o = \frac{A_o}{R} \operatorname{arctg} \{ \operatorname{sh} [R(t - \Phi)] \},$$

$$U_e = -\frac{A_e}{R} \operatorname{th} [R(t - \Phi)],$$

где A_o , A_e и R — медленноменяющиеся, а Φ — быстроменяющаяся функции переменных z и \mathbf{r}_{\perp} .

Подставляя последние выражения в (48) и интегрируя по t , приходим к «усредненному» лагранжиану, из которого находим уравнения движения вида

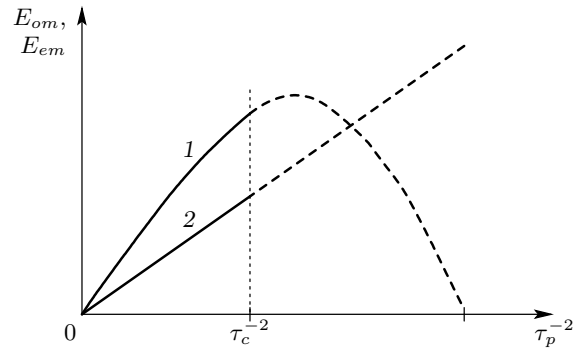


Рис. 3. Зависимости амплитуд обыкновенной (1) и необыкновенной (2) компонент солитоноподобного ПКИ вида (46) от квадрата обратной длительности. Штриховые участки кривых соответствуют области неустойчивости

(44) с точностью до замены: $3c\delta_o/n_o \rightarrow n_o/c$ в интеграле Коши. При этом $\mathbf{v}_{\perp} = \nabla_{\perp} \Phi$, а «плотность» ρ связана с параметром R соотношением

$$\rho = \frac{4\delta_o(n_e - n_o)R}{a_2^2 c} - \frac{28\delta_o^2 R^3}{3a_2^2}.$$

Величины A_o , A_e совпадают с E_{om} и E_{em} при учете замены $1/\tau_p \rightarrow R$ и $\delta_e = \delta_o$, $b_{2e} = 6a_2$. Связь «давления» с «плотностью» дается уравнением $\int dP/\rho = \delta_o R^2$, откуда

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dR} \left(\frac{d\rho}{dR} \right)^{-1} = 2\delta_o R^2 \frac{(n_e - n_o)/c - (7\delta_o/3)R^2}{(n_e - n_o)/c - 7\delta_o R^2}.$$

Тогда критерий устойчивости $dP/d\rho > 0$ при учете того, что $R = 1/\tau_p$, записывается в виде

$$\tau_p > \tau_c \equiv \sqrt{\frac{7\delta_o c}{n_e - n_o}}.$$

Отсюда следует, что согласно (47), значение скорости v заключено в интервале

$$\frac{c}{n_o} < v < \frac{c}{n_o} \left(1 + \frac{n_e - n_o}{7n_o} \right).$$

Здесь использовано то обстоятельство, что $(n_e - n_o)/7n_o \ll 1$.

На участке $\tau_p > \tau_c$ амплитуды обеих компонент растут с уменьшением τ_p (рис. 3). Следовательно, в этом случае интенсивная центральная в поперечном сечении часть ПКИ обгоняет свои периферийные участки и импульс в целом устойчив.

Используя приведенные в предыдущем разделе оценочные соотношения

$$n_e - n_o \approx \frac{2\pi(\chi_e - \chi_o)}{n_o}, \quad \delta_o \sim \frac{2\pi\chi_o}{n_o c \omega_o^2},$$

запишем выражение для τ_c в виде

$$\tau_c = \omega_0^{-1} \sqrt{\frac{7\chi_o}{\chi_e - \chi_o}},$$

что, по крайней мере, не противоречит условию (1).

Как и в случае (46), с помощью непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что при условиях $n_e = n_o$ и $3b_{2e}/a_2 = 1 + 2\delta_e/\delta_o$ система (34), (35) имеет решения

$$\begin{aligned} E_o &= \pm E_{om} \operatorname{th} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right) \operatorname{sch} \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \\ E_e &= -E_{em} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{t - z/v}{\tau_p} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$E_{om} = \frac{2}{a_2 \tau_p} \sqrt{3\delta_o(\delta_o - 4\delta_e)}, \quad E_{em} = \frac{6\delta_o}{a_2 \tau_p^2},$$

а скорость и длительность по-прежнему связаны выражением (47).

Профиль обыкновенной компоненты (49) имеет двухполярный вид, поэтому ее спектр центрирован на частоте $\omega_c \sim 1/\tau_p$. В силу однополярности E_e спектр необыкновенной составляющей ПКИ центрирован на нулевой частоте.

Для исследования (49) на устойчивость соответствующие пробные решения выбираем в виде

$$\begin{aligned} U_o &= \mp \frac{A_o}{R} \operatorname{sch}[R(t - \Phi)], \\ U_e &= -\frac{A_e}{R} \operatorname{th}[R(t - \Phi)]. \end{aligned}$$

Процедура применения усредненного вариационного принципа с использованием данных выражений и лагранжиана (48) в этом случае также приводит к системе уравнений вида (44) с учетом замены $3c\delta_o/n_o \rightarrow n_o/c$ в интеграле Коши. При этом, как и в предыдущем случае, $\int dP/\rho = \delta_o R^2$, а связь R с «плотностью» ρ дается соотношением

$$\rho = \frac{12\delta_o^2(3a_2 - 2b_{2e})R^3}{a_2^3}.$$

Следовательно, $dP/d\rho = 2\rho^2/3 > 0$ и ПКИ вида (49) устойчив по отношению к самофокусировке. Данный вывод подтверждается и качественными соображениями, приведенными выше для решения (46), при учете того, что амплитуды обеих составляющих и скорость растут с уменьшением длительности. Из выражения для E_{om} видно, что решение (49) может быть реализовано при условии $\delta_o > 4\delta_e$. В то же время $n_e = n_o$. Таким образом, решение (49)

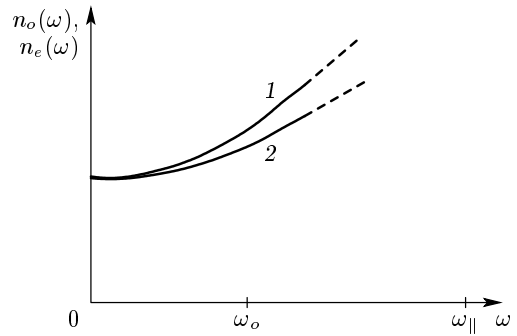


Рис. 4. Дисперсионные зависимости обыкновенного (1) и необыкновенного (2) показателей преломления в низкочастотной области прозрачности, соответствующие решению (49)

соответствует ситуации, когда двулучепреломление возникает исключительно благодаря дисперсии и отсутствует в бездисперсионной (низкочастотной) области. Из (18) и (19) для обыкновенной, $\chi_{\perp}(\omega)$, и необыкновенной $\chi_{\parallel}(\omega)$, электронных восприимчивостей получаем законы дисперсии:

$$\chi_{\perp}(\omega) = \frac{\omega_o^2 \chi_{\perp}}{\omega_o^2 - \omega^2}, \quad \chi_{\parallel}(\omega) = \frac{\omega_{\parallel}^2 \chi_{\parallel}}{\omega_{\parallel}^2 - \omega^2}.$$

В то же время

$$\delta_{o,e} = \frac{4}{cn_o} \left(\frac{\partial^2 \chi_{\perp,\parallel}}{\partial \omega^2} \right)_{\omega=0} = \frac{\pi}{cn_o} \frac{\chi_{\perp,\parallel}}{\omega_{o,\parallel}^2}.$$

Так как $n_e = n_o$, то $\chi_{\perp} = \chi_{\perp}(0) = \chi_{\parallel} = \chi_{\parallel}(0)$. Отсюда и из условия $\delta_o > 4\delta_e$ имеем $\omega_{\parallel} > 2\omega_o$. Из (12) видно, что восприимчивость обыкновенной волны формируется σ -, а необыкновенной — π -переходами. Поэтому для реализации решения (49) характерная частота π -переходов должна более чем в два раза превосходить частоту σ -переходов.

Таким образом, решение (49) может быть реализовано в средах с дисперсионной природой двулучепреломления (рис. 4). При этом $n_o(\omega) > n_e(\omega)$, т. е. в дисперсионной области частот среда должна обладать отрицательным двулучепреломлением.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование, проведенное в настоящей работе, выявляет взаимные различия между динамикой ПКИ в изотропных и оптически одноосных средах. В последних существенную роль играет квадратичная нелинейность электронного отклика, отсутствующая в изотропном диэлектрике. Система ма-

териальных уравнений (16), (17) как аналог классической модели Лоренца, нашедшая здесь свое квантовомеханическое обоснование, может использоваться в дальнейших исследованиях для описания электронного отклика в низкочастотном диапазоне прозрачности. В геометрии Фойгта (при распространении ПКИ перпендикулярно оптической оси) данные уравнения переходят в систему Хенона–Хейлеса (18), (19). Примечательно, что система Хенона–Хейлеса (ее однородный вариант) в зависимости от соотношений между коэффициентами допускает как регулярные, так и хаотические движения [42]. Поэтому не исключено, что в некоторых анизотропных средах могут быть обнаружены хаотические режимы распространения ПКИ.

Система Хенона–Хейлеса является аналогом уравнения Дюффинга, описывающего нерезонансный нелинейный отклик изотропной среды в области низких частот. В работе [21] показано, что в области высоких частот уравнение Дюффинга неадекватно описывает отклик изотропного диэлектрика на внешнее интенсивное воздействие. Там же предложена нелинейная модель в виде двух параметрически связанных осцилляторов, которая оказывается верной в области как низких, так и высоких частот. Отталкиваясь от этого замечания, можно сказать, что на очереди аналогичная модификация модели Хенона–Хейлеса.

Предложенное здесь обобщение квантовомеханической системы Бломбергера–Шена для описания процессов ВКР в средах с одноосной анизотропией позволило найти выражения (30) для электронно-колебательного отклика с учетом динамики населенностей ВКР-подуровней.

Полученная нами система волновых уравнений (32), (33) записана непосредственно для обыкновенной и необыкновенной компонент электрического поля импульса, а не для их огибающих, как это делалось ранее в других работах. Данное обстоятельство позволяет использовать в дальнейшем эту систему для анализа распространения как квазимонохроматических импульсов, так и импульсов длительностью всего в несколько периодов (вплоть до видеоимпульсов) оптических колебаний. Одной из иллюстраций этого высказывания может служить исследованный в разд. 5 механизм порождения видеоимпульса необыкновенной волны в режиме резонанса Захарова–Бенни с квазимонохроматической обыкновенной компонентой, который может быть реализован в средах с положительным двулучепреломлением. Хорошо известна роль процессов ВКР [45] в генерации видеоимпульсов за счет непрерывной перекачки энер-

гии из высокочастотных фурье-компонент в стоковы составляющие спектра импульса. В этой связи представляет дальнейший интерес исследование совместного влияния электронной квадратичной нелинейности и ВКР на процесс генерации ПКИ с помощью импульсов, обладающих первоначально ярко выраженной несущей частотой.

Представленные здесь солитоноподобные решения (46) и (49) в виде связанных состояний обыкновенной и необыкновенной компонент ПКИ являются, в дополнение к (39), лишь малой иллюстрацией возможных решений, содержащихся в (32), (33). Скорее всего, при получении других решений наибольших успехов можно достичь с помощью численных экспериментов, что не исключает дальнейших аналитических исследований.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17710а).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для нелинейных восприимчивостей третьего порядка через микроскопические параметры среды

$$\begin{aligned} \chi_{eo}^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{yxxy}^{(3)} = \frac{2N}{\hbar^2} & \left\{ 2 \sum_{\mu \neq \nu} \Delta_{\mu\nu}(\varphi) \times \right. \\ & \times \sum_{j \neq \mu, \nu} d_{\mu j}^2 \left(\frac{\alpha_{\mu j}}{\omega_{j\mu}\omega_{\mu\nu}} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{j\nu}\omega_{\mu\nu}} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{\mu j}\omega_{j\nu}} \right) - \\ & - \cos^2 \varphi \sum_{\mu \neq \nu} d_{\mu\nu}^4 \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}^2} + \sin^2 \varphi \sum_{\mu \neq \nu} \frac{D_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}} \times \\ & \times \sum_{j \neq \mu, \nu} \sum_{k \neq \mu, \nu, j} (d_{\mu j} d_{k\nu} D_{jk} + d_{jk} d_{k\nu} D_{\mu j} + d_{\mu j} d_{kj} D_{k\nu}) \times \\ & \left. \times \left(\frac{\alpha_{\mu j} + \alpha_{kj}}{\omega_{\mu k}} + \frac{\alpha_{k\nu} + \alpha_{kj}}{\omega_{j\nu}} \right) \right\}, \\ \chi_e^{(3)} = \chi_{yyyy}^{(3)} = \frac{2N}{\hbar^2} & \left\{ \sum_{\mu \neq \nu} \Delta_{\mu\nu}(\varphi) \times \right. \\ & \times \sum_{j \neq \mu, \nu} \Delta_{\mu j}(\varphi) \left(\frac{\alpha_{\mu j}}{\omega_{j\mu}\omega_{\mu\nu}} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{j\nu}\omega_{\mu\nu}} + \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{\mu j}\omega_{j\nu}} \right) - \\ & \left. - \sum_{\mu \neq \nu} (d_{\mu\nu}^4 \cos^4 \varphi + D_{\mu\nu}^4 \sin^4 \varphi) \frac{\alpha_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \sum_{\mu \neq \nu} \frac{D_{\mu\nu}}{\omega_{\mu\nu}} \sum_{j \neq \mu, \nu} \sum_{k \neq \mu, \nu, j} D_{\mu j} D_{k\nu} D_{jk} \times \left. \times \left(\frac{\alpha_{\mu j} + \alpha_{k j}}{\omega_{\mu k}} + \frac{\alpha_{k\nu} + \alpha_{k j}}{\omega_{j\nu}} \right) \right\},$$

где

$$\Delta_{\mu\nu}(\varphi) = \frac{d_{\mu\nu}^2}{2} \cos^2 \varphi + D_{\mu\nu}^2 \sin^2 \varphi.$$

Выражение для $\chi_o^{(3)} = \chi_{xxxx}^{(3)}$ получается из формулы для $\chi_e^{(3)}$ при $\varphi = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. C. Becker, H. L. Fragnito, J. Y. Bigot et al., Phys. Rev. Lett. **63**, 505 (1989).
2. K. Tamura and M. Nakazawa, Opt. Lett. **21**, 68 (1996).
3. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
4. А. М. Желтиков, Вестник МГУ, сер. 3: физ. астр. № 4, 3 (2001).
5. А. М. Желтиков, УФН **172**, 743 (2002).
6. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, Phys. Rev. Lett. **53**, 1555 (1984).
7. А. В. Ким, М. Ю. Рябикин, УФН **169**, 58 (1999).
8. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
9. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).
10. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **100**, 252 (1990).
11. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988).
12. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
13. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, Опт. и спектр. **70**, 101 (1991).
14. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, J. Mod. Opt. **39**, 2201 (1992).
15. А. В. Ведерко, О. Б. Дубровская, Ф. М. Марченко, А. П. Сухоруков, Вестник МГУ, сер. 3: физ. астр. **33**, 4 (1992).
16. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **76**, 636 (1994).
17. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, J. Phys. B **27**, 369 (1994).
18. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **78**, 483 (1995).
19. А. В. Андреев, ЖЭТФ **108**, 796 (1995).
20. A. E. Kaplan and P. L. Shkolnikov, Phys. Rev. Lett. **75**, 2316 (1995).
21. С. А. Козлов, Опт. и спектр. **79**, 290 (1995).
22. С. В. Сазонов, ФТТ **37**, 1612 (1995).
23. С. В. Сазонов, Опт. и спектр. **79**, 282 (1995).
24. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
25. I. V. Mel'nikov and D. Mihalache, Phys. Rev. A **56**, 1569 (1997).
26. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
27. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
28. А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **87**, 104 (1999).
29. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **107**, 20 (1995).
30. О. Б. Дубровская, А. П. Сухоруков, Изв. АН, сер. физ. **56**, 184 (1992).
31. Е. В. Казанцева, А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **89**, 838 (2000).
32. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Опт. и спектр. **90**, 449 (2001).
33. E. V. Kazantseva, A. I. Maimistov, and B. A. Malomed, Opt. Comm. **188**, 195 (2001).
34. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
35. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, КЭ **30**, 917 (2000).
36. *Нелинейные оптические свойства органических молекул и кристаллов*, под ред. Д. Шемлы, Ж. Зисса, Мир, Москва (1989).
37. Л. Н. Овандер, УФН **86**, 3 (1965).
38. Р. Пантелл, Г. Путхоф, *Основы квантовой электроники*, Мир, Москва (1972).
39. И. И. Соболевский, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, Москва (1977).
40. Р. Стойбер, С. Морзе, *Определение кристаллов под микроскопом*, Мир, Москва (1974).
41. Е. И. Бутиков, *Оптика*, Высшая школа, Москва (1986).

42. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярная и стохастическая динамика*, Мир, Москва (1984).
43. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Мир, Москва (1986).
44. Y. R. Shen and N. Bloembergen, *Phys. Rev. A* **137**, 1738 (1965).
45. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, И. П. Прокопович, *ЖЭТФ* **105**, 28 (1994).
46. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
47. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
48. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
49. E. S. Venilov and S. P. Burtzev, *Phys. Lett. A* **98**, 256 (1983).
50. N. Yadjima and M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.* **56**, 1719 (1976).
51. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **62**, 1745 (1972).
52. У. А. Абдуллин, Г. А. Ляхов, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, *ЖЭТФ* **66**, 1295 (1974).
53. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).