

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ СТОКСОВЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Ю. В. Седлецкий*

Институт физики Национальной академии наук Украины
03028, Киев, Украина

Поступила в редакцию 14 января 2003 г.

Метод многих масштабов применен для получения нелинейного уравнения Шредингера четвертого порядка (НУШIV), которое описывает модуляции амплитуды основной гармоники стоксовых волн на поверхности слоя жидкости средней и большой глубины (по сравнению с длиной волны). Новые члены этого уравнения описывают линейный дисперсионный эффект третьего порядка и эффекты дисперсии нелинейности. При уменьшении нелинейности и дисперсии уравнение равномерно переходит в нелинейное уравнение Шредингера для стоксовых волн на поверхности жидкости конечной глубины, впервые полученное Хасимото и Оно. Коэффициенты полученного уравнения даются в явном виде как функции kh (h — глубина жидкости, k — волновое число). При стремлении kh к бесконечности они переходят в коэффициенты НУШIV, полученного впервые Дистом для случая бесконечной глубины.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv, 47.20.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) описывает временную эволюцию огибающей пакета быстро осциллирующих волн малой амплитуды в слабодиспергирующей недиссипативной среде. В последние годы развитие физики волновых процессов, моделируемых НУШ, смещается в сторону изучения все более нелинейных и высокодисперсионных эффектов, что отвечает учету следующих слагаемых в этом уравнении. Большинство работ этого направления относится к анализу возможностей дальнейшего сжатия и уплотнения оптических солитонов как битов информации в волоконных световодах (см., например, [1, 2]). Что касается других сред, то пока появляются лишь одиночные работы, в которых получены уравнения, учитывающие эффекты высших порядков: в плазме [3], на поверхности жидкости бесконечной [4–7] и конечной [8, 9] глубины, в магнетиках [10], для систем, которые описываются нелинейным уравнением Клейна–Гордона [11].

Так, при дополнительном учете только одного — следующего за главным — порядка малости для ам-

плитуды огибающей первой гармоники A быстрых осцилляций в [2, 3, 10] получено обобщенное НУШ

$$i \frac{\partial A}{\partial T} \pm \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + |A|^2 A \right) + i \varepsilon^2 \left(\alpha \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} + \beta |A|^2 \frac{\partial A}{\partial X} + \gamma A \frac{\partial |A|^2}{\partial X} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь ε — формальный параметр, характеризующий малость осциллирующих с амплитудой A величин и медленность изменения A по сравнению с быстрыми осцилляциями. В работах [4–7] уравнение (1) включает еще слагаемое с произведением амплитуд нулевой и первой гармоник и дополнено уравнением, выражающим нулевую гармонику через первую. В [8] получена система двух уравнений для нулевой и первой гармоник, а в [9] — система уравнений для этих двух гармоник, включающая амплитуды предыдущих порядков.

Уравнение вида (1) впервые было выведено в [12] для волновых пучков. Обычно уравнение (1) называют нелинейным уравнением Шредингера высшего порядка, или НУШ четвертого порядка (НУШIV). Термин «четвертого порядка» связан с тем, что три последних слагаемых в (1) возникают вследствие

*E-mail: sedlets@iop.kiev.ua

учета членов порядка $O(\varepsilon^4)$. Слагаемые же четвертого порядка по амплитуде возникают в следующем приближении $O(\varepsilon^5)$. Такое продвижение получено, например в [1, 11]. Второй и третий члены в (1) отвечают классическому НУШ (приближению $O(\varepsilon^3)$). Они учитывают основной дисперсионный вклад — дисперсию групповой скорости и главный нелинейный член — самомодуляцию фазы (зависимость частоты от амплитуды — эффект Стокса). Следующие слагаемые порядка $O(\varepsilon^4)$ именно и являются предметом изучения в последние годы. Четвертый член отвечает за линейную дисперсию третьего порядка — абберации Эйри, пятый — за эффект самоукручения профиля импульса, шестой описывает эффект Рамана самосдвига частоты. Основные публикации, посвященные изучению солитонных и квазисолитонных решений уравнения (1), приведены, например, в [1, 2, 13, 14].

Вывод НУШIV для амплитуды огибающей основной гармоники состоит в конечном счете в исключении амплитуд других гармоник и получении аналитического вида коэффициентов α , β и γ . Значение величин и знаков этих коэффициентов, а также их комбинаций предопределяют свойства решений этого уравнения [13, 14]. Так, в приближении ε^3 ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) совпадение или различие знаков коэффициентов второго и третьего членов (выбор «+» или «-» в (1)) является критерием возможности существования солитонов при нулевых граничных условиях. При некоторых значениях коэффициентов α , β и γ уравнение (1) имеет N -солитонные решения и даже может быть проинтегрировано методом обратной задачи (основные ссылки в [1, 2], последние — в [13, 14]).

Целью данной работы есть получение явного вида коэффициентов НУШIV для амплитуды огибающей слабонелинейных волн на поверхности жидкости конечной глубины (волны Стокса).

Классическое НУШ (приближение $O(\varepsilon^3)$) для стоксовых волн было получено Захаровым в пионерской работе [15] гамильтоновым методом в трехмерном случае для узкого спектра и бесконечной глубины из полученных им интегральных уравнений. Потом, тоже для бесконечной глубины, Юэном и Лейком [16] — методом усредненного лагранжиана. Случай конечной глубины исследовался в [17] методом многих масштабов, в [18] — гамильтоновым методом и в [19] — методом ВКБ, а НУШ было выведено методом многих масштабов в двумерном случае Хасимото и Оно [20], позднее в [21] — из интегральных уравнений Захарова. Потом с использованием метода многих масштабов это уравнение было раз-

ным образом обобщено: на трехмерный случай [22], с учетом поверхностного натяжения [23], неровностей дна [24], встречных волн [25] и так далее.

НУШIV в приближении бесконечной глубины (уравнение Диста) было выведено в работе [4] итеративным методом, в [26] — из интегральных уравнений Захарова, в [5] — асимптотическим разложением производной $\partial A/\partial t$. Знак одного из слагаемых уравнения Диста исправлен в [27], а такого же типа ошибка работы [26] — в [28]. В итоге неоднократно выведенное разными авторами и методами уравнение Диста стало классическим расширением НУШ для стоксовых волн в жидкости бесконечной глубины. В работах [29–32] показана адекватность экспериментов по изучению эволюции во времени пакетов стоксовых волн на поверхности глубокой воды с численными расчетами на основе уравнения Диста. Кроме того, это уравнение обобщено с учетом капиллярности [28, 6], течения [7], наличия термоклина [33] и модифицировано для пространственной, а не временной эволюции [4, 34].

Задача вывода НУШIV для жидкости конечной глубины и дальнейший анализ найденных коэффициентов уравнения и определение зависимости его решений от глубины и других параметров имеют такую мотивацию. Еще не были известны НУШ и свойства его солитонных решений, когда Уизе-мом [35] методом усредненного лагранжиана и Бенджаменом [36] методом гармонических рядов было найдено, что слабонелинейная гармоническая волна с малым гармоническим возмущением амплитуды ведет себя по-разному, если произведение волнового числа и глубины жидкости меньше или больше 1.363. В первом случае волна модуляционно устойчива, во втором — модуляции увеличиваются с течением времени. Дискутировались разные сценарии эволюции модуляций: переход к хаосу, возврат в исходное состояние, равномерное распределение по гармоникам. После получения НУШ [20] для конечной глубины число 1.363 появилось в третий раз: при этом значении kh коэффициент нелинейного уравнения Шредингера изменяет знак на отрицательный, и, согласно свойствам этого уравнения, при $kh > 1.363$ оно имеет солитонные решения, следовательно, нарастающие модуляции могут трансформироваться в солитоны. Изучается возможность описать нелинейную эволюцию нестабильной моды Бенджамена–Фейра и ее возвращение типа ФПУ с помощью «дышащих» (growing-and-decaying) солитонов [37] и бризеров [37, 38]. С другой стороны, наличие для волн Стокса особой точки $kh = 1.363$, в которой нелинейный член становится равным ну-

лю, наводит на мысль учесть следующие слагаемые НУШ и, таким образом, исследовать в зависимости от kh изменение знаков и соотношений между коэффициентами НУШIV и соответствующее изменение свойств решений, а также описать явления модуляционной неустойчивости и возврата в рамках НУШ четвертого порядка. В [13] показано разнообразие свойств решений НУШIV, в частности, эволюция параметров модуляционной неустойчивости Бенджамена–Фейра. То, что область параметров этой неустойчивости и величины инкрементов уменьшаются при учете следующих слагаемых НУШ, показано уже в случае бесконечной глубины в [4, 5]. На основе свойств решений (1) объяснен механизм экспериментального факта сдвига частоты [4].

Для решения поставленной задачи получения НУШIV для конечной глубины в этой работе использован метод многих масштабов. Примененная здесь процедура введения следующих быстрых времен и координат описана в [11]. Трудности метода многих масштабов в задаче учета следующих слагаемых НУШ для волн Стокса отмечались уже в более простом случае бесконечной глубины (см. обзор [39], раздел 5.4). Для конечной глубины задачу получения НУШIV решали методом многих масштабов в [40, 41] и методом ВКБ в [8]. В [40] коэффициенты НУШIV были получены лишь в самой точке $kh = 1.363$, а найденные в [41] выражения для коэффициентов не удовлетворяют предельному случаю бесконечной глубины. Полученная в [8] система уравнений составлена для главной компоненты амплитуды первой гармоники (возникающей в первом порядке по ε), а в этой работе получено уравнение для полной амплитуды (суммы вкладов всех приближений в первую гармонику). Другим принципиальным отличием данной работы от [8] является использование предположения о движении индуцированного волнами течения (нулевой гармоники) с групповой скоростью первой гармоники. Без этого анзаца исходная система уравнений сведена в [8] лишь к системе двух уравнений для амплитуд нулевой гармоники и первого порядка первой гармоники, а в данной работе получено замкнутое НУШIV (1) для амплитуды полной первой гармоники профиля волны.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать на плоскости xu движение идеальной несжимаемой однородной жидкости.

Координату x берем вдоль направления движения, а координату y — вдоль вертикального направления. Предполагается, что снизу жидкость ограничена твердым дном на глубине $y = -h$, а сверху — быстроосциллирующей свободной поверхностью $\eta(x, t)$. Нужно определить эволюционное уравнение для амплитуды A_1 гибающей первой гармоники этих модуляций.

Потенциал скорости жидкости $\phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ -h \leq y \leq \eta(x, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Граничными условиями на свободной поверхности $\eta(x, t)$ является кинематическое условие, которое означает, что частички жидкости, расположенные на самой поверхности, движутся вдоль этой поверхности, не покидая ее:

$$\eta_t - \phi_y + \eta_x \phi_x = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (3)$$

и динамическое условие, которое означает, что в интеграле Коши–Бернулли на всей поверхности давление жидкости постоянно (равно атмосферному):

$$g \eta(x, t) + \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0, \quad y = \eta(x, t). \quad (4)$$

На дне вертикальная компонента скорости частичек жидкости равна нулю:

$$\phi_y = 0, \quad y = -h, \quad (5)$$

а сам потенциал скорости есть ограниченная величина.

3. МЕТОД МНОГИХ МАСШТАБОВ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Будем использовать метод многих масштабов, как он описан для высших приближений в [11]. Изменения величин ϕ и η во времени t будем характеризовать совокупностью быстрых колебаний, которые соответствуют времени t_0 , и медленных, которые описываются временем τ , состоящим из медленного времени t_1 , очень медленного t_2 и особо медленного t_3 . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_3}. \quad (6)$$

Изменения в пространстве вдоль оси x будем характеризовать обычной координатой x_0 и растянутой координатой x_1 :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (7)$$

Будем считать потенциал скорости и смещение (профиль) поверхности малыми величинами порядка ε и учтем слагаемые до ε^4 включительно:

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 + \varepsilon^4\phi_4, \quad (8)$$

$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + \varepsilon^4\eta_4. \quad (9)$$

Подставим уравнения (6)–(9) в (2) и в граничные условия (3), (4), в которых ϕ_x , ϕ_y и ϕ_t разложим в ряд Тейлора по степеням η при $y = 0$, и соберем слагаемые с одинаковыми степенями ε .

3.1. Приближения $O(\varepsilon^1)$

В приближение $O(\varepsilon^1)$ получаем результаты линейной теории. Из уравнения Лапласа и граничного условия на дне имеем

$$\phi_1 = \phi_1^{(0)} + (\phi_1^{(1)} + \text{c.c.}), \quad (10)$$

где

$$\phi_1^{(0)} = \Psi_1, \\ \phi_1^{(1)} = -\frac{i\omega \operatorname{ch}(k(y+h))}{2k \operatorname{sh}(kh)} A e^{i\theta}, \quad \theta = kx_0 - \omega t_0,$$

из динамического граничного условия имеем

$$\eta_1 = \eta_1^{(0)} + \eta_1^{(1)}, \quad (11)$$

где

$$\eta_1^{(0)} = 0, \quad \eta_1^{(1)} = \frac{1}{2} A e^{i\theta} + \text{c.c.} \quad (12)$$

Из кинематического граничного условия получаем линейный закон дисперсии

$$\omega^2 - k\sigma g = 0, \quad \sigma \equiv \operatorname{th}(kh). \quad (13)$$

Будем искать уравнения для эволюции во времени τ двух новых неизвестных функций медленных переменных x_1, t_1, t_2, t_3 : амплитуды первой гармоники A , являющейся, согласно (12), огибающей быстро осциллирующего во времени t_0 смещения поверхности, а также индуцированной этими быстрыми осцилляциями и постоянной во времени t_0 нулевой гармоники Ψ_1 потенциала скорости (среднего течения).

3.2. Приближение $O(\varepsilon^2)$

В приближении $O(\varepsilon^2)$ получаем уравнение для компоненты потенциала ϕ_2 :

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} = -2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial x_0},$$

или после подстановки сюда (10) уравнение

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} = -\frac{\omega \operatorname{ch}(k(y+h))}{\operatorname{sh}(kh)} \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} + \text{c.c.}$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \quad y = -h,$$

запишем в виде суммы гармоник:

$$\phi_2 = \phi_2^{(0)} + (\phi_2^{(1)} + \phi_2^{(2)} + \text{c.c.}), \quad (14)$$

где

$$\phi_2^{(0)} = \Psi_2, \quad (15)$$

$$\phi_2^{(1)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(kh)} (D \operatorname{ch}(k(y+h)) - (y+h) \operatorname{sh}(k(y+h))) \frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta}. \quad (16)$$

Коэффициенты однородного решения D определим из условия, чтобы решение (16) оставалось ограниченным при стремлении глубины к бесконечности [19]. Учитывая из (16) асимптотику для потенциала $\phi_2^{(1)}$, находим, что для ограниченности этой величины необходимо положить

$$D = \frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x_1} h D_1(h),$$

где произвольный множитель $D_1(h)$ должен лишь удовлетворять условию

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h(D_1(h) - 1) = 0.$$

Таким образом, предел $\phi_2^{(1)}$ ограничен

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \phi_2^{(1)} = -\frac{\omega}{2k} \frac{\partial A}{\partial x_1} y e^{yk} e^{i\theta}.$$

Используя произвольность D_1 , калибруем $\phi_2^{(1)}$ таким образом, чтобы на поверхности жидкости выполнялось условие

$$\phi_2^{(1)}|_{y=0} = 0.$$

В таком случае

$$D_1(h) = \operatorname{th}(kh).$$

Итак, в настоящей работе рассматривается случай произвольной глубины, в том числе бесконечной глубины. Выбор граничного условия (правило выбора коэффициента D) обусловлен, во-первых, его

естественностью и, во-вторых, необходимостью обеспечить правомерность предельного перехода в полученных формулах к случаю бесконечной глубины [4]. Это замечание касается правила выбора коэффициентов однородного решения и в следующих приближениях.

Далее, из динамического граничного условия на шаге $O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + \frac{\omega^2}{k\sigma} \eta_2 &= -\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial t_0} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \right)^2, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + \frac{\omega^2 \eta_2}{k\sigma} &= \frac{\omega^2(\sigma^2 - 1)}{4\sigma^2} \overline{A}A - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} + \\ &+ i \frac{\omega}{2\sigma k} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} + \frac{1}{8\sigma^2} (3\sigma^2 - 1) \omega^2 A^2 e^{2i\theta} + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (17)$$

находим соответствующий профиль поверхности

$$\eta_2 = \eta_2^{(0)} + \eta_2^{(1)} + \eta_2^{(2)} + \text{с.с.}, \quad (18)$$

определенный пока только для нулевой и первой гармоник:

$$\eta_2^{(0)} = \frac{\sigma^2 - 1}{4\sigma} k \overline{A}A - \frac{\sigma k}{\omega^2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1}, \quad (19)$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{i}{2\omega} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta}. \quad (20)$$

Наконец, из кинематического граничного условия приближения $O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_0} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} - \frac{1}{2\sigma} i \omega k A^2 e^{2i\theta} + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (21)$$

для нулевой гармоники имеем тождество, а для первой гармоники — неопределенность, которую можно устранить, только положив

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0, \quad (22)$$

где

$$V_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{1 - \sigma^2}{\sigma} kh \right) \quad (23)$$

— групповая скорость. Из (22) и комплексно-сопряженного (22) уравнения следует, что

$$\frac{\partial(A \overline{A})}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial(A \overline{A})}{\partial x_1} = 0. \quad (24)$$

Итак, первая гармоника и ее модуль эволюционируют в системе координат медленного времени t_1 и растянутой продольной координаты x_1 с групповой скоростью.

Для второй гармоники система уравнений динамического и кинематического условий (17), (21) не переопределена и позволяет найти коэффициенты для второй гармоники $\phi_2^{(2)}$ и $\eta_2^{(2)}$:

$$\eta_2^{(2)} = \frac{3 - \sigma^2}{8\sigma^3} k A^2 e^{2i\theta}, \quad (25)$$

$$\phi_2^{(2)} = 3i\omega \frac{\sigma^2 - 1}{8\sigma^3} \frac{\text{ch}(2k(y+h))}{\text{sh}(2kh)} A^2 e^{2i\theta}. \quad (26)$$

В (20) теперь можно учесть, что из (22)

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} = -V_g \frac{\partial A}{\partial x_1},$$

а необходимая в (19) производная $\partial \Psi_1 / \partial t_1$ находится в следующем приближении.

3.3. Приближение $O(\varepsilon^3)$

В приближении $O(\varepsilon^3)$ имеем уравнение для компоненты потенциала ϕ_3 :

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1 \partial x_0}.$$

После подстановки в это уравнение выражений (10), (14) получаем уравнение для определения ϕ_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} + \\ &+ \left\{ i \frac{\omega}{k} \left(k(y+h) \frac{\text{sh}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \left(kh\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\text{ch}(k(y+h))}{\text{sh}(kh)} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} e^{i\theta} + \right. \\ &\left. + \frac{3\omega k(\sigma^2 - 1)}{\sigma^3} \frac{\text{ch}(2k(y+h))}{\text{sh}(2kh)} A \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{2i\theta} + \text{с.с.} \right\}. \end{aligned}$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} = 0, \quad y = -h,$$

состоит из четырех гармоник

$$\phi_3 = \phi_3^{(0)} + \phi_3^{(1)} + \phi_3^{(2)} + \phi_3^{(3)} + \text{с.с.} \quad (27)$$

Здесь

$$\phi_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} (y+h)^2 + \Psi_3, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^{(1)} &= \frac{1}{\text{sh}(kh)} \times \\ &\times \left[G \text{ch}(k(y+h)) + [(y+h)^2 \text{ch}(k(y+h)) - \right. \\ &\left. - 2h\sigma(y+h) \text{sh}(k(y+h))] \frac{i\omega}{4k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right] e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Как отмечалось выше, амплитуду однородного решения G определим из условия ограниченности потенциала $\phi_3^{(1)}$ при стремлении глубины к бесконечности. Это дает

$$G = \frac{i\omega}{4k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} h^2 (2\sigma^2 - 1).$$

Тогда

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \phi_3^{(1)} = \frac{i\omega}{4k} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} y^2 e^{ky} e^{i\theta}.$$

Из динамического граничного условия находим две из четырех гармоник смещения поверхности

$$\eta_3 = \eta_3^{(0)} + (\eta_3^{(1)} + \eta_3^{(2)} + \eta_3^{(3)} + \text{с.с.}), \quad (30)$$

а именно

$$\begin{aligned} \eta_3^{(0)} &= -\frac{k\sigma}{\omega^2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_1} \right) - \\ &- \frac{i}{4\sigma} (\sigma^2 - 1)(\sigma kh - 1) \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \eta_3^{(1)} &= \left[\frac{i}{2\omega} \frac{\partial A}{\partial t_2} - \frac{k}{2\omega} \left(\frac{k\sigma^2}{\omega} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) A + \right. \\ &\left. + \frac{k^2}{16\sigma^4} (2\sigma^6 - 11\sigma^4 + 9\sigma^2 - 3) A^2 \bar{A} \right] e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь учтем кинематическое граничное условие. Слагаемые, которые образуют уравнение нулевой гармоники, не содержат неопределенных коэффициентов. Поэтому это уравнение является условием, которому должны удовлетворять производные от Ψ_1 и A :

$$h \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\sigma k}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t_1^2} + \omega \frac{\mu}{8\sigma^2} \frac{\partial(A\bar{A})}{\partial x_1} = 0. \quad (33)$$

Здесь

$$\mu \equiv \frac{2\sigma}{\omega} (2\omega - k(\sigma^2 - 1)V_g) = (\sigma^2 - 1)^2 kh - \sigma(\sigma^2 - 5).$$

Поскольку произведение $A\bar{A}$ удовлетворяет (24), мы будем использовать анзац, в рамках которого амплитуда нулевой гармоники Ψ_1 перемещается с групповой скоростью:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} = -V_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, \quad V_0 = V_g. \quad (34)$$

После подстановки этого выражения в (33) и интегрирования получим

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = \frac{\omega k \mu}{2\sigma \nu} A\bar{A}, \quad (35)$$

где обозначено

$$\nu \equiv \frac{4k\sigma}{g} (V_0^2 - gh), \quad (36)$$

так что при $V_0 = V_g$

$$\nu = ((\sigma + 1)^2 kh - \sigma)((\sigma - 1)^2 kh - \sigma).$$

Видно, что для глубокой воды

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = 0.$$

Из условия ограниченности $\phi_3^{(0)}$ находим амплитуду однородного решения Ψ_3 . Учитывая асимптотику при $kh \rightarrow \infty$ производной $\partial \Psi_1 / \partial x_1$ из (35) и потенциала $\phi_3^{(0)}$ из (28), для ограниченности $\phi_3^{(0)}$ положим

$$\Psi_3 = -\frac{1}{4} \omega \frac{\partial(A\bar{A})}{\partial x_1} h.$$

Тогда из (28) следует, что для глубокой воды

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \phi_3^{(0)} = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial(A\bar{A})}{\partial x_1} \left(y + \frac{1}{8k} \right). \quad (37)$$

Отсюда и из выражений $\phi_1^{(0)} = \Psi_1$, $\phi_2^{(0)} = \Psi_2$ видно, что при $kh \rightarrow \infty$ справедливо граничное условие для нулевой гармоники, которое используется в [4]:

$$\frac{\partial(\phi_1^{(0)} \varepsilon + \phi_2^{(0)} \varepsilon^2 + \phi_3^{(0)} \varepsilon^3)}{\partial y} = \varepsilon^3 \omega \frac{\partial(A\bar{A})}{\partial x_1}, \quad y = 0$$

(для случая, когда A — амплитуда профиля поверхности, соответствующее выражение приведено в последней работе из ссылки [4]).

Слагаемые кинематического условия, пропорциональные $e^{i\theta}$, образуют еще одно эволюционное уравнение для амплитуд A и Ψ_1 :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \\ + \frac{1}{16\sigma^4} (2\sigma^6 - 13\sigma^4 + 12\sigma^2 - 9) \omega k^2 A^2 \bar{A} - \\ - \left(\frac{k^2}{2\omega} (\sigma^2 - 1) \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} + k \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} \right) A = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} &= \frac{\omega}{4k^2 \sigma^2} \times \\ &\times ((\sigma^2 - 1)(3\sigma^2 + 1)k^2 h^2 - 2\sigma(\sigma^2 - 1)kh - \sigma^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая (34), имеем

$$i \frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{1}{16\sigma^4} (2\sigma^6 - 13\sigma^4 + 12\sigma^2 - 9) \omega k^2 A^2 \bar{A} - \mu_0 \frac{k}{4\sigma} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} A = 0, \quad (40)$$

где

$$\mu_0 \equiv \frac{2\sigma}{\omega} (2\omega - k(\sigma^2 - 1)V_0). \quad (41)$$

Подстановка (35) в (40) приводит к эволюционному уравнению для амплитуды первой гармоники во времени t_2 :

$$i \frac{\partial A}{\partial t_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + q_3 \omega k^2 A^2 \bar{A} = 0, \quad (42)$$

где (при условии, что в (41) $V_0 = V_g$)

$$q_3 = -\frac{1}{16\nu\sigma^4} \left((9\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9)(\sigma^2 - 1)^2 k^2 h^2 + 2\sigma(3\sigma^6 - 23\sigma^4 + 13\sigma^2 - 9)kh - \sigma^2(7\sigma^4 - 38\sigma^2 - 9) \right). \quad (43)$$

Сумма уравнения (22) и уравнения (42), умноженного на ε , с учетом (6) приводит к нелинейному уравнению Шредингера

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} + V_g \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + q_3 \omega k^2 A^2 \bar{A} \right) = 0, \quad (44)$$

впервые полученному для гравитационных волн на поверхности слоя жидкости конечной толщины Хасимото и Оно в работе [20]. Целью данной работы является учет следующих слагаемых (приближение $O(\varepsilon^4)$ к уравнению Хасимото–Оно).

На рис. 1 приведен график зависимости коэффициента q_3 от параметра kh . Изменение знака этого коэффициента с положительного на отрицательный происходит в точке $kh = 1.363$ при увеличении k (кривая 1). Как известно, нелинейное уравнение Шредингера имеет солитонные решения при нулевых граничных условиях только в случае, если произведение

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} q_3 > 0.$$

Для закона дисперсии (13)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} < 0$$

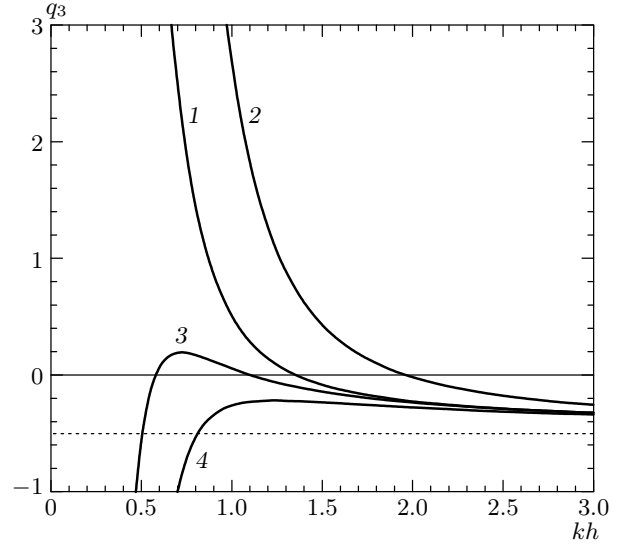


Рис. 1. Коэффициент q_3 . Кривые отвечают разным значениям V_0 в уравнении (34): 1 — $V_0 = V_g$, 2 — $V_0 = \omega/k$, 3 — $V_0 = -V_g$, 4 — $V_0 = -V_g + \omega/2k$

при всех k , например

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = -0.1564 \frac{\omega}{k^2}$$

при $kh = 1.363$, поэтому в приближении $O(\varepsilon^3)$ солитоны огибающей возможной лишь при $kh > 1.363$, в частности, для бесконечной глубины, когда $q_3 = -1/2$ (горизонтальная пунктирная линия на рис. 1).

Поскольку (34) является аналогом, который использовался и в большинстве предыдущих работ, например [20, 23, 40, 41], однако лишь как предположение, на рис. 1 также приведены кривые зависимости q_3 от параметра kh при разных выборах скорости V_0 амплитуды нулевой гармоники Ψ_1 в (34). Кривая 1 отвечает традиционному условию, согласно которому эта скорость равна V_g (групповой скорости первой гармоники A). Именно в этом случае $q_3 = 0$ при $kh = 1.3628$. Кривая 3 построена для случая $V_0 = -V_g$, кривая 2 — если $V_0 = V_f$ ($V_f = \omega/k$ — фазовая скорость), а кривая 4 — если $V_0 = -V_g + \omega/2k$ (при таком выборе $\eta_2^{(0)}$ в (19) равно нулю).

Приведенные графики демонстрируют степень чувствительности коэффициента q_3 и особой точки kh , в которой происходит смена знака q_3 , к выбору аналога для скорости нулевой гармоники. Что касается экспериментов, то большинство из них (см. [30] и ссылки в нем, а также [31, 32]), начиная с классических работ [16], относятся к случаю глубокой воды

$kh \gg 1$. В единственном на сегодня эксперименте для промежуточной глубины [42] измерялся профиль поверхности лишь в трех точках $kh = 0.847$, $kh = 1.53$ и $kh = 4.93$ и сделан вывод, что при $kh = 0.847$ и 4.93 получаются качественно разные картины долговременной эволюции, эволюция же в точке $kh = 1.53$ похожа на линейную. Из этого, разумеется, однозначно не следует, что качественное изменение картины происходит именно при $kh = 1.36$. Критерий $V_g < V_f$, при котором можно делать замену $\partial/\partial t \rightarrow V_g \partial/\partial x$, выполняется для гравитационных волн с законом дисперсии (13) для всех kh , но он является лишь необходимым, а не достаточным условием [43].

В дальнейшем в этом и следующем порядках мы будем использовать традиционное предположение о том, что скорость нулевой гармоники равняется скорости первой гармоники. В связи с этим отметим, что следующее приближение методом ВКБ было вычислено в работе [8], однако ее авторы не считали возможным использовать анзац (34), поэтому эволюционные уравнения на каждом шаге по ε были оставлены в виде систем двух связанных уравнений для амплитуд A и Ψ_1 .

Эволюционные уравнения (33) и (42) получены выше таким образом, чтобы решения уравнения Лапласа для нулевой и первой гармоник, согласованные с динамическим граничным условием, удовлетворяли также кинематическому граничному условию. Тот же подход для второй и третьей гармоник не приводит к новым эволюционным уравнениям, однако позволяет найти значения еще не определенных коэффициентов этих гармоник:

$$\begin{aligned} \phi_3^{(2)} = & \frac{3\omega}{16k\sigma^4} \left[4\sigma(\sigma^2 - 1)k(y+h) \operatorname{sh}(2k(y+h)) - \right. \\ & \left. - (\sigma^2 - 1)((3\sigma^2 + 5)hk - 3\sigma) \operatorname{ch}(2k(y+h)) \right] \times \\ & \times A \frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{1}{\operatorname{sh}(2kh)} e^{2i\theta}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$\eta_3^{(2)} = i \frac{3(1 - \sigma^2)kh + \sigma(\sigma^2 - 3)}{4\sigma^4} A \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{2i\theta}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^{(3)} = & -\frac{i\omega k}{128\sigma^6} (\sigma^2 - 1)(13\sigma^2 - 9)(3 + \sigma^2) \times \\ & \times A^3 \frac{\operatorname{ch}(3k(y+h))}{\operatorname{sh}(3kh)} e^{3i\theta}, \quad (47) \end{aligned}$$

$$\eta_3^{(3)} = \frac{3}{128\sigma^6} (3 - \sigma^2)(\sigma^4 + 3)k^2 A^3 e^{3i\theta}. \quad (48)$$

После учета анзаца (34) и эволюционного уравнения (40) выражение (32) приобретает вид

$$\begin{aligned} \eta_3^{(1)} = & \left[-\frac{k(\sigma^2 + 1)(kh(\sigma^2 - 1) - \sigma)}{8\omega\sigma} A \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{k^2}{32\sigma^4} (2\sigma^6 - 9\sigma^4 + 6\sigma^2 + 3)A^2 \bar{A} \right] e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Если еще учесть и (35), то получим

$$\begin{aligned} \eta_3^{(1)} = & -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \right. \\ & + \frac{1}{8\sigma^4 \nu} [(9\sigma^4 - 8\sigma^2 - 3)(\sigma^2 - 1)^2 k^2 h^2 - \\ & - 2\sigma(\sigma^2 + 1)(\sigma^4 - 3)kh + \\ & \left. + \sigma^2(\sigma^4 - 16\sigma^2 - 3)]k^2 A^2 \bar{A} \right\} e^{i\theta}. \quad (49) \end{aligned}$$

3.4. Приближение $O(\varepsilon^4)$

В порядке $O(\varepsilon^4)$ имеем

$$\phi_4 = \phi_4^{(0)} + \phi_4^{(1)} + \phi_4^{(2)} + \phi_4^{(3)} + \phi_4^{(4)} + \text{с.с.}, \quad (50)$$

где

$$\phi_4^{(0)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} (y+h)^2 + \Psi_4, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \phi_4^{(1)} = & \frac{1}{\operatorname{sh}(kh)} \left\{ F \operatorname{ch}(k(y+h)) + \right. \\ & + \frac{\omega}{4k} \left[\frac{1}{3} (y+h)^3 \operatorname{sh}(k(y+h)) - \right. \\ & \left. - h\sigma(y+h)^2 \operatorname{ch}(k(y+h)) + \right. \\ & \left. \left. + h^2(2\sigma^2 - 1)(y+h) \operatorname{sh}(k(y+h)) \right] \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} \right\} e^{i\theta}. \quad (52) \end{aligned}$$

Амплитуду однородного решения F определяем, как и в предыдущих итерациях, из условия ограниченности потенциала $\phi_4^{(1)}$ при стремлении глубины к бесконечности. Тогда

$$F = -\frac{\omega}{12k} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} h^3 (6\sigma^2 - 5)\sigma,$$

и для глубокой воды

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \phi_4^{(1)} = \frac{\omega}{12k} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} y^3 e^{ky} e^{i\theta}.$$

Из динамического граничного условия находим первые две из пяти гармоник смещения поверхности

$$\eta_4 = \eta_4^{(0)} + (\eta_4^{(1)} + \eta_4^{(2)} + \eta_4^{(3)} + \eta_4^{(4)} + \text{с.с.}) \quad (53)$$

(см. Приложение). Из кинематического граничного условия, собирая слагаемые, не содержащие гармоник, получаем эволюционное уравнение для амплитуды Ψ_2 нулевой гармоники приближения $O(\varepsilon^4)$:

$$h \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} - \frac{k\sigma}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t_1^2} - i \frac{\omega}{k} \tilde{q}_{40} \left(A \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x_1^2} - \bar{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) = 0, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{40} = & \frac{1}{32\sigma^3\nu} \times \\ & \times ((\sigma^2-1)^5 k^4 h^4 - 4\sigma(2\sigma^4+9\sigma^2+5)(\sigma^2-1)^2 k^3 h^3 + \\ & + 2\sigma^2(\sigma^2-1)(9\sigma^4+16\sigma^2-9)k^2 h^2 - \\ & - 4\sigma^3(4\sigma^4-9\sigma^2-7)kh + 5\sigma^4(\sigma^2-5)). \end{aligned} \quad (55)$$

Предполагая, что компонента Ψ_2 потенциала нулевой гармоники приближения $O(\varepsilon^2)$ так же, как и Ψ_1 , перемещается с групповой скоростью первой гармоники A ,

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t_1} = -V_g \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}, \quad (56)$$

и интегрируя, находим связь Ψ_2 с A :

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} = -i \frac{4\omega\sigma}{\nu} \tilde{q}_{40} \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right). \quad (57)$$

Отсюда видно, что для глубокой воды

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} = 0.$$

Из условия ограниченности $\phi_4^{(0)}$ определяем амплитуду однородного решения Ψ_4 . Учитывая асимптотику при $kh \rightarrow \infty$ производной $\partial \Psi_2 / \partial x_1$ из (57) и потенциала $\phi_4^{(0)}$ из (51), для ограниченности $\phi_4^{(0)}$ положим

$$\Psi_4 = -i \frac{3\omega h}{16k} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right).$$

Тогда из (51) следует, что для глубокой воды

$$\begin{aligned} \lim_{kh \rightarrow \infty} \phi_4^{(0)} = & \frac{i\omega}{8k} \left(3y + \frac{1}{8k} \right) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Из кинематического граничного условия, приравнявая коэффициенты при $e^{i\theta}$, получаем эволюционное

уравнение для амплитуды первой гармоники приближения $O(\varepsilon^4)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial t_3} - \frac{i}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} + \\ + i\omega k \tilde{q}_{41} A \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} + i\omega k \tilde{q}_{42} A^2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \\ - A \left(\frac{k^2}{2\omega} (\sigma^2 - 1) \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_1} + k \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) - \\ - \frac{k^2}{2\omega} (\sigma^2 - 1) A \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} = & -\frac{\omega}{8k^3\sigma^3} [(\sigma^2-1)(15\sigma^4-2\sigma^2+3)k^3 h^3 - \\ & - 3\sigma(\sigma^2-1)(3\sigma^2+1)k^2 h^2 - 3\sigma^2(\sigma^2-1)kh - 3\sigma^3], \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{41} = & \frac{1}{16\sigma^5\nu} [(2\sigma^6-11\sigma^4-10\sigma^2+27)(\sigma^2-1)^3 k^3 h^3 - \\ & - \sigma(\sigma^2-1)(6\sigma^8-21\sigma^6+9\sigma^4-43\sigma^2+81)k^2 h^2 + \\ & + \sigma^2(6\sigma^8-15\sigma^6-77\sigma^4+71\sigma^2-81)kh - \\ & - \sigma^3(\sigma^2+1)(2\sigma^4-7\sigma^2-27)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{42} = & -\frac{1}{32\sigma^5\nu} [(4\sigma^6-13\sigma^4+10\sigma^2-9)(\sigma^2-1)^3 k^3 h^3 - \\ & - \sigma(\sigma^2-1)(12\sigma^8-51\sigma^6+17\sigma^4-\sigma^2-9)k^2 h^2 + \\ & + \sigma^2(12\sigma^8-67\sigma^6+33\sigma^4-\sigma^2-9)kh - \\ & - \sigma^3(4\sigma^6-29\sigma^4+42\sigma^2-9)]. \end{aligned}$$

После учета в (59) анзаца (56) находим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial t_3} - \frac{i}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} + \\ + i\omega k \tilde{q}_{41} A \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} + i\omega k \tilde{q}_{42} A^2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \\ - \frac{\mu}{4\sigma} k A \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - (\sigma^2 - 1) \frac{k^2}{2\omega} A \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Если прибавить к уравнению (22) уравнения (38), умноженное на ε , и (61), умноженное на ε^2 , учесть (35) и заменить, согласно (6), сумму частных производных для функций A и Ψ_1 полными производными

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial A}{\partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial A}{\partial t_3} = \frac{\partial A}{\partial \tau}$$

и

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau},$$

то получим эволюционное уравнение четвертого порядка (по ε), которое учитывает все предыдущие итерации:

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} + V_g \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + q_3 A^2 \bar{A} \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{i}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} + i \omega k \tilde{q}_{41} A \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} + i \omega k \tilde{q}_{42} A^2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} - \frac{\mu}{4\sigma} k A \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (62)$$

Взаимодействие амплитуды первой гармоники A с компонентой Ψ_1 главного течения, имеющей порядок $O(\varepsilon)$, уже учтено в q_3 , а взаимодействие с компонентой Ψ_2 , имеющей порядок $O(\varepsilon^2)$, описывается последним слагаемым (62) с учетом (57).

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛНОЙ АМПЛИТУДЫ ПЕРВОЙ ГАРМОНИКИ ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнение (62) составлено для первого порядка амплитуды A первой гармоники. Уравнение для полной амплитуды A_1 найдем, учитывая, что, согласно (9), (12), (20) и (49):

$$A_1 = A - i\varepsilon \frac{V_g}{\omega} \frac{\partial A}{\partial x_1} + O(\varepsilon^2). \quad (63)$$

Если отсюда определить A и подставить его в (62), получим уравнение для полной амплитуды первой гармоники:

$$i \left(\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + V_g \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + q_3 A_1^2 \bar{A}_1 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{i}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A_1}{\partial x_1^3} + i \omega k \tilde{Q}_{41} A_1 \bar{A}_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + i \omega k \tilde{Q}_{42} A_1^2 \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x_1} - \frac{\mu}{4\sigma} k \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} A_1 \right) = 0, \quad (64)$$

где

$$\tilde{Q}_{41} = \tilde{q}_{41}, \quad \tilde{Q}_{42} = \tilde{q}_{42} - 2 \frac{V_g}{\omega} q_3.$$

Учитывая (43) и (23), получим

$$\tilde{Q}_{42} = \frac{1}{32\nu\sigma^5} (-4\sigma^6 + 5\sigma^4 - 10\sigma^2 + 9)(\sigma^2 - 1)^3 k^3 h^3 + \sigma(\sigma^2 - 1)(12\sigma^8 - 45\sigma^6 + 71\sigma^4 - 15\sigma^2 + 9)k^2 h^2 - \sigma^2(12\sigma^8 - 93\sigma^6 + 215\sigma^4 - 111\sigma^2 + 9)kh + \sigma^3(4\sigma^6 - 43\sigma^4 + 118\sigma^2 + 9).$$

В предельном случае бесконечной глубины уравнение такого типа было получено впервые Дистом [4].

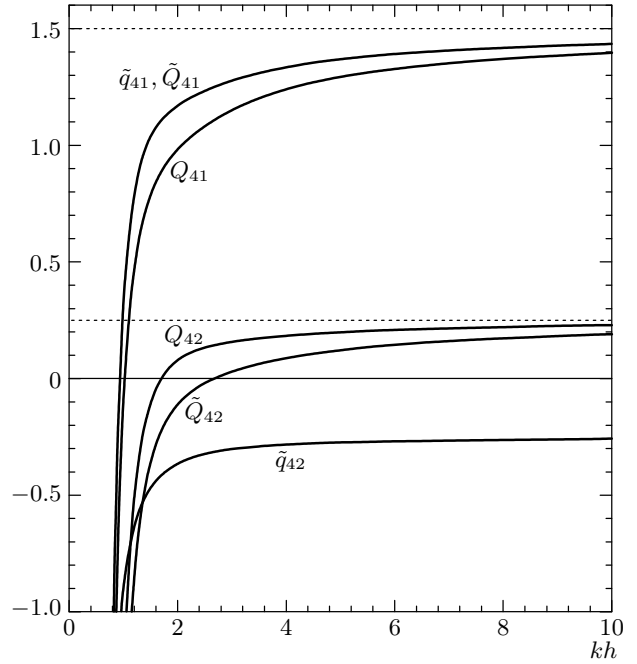


Рис. 2. Коэффициенты нелинейной дисперсии \tilde{q}_{41} , \tilde{q}_{42} , \tilde{Q}_{41} , \tilde{Q}_{42} , Q_{41} и Q_{42} . Горизонтальные асимптоты соответствуют случаю бесконечной глубины [4]

На рис. 2 видно, что коэффициенты \tilde{Q}_{41} и \tilde{Q}_{42} как функции kh при $kh \rightarrow \infty$ стремятся соответственно к значениям $\tilde{Q}_{41} = 3/2$ и $\tilde{Q}_{42} = 1/4$. Это и есть значения коэффициентов уравнения Диста, если оно, как и (64), записано для амплитуды полной первой гармоники смещения поверхности (это сделано в последней работе из ссылки [4], а также в [28, 33]), а не потенциала, как в первой работе из ссылки [4]. Остальные коэффициенты при $kh \rightarrow \infty$ также переходят в их значения для бесконечной глубины [4]:

$$V_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = -\frac{1}{8} \frac{\omega}{k^2},$$

$$-\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} = -\frac{1}{16} \frac{\omega}{k^3}, \quad q_3 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\mu}{4\sigma} = 1.$$

Для взаимосвязи полной амплитуды A_1 первой гармоники профиля поверхности с амплитудой нулевой гармоники $\phi^{(0)}$ потенциала скорости в [4] (именно для этих переменных — в последней из работ [4]) используется уравнение (в обозначениях данной работы)

$$\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial y} = \frac{\omega}{2} \frac{\partial(A_1 \bar{A}_1)}{\partial x_1}, \quad y = 0. \quad (65)$$

Предельный переход при $kh \rightarrow \infty$ к (65) выполняется, если учесть (37), (58) и связь полных амплитуд с амплитудами всех приближений для потенциала

$$\phi^{(0)} = \phi_1^{(0)} \varepsilon + \phi_2^{(0)} \varepsilon^2 + \phi_3^{(0)} \varepsilon^3 + \phi_4^{(0)} \varepsilon^4$$

и (63) — для смещения поверхности.

Множитель $\partial \Psi_2 / \partial x_1$ в (64) можно исключить, если учесть (57) и (63). Окончательно получаем нелинейное уравнение Шредингера четвертого порядка (по ε), два последних слагаемых которого учитывают дисперсию нелинейности:

$$\begin{aligned} & i \left(\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + V_g \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \\ & + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \omega k^2 q_3 A_1 \overline{A_1} \right) + \\ & + i \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A_1}{\partial x_1^3} + \right. \\ & \left. + \omega k Q_{41} A_1 \overline{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \omega k Q_{42} A_1^2 \frac{\partial \overline{A_1}}{\partial x_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь

$$Q_{41} = \tilde{Q}_{41} - \frac{\mu}{\nu} \tilde{q}_{40}, \quad Q_{42} = \tilde{Q}_{42} + \frac{\mu}{\nu} \tilde{q}_{40}.$$

Отсюда с учетом (55) получаем

$$\begin{aligned} Q_{41} = & \frac{1}{32\sigma^5\nu^2} [(3\sigma^6 - 20\sigma^4 - 21\sigma^2 + 54)(\sigma^2 - 1)^5 k^5 h^5 - \\ & - \sigma(11\sigma^8 - 99\sigma^6 - 61\sigma^4 + 7\sigma^2 + 270)(\sigma^2 - 1)^3 k^4 h^4 + \\ & + 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 58\sigma^8 + \\ & + 38\sigma^6 + 52\sigma^4 - 181\sigma^2 + 270)k^3 h^3 - \\ & - 2\sigma^3(3\sigma^{10} + 18\sigma^8 - 146\sigma^6 - 172\sigma^4 + 183\sigma^2 - 270)k^2 h^2 - \\ & - \sigma^4(\sigma^8 - 109\sigma^6 + 517\sigma^4 + 217\sigma^2 + 270)kh + \\ & + \sigma^5(\sigma^6 - 40\sigma^4 + 193\sigma^2 + 54)] \end{aligned} \quad (67)$$

и

$$\begin{aligned} Q_{42} = & \frac{1}{32\sigma^5\nu^2} [(3\sigma^6 + 7\sigma^4 - 11\sigma^2 + 9)(1 - \sigma^2)^5 k^5 h^5 + \\ & + \sigma(11\sigma^8 - 48\sigma^6 + 66\sigma^4 + 8\sigma^2 + 27)(\sigma^2 - 1)^3 k^4 h^4 - \\ & - 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 79\sigma^8 + 282\sigma^6 - 154\sigma^4 - \sigma^2 + 9)k^3 h^3 + \\ & + 2\sigma^3(3\sigma^{10} - 63\sigma^8 + 314\sigma^6 - 218\sigma^4 + 19\sigma^2 + 9)k^2 h^2 + \\ & + \sigma^4(\sigma^8 + 20\sigma^6 - 158\sigma^4 - 28\sigma^2 - 27)kh - \\ & - \sigma^5(\sigma^6 - 7\sigma^4 + 7\sigma^2 - 9)]. \end{aligned} \quad (68)$$

Уравнение (66) и формулы (67), (68) для Q_{41} и Q_{42} представляют собой основной результат данной работы. Зависимости Q_{41} и Q_{42} от kh показаны на рис. 2. Коэффициент $\partial^3 \omega / \partial k^3$ является знакопеременным в зависимости от глубины жидкости

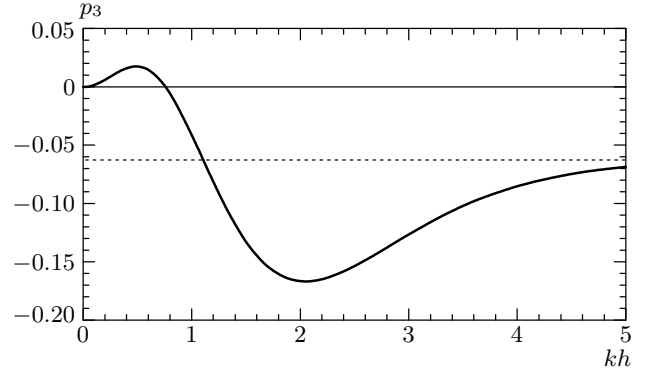


Рис. 3. Коэффициент кубической дисперсии $p_3 = -(k^3/\omega)(\partial^3 \omega / \partial k^3) / 6$. Горизонтальная асимптота соответствует случаю бесконечной глубины [4]

(рис. 3). Это важно для анализа возможности применения известных случаев интегрирования (1) [13, 14] к уравнению (66).

Выражения для потенциалов скорости $\phi_4^{(2)}$, $\phi_4^{(3)}$, $\phi_4^{(4)}$ приведены в Приложении. Выражения для профиля поверхности $\eta_4^{(2)}$, $\eta_4^{(3)}$, которые являются лишь сопутствующим результатом этой работы, не приведены, чтобы не увеличивать ее объем.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенностью задачи получения НУШIV для стоксовых волн в слое жидкости по сравнению с такой же задачей в волоконных световодах является необходимость учета влияния низкочастотной нулевой гармоники на движение высокочастотной первой гармоники. Это взаимодействие описывается системой уравнений (33), (40) в приближении $O(\varepsilon^3)$ и системой (54), (59) в приближении $O(\varepsilon^4)$. В предположении движения нулевой гармоники с групповой скоростью первой гармоники в обоих приближениях эти системы сводятся к уравнению для одной неизвестной функции — амплитуды первой гармоники A_1 профиля свободной поверхности. В приближении $O(\varepsilon^3)$ — это НУШ (44), впервые полученное в [20], а в приближении $O(\varepsilon^4)$ — НУШIV (66). Амплитуды Ψ_1 и Ψ_2 второй неизвестной функции — потенциала скорости (точнее их производные, которые, собственно, и имеют физический смысл скорости) — выражаются через полную амплитуду первой гармоники A_1 с помощью формул (35) и (57), в которых соответственно в приближениях $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^4)$

можно заменить A на A_1 . Действительно, из соотношения (63) видно, что необходимые для этого в приближении $O(\varepsilon^3)$ уравнения (44), (35) не изменяют свой вид при переходе от первого порядка амплитуды первой гармоники A к ее полной амплитуде A_1 , так же как и уравнение (57) в приближении $O(\varepsilon^4)$.

После перенормировки независимых переменных и неизвестной функции уравнение (66) превращается в уравнение (1). Знаки « \pm » определяются знаком, противоположным q_3 (рис. 1). Итак, в уравнении (1) выбираем « $-$ », если $kh < 1.3628$ и « $+$ », если $kh > 1.3628$. В первом случае свойства солитонных и квазисолитонных решений уравнения (1) описаны в [14], во втором — в [13]. Они определяются коэффициентами V_g , $\partial^2\omega/\partial k^2$, $\partial^3\omega/\partial k^3$, q_3 , Q_{41} , и Q_{42} в

соответствии с формулами (23), (39), (60), (43), (67) и (68).

Автор благодарен В. П. Лукомскому и коллегам по ОТФ ИФ НАНУ за ценные обсуждения, стимулировавшие данные исследования.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант № 99-1637).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для компонент стоксовых разложений потенциала и смещения поверхности в приближении $O(\varepsilon^4)$ (ниже введены обозначения $\sigma = \text{th}(kh)$, $\nu = ((1 + \sigma)^2 kh - \sigma)((\sigma - 1)^2 kh - \sigma)$):

$$\begin{aligned} \phi_4^{(2)} = & i\omega \left\{ \frac{3(1 - \sigma^2)}{8\sigma^3} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)^2 + A \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right) \frac{\text{ch}(2k(y + h))}{\text{sh}(2kh)} (y + h)^2 - \right. \\ & - \frac{1}{64\sigma^7} \left(\frac{\sigma^2 - 1}{k^2} ((34\sigma^6 + 23\sigma^4 + 60\sigma^2 + 3)k^2 h^2 - 2\sigma(16\sigma^4 + 23\sigma^2 + 3)kh - \sigma^2(2\sigma^2 - 3)) A \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \right. \\ & + \frac{\sigma^2 - 1}{k^2} ((11\sigma^6 + 19\sigma^4 + 45\sigma^2 - 3)k^2 h^2 - 2\sigma(11\sigma^4 + 22\sigma^2 - 3)kh + \sigma^2(11\sigma^2 - 3)) \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)^2 + \\ & + \frac{k^2}{12\nu\sigma^2} ((145\sigma^8 - 682\sigma^6 + 864\sigma^4 - 54\sigma^2 - 81)(\sigma^2 - 1)^2 k^2 h^2 - \\ & - 2\sigma(\sigma^{10} + 471\sigma^8 - 1402\sigma^6 + 1530\sigma^4 - 135\sigma^2 - 81)kh + \\ & \left. \left. + \sigma^2(\sigma^8 + 182\sigma^6 + 144\sigma^4 - 54\sigma^2 - 81)) A^3 \bar{A} \right) \frac{\text{ch}(2k(y + h))}{\text{sh}(2kh)} + \right. \\ & \left. + \frac{3(\sigma^2 - 1)}{16k\sigma^4} (kh(3\sigma^2 + 5) - 3\sigma) \left(A \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \right)^2 \right) (y + h) \frac{\text{sh}(2k(y + h))}{\text{sh}(2kh)} \right\} e^{2i\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4^{(3)} = & \frac{\omega}{128\sigma^7} (\sigma^2 - 1)(\sigma^2 + 3) \left(((26\sigma^4 + 39\sigma^2 - 45)kh - 3\sigma(13\sigma^2 - 9)) \frac{\text{ch}(3k(y + h))}{\text{sh}(3kh)} - \right. \\ & \left. - 3\sigma(13\sigma^2 - 9)k(y + h) \frac{\text{sh}(3k(y + h))}{\text{sh}(3kh)} \right) A^2 \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{3i\theta}, \end{aligned}$$

$$\phi_4^{(4)} = i\omega k^2 \frac{(\sigma^4 - 1)(197\sigma^6 + 747\sigma^4 - 1269\sigma^2 + 405)}{768\sigma^9(\sigma^2 + 5)} \frac{\text{ch}(4k(y + h))}{\text{sh}(4kh)} A^4 e^{4i\theta},$$

$$\eta_4^{(4)} = k^3 \frac{21\sigma^{10} + \sigma^8 - 262\sigma^6 + 522\sigma^4 + 81\sigma^2 + 405}{768\sigma^9(\sigma^2 + 5)} A^4 e^{4i\theta},$$

$$\begin{aligned}
\eta_4^{(0)} = & -\frac{k^3}{64\sigma^7\nu^2} \left((9(\sigma^2 - 1)^8 k^4 h^4 - 36\sigma(\sigma^2 + 1)(\sigma^2 - 1)^6 k^3 h^3 + 2\sigma^2(31\sigma^4 + 18\sigma^2 + 27)(\sigma^2 - 1)^4 k^2 h^2 - \right. \\
& \left. - 4\sigma^3(13\sigma^6 - 29\sigma^4 - 9\sigma^2 + 9)(\sigma^2 - 1)^2 kh + \sigma^4(17\sigma^8 - 116\sigma^6 + 254\sigma^4 - 36\sigma^2 + 9) \right) A^2 \bar{A}^2 - \\
& -\frac{1}{16\sigma k\nu} \left((3 + 5\sigma)(\sigma - 1)(\sigma^2 - 1)^3 k^4 h^4 - 2\sigma(\sigma^2 - 1)(8\sigma^4 - 3\sigma^3 - 4\sigma^2 - \sigma + 8)k^3 h^3 + \right. \\
& \left. + 2\sigma^3(\sigma - 1)(3\sigma + 1)^2 k^2 h^2 - 2\sigma^3(4\sigma^2 - \sigma - 2) + \sigma^4 \right) \frac{\partial^2 A \bar{A}}{\partial x_1^2} + \\
& + \frac{1}{4\sigma k}(\sigma^2 - 1) \left((3\sigma^2 - 1)k^2 h^2 - 4\sigma kh + 1 \right) \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\sigma k}{\omega^2} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t_3} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial t_2} \right), \\
\eta_4^{(1)} = & -\frac{k^2(\sigma^2 + 1)}{4\omega^2} A \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_2} - \frac{i}{12\omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial k^3} \frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} + \\
& + \frac{ik}{64\sigma^5\nu^2} \left((3\sigma^6 - 16\sigma^4 - 15\sigma^2 - 24)(\sigma^2 - 1)^5 k^5 h^5 - \sigma(11\sigma^8 - 87\sigma^6 - 183\sigma^4 - 165\sigma^2 - 120)(\sigma^2 - 1)^3 k^4 h^4 + \right. \\
& \left. + 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 78\sigma^8 - 92\sigma^6 - 2\sigma^4 - 131\sigma^2 - 120)k^3 h^3 - \right. \\
& \left. - 2\sigma^3(3\sigma^{10} - 58\sigma^8 - 32\sigma^6 - 102\sigma^4 + 165\sigma^2 + 120)k^2 h^2 - \right. \\
& \left. - \sigma^4(\sigma^8 + 47\sigma^6 - 101\sigma^4 - 339\sigma^2 - 120)kh + \sigma^5(\sigma^6 + 12\sigma^4 - 121\sigma^2 - 24) \right) A \bar{A} \frac{\partial A}{\partial x_1} - \\
& - \frac{ik}{64\sigma^5\nu^2} \left(3(\sigma^6 - \sigma^4 + 3\sigma^2 + 3)(\sigma^2 - 1)^5 k^5 h^5 - \sigma(11\sigma^8 - 66\sigma^6 + 12\sigma^4 + 20\sigma^2 + 39)(\sigma^2 - 1)^3 k^4 h^4 + \right. \\
& \left. + 2\sigma^2(\sigma^2 - 1)(7\sigma^{10} - 73\sigma^8 + 90\sigma^6 + 68\sigma^4 + 19\sigma^2 + 33)k^3 h^3 - \right. \\
& \left. - 2\sigma^3(3\sigma^{10} - 41\sigma^8 + 94\sigma^6 + 32\sigma^4 - 45\sigma^2 - 27)k^2 h^2 - \right. \\
& \left. - \sigma^4(\sigma^8 - 10\sigma^6 - 52\sigma^4 + 56\sigma^2 + 21)kh + \sigma^5(\sigma^6 - 13\sigma^4 - \sigma^2 + 3) \right) A^2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **113**, 1892 (1998).
2. A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communication*, Oxford University Press, London (1995); Y. Kodama and A. Hasegawa, IEEE J. Quantum Electronics **QE-23**, 510 (1987).
3. Е. М. Громов, В. И. Таланов, ЖЭТФ **110**, 137 (1996).
4. К. В. Dysthe, Proc. Roy. Soc. (London) A **369**, 105 (1979); K. Trulsen and K. В. Dysthe, Wave Motion **24**, 281 (1996); K. Trulsen and K. В. Dysthe, J. Fluid Mech. **352**, 359 (1997); K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. В. Dysthe, and M. G. Velarde, Phys. Fluids **12**, 2432 (2000).
5. В. П. Лукомский, ЖЭТФ **108**, 567 (1995).
6. F. Dias and K. Kharif, Ann. Rev. Fluid Mech. **31**, 301(1999).
7. J. R. Stocker and D. H. Peregrine, J. Fluid Mech. **399**, 335 (1999).
8. U. Brinch-Nielsen and I. G. Jonsson, Wave Motion **8**, 455 (1986).
9. D. Clamond and J. P. Germain, Eur. J. Mech. B (Fluids) **18**, 67 (1999).
10. Yu. G. Rapoport, С. E. Zaspel, J. H. Mantha, and V. V. Grimalsky, Phys. Rev. B **65**, 024423-1 (2002).
11. В. П. Лукомський, Ю. В. Седлецький, Журн. фіз. досліджень **5**, 107 (2001).
12. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. вузов. Радиофизика **10**, 539 (1967).
13. V. I. Karpman, J. J. Rasmussen, and A. G. Shagalov, Phys. Rev. E **64**, 026614-1 (2001).
14. A. Mahalingam and K. Porsezian, ibid. **64**, 046608-1 (2001).
15. В. Е. Захаров, Журн. прикл. мех. и техн. физ., Вып. 2, 86 (1968).

16. H. C. Yuen and B. M. Lake, *Phys. Fluids* **18**, 956 (1975); Г. Юэн, Б. Лейк, *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде*, Мир, Москва (1987).
17. D. J. Benney and G. J. Roskes, *Stud. Appl. Math.* **48**, 377 (1969).
18. В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, Вып. 5, 45 (1970).
19. V. H. Chu and C. C. Mei, *J. Fluid. Mech.* **41**, 873 (1970).
20. H. Hasimoto and H. Ono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **33**, 805 (1972).
21. M. Stiassnie and L. Shemer, *J. Fluid Mech.* **143**, 47 (1984).
22. A. Devey and K. Stewartson, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **338**, 101 (1974).
23. T. Kawahara, *J. Phys. Soc. Jpn.* **38**, 265 (1975).
24. P. Liu and M. Dingemans, *Wave Motion* **11**, 41 (1989).
25. P. Christodoulides and F. Dias, *Phys. Fluids* **7**, 3013 (1995).
26. M. Stiassnie, *Wave Motion* **6**, 431 (1984).
27. P. A. E. M. Janssen, *J. Fluid Mech.* **126**, 1 (1983).
28. S. J. Hogan, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **402**, 359 (1985).
29. E. Lo and C. C. Mei, *J. Fluid Mech.* **150**, 395 (1985).
30. M. P. Tulin and T. Waseda, *ibid.* **378**, 197 (1999).
31. L. Shemer, Haiyuing Jiao, E. Kit, and Y. Agnon, *ibid.* **427**, 107 (2001).
32. M. J. Ablowitz, J. Hammack, D. Henderson, and C. M. Schober, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 887 (2000); *Physica* **152–153**, 416 (2001).
33. Bhattacharyya Sudebi and K. P. Das, *J. Austral. Math. Soc. B.* **39**, 214 (1997).
34. E. Kit and L. Shemer, *J. Fluid Mech.* **450**, 201 (2002).
35. G. B. Whitham, *ibid.* **27**, 399 (1967).
36. T. B. Benjamin, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **299**, 59 (1967).
37. M. Tajiri and Y. Watanabe, *Phys. Rev. E.* **57**, 3510 (1998); M. Tajiri and T. Arai, *Phys. Rev. E* **60**, 2297 (1999); M. Tajiri, T. Arai, and K. Takenahi, *Phys. Rev. E* **64**, 056622-1 (2001).
38. R. Grimshaw, D. Pelinovski, E. Pelinovsky, and T. Talipova, *Physica D* **159**, 35 (2001).
39. Р. Х. Зейтунян, *УФН* **165**, 1403 (1995).
40. R. S. Johnson, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **357**, 131 (1977).
41. T. Kakutani and K. Michihiro, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 4129 (1983).
42. L. Shemer, E. Kit, Haiyuing Jiao, and O. Eitan, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **124**, 320 (1998).
43. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *УФН* **167**, 1137 (1997).