

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ РЕНТГЕНОВСКОЙ ЛИНЗЫ

*В. Г. Кohn**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 января 2003 г.

Развита теория формирования изображения с помощью рентгеновской линзы, состоящей из очень большого числа элементов. Каждый элемент имеет двояко-вогнутый параболический профиль и очень слабо преломляет рентгеновский пучок. Такая линза может иметь относительно большую длину, сравнимую с длиной фокуса, поэтому приближение «тонкой» линзы неприменимо. Получено точное выражение для пропагатора непрерывно преломляющей линзы, который описывает перенос излучения через преломляющую параболическую среду. Вычислен пропагатор изображения, который описывает фокусировку параллельного пучка и перенос изображения (фокусировку микрообъекта), а также фурье-преобразование функции пропускания микрообъекта с помощью линзы. Эффективная апертура рентгеновской линзы полностью определяется поглощением излучения и не зависит от ее геометрических поперечных размеров. Если записать комплексный показатель преломления в виде $n = 1 - \delta + i\beta$, то диаметр пучка в фокусе примерно в $0.8\beta/\delta$ раз меньше диаметра эффективной апертуры, причем коэффициент очень слабо зависит от длины линзы. Непрерывно преломляющая линза не имеет аберраций в том смысле, что все лучи, прошедшие через апертуру линзы, фокусируются в одной точке. Линза может фокусировать излучение внутри себя и обладает свойствами волновода, т. е. может восстанавливать структуру пучка при некоторых значениях длины с точностью до искажений, обусловленных поглощением. Неоднородное поглощение рентгеновских лучей в линзе приводит к интересному эффекту визуализации прозрачных микрообъектов при их сфокусированном изображении. При этом изображается градиент сдвига фазы, создаваемой микрообъектом. Обсуждаются особенности фурье-преобразования, связанные с поглощением излучения в линзе.

PACS: 07.85.Qe, 41.50.+h, 42.30.-d

1. ВВЕДЕНИЕ

Фокусировка электромагнитного излучения преломляющими линзами играет огромную роль как в повседневной практике, так и в научных исследованиях. В частности, глаз человека имеет в своей структуре линзу, фокусирующую видимый свет на различных расстояниях. Микроскоп и телескоп расширяют возможности видения мира на области микри- и макроразмеров. Жесткое рентгеновское излучение с энергией фотонов E от 10 до 50 кэВ, благодаря своей высокой проникающей способности, позволяет изучать внутреннюю структуру микрообъектов неразрушающими методами. Очевидно, разра-

ботка эффективных преломляющих линз для жестких рентгеновских лучей могла бы существенным образом расширить возможности научных исследований структуры вещества во многих областях науки. Однако в течение 100 лет после открытия рентгеновского излучения это не удавалось сделать, в основном, по двум причинам. Во-первых, коэффициент преломления рентгеновских лучей очень слабо отличается от единицы. Во-вторых, все вещества поглощают рентгеновское излучение. Например, для алюминия и $E = 25$ кэВ комплексный коэффициент преломления равен $n = 1 - \delta + i\beta$, где $\delta = 8.643 \cdot 10^{-7}$, $\beta = 1.747 \cdot 10^{-9}$.

Проблему слабого преломления впервые удалось решить в 1996 г. [1] с помощью использования состав-

*E-mail: kohn@kurm.polyn.kiae.su

ных линз, представляющих собой длинный ряд элементарных линз. Каждая элементарная линза имеет двояковогнутую форму и относительно большой радиус кривизны R порядка 1 мм, для того чтобы ее можно было изготовить достаточно простыми средствами. Соответственно, длина фокуса такой линзы, $F_1 = R/2\delta$, весьма велика и может достигать сотни метров. При этом длина фокуса составной линзы, имеющей N элементов, равна $F = F_1/N$ и, следовательно, увеличением числа элементов можно уменьшить длину фокуса до величины, приемлемой для проведения экспериментов. Весьма удачным обстоятельством оказалось то, что для рентгеновских лучей $\text{Re } n < 1$, в результате чего фокусирующая линза имеет двояковогнутую форму. При этом толщина материала в центральной части линзы мала по сравнению с длиной поглощения. Тем не менее поглощение реально существует и приводит как к общему ослаблению интенсивности пучка, так и к ограничению апертуры рентгеновских составных преломляющих линз. Неоднородное поглощение излучения в рентгеновской линзе — новое свойство по сравнению с линзами для видимого света, которое приводит к интересным особенностям изображения, как показано в настоящей работе.

Относительно малая апертура рентгеновской линзы (доли миллиметра) не является недостатком, поскольку рентгеновские пучки, получаемые на источниках синхротронного излучения, имеют малые поперечные размеры и слабую расходимость. Так, на источниках синхротронного излучения третьего поколения (ESRF, APS, SPring-8) вертикальный размер излучающей области не превышает 30 мкм, в то время как расстояние от источника до образца больше 50 м. В настоящее время опубликовано много статей, в которых описаны различные методы изготовления составных преломляющих линз для рентгеновских лучей. Самый простой из них — это высверливание ряда круглых отверстий для получения линейного фокуса [1] или двух взаимноперпендикулярных рядов отверстий для получения точечного фокуса [2–4]. Преимуществом таких линз является предельная дешевизна, а недостатком — высокая шероховатость поверхностей, сферические aberrации и аномально большая длина при большом радиусе кривизны дырок. Альтернативным методом является вдавливание пузырьков воздуха в клей [5]. Была предложена и испытана «аллигаторная» линза [6, 7], в которой параболический профиль сдвига фазы приближенно задается двумя рядами перпендикулярных зубов, расположенных под малым углом к рентгеновскому пучку. С исполь-

зованием сложной техники глубокой литографии были созданы планарные линзы [8], в которых точный параболический профиль с радиусом кривизны порядка 1 мкм создается в тонком слое на поверхности кремния.

Однако наиболее интересными с точки зрения изображающих свойств представляются составные линзы с круглой апертурой и параболическим профилем. Сечение такой линзы и параметры одного элемента показаны на рис. 1. Элементы составной параболической линзы получают, выдавливая параболический профиль в пластинках из алюминия [9–12] или в пластинках из различных пластиков (см., например, [13, 14]). Число элементов в составной линзе можно варьировать для получения необходимого фокусного расстояния. В настоящее время используются линзы, имеющие до нескольких сотен элементов. Относительно легко можно изготовить линзу, имеющую 1000 элементов и более. При этом длина составной линзы $L = Nr$ увеличивается с ростом N , а длина фокуса F уменьшается. Очевидно, что пока $L \ll F$, фокусное расстояние можно оценивать по формуле «тонкой» линзы, $F \approx R/2N\delta$. В противном случае необходимо решить задачу о переносе излучения через длинную составную линзу с учетом изменения траектории лучей в самой линзе. Это относительно просто сделать методами геометрической оптики [15].

Полное решение задачи должно иметь вид интегрального соотношения типа интеграла Кирхгофа. Если изменение поперечной структуры волнового поля на толщине r одного элемента составной линзы мало, то плотность материала линзы можно усреднить по длине r и рассматривать линзу как однородную вдоль направления пучка параболическую среду. Составную линзу, удовлетворяющую этому требованию, будем называть параболической непрерывно преломляющей (ПНП) рентгеновской линзой. Ядро интегрального соотношения для такой линзы является непрерывной функцией ее длины и имеет аналитический вид, как было впервые показано в работе [16].

В данной работе представлена точная теория формирования изображения с помощью непрерывно преломляющей рентгеновской линзы. Кроме вывода пропагатора самой линзы и изучения его свойств, вычислен пропагатор изображения и проведен анализ особенностей изображения с помощью ПНП-линзы. Показано, что непрерывно преломляющая линза не имеет aberrаций в том смысле, что все лучи, исходящие из одной точки и прошедшие через разные части апертуры линзы, сходятся в од-

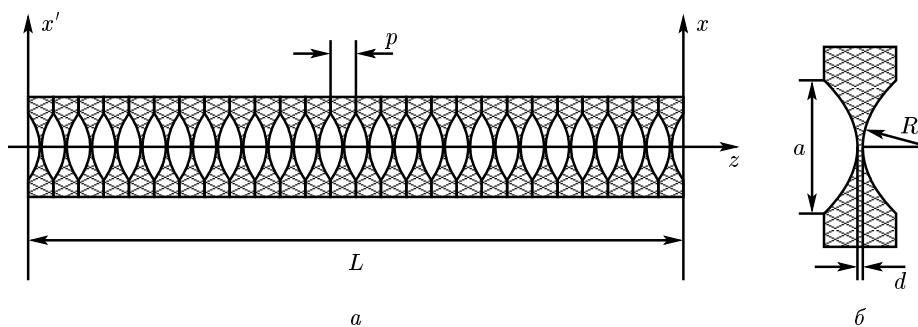


Рис. 1. Составная преломляющая рентгеновская линза (а) и параметры отдельного элемента линзы (б)

ну точку на изображении. Ее эффективная апертура полностью определяется поглощением излучения в линзе и уменьшается с ростом длины. В то же время диаметр пучка в фокусе примерно в $0.8\beta/\delta$ раз меньше диаметра эффективной апертуры и численный коэффициент очень слабо зависит от длины линзы. Неоднородное поглощение приводит к эффекту визуализации прозрачных микрообъектов при их изображении, причем изображается градиент сдвига фазы, создаваемый микрообъектом. Обсуждаются также особенности фурье-преобразования функции пропускания объекта, связанные с поглощением.

2. ТОЧНЫЙ ПРОПАГАТОР ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ РЕНТГЕНОВСКОЙ ЛИНЗЫ

Предположим, что синхротронное излучение предварительно монохроматизировано и имеет достаточно высокую степень пространственной когерентности. Такие условия выполнены на источниках синхротронного излучения третьего поколения [17]. Выберем оптическую ось вдоль оси z (см. рис. 1) и представим общее решение уравнения Максвелла в виде

$$E(x, y, z) = \exp(ikz)A_t(x, y, z),$$

где $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме. Функция $A_t(x, y, z)$ описывает перенос поперечной зависимости волнового поля вдоль оси z . Принимая во внимание, что длина волны $\lambda = 2\pi/k$ на много порядков меньше характерной длины взаимодействия рентгеновских лучей с веществом λ/δ , с большой точностью можно использовать парааксиальное приближение, т. е. пренебречь второй производной от A_t по z по сравнению с первой производной. В результате,

подставляя решение в представленном виде в уравнение Максвелла, получаем для функции $A_t(x, y, z)$ параболическое уравнение

$$\frac{dA_t}{dz} = -ik\eta s(x, y, z)A_t + \frac{i}{2k} \left(\frac{d^2 A_t}{dx^2} + \frac{d^2 A_t}{dy^2} \right), \quad (1)$$

где $\eta = 1 - n = \delta - i\beta = \delta(1 - i\gamma)$. В задаче о переносе излучения считается заданным волновое поле на входной поверхности линзы, т. е. $A_t(x, y, 0)$, если координата z отсчитывается от входной поверхности линзы. Внутри реальной составной линзы функция $s(x, y, z)$ равна 1 в областях, заполненных материалом линзы, и 0 в пустотах (см. рис. 1).

Переход к пределу параболической непрерывно преломляющей линзы означает, что толщина одного элемента p стремится к нулю и одновременно растет число элементов N таким образом, что общая длина линзы и ее апертура не изменяются. При этом растет также радиус кривизны поверхностей. В этом случае вместо реальной функции $s(x, y, z)$ можно использовать ее усредненное значение, не зависящее от продольной координаты,

$$\bar{s}(x, y) = s_0 + \frac{x^2}{pR} + \frac{y^2}{pR}, \quad s_0 = \frac{d}{p}. \quad (2)$$

Такая зависимость имеет место только внутри геометрической апертуры линзы диаметром

$$a = 2[R(p - d)]^{1/2}$$

(см. рис. 1). Нас будут интересовать достаточно длинные линзы, когда эффективная рабочая область линзы (эффективная апертура) определяется поглощением рентгеновских лучей в материале линзы и имеет размер, меньший геометрической апертуры. В этом случае крайними эффектами можно пренебречь и формально считать, что зависимость (2) имеет место во всей интересующей нас области поперечной плоскости xy .

Общее решение уравнения (1) после замены s на \bar{s} можно записать в виде интегрального соотношения

$$A_t(x, y, z) = \int dx' dy' P_L^{(t)}(x, y, x', y', z) A_t(x', y', 0). \quad (3)$$

Пропагатором ПНП-линзы, т.е. ядром уравнения (3), является решение уравнения (1) с начальной функцией в виде

$$P_L^{(t)}(x, y, x', y', 0) = \delta(x - x') \delta(y - y'),$$

где $\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака. С учетом вида начальной функции легко сообразить, что решение можно искать с помощью метода разделения переменных,

$$P_L^{(t)}(x, y, x', y', z) = \exp(-ik\eta s_0 z) P_L(x, x', z) P_L(y, y', z). \quad (4)$$

Парциальный пропагатор $P_L(x, x', z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP_L}{dz} = -ik \frac{x^2}{2z^2} P_L + \frac{i}{2k} \frac{d^2 P_L}{dx^2}, \quad (5)$$

$$P_L(x, x', 0) = \delta(x - x'), \quad z_c = \left(\frac{pR}{2\eta} \right)^{1/2}.$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением Шредингера для частицы в параболическом потенциале, если координату z заменить на время. В квантовой механике обычно интересуются стационарными состояниями и записывают решение в виде ряда, каждый член которого содержит произведение функций от каждой из координат по отдельности.

В статье [16] получено решение в виде простого аналитического выражения методом преобразования Фурье и рекуррентных уравнений для коэффициентов при различных степенях x в аргументе экспоненты. Ниже представлен более прямой вывод того же самого решения. Принимая во внимание принцип взаимности, решение следует искать в виде симметричной функции от координат x и x' . Кроме того, на малых продольных расстояниях решение должно быть близко к пропагатору в пустом пространстве, т.е. к пропагатору Кирхгофа,

$$P(x - x', z) = \frac{1}{(i\lambda z)^{1/2}} \exp \left[i\pi \frac{(x - x')^2}{\lambda z} \right], \quad (6)$$

который является существенным при освещении линзы точечным источником. С другой стороны, оно

должно содержать фазовый множитель, характерный для тонкой линзы при освещении ее плоской волной. С учетом этих соображений будем искать решение в виде

$$P_L(x, x', z) = T \left(x, \frac{r}{a} \right) P(x - x', r) T \left(x', \frac{r}{a} \right), \quad (7)$$

$$T(x, z) = \exp \left(-i\pi \frac{x^2}{\lambda z} \right)$$

с двумя неизвестными функциями $r(z)$ и $a(z)$.

Начальное условие удовлетворяется, если $r(z) \approx z$ и $a(z) \approx z^2$ при $z \rightarrow 0$. Подставляя вид решения в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и x' , получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dz} = 1 - a, \quad \frac{da}{dz} = \frac{r}{z^2}, \quad (8)$$

решение которых находится тривиально:

$$r(z) = z_c \sin \frac{z}{z_c}, \quad a(z) = 1 - \frac{dr}{dz} = 1 - \cos \frac{z}{z_c}. \quad (9)$$

В результате пропагатор ПНП-линзы записывается в виде

$$P_L(x, x', z) = \frac{1}{(i\lambda z_c s_z)^{1/2}} \times \exp \left[i\pi \frac{(x^2 + x'^2) c_z - 2xx'}{\lambda z_c s_z} \right], \quad (10)$$

где введены обозначения

$$s_z = \sin \frac{z}{z_c}, \quad c_z = \cos \frac{z}{z_c}.$$

Это выражение отличается от формулы, полученной в статье [16], лишь формой записи. Данная форма записи более наглядно учитывает свойства симметрии пропагатора.

Если длина ПНП-линзы $L \ll \text{Re } z_c$, то имеем

$$P_L(x, x', L) \xrightarrow{L \rightarrow 0} \exp \left[-i\pi \frac{(x^2 + x'^2 + xx')}{3\lambda F_c} \right] P(x - x', L), \quad (11)$$

где

$$F_c = \frac{F}{1 - i\gamma} = \frac{z_c^2}{L} = \frac{R}{2N\eta}$$

— комплексная длина фокуса тонкой ПНП-линзы. Так как при выводе этого выражения использовалось соотношение $F \gg L$, в экспоненциальном множителе можно приближенно заменить x' на x . Кро-

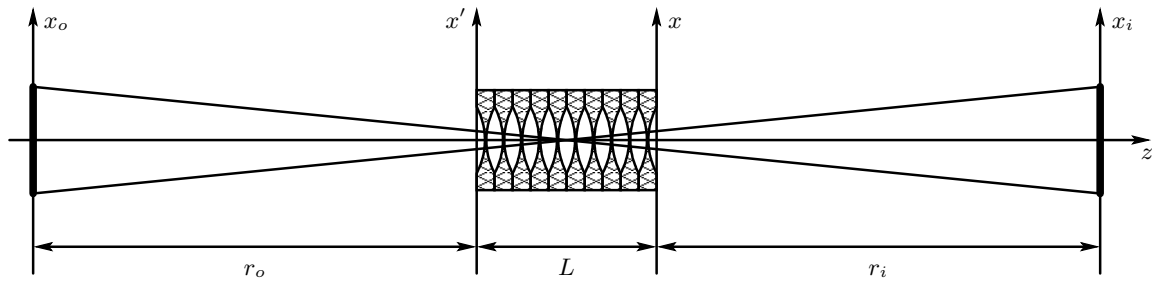


Рис. 2. Схема эксперимента для изображения объекта с помощью рентгеновской ПНП-линзы

ме того, если вторая производная от фазы набегающей волны по поперечным координатам много меньше $2\pi/\lambda L$, то пропагатор пустого пространства можно приближенно заменить на дельта-функцию, что приводит к выражению

$$P_L(x, x', L) \approx T(x, F_c)\delta(x - x'),$$

обычно используемому в приближении тонкой линзы. Формула (11) дает более универсальное приближение для пропагатора тонкой линзы.

Очевидно, наилучшими свойствами обладает ПНП-линза, у которой параметр $\gamma = \beta/\delta$ имеет минимальное значение. Для этой цели реальные линзы делаются из элементов с малым значением атомного номера Z (литий, бериллий, углерод, алюминий). Практически во всех интересных случаях $\gamma < 0.005$. Если пренебречь поглощением, что справедливо, по крайней мере, для лучей вблизи оптической оси, то из точного выражения для пропагатора следуют волноводные свойства ПНП-линзы. При

$$L = L_0 = \frac{\pi}{2}(LF)^{1/2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{pR}{2\delta}\right)^{1/2}$$

имеем $s_z = 1, c_z = 0$. Следовательно, ПНП-линза делает преобразование Фурье набегающей волны. При $L = 2L_0$ пропагатор равен $\delta(x + x')$, соответственно, ПНП-линза воспроизводит набегающую волну на выходе в интерсированном виде. При $L = 3L_0$ линза снова делает преобразование Фурье, но с другим знаком. Наконец, при $L = 2L_0$ линза точно воспроизводит набегающую волну. При дальнейшем увеличении длины ПНП-линзы эти фазы повторяются вновь и вновь. Наличие поглощения рентгеновских лучей в ПНП-линзе приводит к тому, что как изображение, так и преобразование Фурье производятся в ограниченной области внутри постепенно уменьшающейся апертуры.

3. ПРОПАГАТОР ИЗОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПНП-ЛИНЗЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДЛИНЫ

В реальном эксперименте изучаемый объект, линза и детектор находятся на сравнительно больших расстояниях друг от друга, как видно на рис. 2, где также показаны обозначения для расстояний и осей координат. Рассмотрим более сложную задачу о переносе волнового поля из плоскости сразу за объектом в плоскость детектора. Очевидно, пропагатор этой задачи также факторизуется по координатам x и y . Поэтому достаточно вычислить только парциальный пропагатор изображения $G(x_i, x_o, r_o, L, r_i)$. Он определяется сверткой пропагатора ПНП-линзы с пропагаторами Кирхгофа, соответствующими пустому пространству,

$$G(x_i, x_o) = \int dx dx' P(x_i - x, r_i) \times P_L(x, x', L) P(x' - x_o, r_o). \quad (12)$$

Здесь и далее для простоты записи опущены продольные расстояния в списке аргументов пропагатора изображения.

Для расчета интегралов используем следующий алгоритм. Прежде всего рассмотрим предельный случай тонкой линзы, когда $P_L(x, x', L)$ заменяется на $T(x, F_c)\delta(x - x')$. Соответственно, пропагатор определяется однократным интегралом,

$$G_0(x_i, x_o) = \int dx P(x_i - x, r_i) T(x, F_c) P(x - x_o, r_o). \quad (13)$$

Этот интеграл сводится к преобразованию Фурье от гауссовой функции и равен снова гауссовой функ-

ции. Результат удобно записать в следующем виде:

$$G_0(x_i, x_o) = T\left(x_i, \frac{r_g}{a_i}\right) P(x_i - x_o, r_g) T\left(x_o, \frac{r_g}{a_o}\right), \quad (14)$$

где введены параметры

$$r_g = r_o + r_i - \frac{r_o r_i}{F_c}, \quad a_i = \frac{r_o}{F_c}, \quad a_o = \frac{r_i}{F_c}. \quad (15)$$

Заметим, что выражение (14) для пропагатора изображения с помощью тонкой линзы совпадает по форме с выражением (7) для пропагатора ПНП-линзы. Из этого выражения непосредственно следует, что в пределе $\gamma = 0$ и при выполнении условия $r_g = 0$ (формула тонкой линзы) пропагатор

$$G_0(x_i, x_o) = M^{1/2} \delta(x_i + x_o M),$$

где $M = r_i/r_o$ — фактор увеличения. Таким образом, это выражение воспроизводит известное свойство тонкой линзы фокусировать изображение при выполнении формулы линзы

$$r_o^{-1} + r_i^{-1} = F^{-1}.$$

Также легко видеть, что, когда выполняется условие $a_o = 1$, т. е. $r_i = F$, член, пропорциональный x_o^2 в аргументе экспоненты, исчезает и пропагатор производит преобразование Фурье волнового поля, расположенного в плоскости сразу за объектом. Однако, если объект освещается точечным источником, то фурье-преобразование функции прохождения объекта происходит в плоскости фокусировки точечного источника. Это свойство также следует из вида пропагатора (14), но для его доказательства необходимо провести дополнительные расчеты (см. ниже).

Подставляя выражение (7) для пропагатора ПНП-линзы в интеграл (12), получаем выражение

$$G(x_i, x_o) = \int dx P(x_i - x, r_i) T\left(x, \frac{r_L}{a_L}\right) \times \int dx' P(x - x', r_L) T\left(x', \frac{r_L}{a_L}\right) P(x' - x_o, r_o), \quad (16)$$

где $r_L = z_c s_L$, $a_L = 1 - c_L$. Здесь интеграл по x' эквивалентен интегралу (13), но с другими выражениями для параметров. Подставляя вместо интеграла его решение (14), опять получаем интеграл типа (13) с новыми параметрами. В результате, выполнив соответствующие алгебраические преобразования, получаем точное выражение для пропагатора изобра-

жения с помощью ПНП-линзы произвольной длины в виде, аналогичном случаю тонкой линзы:

$$G(x_i, x_o) = T\left(x_i, \frac{\tilde{r}_g}{\tilde{a}_i}\right) \times P(x_i - x_o, \tilde{r}_g) T\left(x_o, \frac{\tilde{r}_g}{\tilde{a}_o}\right), \quad (17)$$

но теперь параметры равны

$$\tilde{r}_g = (r_o + r_i)c_L + \left(z_c - \frac{r_o r_i}{z_c}\right) s_L, \quad (18)$$

$$\tilde{a}_i = 1 - c_L + \frac{r_o}{z_c} s_L, \quad \tilde{a}_o = 1 - c_L + \frac{r_i}{z_c} s_L.$$

Интересно, что формулы для новых параметров также можно записать в виде, аналогичном случаю тонкой линзы:

$$\tilde{r}_g = \tilde{r}_o + \tilde{r}_i - \frac{\tilde{r}_o \tilde{r}_i}{\tilde{F}_c}, \quad \tilde{a}_i = \frac{\tilde{r}_o}{\tilde{F}_c}, \quad \tilde{a}_o = \frac{\tilde{r}_i}{\tilde{F}_c}, \quad (19)$$

если ввести обобщенные комплексные расстояния

$$\tilde{r}_o = r_o + b_L, \quad \tilde{r}_i = r_i + b_L, \quad (20)$$

$$\tilde{F}_c = \frac{z_c}{s_L}, \quad b_L = \tilde{F}_c(1 - c_L).$$

Полученный результат имеет большое значение, так как он показывает, что ПНП-линза произвольной длины имеет, по существу, те же изображающие свойства, что и тонкая линза. В частности, она не имеет aberrаций в том смысле, что все траектории лучей сходятся в одной точке, в отличие, например, от линзы со сферическим профилем. Если бы поглощение отсутствовало, то линза фокусировала бы точечный источник в точку. Размытие точки изображения, связанное с поглощением излучения и конечностью апертуры, обычно связывают с конечным разрешением линзы. С другой стороны, простые аналитические выражения для обобщенных расстояний позволяют легко получить соответствующие поправки, которые необходимо ввести в экспериментальную схему.

Например, в пределе малой длины линзы по сравнению с длиной фокуса, $L \ll F$, разлагая синус и косинус в степенной ряд, получаем

$$\tilde{r}_o = r_o + \frac{1}{2}L, \quad \tilde{r}_i = r_i + \frac{1}{2}L, \quad \tilde{F}_c = F_c + \frac{1}{6}L. \quad (21)$$

Этот результат, полученный ранее [18] приближенно и достаточно сложным способом, является естественным предельным случаем точной теории. Из него следует, что даже при заметной длине L

ПНП-линзы (десятки сантиметров), удовлетворяющей условию $L \ll F$, ее можно трактовать как тонкую линзу, расположенную на середине, с одним лишь отличием. А именно, длина фокуса, рассчитанная по формуле тонкой линзы должна быть увеличена на одну шестую часть длины реальной линзы.

С другой стороны, при нулевых расстояниях пропагатор изображения совпадает с пропагатором ПНП-линзы. Отметим еще одно очевидное свойство пропагатора изображения, а именно, его свертка с пропагатором Кирхгофа от точечного источника $P(x_o - x_s, r_s)$ описывается тем же выражением (17), в котором x_o надо заменить на x_s , а r_o надо заменить на $r_o + r_s$. При доказательстве этого свойства используется соотношение

$$\tilde{a}_o + \tilde{a}_i - \tilde{a}_o \tilde{a}_i = \frac{\tilde{r}_g}{\tilde{F}_c}, \quad (22)$$

следующее из определений (19).

4. ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ АПЕРТУРЫ И ФОКУСА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ РЕНТГЕНОВСКОЙ ЛИНЗЫ

Важное практическое значение имеет точное знание таких параметров как размеры эффективной апертуры рентгеновской линзы и размеры фокусного пятна при фокусировке плоской волны. В оптике видимого света апертура определяется геометрическими размерами линзы, т. е. той площадью, проходя через которую, лучи затем сходятся в фокусе. В случае тонкой поглощающей рентгеновской линзы достаточно рассмотреть распределение интенсивности излучения сразу после линзы при освещении ее плоской волной, ориентированной вдоль оптической оси. При этом эффективная апертура определяется поглощением излучения в материале линзы. Так как в пустом пространстве интегральная интенсивность волны сохраняется, между размерами апертуры и фокуса существуют простые энергетические соотношения. Для линзы произвольной длины, рассматриваемой в данной статье, такой подход не годится, так как частичная или полная фокусировка падающей волны может происходить в самой линзе. Поэтому распределение интенсивности излучения сразу за линзой не дает представления о реальной апертуре линзы. Апертуру длиной ПНП-линзы можно определить через свойства пропагатора $G(x_i, x_o)$. Рассмотрим здесь другой, более простой, подход, основанный на энергетических соображениях. Под эффективной апертурой линзы будем понимать инте-

гральную интенсивность излучения в фокусе, которая равна интенсивности плоской волны, прошедшей через линзу, не поглотившись. При этом мы не учитываем паразитное поглощение на тонких частях элементарных линз толщиной d (см. рис. 1).

Ниже ограничимся случаем, когда длина линзы

$$L \leq L_0 = \frac{\pi}{2} L_c, \quad L_c = (LF)^{1/2} = \left(\frac{pR}{2\delta} \right)^{1/2}.$$

В этом интервале длин линза фокусирует набегающую волну в пространстве на расстоянии $r_i > 0$. При этом для определения размеров фокуса можно анализировать распределение интенсивности излучения в пространстве после линзы при освещении ее плоской волной. Две поперечные координаты снова факторизуются и достаточно рассмотреть распределение вдоль оси x . Очевидно, амплитуду волны получим, вычисляя свертку пропагатора (17) с единичной функцией, не зависящей от координат, т. е. интегрируя по координате x_o . Интеграл сводится к преобразованию Фурье гауссовой функции и вычисляется точно. В результате получаем, используя соотношение (22),

$$A(x_i) = \int dx_o G(x_i, x_o) = \left(\frac{\tilde{F}_c}{\tilde{F}_c - \tilde{r}_i} \right)^{1/2} \times \exp \left[-i\pi \frac{x_i^2}{\lambda(\tilde{F}_c - \tilde{r}_i)} \right] = \left(\frac{z_c}{z_c c_L - r_i s_L} \right)^{1/2} \exp \left[-i\pi \frac{x_i^2 s_L}{\lambda(z_c c_L - r_i s_L)} \right]. \quad (23)$$

Заметим, что результат не зависит от расстояния r_o . С физической точки зрения очевидно, что это выражение можно получить и непосредственно из пропагатора изображения (17), рассматривая точку вблизи оптической оси на бесконечном расстоянии r_o и деля его на амплитуду пропагатора Кирхгофа на том же расстоянии, поскольку точечный источник на бесконечном расстоянии дает плоскую волну перед апертурой линзы.

Как следует из (23), плоская волна перед линзой превращается в гауссову волну после линзы на всех расстояниях от линзы. Для рентгеновской ПНП-линзы произвольной длины все параметры являются комплексными. Принимая во внимание, что параметр поглощения $\gamma \ll 1$, для качественной оценки будем использовать линейное приближение по γ . С учетом принятого ограничения на длину линзы

имеем соотношения

$$\begin{aligned} s_L &\approx S_L - i\frac{\gamma}{2}u_L C_L, & c_L &\approx C_L + i\frac{\gamma}{2}u_L S_L, \\ z_c &= L_c \left(1 + i\frac{\gamma}{2}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

где введены вещественные функции

$$S_L = \sin u_L, \quad C_L = \cos u_L, \quad u_L = L/L_c.$$

Максимальная интенсивность достигается на расстоянии r_i после линзы, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{Re}(z_c c_L - r_i s_L) \approx L_c C_L - r_i S_L = 0,$$

т. е. $r_i = F_L C_L$. При этом

$$\begin{aligned} |A(x_i)|^2 &= \frac{1}{\gamma\alpha_L} \exp\left(-\frac{2\pi}{\gamma\lambda F_L \alpha_L} x_i^2\right), \\ \alpha_L &= \frac{1}{2} \left(C_L + \frac{u_L}{S_L}\right), \quad F_L = \frac{L_c}{S_L}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя полученное выражение, для интегральной интенсивности фокуса (эффективной апертуры) получаем

$$A_\gamma = \int dx_i |A(x_i)|^2 = \left(\frac{\lambda F_L}{2\gamma\alpha_L}\right)^{1/2}, \quad (26)$$

а для полной ширины на половине высоты (полуширины) пика интенсивности в фокусе имеем

$$s_\gamma = 0.664(\gamma\lambda F_L \alpha_L)^{1/2} = 0.47 \frac{\lambda F_L}{A_\gamma}. \quad (27)$$

В случае тонкой линзы, $u_L \ll 1$, из этих соотношений следует

$$\begin{aligned} r_i = F, \quad F = \frac{L_c^2}{L}, \quad A_\gamma = 0.707 \left(\frac{\lambda F}{\gamma}\right)^{1/2}, \\ s_\gamma = 0.664(\gamma\lambda F)^{1/2} = 0.47 \frac{\lambda F}{A_\gamma}. \end{aligned} \quad (28)$$

В другом предельном случае, $u_L = \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} r_i = 0, \quad A_\gamma = 0.798 \left(\frac{\lambda L_c}{\gamma}\right)^{1/2}, \\ s_\gamma = 0.47(\gamma\lambda L)^{1/2} = 0.47 \frac{\lambda L_c}{A_\gamma}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, определение эффективной апертуры через интегральную интенсивность фокуса не приводит к противоречиям. В случае самофокусирующей линзы обобщенная длина фокуса в 1.57 раз

меньше длины самой линзы. Очевидно, это минимальная длина фокуса, которую можно получить для линзы с заданными параметрами радиуса кривизны R , толщины элементарной линзы p и декремента коэффициента преломления δ . Из полученных соотношений следует, что при всех значениях длины линзы линейный размер фокуса примерно в 0.8γ раз меньше линейного размера эффективной апертуры, причем численный коэффициент очень слабо зависит от длины линзы. Следовательно, с ростом длины линзы размеры фокуса и размеры эффективной апертуры уменьшаются пропорционально друг другу, а степень сжатия пучка зависит только от фактора поглощения γ .

В заключение этого раздела приведем некоторые численные значения для параметров алюминиевых линз Ленгелера [9–12] при энергии фотонов 25 кэВ. Эти линзы имеют следующие параметры: $p = 1$ мм, $R = 0.2$ мм, $\delta = 8.643 \cdot 10^{-7}$, $\gamma = 2.02 \cdot 10^{-3}$, $L_c = 34$ см. Для линзы, состоящей из 100 элементов, которая реально использовалась в экспериментах, имеем $L = 10$ см, $u_L = 0.294$, $F_L = 117.4$ см, $\alpha_L = 0.986$. В этом случае эффективная апертура равна $A_\gamma = 120$ мкм, а разрешение линзы $s_\gamma = 0.23$ мкм. С ростом числа элементов эти параметры плавно уменьшаются. Так, для линзы из 300 элементов легко вычислить значения $L = 30$ см, $u_L = 0.882$, $F_L = 44$ см, $\alpha_L = 0.889$. В этом случае эффективная апертура равна $A_\gamma = 78$ мкм, а разрешение линзы равно $s_\gamma = 0.13$ мкм. Несмотря на то что апертура длинной линзы уменьшается, она имеет лучшее разрешение и может быть полезной при изображении мелких объектов или их фрагментов.

5. ИЗОБРАЖЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Рассмотрим изображающие свойства рентгеновской ПНП-линзы, которые следуют из пропагатора (17). В линейном по малому параметру γ приближении фокусировка изображения точечного источника, сдвинутого на x_o от оптической оси, происходит на расстояниях, удовлетворяющих соотношению

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\tilde{r}_g) &= (r_i + r_o)C_L + \left(L_c - \frac{r_i r_o}{L_c}\right) S_L = \\ &= r_{iL} + r_{oL} - \frac{r_{iL} r_{oL}}{F_L} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $r_{oL} = r_o + B_L$, $r_{iL} = r_i + B_L$, $B_L = F_L(1 - C_L)$, F_L определено в (25). Используя обобщенные веще-

ственные расстояния, это условие можно записать в виде формулы тонкой линзы,

$$r_{iL}^{-1} + r_{oL}^{-1} = F_L^{-1}.$$

При выполнении условия (30) параметр \tilde{r}_g становится чисто мнимым, а для параметров \tilde{a}_i и \tilde{a}_o достаточно использовать только действительную часть, т.е. положить $\gamma = 0$. В этом приближении пропагатор принимает вид

$$G(x_i, x_o) = -iM^{1/2}\delta_\sigma(x_i + x_oM), \quad (31)$$

где

$$\delta_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (32)$$

$$\sigma = \left(\frac{\lambda M}{2\pi} \text{Im} \tilde{r}_g\right)^{1/2}, \quad M = \frac{r_{iL}}{r_{oL}}.$$

Таким образом, пропагатор представляет собой гауссову функцию с максимумом, центр которого расположен в точке $x_i = -x_oM$. Заметим, что фактор увеличения в общем случае длинной рентгеновской ПНП-линзы может заметно отличаться от обычного фактора увеличения тонкой линзы, пропорционального отношению r_i/r_o . Соответственно пик интенсивности изображения описывается функцией

$$I_{ps}(x_i, x_o) = |G(x_i, x_o)|^2 = \frac{M}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x_i + x_oM)^2}{\sigma^2}\right], \quad (33)$$

для которой $s_\gamma = 1.665\sigma$. Выражение для $\text{Im} \tilde{r}_g$ в условиях фокусировки изображения имеет наиболее простой вид в терминах обычных расстояний:

$$\text{Im} \tilde{r}_g = \gamma [L_c S_L + (r_i + r_o) \alpha_L].$$

В терминах обобщенных расстояний параметр ширины пика равен

$$\sigma = \left(\gamma \frac{\lambda \alpha_L r_{iL}^2 K_L}{2\pi F_L}\right)^{1/2} = \frac{\lambda r_{iL}}{A_\gamma} \left(\frac{K_L}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad (34)$$

$$K_L = 1 - \frac{2B_L F_L}{r_{iL} r_{oL}} \left(1 - \frac{1 + C_L}{2\alpha_L}\right),$$

где A_γ — апертура линзы, определенная в (26).

Рассмотрим снова предельные случаи. Для тонкой линзы, когда $L \ll F$, условие фокусировки имеет обычный вид $r_i^{-1} + r_o^{-1} = F^{-1}$, фактор увеличения

равен $M = r_i/r_o$, а $s_\gamma = 0.47\lambda r_i/A_\gamma$. Для самофокусирующей линзы с длиной $L = (\pi/2)L_c$ условие фокусировки, фактор увеличения и полуширина определяются выражениями

$$r_o = \frac{L_c^2}{r_i}, \quad M = \frac{1 + h_i}{1 + h_i^{-1}},$$

$$s_\gamma = 0.47 \frac{\lambda L_c}{A_\gamma} (1 + h_i) \left(1 - \frac{0.726}{2 + h_i + h_i^{-1}}\right), \quad (35)$$

$$h_i = \frac{r_i}{L_c}.$$

В пределе $r_o \rightarrow \infty$ снова приходим к (28). С другой стороны, в пределе $r_i \rightarrow \infty$ в обоих случаях как фактор увеличения, так и ширина изображения неограниченно растут, однако отношение размеров изображения точки к размеру всей картины практически не меняется.

Отметим интересную особенность длинных линз. Как было показано выше, самоизображающая линза имеет длину $L = \pi L_c = 3.14L_c$. С другой стороны, самофокусирующая линза имеет длину в два раза меньше, в то время как длина экспериментальной схемы для изображения без увеличения равна $(2 + \pi/2)L_c = 3.57L_c$, что не намного длиннее. По этой причине использовать линзы с чрезмерно большой длиной нецелесообразно.

6. СФОКУСИРОВАННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ОБЪЕКТА

В реальной ситуации рентгеновского эксперимента с помощью линзы изображается относительно тонкий объект, который освещается волной, излучаемой точечным источником, расположенным на расстоянии r_s от объекта и имеющим поперечные координаты x_s и y_s . Как правило, источник имеет конечные размеры, но разные точки источника некогерентны, поэтому на конечной стадии расчета необходимо провести интегрирование интенсивности по координатам источника. В этом разделе ограничимся случаем, когда расстояние от источника до объекта достаточно велико и угловые размеры источника в плоскости объекта не превышают характерных углов рассеяния объектом. Другими словами, выполняются условия когерентного изображения. Волновое поле в плоскости изображения объекта, отнесенное к амплитуде падающей на объект волны, вычис-

ляется с помощью интеграла

$$A^{(t)}(x_i, y_i) = i\lambda r_s \int dx_o dy_o G_s^{(t)}(x_i, y_i, x_o, y_o) T(x_o, y_o), \quad (36)$$

где

$$G_s^{(t)}(x_i, y_i, x_o, y_o) = \exp(-ik\eta s_0 L) G_s(x_i, x_o) G_s(y_i, y_o), \quad (37)$$

функция

$$G_s(x_i, x_o) = G(x_i, x_o) P(x_o - x_s, r_s)$$

представляет собой парциальный пропагатор изображения объекта, а функция

$$T(x_o, y_o) = \exp[i\psi(x_o, y_o)]$$

описывает перенос излучения через объект, т. е. является функцией объекта.

Как было показано выше, в условиях фокусировки изображения точек объекта (30) модуль $G_s^{(t)}(x_i, y_i, x_o, y_o)$, рассматриваемый как функция координат x_o, y_o в заданной точке (x_i, y_i) на плоскости изображения, имеет резкий максимум в точке с координатами (x_{oi}, y_{oi}) , где $x_{oi} = -x_i/M$, $y_{oi} = -y_i/M$. Здесь, как и в предыдущем разделе, $M = r_{iL}/r_{oL}$. Предположим, что комплексная фаза функции объекта является плавной функцией в пределах области максимума пропагатора. Тогда в эффективной области интегрирования функцию объекта можно аппроксимировать выражением

$$T(x_o, y_o) = \exp \left[i\psi_i + i \frac{2\pi}{\lambda} [\xi_{ix}(x_o - x_{oi}) + \xi_{iy}(y_o - y_{oi})] \right] \quad (38)$$

с комплексными параметрами

$$\psi_i = \psi(x_{oi}, y_{oi}), \quad \xi_{ix} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\psi(x_{oi}, y_{oi})}{dx},$$

$$\xi_{iy} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\psi(x_{oi}, y_{oi})}{dy},$$

зависящими от координат точки изображения.

В этом случае волновое поле изображения снова факторизуется,

$$A^{(t)}(x_i, y_i) = \exp(-ik\eta s_0 L + i\psi_i) \times A^{(x)}(x_i, y_i) A^{(y)}(x_i, y_i), \quad (39)$$

и, например,

$$A^{(x)}(x_i, y_i) = (i\lambda r_s)^{1/2} \times \int dx_o G(x_i, x_o) P(x_o - x_s, r_s) \times \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \xi_{ix}(x_o - x_{oi}) \right]. \quad (40)$$

Заметим, что функция $A^{(x)}(x_i, y_i)$ зависит от y_i параметрически через ξ_{ix} . При вычислении интеграла использовать приближение (31) непосредственно нельзя, так как в нем уже проведено разложение по степеням γ и поэтому оно недостаточно точное. Разложение по степеням γ можно проводить только в конечных выражениях. С другой стороны, точный ответ можно легко получить, учитывая следующие соображения.

Интеграл отличается лишь фазовым множителем от свертки пропагатора изображения и пропагатора Кирхгофа, если в последнем истинную координату источника x_s заменить на $\tilde{x}_s = x_s - r_s \xi_{ix}$. Как уже отмечалось выше, свертка пропагатора изображения с пропагатором Кирхгофа снова равна пропагатору изображения, в котором расстояние r_o надо заменить на $r_o + r_s$, а координату x_o — на координату \tilde{x}_s . В полученном выражении нужно использовать условие фокусировки изображения

$$r_{iL}^{-1} + r_{oL}^{-1} = F_L^{-1}$$

и можно положить $\gamma = 0$ в предэкспоненциальном члене. Что касается показателя экспоненты, в нем достаточно учесть члены нулевой и первой степени по γ . Несмотря на простоту алгоритма, вычисления достаточно громоздки из-за того, что содержат много комбинаций между многими параметрами. Чтобы получить однозначный ответ, удобно в качестве независимых поперечных координат выбрать координату изображаемой точки на объекте, x_{oi} , и угол выхода луча из объекта в этой точке, θ_o , вычисляемый через градиент фазы. Полезным параметром является также угол входа луча в линзу x_0 . Для них имеем определения

$$x_{oi} = -\frac{x_i}{M}, \quad \theta_o = \frac{x_{oi} - \tilde{x}_s}{r_s} = \xi_{ix} + \frac{x_{oi} - x_s}{r_s}, \quad (41)$$

$$x_0 = x_{oi} + r_o \theta_o.$$

В качестве независимых продольных расстояний

удобно выбрать r_o и L_c . Остальные параметры выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned} r_i &= Mu, \quad M = \frac{L_c}{v}, \quad u = r_o C_L + L_c S_L, \\ v &= r_o S_L - L_c C_L, \quad F_L = \frac{L_c}{S_L}. \end{aligned} \quad (42)$$

Не приводя промежуточных вычислений, выпишем сразу ответ в линейном по γ приближении

$$\begin{aligned} A^{(x)}(x_i, y_i) &= \frac{1}{iM^{1/2}} \times \\ &\times \exp \left[i\Phi_x(x_i) - \frac{1}{2}\mu_x(x_i, y_i) \right], \\ \Phi_x(x_i) &= \frac{\pi}{\lambda} \left[\frac{(x_{oi} - x_s)^2}{r_s} + \frac{x_{oi}^2}{r_{oL}} + \frac{x_i^2}{r_{iL}} \right], \\ \mu_x(x_i, y_i) &= \gamma \frac{2\pi}{\lambda F_L} \times \\ &\times [\alpha_L x_o^2 + (\alpha_L - C_L)(L_c \theta_o)^2 + S_L x_o L_c \theta_o]. \end{aligned} \quad (43)$$

Заметим, что при выполнении разложения по γ предполагалось выполненным условие $\lambda r_s \gg 2\pi\sigma_o^2$, где $\sigma_o = \sigma/M$ — ширина максимума пропагатора (31) относительно переменной интегрирования x_o . Другими словами, предполагалось, что фаза падающей сферической волны также плавно меняется в области интегрирования. Можно без труда рассмотреть общий случай, но он не представляет практического интереса.

Как следует из полученного выражения, градиент фазы функции объекта непосредственно влияет на интенсивность изображения. Для качественного анализа этого эффекта рассмотрим предельный случай падающей плоской волны ($r_s \rightarrow \infty$) и будем считать, что объект прозрачный. Если образец однородный, то $\theta_o = 0$ во всех точках и интенсивность излучения в плоскости изображения описывается гауссовой функцией

$$I_{im}(x_i) = \frac{1}{M} \exp \left(-\gamma \frac{2\pi}{\lambda F_L} \frac{\alpha_L}{M^2} x_i^2 \right). \quad (44)$$

Если же в каких-то местах образца существует градиент фазы, то в этих местах $\theta_o = \xi_{ix}$ и интенсивность будет отклоняться от закона (44), причем в зависимости от различных условий интенсивность может быть как меньше, так и больше фоновой. Таким образом, появляется уникальная возможность визуализации прозрачных объектов и получения фазового контраста за счет неоднородного поглощения излучения в линзе. Причем такой контраст, в отличие от обычного фазового контраста, наблюдаемого на

источниках синхротронного излучения (см., например, [19–21]), не имеет паразитных осцилляций, связанных с интерференцией различных лучей, и непосредственно позволяет определить локальный градиент фазы, создаваемый образцом. Заметим, что скачки интенсивности, связанные с резким градиентом фазы, недавно наблюдались экспериментально в изображении образца с профилированной поверхностью [22].

Физическую природу визуализации градиента фазы в образце с помощью рентгеновской ПНП-линзы проще всего понять в терминах геометрической оптики. Луч из источника с координатой x_s приходит на образец в точку с координатой x_{oi} . Так как выполняется формула линзы, то все лучи, выходящие из этой точки под разными углами, после прохождения через линзу оказываются в точке с координатой x_i в плоскости изображения. Реально же реализуется только одна траектория и луч покидает образец, составляя угол θ_o с оптической осью (осью z). Соответственно, перед линзой луч имеет координату x_o и угол θ_o . Траектория лучей $x = x_t(z)$ в линзе удовлетворяет условию, при котором в каждой точке траектории ее касательная составляет угол $\theta = (\lambda/2\pi)(d\varphi/dx)$ с осью z , где $\varphi(x, z)$ — фаза волнового поля в линзе. Эта фаза равна фазе пропагатора изображения (17), если в последнем положить $\gamma = 0$, $r_i = 0$, $x_i = x_t(z)$ и L заменить на z . С другой стороны, $\theta = dx_t/dz$. Уравнение для траектории получается особенно простым, если его записать через производную от θ . В результате

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2 x_t}{dz^2} = -\frac{x_t(z)}{L_c^2}, \quad x_t(z) = x_o C_z + \theta_o L_c S_z, \quad (45)$$

где x_o и θ_o — начальные точка и производная на траектории. Заметим, что начальные координата и угол луча при вхождении в линзу соответствуют параметрам, введенным в (41). Вычисляя интегральный по траектории луча в линзе показатель поглощения

$$\mu(L) = \gamma \frac{2\pi}{\lambda L_c^2} \int_0^L dz \left(x_o \cos \frac{z}{L_c} + \theta_o L_c \sin \frac{z}{L_c} \right)^2, \quad (46)$$

получаем ответ, совпадающий с формулой (43). Таким образом, контраст действительно связан с изменением траектории луча и неоднородным поглощением в ПНП-линзе.

Естественно, что общее изображение объекта будет содержать как поглощательный, так и фазовый контраст, и зависеть от двух компонент полного градиента фазы по двум координатным осям. К сожа-

лению, при решении обратной задачи одного изменения интенсивности недостаточно, чтобы восстановить показатель поглощения и две компоненты градиента фазы. Дополнительную информацию можно получить, двигая объект относительно линзы, поскольку разные участки линзы поглощают неодинаково.

7. ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ РЕНТГЕНОВСКОЙ ЛИНЗЫ

Как известно из классической оптики, тонкая параболическая линза производит фурье-преобразование функции объекта, освещенного сферической волной от точечного источника, в плоскости фокусировки точечного источника. Рассмотрим особенности этого явления для рентгеновской ПНП-линзы. Запишем фурье-представление функции объекта:

$$T(x_o, y_o) = \int \frac{dq dp}{(2\pi)^2} \tilde{T}(q, p) \exp(iqx_o + ipy_o). \quad (47)$$

При этом амплитуда волнового поля в плоскости изображения имеет вид

$$A^{(t)}(x_i, y_i) = \exp(-ik\eta s_0 L) \times \int \frac{dq dp}{(2\pi)^2} \tilde{T}(q, p) G_f(q, x_s, x_i) G_f(p, y_s, y_i), \quad (48)$$

где

$$G_f(q, x_s, x_i) = \int dx_o G(x_i, x_o) P(x_o - x_s, r_s) \exp(iqx_o) \quad (49)$$

представляет собой парциальный пропагатор изображения отдельной компоненты фурье-образа функции объекта. Нас интересуют условия, когда этот пропагатор максимально близок к дельта-функции.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, интеграл можно выразить через пропагатор изображения, в котором x_s заменяется на $\tilde{x}_s = x_s - x_q$, $x_q = q\lambda r_s/2\pi$, а r_o заменяется на $\tilde{r}_s = r_o + r_s$. В результате имеем

$$G_f(q, x_s, x_i) = \frac{1}{(i\lambda\tilde{r}_g)^{1/2}} \exp\left[iq\left(x_s - \frac{1}{2}x_q\right)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda\tilde{r}_g}(g_i x_i^2 - 2x_i\tilde{x}_s + g_s\tilde{x}_s^2)\right], \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{r}_g &= (\tilde{r}_s + r_i)c_L + \left(z_c - \frac{\tilde{r}_s r_i}{z_c}\right)s_L, \\ g_i &= c_L - \frac{\tilde{r}_s}{z_c}s_L, \quad g_s = c_L - \frac{r_i}{z_c}s_L. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, условие для преобразования Фурье совпадает с условием фокусировки точечного источника, освещающего объект, т. е. $\text{Re } \tilde{r}_g = 0$. Однако приближенное выражение (31) непосредственно использовать нельзя, потому что пропагатор стоит под знаком интеграла и, следовательно, опущенный фазовый множитель может играть существенную роль.

Для получения приближенного выражения представим комплексные коэффициенты в виде ряда по степеням $i\gamma$:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_g &= R_0 + i\gamma R_1 + (i\gamma)^2 R_2, \quad g_i = Q_{i0} + i\gamma Q_{i1}, \\ g_s &= Q_{s0} + i\gamma Q_{s1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда условие фокусировки точечного источника приближенно имеет вид $R_0 = 0$. При этом выполняются соотношения

$$r_{iL}^{-1} + r_{sL}^{-1} = F_L^{-1}, \quad Q_{i0} = -\frac{1}{M_s}, \quad Q_{s0} = M_s,$$

где

$$r_{sL} = \tilde{r}_s + B_L = r_{oL} + r_s, \quad M_s = \frac{r_{iL}}{r_{sL}},$$

и пропагатор определяется следующим образом:

$$G_f(q, x_s, x_i) = \frac{1}{i(\gamma\lambda R_1)^{1/2}} \exp[i\varphi(q) - \mu(q)], \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \mu(q) &= \frac{\pi(x_i + M_s\tilde{x}_s)^2}{\gamma\lambda R_1 M_s}, \\ \varphi(q) &= q\left(x_s - \frac{1}{2}x_q\right) + \mu(q)\gamma\frac{R_2}{R_1} + \\ &+ \frac{Q_{i1}x_i^2 + Q_{s1}\tilde{x}_s^2}{\lambda R_1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, каждая точка x_i в плоскости изображения источника может иметь заметную интенсивность. Она отображает некоторую область в q -пространстве функции образца с центром в точке $q = q_i$, где

$$q_i = \frac{2\pi}{\lambda r_s M_s} (x_i - x_s M_s). \quad (55)$$

Кроме того, из-за поглощения в линзе фурье-образ функции образца модифицируется фазовым множителем, т. е. фактически изображается свертка фурье-образа функции образца с некоторой функцией, зависящей от параметров линзы и экспериментальной схемы. Тем не менее, если функция образца является периодической и, следовательно, имеет

дискретный ряд фурье-гармоник, расстояние между которыми превышает ширину максимума пропагатора, то изображение представляет собой систему пятен, соответствующих отдельным гармоникам фурье-образа функции источника, а размер каждого пятна точно соответствует проекции размеров источника. Расстояние между пятнами зависит от используемых в эксперименте расстояний и равно

$$\Delta x_i = \Delta q \frac{\lambda r_s M_s}{2\pi}.$$

Однородный образец является частным случаем, для которого существует только нулевая фурье-гармоника.

Другой подход к анализу этой же проблемы состоит в исследовании выражения (36). Фурье-преобразование получается при условии, что пропагатор $G(x_i, x_o)P(x_o - x_s, r_s)$ не содержит члена, пропорционального x_o^2 , в фазе. Это условие можно записать как $\text{Re } C = 0$, где

$$C = \frac{1 - \tilde{a}_o}{\tilde{r}_g} + \frac{1}{r_s} = 0.$$

Легко убедиться, что в нулевом приближении по γ это условие эквивалентно условию фокусировки точечного источника, записанному выше. При этом, однако, под интегралом остается затухающая экспонента типа $\exp(-\text{Im}(C)x_o^2)$. Кроме того, \tilde{r}_g является комплексной величиной, поэтому волновой вектор фурье-преобразования имеет малую мнимую часть, которая зависит от расстояния между объектом и линзой. Проявление этих особенностей зависит от конкретных условий и их анализ представляет собой отдельную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Snigirev, V. Kohn, I. Snigireva, and B. Lengeler, *Nature* **384**, 49 (1996).
2. A. Snigirev, B. Filseth, P. Elleaume, Th. Klocke, V. Kohn, B. Lengeler, I. Snigireva, A. Souvorov, and J. Tummler, *Proc. SPIE* **3151**, 164 (1997).
3. P. Elleaume, *J. Synchr. Rad.* **5**, 1 (1998).
4. A. Snigirev, V. Kohn, I. Snigireva, A. Souvorov, and B. Lengeler, *Appl. Opt.* **37**, 653 (1998).
5. Yu. I. Dudchik and N. N. Kolchevskii, *Nucl. Instr. Meth. A* **421**, 361 (1999).
6. B. Cederstrom, R. Cahn, M. Danielsson, M. Lundqvist, and D. R. Nygren, *Nature* **404**, 951 (2000).
7. D. A. Arms, E. M. Dufresne, R. Clarke, S. B. Dierker, N. R. Pereira, and D. Foster, *Rev. Sci. Instr.* **73**, 1492 (2002).
8. V. V. Aristov, M. V. Grigoriev, S. M. Kuznetsov, L. G. Shabelnikov, V. A. Yunkin, M. Hoffmann, and E. Voges, *Opt. Comm.* **177**, 33 (2000).
9. B. Lengeler, C. Schroer, J. Tummler, B. Benner, M. Richwin, A. Snigirev, I. Snigireva, and M. Drakopoulos, *J. Synchr. Rad.* **6**, 1153 (1999).
10. C. G. Schroer, T. F. Gunzler, B. Benner, M. Kuhlmann, J. Tummler, B. Lengeler, C. Rau, T. Weitkamp, A. Snigirev, and I. Snigireva, *Nucl. Instr. Meth. A* **467–468**, 966 (2001).
11. C. G. Schroer, B. Benner, T. F. Gunzler, M. Kuhlmann, C. Zimprich, B. Lengeler, C. Rau, T. Weitkamp, A. Snigirev, I. Snigireva, and J. Appenzeller, *Rev. Sci. Instr.* **73**, 1640 (2002).
12. B. Lengeler, C. G. Schroer, B. Benner, A. Gerhardus, T. F. Gunzler, M. Kuhlmann, J. Meyer, and C. Zimprich, *J. Synchr. Rad.* **9**, 119 (2002).
13. M. A. Piestrup, J. T. Cremer, H. R. Beguiristain, C. K. Gary, and R. H. Pantell, *Rev. Sci. Instr.* **71**, 4375 (2000).
14. Y. Ohishi, A. Q. R. Baron, M. Ishii, T. Ishikawa, and O. Shimomura, *Nucl. Instr. Meth. A* **467–468**, 962 (2001).
15. V. V. Protopopov and K. A. Valiev, *Opt. Comm.* **51**, 297 (1998).
16. В. Г. Кон, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 701 (2002).
17. V. Kohn, I. Snigireva, and A. Snigirev, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2745 (2000); *Opt. Comm.* **198**, 293 (2001).
18. V. G. Kohn, I. Snigireva, and A. Snigirev, *Поверхность* № 1, 33 (2003).
19. A. Snigirev, I. Snigireva, V. Kohn, S. Kuznetsov, and I. Schelokov, *Rev. Sci. Instr.* **66**, 5486 (1995).
20. S. W. Wilkins, T. E. Gureyev, D. Gao, A. Pogany, and A. W. Stevenson, *Nature* **384**, 335 (1996).
21. T. E. Gureyev, S. Mayo, S. W. Wilkins, D. Paganin, and A. W. Stevenson, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5857 (2001).
22. C. G. Schroer, B. Benner, T. F. Gunzler, M. Kuhlmann, C. Zimprich, B. Lengeler, C. Rau, T. Weitkamp, A. Snigirev, I. Snigireva, and J. Appenzeller, *Rev. Sci. Instr.* **73**, 1640 (2002).