

ПОВЕРХНОСТНАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МОДЕЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ

М. В. Энтин, Л. С. Брагинский*

*Институт физики полупроводников Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 27 января 2003 г.

Рассматривается поверхностная энергия электронного газа в кристалле. Результаты, полученные для квадратичного спектра, обобщены на произвольный энергетический спектр в некоторых моделях кристалла. Найдена поверхностная энергия электронного газа с квадратичным спектром в образце с неровной границей, когда высота неровностей мала по сравнению с длиной волны электронов.

PACS: 71.70.Ej, 73.63.Fg, 73.63.Hs

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантование электронных состояний сказывается на термодинамических и кинетических свойствах ограниченного кристалла даже в системах, больших по сравнению с характерными длинами волн электронов λ . Разложение термодинамических величин идет по степеням параметра отношения λ к размеру системы d . Главная поправка к экстенсивной величине может быть представлена как поверхностный вклад, она изменяется пропорционально площади поверхности образца (см., например, обзор [1]). Такое влияние квантования в большой системе при уменьшении размера предшествует проявлению свойств, связанных с флуктуациями электронных уровней. Действительно, в приближении, пренебрегающем корреляцией уровней, флуктуации их числа обратно пропорциональны корню из числа уровней, т. е. объему в степени $1/2$ (включение корреляции приводит к возникновению дополнительных логарифмических множителей, зависящих от статистики уровней). В ограниченных микрокристаллах, помимо поверхностной составляющей, имеются также реберные и вершинные вклады [2].

Зависимость химического потенциала электронного газа от отношения поверхности к объему приводит к возникновению контактной разности потенциалов между гранулами из одинакового материала, имеющими разный размер или форму, следствием

чего является спонтанная перезарядка гранул [1, 3]. В результате гранулированный металл может переходить в состояние бесщелевого хаббардовского диэлектрика [3].

Поскольку поверхностные вклады формируются на расстояниях порядка длины волны электрона от поверхности, они чувствительны к идеальности поверхности, кристаллической структуре и наличию приповерхностного потенциала. Особенно эти факторы важны в случае металлических частиц, в которых длина волны соизмерима с постоянной решетки. В настоящей работе будут рассмотрены поверхностные поправки к термодинамическим величинам в кристалле с учетом кристаллической структуры.

2. МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим Ω -потенциал электронов с энергетическим спектром $\epsilon(\mathbf{k})$ в пластине $0 < z < d$. Предположим, что волновые функции электронов можно описывать в модели огибающих $\chi(\mathbf{r})$, на которые наложены одинаковые однородные граничные условия

$$\chi = \pm \zeta \partial \chi / \partial \mathbf{n} |_{z=0;d}. \quad (1)$$

Величина ζ имеет размерность длины и может считаться характерной длиной отражения. В модели сплошной среды с энергетическим барьером на границе $U(z) = U_0 \theta(z)$ параметр $\zeta = 1 / \sqrt{2mU_0 - k_z^2}$ (здесь m — эффективная масса электрона) является глубиной проникновения электрона за границу.

*E-mail: entin@isp.nsc.ru

В общем случае ζ зависит также и от компоненты импульса электрона вдоль границы. Граничному условию (1) удовлетворяют волновые функции $\chi = \sin(k_z z + \varphi)$, где $\text{tg } \varphi = -k_z \zeta$. Поперечный волновой вектор принимает квантованные значения $k_z = (\pi n - 2\varphi)/d$, где n — целое. Потенциал Ω при низкой температуре имеет вид

$$\Omega = -2S \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \sum_{k_z l} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k})).$$

Здесь и ниже S — боковая площадь, $V = Sd$ — объем образца. Для того чтобы найти поверхностный вклад в Ω -потенциал, заменим суммирование интегралом с помощью формулы суммирования

$$\sum_{n=1}^N F(n) = \int_0^N dn F(n) - \frac{1}{2} [F(0) + F(N)] + \dots$$

Учитывая, что на верхнем пределе суммируемая функция обращается в нуль, получаем разбиение Ω -потенциала на объемный Ω_V и поверхностный Ω_S вклады:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_V + 2\Omega_S + \dots, \quad \Omega_S = \Omega_{S1} + \Omega_{S2}, \\ \Omega_V &= -2V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k})), \\ \Omega_{S1} &= \frac{S}{2} \int (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))|_{k_z=0} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}, \\ \Omega_{S2} &= 2S \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\partial \varphi}{\partial k_z} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k})). \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно (2) потенциал Ω_S содержит два вклада. Первый из них, Ω_{S1} , определяется электронами с $k_z = 0$. Это означает, что электронный спектр, определяющий этот вклад, становится двумерным. В то же время Ω_{S1} не зависит от граничного условия на волновую функцию. Вклад Ω_{S2} определяется всеми электронами под поверхностью Ферми и зависит от фазы отражения на границе.

В частном случае границы полупроводника с вакуумом энергия Ферми гораздо меньше работы выхода U_0 . В этом случае $\zeta = \text{const}$, $k_z \zeta \ll 1$, $\varphi = -k_z \zeta$ и в качестве Ω_{S2} получаем

$$\Omega_{S2} = -2S\zeta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k})). \quad (3)$$

Сравнение Ω_{S1} и Ω_{S2} в этом случае показывает, что вторая величина меньше первой в $k\zeta$ раз. Вклад Ω_{S2} пропорционален объемному Ω -потенциалу и означает эффективное утолщение образца на ζ с каждой

границы. Знаки Ω_{S1} и Ω_{S2} противоположны. Таким образом, длина отражения определяет увеличение эффективной толщины.

При заданном числе электронов в образце наличие границы вызывает изменение химического потенциала

$$\delta\mu = \frac{1}{V} \frac{\partial \Omega_S}{\partial \mu} \bigg/ \frac{\partial n(\mu)}{\partial \mu}.$$

Здесь $n(\mu)$ — плотность трехмерного электронного газа; в случае квадратичного спектра $\partial n(\mu)/\partial \mu = \pi^{-2} (2m^3 \mu)^{1/2}$.

В реальном кристалле величина ζ определяется кристаллической структурой, ориентацией и степенью идеальности границы, наличием или отсутствием изолирующего слоя на поверхности и т. д. Для анализа возможных зависимостей ζ от электронного импульса мы выведем граничное условие для волновой функции в некоторых модельных задачах.

3. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Рассмотрим модель сильной связи с гамильтонианом

$$H = \varepsilon_{n\nu} \delta_{n\nu, n'\nu'} + t_{n\nu, n'\nu'} + \text{H.c.}$$

Здесь $\varepsilon_{n\nu}$ — уровень энергии состояния ν атома с номером n , а $t_{n\nu, n'\nu'}$ — амплитуда перехода между уровнями атомов, составляющих решетку. Будем предполагать кристалл ограниченным, а все состояния, образующие валентную группу, заполненными. С помощью известного соотношения

$$\sum_n E_n^k = \text{Sp } H^k$$

находим, что

$$\sum E_n = \sum \varepsilon_{n\nu},$$

т. е. сумма энергий уровней совпадает с суммой энергий уровней, невозмущенных перекрытием состояний.

Пусть уровни энергии атомов не зависят от расстояния до поверхности. Рассмотрим Ω -потенциал электронного газа в диэлектрике при нулевой температуре, пренебрегая взаимодействием электронов и перекрытием различных невырожденных уровней, принадлежащих различным атомам:

$$\Omega = \sum (\mu - E_n) \theta(\mu - E_n).$$

Следовательно, знание уровней энергии атомов, невозмущенных перекрытием, определяет как полную энергию электронного газа в диэлектрике, так

и любую термодинамическую функцию газа невзаимодействующих электронов. Электронная энергия кристалла просто равна сумме энергий отдельных атомов, т. е. поверхностный вклад в электронную энергию равен нулю. В то же время в металле поверхность вносит вклад в энергию кристалла. Таким образом, по мере заполнения зоны положительный вклад в энергию от поверхности, возникающий при слабом заполнении, должен компенсироваться отрицательным вкладом от дырочных состояний в почти заполненной зоне.

4. СЛУЧАЙ ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Рассмотрим, в частности, поверхность раздела двух простых кубических решеток с граничной плоскостью (001), базируясь на модели сильной связи. Будем предполагать, что имеются лишь переходы между ближайшими соседями, описываемые амплитудами перехода t_1 и t_2 соответственно слева и справа от границы раздела $j = 0$ (рис. 1), а уровни энергии этих атомов равны ε_1 и ε_2 . Амплитуды перехода между граничными атомами равны t . Среда 2 будет считаться непроницаемой для электронов (энергия электронов, локализованных в области $z < 0$, оказывается ниже дна зоны в области $z > 0$). Электронные спектры в неограниченных кристаллах 1 и 2 даются уравнениями

$$\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_i - 2t_i \cos k_z l = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + 2t_i (\cos k_x l + \cos k_y l).$$

Введем фурье-образы от амплитуд волновых функций электронов c_{mnj} в плоскости:

$$c_j = \sum_{m,n} e^{ik_x lm + ik_y ln} c_{mnj}.$$

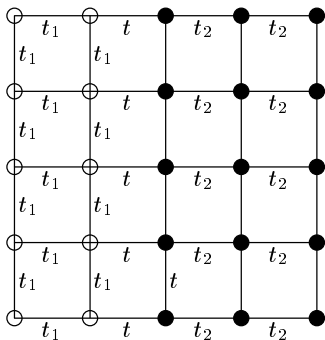


Рис. 1. Модель кубической решетки

Уравнения сильной связи, записанные для граничных атомов, позволяют связать величины c_j слева и справа от границы:

$$(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1)c_0 - t_1 c_{-1} - t c_1 = 0,$$

$$(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_2)c_1 - t c_0 - t_2 c_2 = 0.$$

Полагая $c_n = A \sin(-nk_z l + \varphi)$ при $n \leq 0$ и $c_n = \exp(-(n-1)\kappa l)$ при $n > 0$, получим следующее уравнение для φ :

$$\text{ctg } \varphi = -\text{ctg } k_z l + \frac{t^2}{t_1 t_2} \frac{e^{-\kappa l}}{\sin k_z l}. \quad (4)$$

Частный случай оборванной решетки полубесконечного кристалла эквивалентен обращению величины t в нуль. При этом фаза удовлетворяет условию $\varphi = -k_z l$. Это значит, что $\varphi = 0$ на атоме, следующем за граничным. Вне зависимости от t при малом k_z фаза стремится к нулю по закону

$$\varphi \propto -k_z l t_1 t_2 (t_1 t_2 - t^2 e^{-\kappa l})^{-1}.$$

Таким образом, условие обращения волновой функции на границе в нуль оправдано, если типичные волновые векторы электронов малы, в частности, в случае полупроводника. Переход к пределу сплошной среды из (4) происходит только при $t^2 = t_1 t_2$ и $\kappa \rightarrow 0$. Первое условие обеспечивает малость отражения электронов вследствие неоднородности величин t (см. [4]), второе — большую величину подбарьерной длины волны по сравнению с постоянной решетки. В общем же случае, когда приближение сплошной среды неприменимо, величина ζ в выражениях (1) и (3) заменяется более сложным выражением $\zeta = (1 - t^2 e^{-\kappa l} / t_1 t_2)|_{k=0} / l$.

Остановимся на случае оборванной решетки. Обрыв системы на атомах $n = 1$ и $n = N$ эквивалентен наложению граничных условий $c_0 = c_{N+1} = 0$. Решение $c_n = \sin k_z n l$ удовлетворяет условию в нуле и при $k_z l = \pi K / l(N + 1)$ условию на $(N + 1)$ -атоме. Таким образом, в модели сильной связи может считаться выполненным условие $\varphi = 0$ на границе, отстоящей от крайних атомов на период элементарной ячейки. Если считать размер кристалла по числу входящих в него полных элементарных ячеек, то кристалл нужно как бы увеличить на одну ячейку, т. е. входящее в (2) выражение $V/S = d$ заменить на $d + l$. Это означает, что $\zeta = l$, а к величине Ω , определяемой формулой (2), добавляется слагаемое

$$-Sl \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) \theta(\mu - \epsilon(\mathbf{k})). \quad (5)$$

Потенциал Ω определяется плотностью состояний: $\Omega_S = -S \int (\mu - E)\theta(\mu - E)\nu(E) dE$. Вычислим плотность двумерных состояний в этой модели, отбрасывая вклад (5):

$$\nu = 2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \delta(E - 2t(\cos k_x l + \cos k_y l)) = \frac{1}{\pi^2 l^2 t} K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{E - \epsilon_0}{4t} \right)^2} \right).$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Плотность состояний имеет особенность в точке $E = \epsilon_0$, соответствующую нестингу.

«Косой» срез. Далее рассмотрим простую кубическую решетку, оборванную на границах (011) и (111). В этих случаях граница также является плоскостью симметрии, что позволяет легко решить задачу. Обрыв решетки эквивалентен нахождению решения уравнений для амплитуд в неограниченном кристалле, удовлетворяющего условию обращения амплитуд в нуль на воображаемой атомной плоскости, следующей за последним рядом. Такое решение имеет вид

$$c_{nmj} \sim \sin(k_3 l_3 (n_3 + 1)),$$

где ось 3 направлена по нормали к границе, l_3 — межплоскостное расстояние в направлении этой оси.

Для границы (011) имеет место равенство $\varphi = k_3 \zeta = k_3 l / \sqrt{2}$, для границы (111) $\varphi = k_3 \zeta = k_3 l / \sqrt{3}$. Поскольку межплоскостное расстояние с отклонением поверхности уменьшается, толщина кристалла как бы уменьшается по сравнению со случаем границы (001).

Два атома в элементарной ячейке. Пусть рассматривается одномерная решетка, элементарная ячейка которой состоит из двух атомов с энергиями состояний соответственно ϵ_1 и ϵ_2 . Амплитуды перехода между атомами, составляющими ячейку, равны t_1 , а между ближайшими атомами из соседних ячеек — t_2 . Система уравнений сильной связи имеет вид

$$(\epsilon_1 - E)c_{1,n} + t_2 c_{2,n-1} + t_1 c_{2,n} = 0,$$

$$(\epsilon_2 - E)c_{2,n} + t_1 c_{1,n} + t_2 c_{1,n+1} = 0.$$

Энергетический спектр неограниченной цепочки определяется уравнением

$$(\epsilon_1 - E)(\epsilon_2 - E) - (t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos k_z l) = 0.$$

Граничные условия зависят от того, на каком атоме решетка обрывается. При обрыве на атоме

сорта 1 выполняется равенство $c_{2,0} = 0$, при обрыве на атоме сорта 2 имеем $c_{1,1} = 0$. В первом случае граничные условия дают уравнение

$$e^{2i\varphi} = \frac{t_1 + t_2 e^{ik_x l}}{t_1 + t_2 e^{-ik_x l}}, \quad (6)$$

во втором случае в выражении (6) необходимо сделать замену $t_1 \leftrightarrow t_2$.

Фаза φ оказывается зависящей от k_z и отношения t_1/t_2 . Однако при $k_z \rightarrow 0$ выполняется условие $\varphi \rightarrow 0$.

5. ВЛИЯНИЕ НЕРОВНОСТИ ГРАНИЦЫ НА ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Выше была получена длина отражения от ровной поверхности кристалла. Поверхность, отклоненная от плоскости симметрии, неизбежно имеет ступенчатый характер. Неровности с высотой, не превышающей фермиевскую длину волны, образуют для электронов эффективную гладкую стенку. Положение этой стенки, определяющее длину отражения, может быть задано с точностью до высоты неровностей. В настоящем разделе мы найдем длину отражения на неровной ступенчатой поверхности со ступеньками, меньшими по высоте длины волны. Будем базироваться на модели сплошной среды, соответствующей случаю, когда длина волны велика по сравнению с атомным размером, что актуально для полупроводников и полуметаллов.

Формально задача ставится следующим образом: волновая функция обращается в нуль на поверхности $y = u(x, z) = 0$. Функция $u(x, z)$ ограничена, не убывает на бесконечности и в среднем равна нулю. Характерные масштабы неровностей — высота h и длина L — меньше длины волны. На расстоянии от поверхности $\lambda \gg y \gg h$ в уравнении Шредингера можно пренебречь энергией, превратив его в уравнение Лапласа, решение которого ведет себя как $\psi = -F(y - \zeta)$ при $y \rightarrow \infty$. Необходимо связать величину ζ с $u(x, z)$. Указанный вид асимптотики означает, что на решение уравнения Шредингера можно наложить эффективное граничное условие $\psi = 0|_{y=\zeta}$.

Физический анализ. Предположим, что неровности очень пологие, $h/L \ll 1$. В этом случае различные участки вдоль поверхности мало влияют друг на друга и эффективное граничное условие должно накладываться около средней линии формы поверхности $\zeta = \langle u(x, z) \rangle = 0$. Пусть теперь $h/L \gg 1$. В таком пределе волновая функция не будет проникать

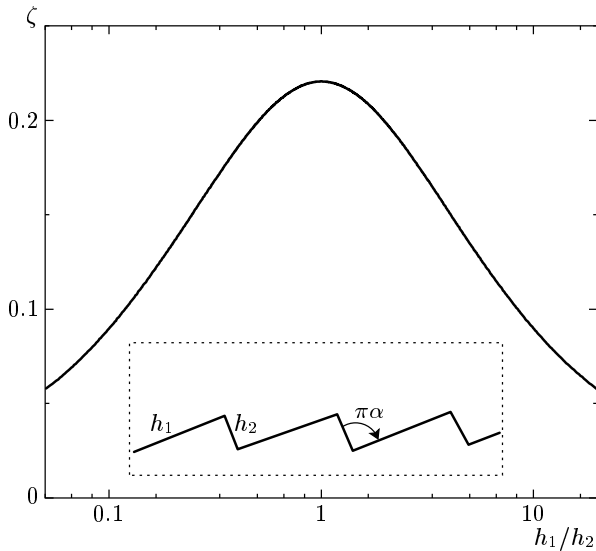


Рис. 2. Зависимость длины отражения ζ от отношения сторон прямоугольных ступенек. На вставке изображена форма поверхности

в узкие промежутки между зубцами неровностей и в первом приближении нулевое граничное условие необходимо накладывать на максимальных выступах поверхности и $\zeta = \max(u(x, z)) - \gamma L$. Поправочное слагаемое γL с произвольным коэффициентом γ обусловлено проникновением волновой функции в зазоры на глубину порядка ширины зазоров. Наконец, пусть поверхность состоит из ступенек прямоугольной формы с одинаковой высотой (см. вставку на рис. 2). Если $L \sim h$, то $\zeta \sim h$. Если $L \gg h$, то ступеньки представляют собой редкий «газ» на поверхности и ζ пропорционально их концентрации $1/L$, а следовательно, $\zeta \sim h^2/L$. Согласно проведенному анализу, эффективную границу ζ можно записать как $\zeta = hf(h/L)$, причем $f \rightarrow 0$ при $h/L \rightarrow 0$ и $f \rightarrow 1$ при $h/L \rightarrow \infty$.

Точно решаемая модель. Уравнение Лапласа с граничным условием $\psi = 0|_{y=u(x)}$ решается в двумерном случае при помощи конформных отображений. Это дает стимул рассмотреть случай одномерных неровностей поверхности $y = u(x)$. К таким неровностям принадлежат часто встречающиеся при росте кристаллов террасы. Кроме того, такая постановка может быть адекватна двумерным квантовым точкам.

Рассмотрим комплексную плоскость переменных $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, ограниченную снизу пилообразной границей вида

$$u(\eta_1) = \frac{h}{l}\eta_1 \quad \text{при} \quad 0 < \eta_1 < l,$$

$$u(\eta_1) = \frac{h}{L-l}(L - \eta_1) \quad \text{при} \quad l < \eta_1 < L, \\ u(\eta_1 + L) = u(\eta_1).$$

Верхнюю полуплоскость в переменных $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ с помощью отображения Кристоффеля–Шварца [5] можно отобразить на область $\eta_2 > u(\eta_1)$. Поскольку граница представляет собой разомкнутый бесконечный многоугольник, искомое отображение получается с помощью предельного перехода. Для бесконечного периодического многоугольника с углами при вершинах $\pi\alpha$ и $\pi(2 - \alpha)$, $\alpha < 1$, отображение Кристоффеля–Шварца можно искать в виде

$$\eta(\xi) = A \int_0^\xi \frac{\prod_n (\eta_1 - \pi n - a)^{1-\alpha}}{\prod_n (\eta_1 - \pi n)^{1-\alpha}} d\eta_1.$$

Здесь n и $n - a$ являются образами вершин, $\pi\alpha$ и $\pi(2 - \alpha)$ — углы при вершинах, разрез выбран по полуоси $(-\infty, 0)$. Константы A и $a < \pi$ следует находить из условия, чтобы вершины многоугольника с углами $\pi\alpha$ и $\pi(2 - \alpha)$ попадали соответственно в точки nL и $l + ih + nL$. Формальную расходимость числителя и знаменателя можно устранить, деля числитель и знаменатель на бесконечные константы \prod_n и перенормируя константу A . В результате произведения преобразуются в представление синуса:

$$\eta(\xi) = A \int_0^\xi \left(\frac{\sin(a - \xi)}{\sin \xi} \right)^{1-\alpha} d\xi. \quad (7)$$

Стороны ступеньки имеют длины h_1 и h_2 , удовлетворяющие соотношениям

$$h_1 = |A| \int_0^a \left(\frac{\sin(a - \xi)}{\sin \xi} \right)^{1-\alpha} d\xi, \\ h_2 = |A| \int_a^\pi \left(\frac{\sin(\xi - a)}{\sin \xi} \right)^{1-\alpha} d\xi,$$

которые однозначно определяют величины $|A|$ и a . Подынтегральная функция в (7) имеет период π . Фаза величины $A = |A|e^{i\beta}$ определяется условием, что средняя граница параллельна оси η_1 , из которого находим $\beta = (\pi - a)(1 - \alpha)$.

Функция $\text{Im}(\xi(\eta))$ является гармонической в верхней полуплоскости и удовлетворяет нулевому условию на пилообразной границе. Поэтому величина $\text{Im}(\xi(\eta)) = \psi(\eta)$ определяет волновую функцию как функцию координат η . При больших η в верхней полуплоскости

$$\text{Im}(\xi(\eta)) \sim -F(\eta_2 - \zeta).$$

Согласно (7)

$$\eta(\xi) \sim |A|\xi + C.$$

Для ζ получаем

$$\zeta = |A| \operatorname{Im} \int_0^{i\infty} \left[e^{i(\pi-a)(1-\alpha)} \left(\frac{\sin(a-\xi)}{\sin \xi} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] d\xi.$$

В частном случае прямоугольной пины $\alpha = 1/2$, $h = h_1 h_2 / \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \pi|A|$. Фаза β определяется условием $\beta = \operatorname{arctg}(h_2/h_1)$. Для ζ получаем выражение

$$\zeta = h \operatorname{Im} \int_0^{i\infty} e^{i(\pi-a)/2} \left(\sqrt{\frac{\sin(a-\xi)}{\sin \xi}} - 1 \right) d\xi - \frac{h}{2}$$

(величина $h/2$ вычтена для того, чтобы среднее положение границы привести к нулю).

На рис. 2 приведена зависимость ζ/h_1 от величины h_1/h_2 . Максимальное значение ζ достигается в пределе равносторонней пины, когда $a = 1/2$. Это значение равно

$$\zeta = h \left(\int_0^{\infty} (\sqrt{\operatorname{cth} \eta_2} - 1) d\eta_2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{h \ln 2}{\pi} \approx 0.22h.$$

Следует отметить относительно небольшую величину ζ по сравнению с высотой неровностей поверхности.

В заключение перечислим рассмотренные в работе факторы, определяющие поверхностные вклады

в термодинамику, которые сводятся к эффективному изменению размера образца: 1) квантование состояний, приводящее к эффективному уменьшению размера образца на характерную длину волны электрона; 2) проникновение волновой функции за границу образца (увеличение на глубину проникновения в граничащую среду); 3) учет кристаллической структуры (увеличение на величину, определяемую постоянной решетки); 4) неровности поверхности (уменьшение относительно средней поверхности на величину, связанную с высотой и шириной неровностей).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 00-02-17658, 02-02-16377 и 01-02-17694).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Нагаев, УФН **162**, 49 (1992).
2. М. М. Махмудиан, М. В. Энтин, Письма в ЖЭТФ **73**, 167 (2001).
3. Э. М. Баскин, М. В. Энтин, Письма в ЖЭТФ **70**, 511 (1999).
4. Л. С. Брагинский, Д. А. Романов, ФТТ **37**, 2122 (1995).
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1987).