

# СТРУКТУРА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА $p$ -ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛОСКОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ И В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Р. О. Зайцев\**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

*Ю. В. Михайлова*

*Государственный научный центр «Ниителлоприбор»  
129085, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 2002 г.

Получены уравнения Харпера для  $p_x$ ,  $p_y$ -электронной системы. Проведен анализ граничных точек квазинепрерывного спектра для случаев, для которых число квантов потока магнитного поля через элементарную ячейку есть рациональное число, а также расчеты для квадратной и треугольной решеток и для решетки типа пчелиных сот с двумя неэквивалентными атомами. Обсуждена возможность использования полученных результатов для объяснения дробного эффекта Холла.

PACS: 71.18.+y, 71.20.-b

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения, определяющие энергетический спектр системы под воздействием магнитного поля, представляют собой систему разностных уравнений и называются уравнениями Харпера [1]. В рассматриваемой задаче имеются два предела: энергетический спектр, состоящий из дискретных сильно вырожденных уровней Ландау в отсутствие периодического потенциала, и энергетические зоны, связанные с блоховскими волнами, которые обусловлены трансляционной симметрией решетки в отсутствие магнитного поля.

Задача об электронах в решетке с периодами  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ , двигающихся в магнитном поле  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{a}_3$ , имеет естественный параметр  $\zeta = (HS_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2})/\Phi_0$ , равный отношению магнитного потока через площадь, построенную на векторах  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ , к кванту потока  $\Phi_0 = \hbar c/|e|$ . Если этот параметр — рациональное число, т. е.  $\zeta = p/q$ , то имеется магнитная сверхрешетка, построенная на векторах  $q\mathbf{a}_1$ ,  $q\mathbf{a}_2$ . Это обстоятельство ведет к сильному упрощению вычислений. Для простейшего случая квадратной решетки с од-

ним атомом в элементарной ячейке с рациональными  $\zeta = eHa^2/\hbar c$  энергетический спектр был рассчитан Хофштадтером [2] и получил название «бабочки Хофштадтера». В случае слабого магнитного потенциала происходит расщепление уровней Ландау на подзоны [3], в случае сильного поля имеет место частичное снятие вырождения [4].

В рассмотренном Хофштадтером случае уравнение Шредингера в приближении сильной связи приводится к уравнениям Харпера:

$$\Psi_{n+1} + 2\Psi_n \cos(2\pi n\zeta - \varphi) + \Psi_{n-1} = E\Psi_n, \quad (1)$$

где  $\Psi_n$  — волновая функция на узле  $n$ ,  $\varphi = a p_y/\hbar$  — фаза, связанная с квазиимпульсом электрона,  $a$  — постоянная решетки,  $E$  — энергия в единицах интеграла перескока к ближайшим соседям.

Все возможные собственные энергии уравнений Харпера находятся в диапазоне  $|E| \leq 4$ , причем параметр  $\zeta$  может быть ограничен областью  $0 < |\zeta| < 1$ . Фактически достаточно рассмотреть диапазон  $0 < |\zeta| < 1/2$ , поскольку уравнение Харпера инвариантно относительно подстановки  $\zeta \rightarrow 1 - \zeta$ . Отметим также, что уравнения (1) допускают замену  $E \rightarrow -E$ .

\*E-mail: agydel@veernet.iol.ru

Предложенный Хофштадтером численный метод основывался на том, что уравнение Харпера (1) может быть написано в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \hat{T}_n \begin{pmatrix} \Psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

с матрицей перехода

$$\hat{T}_n = \begin{pmatrix} E - 2 \cos(2\pi n\zeta - \varphi) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрицы перехода  $T_n$  имеют определители, равные единице. В случае, если  $\zeta = p/q$ , уравнения (2) периодичны по  $n$  с периодом  $q$ . Поэтому матрица  $\hat{A} = \prod_{n=1}^q T_n$  имеет собственные значения, по модулю меньшие единицы. Поскольку  $\det \hat{A} = 1$ , это требование равносильно условию  $\text{Sp}(\hat{A}) = 2 \cos \theta$ , откуда находим весь спектр возмущений.

Интересно отметить, что решение Хофштадтера удалось экспериментально промоделировать [5], основываясь на аналогии между уравнениями, описывающими распространение микроволн сквозь рассеивающую матрицу, и уравнениями Харпера для электрона. В [5] изучалось прохождение микроволн сквозь матрицу (100) рассеивающих элементов, вставленных в волновод, и найдены зоны, воспроизводящие бабочку Хофштадтера.

Для экспериментальной реализации «бабочки» с типичными параметрами решетки в 0.1 нм требуются магнитные поля приблизительно в  $10^5$  Тл, которые находятся за технически доступным пределом. Единственный способ обойти эту проблему состоит в том, чтобы использовать искусственные сверхструктуры. Фактически первые указания на магнитно-расщепленные подзоны содержатся в [6–9].

Изучение квантового эффекта Холла проводится на структурах, состоящих из атомов, имеющих незаполненную  $p$ -оболочку. По этой причине ниже изучается двумерная система  $p_x, p_y$ -электронов, находящихся в квадратной решетке или в решетке типа пчелиных сот. Не меньший интерес представляют также  $s$ -электроны, находящиеся в треугольной решетке или в решетке типа пчелиных сот, поскольку в двумерном случае свойства таких электронов эквивалентны свойствам  $p_z$ -электронов, помещенных в те же решетки.

Теоретическое исследование квантового эффекта Холла до последнего времени ограничивалось изучением двумерной системы уровней Ландау с учетом слабого кулоновского взаимодействия, учитываемого по теории возмущений. Исключением являются

статья [9] и недавно появившаяся работа [10]. В работе [9] проведен групповой анализ электронной структуры двумерного электронного газа, находящегося во внешнем магнитном поле, в [10] условия возникновения дробного эффекта Холла изучаются в рамках самосогласованной теории возмущений. Некоторые серии дробных соотношений получены в заключительной части настоящей работы.

## 2. УРАВНЕНИЯ ХАРПЕРА ДЛЯ $p$ -ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим уравнения для операторов рождения в представлении Гейзенберга:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{a}_{k,\mathbf{r}}(t)}{\partial t} = - [\hat{H}, \hat{a}_{k,\mathbf{r}}(t)] = \sum_{n,\mathbf{s}} \hat{H}_{n,\mathbf{s}}^{k,\mathbf{r}} \hat{a}_{n,\mathbf{s}}(t). \quad (4)$$

Здесь  $\hat{a}_{k,\mathbf{r}}(t)$  — оператор уничтожения электрона, принадлежащего ячейке с координатой  $\mathbf{r}$  и находящегося в одном из вырожденных состояний с номером  $k$ .

В квазиклассическом приближении имеем

$$\begin{aligned} \hat{H}_{n,\mathbf{s}}^{k,\mathbf{r}} &= \int \Psi_k^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \hat{h}(\mathbf{R}) \Psi_n(\mathbf{R} - \mathbf{s}) d\mathbf{R}, \\ \Psi_{\pm}(\mathbf{R}) &= \exp\left(-\frac{ie}{c\hbar} \int^{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) (x \pm iy) \rho\left(\frac{R}{rB}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Записанная таким образом атомная волновая функция диагонализует атомный гамильтониан при  $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ :

$$H_{k,\mathbf{r}}^{k,\mathbf{r}} = \text{diag}(\mu_B H, -\mu_B H). \quad (6)$$

Если  $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ , то удобно заменить  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + (\mathbf{r} + \mathbf{s})/2$ , а затем проинтегрировать по произведению радиальных функций  $\rho(\mathbf{R} + (\mathbf{r} - \mathbf{s})/2) \rho(\mathbf{R} - (\mathbf{r} + \mathbf{s})/2)$ .

При этом в остальных множителях можно пренебречь  $\mathbf{R}$  по сравнению с  $(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} H_{n,\mathbf{s}}^{k,\mathbf{r}} &= \exp\left(\frac{ie}{c\hbar} \int_{\mathbf{s}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\right) \times \\ &\times \int \rho_k^* \left( \left| \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{2} \right| \right) \hat{h}(\mathbf{R}) \times \\ &\times \rho_n \left( \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{2} \right) d\mathbf{R} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -1/4 & -\exp(2i\psi)/4 \\ -\exp(-2i\psi)/4 & -1/4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\psi$  — угол разворота векторов элементарной ячейки. В данном случае  $\psi = \pi/2$ .

Запишем уравнение (4) для квадратной решетки в явном виде:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \hat{a}_{\mathbf{p}}(t)}{\partial t} &= 2 [\cos(p_x a) + \cos(p_y a)] \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) + \\ &+ 2 [\cos(p_x a) - \cos(p_y a)] \hat{b}_{\mathbf{p}}(t) + \mu_B H \hat{a}_{\mathbf{p}}(t), \\ i \frac{\partial \hat{b}_{\mathbf{p}}(t)}{\partial t} &= 2 [\cos(p_x a) - \cos(p_y a)] \hat{a}_{\mathbf{p}}(t) + \\ &+ 2 [\cos(p_x a) + \cos(p_y a)] \hat{b}_{\mathbf{p}}(t) - \mu_B H \hat{a}_{\mathbf{p}}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\hat{a}_{\mathbf{p}}(t)$  и  $\hat{b}_{\mathbf{p}}(t)$  — операторы уничтожения  $x$ - и  $y$ -электронов с импульсом  $\mathbf{p}$ ;  $a$  — размер элементарной ячейки. Скалярный интеграл перескока считается равным единице, что соответствует дырочному представлению. Для перехода к электронному представлению достаточно провести замену  $E \rightarrow -E$ ,  $p_x, p_y$  — обобщенные квазиимпульсы, зависящие от векторного потенциала. В калибровке Ландау  $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$  для квадратной решетки имеем общую формулу

$$p_x = \hat{k}_x, \quad p_y = k_y - \frac{eH\hat{x}}{c}, \quad \hat{x} = i \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad (9)$$

где  $k_y$  — интеграл движения, который определяется из условия цикличности по  $y$ . Поскольку запись уравнений движения через дифференциальный оператор  $\hat{x}$  непригодна для численных вычислений, имеет смысл вернуться к записи уравнений движения в виде разностных уравнений (по переменной  $x$ ) при заданном  $ak_y = \varphi, 0 < \varphi < 2\pi$ .

Удобно ввести номер ячейки по оси  $x$ :  $x = an$ , а также исключить временную зависимость с помощью перехода к состояниям с заданной энергией  $E$ . В результате получим систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} E \hat{a}_{n,\varphi} &= [\hat{a}_{n-1,\varphi} + \hat{a}_{n+1,\varphi}] + 2\hat{a}_{n,\varphi} \cos(\varphi - \zeta n) + \\ &+ [\hat{b}_{n-1,\varphi} + \hat{b}_{n+1,\varphi}] - \\ &- 2\hat{b}_{n,\varphi} \cos(\varphi - \zeta n) + \mu_B H \hat{a}_{n,\varphi}, \\ E \hat{b}_{n,\varphi} &= [\hat{b}_{n-1,\varphi} + \hat{b}_{n+1,\varphi}] - 2\hat{a}_{n,\varphi} \cos(\varphi - \zeta n) + \\ &+ [\hat{a}_{n-1,\varphi} + \hat{a}_{n+1,\varphi}] - \\ &- 2\hat{b}_{n,\varphi} \cos(\varphi - \zeta n) - \mu_B H \hat{b}_{n,\varphi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) обобщают уравнения Харпера для плоской системы  $p$ -электронов в квадратной решетке. Важно заметить, что в задаче имеются два безразмерных параметра:

$$u = \mu_B H, \quad \zeta = \frac{eHa^2}{c\hbar}, \quad \frac{u}{\zeta} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} = \frac{m^*}{m}. \quad (11)$$

В эксперименте каждый из этих параметров мал, однако их отношение существенно зависит от величины интеграла перескока. При малой величине интеграла перескока эффективная масса  $m^* \gg m$ , т. е.  $\zeta \ll u$ , т. е. зеемановское расщепление оказывается большим по сравнению с расстояниями между уровнями Ландау.

По переменной  $n$  уравнения (10) являются разностными, в то время как переменная  $\varphi$  является параметром, от которого неизвестные функции зависят без какого-либо сдвига. По этой причине можно опустить зависимость от  $\varphi$ . В силу линейности изучаемых уравнений ниже мы опускаем операторные символы.

Для того чтобы преобразовать уравнения (10) к тому же виду (2), что и для  $s$ -электронов, переходим к новым переменным:

$$x_n^+ = a_n + b_n; \quad x_n^- = a_n - b_n,$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} E x_n^+ &= 2 [x_{n-1}^+ + x_{n+1}^+] + \mu_B H x_n^-, \\ E x_n^- &= 4x_n^- \cos(\varphi - \zeta n) + \mu_B H x_n^+. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате получим уравнения, пригодные для машинных вычислений:

$$E x_n^+ = 2 [x_{n-1}^+ + x_{n+1}^+] + \frac{\mu_B^2 H^2 x_n^+}{E - 4 \cos(\varphi - \zeta n)}. \quad (13)$$

Запишем эти уравнения в матричной форме, предложенной Хофштадтером [2]:

$$\hat{R}_{n+1} = \hat{\Gamma}_n \hat{R}_n,$$

где

$$\hat{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} E - W(\epsilon, \varphi - \zeta n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

в которой  $\epsilon = E/2, r_n = \varphi - \zeta n$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{\mu_B^2 H^2}{4}, \quad W(\epsilon, r_n) = \frac{\Delta^2}{\epsilon - 2 \cos r_n}, \\ \hat{R}_n &= \begin{pmatrix} x_n^+ \\ x_{n-1}^+ \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1}^+ \\ x_n^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если  $H = 0$ , то имеем два независимых решения:

$$\epsilon = 2 \cos \varphi, \quad \epsilon = 2 \cos \theta. \quad (16)$$

При  $\zeta = 2\pi k$  также получим две ветви спектра:

$$\epsilon_{\pm} = (\cos \varphi + \cos \theta) \pm \sqrt{(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + \Delta^2}. \quad (17)$$

Произведение произвольного числа  $m$  матриц  $\hat{\Gamma}_n$  обозначим через  $\hat{Q}_m$ . Можно заметить, что определитель любой из этих матриц равен единице, так что либо оба собственных значения матрицы  $Q$  по модулю равны единице, либо одно собственное значение по модулю больше единицы, а другое собственное значение по модулю меньше единицы. Условие ограниченности волновой функции при всех  $n$  на-

кладывает условие на величину собственных значений матрицы  $Q$ , — оба собственных значения по модулю должны быть равными единице. Иными словами,

$$\text{Sp } \hat{Q}_m(\epsilon) = 2 \cos \theta, \quad (18)$$

где  $\theta$  — второй безразмерный квазиимпульс. Исходя из этого соотношения, находим четыре ветви спектра для случая  $\zeta = \pi$ :

$$\epsilon(\theta, \varphi) = \pm \sqrt{2 + \Delta^2 + \cos \theta + \cos 2\varphi} \pm \sqrt{2\Delta^2 [2 + \cos 2\varphi + \cos \theta] + [\cos \theta - \cos 2\varphi]^2}.$$

Для получения качественного представления о характере энергетического спектра был проведен численный расчет собственных значений для рациональных значений параметра

$$\lambda = \frac{\zeta}{2\pi}, \quad \zeta = 2\pi \frac{n_1}{n_2}, \quad (19)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — целые числа,  $1 \leq n_2 \leq 36$ ,  $1 \leq n_1 < n_2$  (см. рис. 1).

### 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР В ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Для треугольной решетки энергетический спектр при  $H = 0$  имеет следующий вид:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = 2 [\cos(k_+ a) + \cos(k_- a) + \cos(-k_+ a + k_- a)], \quad (20)$$

где по-прежнему интеграл перескока считается равным единице, а квазиимпульсы имеют следующий вид:

$$k_+ = \frac{k_x + \sqrt{3}k_y}{2}, \quad k_- = \frac{-k_x + \sqrt{3}k_y}{2}.$$

Направим магнитное поле по оси  $z$  и будем использовать симметричную калибровку, т. е. магнитный потенциал запишем в виде

$$A_x = -\frac{yH}{2}, \quad A_y = \frac{xH}{2}, \quad A_z = 0.$$

В результате получим следующий гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{H}/2 = & \exp \left[ \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}a}{2} \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{eaH}{4\hbar c} (-y + \sqrt{3}x) \right] + \\ & + \exp \left[ \frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}a}{2} \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{eaH}{4\hbar c} (+y + \sqrt{3}x) \right] + \\ & + \exp \left[ -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}a}{2} \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{eaH}{4\hbar c} (y + \sqrt{3}x) \right] + \\ & + \exp \left[ -\frac{a}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}a}{2} \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{eaH}{4\hbar c} (-y + \sqrt{3}x) \right] + \\ & + \exp \left[ a \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{eaH}{2\hbar c} y \right] + \exp \left[ -a \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{eaH}{2\hbar c} y \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Оператор  $\exp \{ \mathbf{a} \mathbf{d} / \partial \mathbf{r} \}$  представляет собой оператор сдвига аргумента функции на  $\mathbf{a}$ .

Для преобразования уравнений к харперовскому виду перейдем в неортогональную систему координат, считая ортами  $e_x$  и  $e_+ = e_x/2 + \sqrt{3}e_y/2$ , тогда узлы решетки будут иметь целочисленные координаты  $(n_x, n_+)$ , а переход к новой системе координат описывается формулами

$$x = x_0 + \frac{1}{2}y_+, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}y_+ \quad (22a)$$

или

$$x_0 = x - \frac{1}{\sqrt{3}}y, \quad y_+ = \frac{2}{\sqrt{3}}y. \quad (22b)$$

При этом операторы

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

перепишутся в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_+}, \quad (23)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial y_+}.$$

Обозначим  $\zeta = eH\sqrt{3}a^2/4c\hbar$  и тогда в новых переменных гамильтониан переписывается в следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}}{2} = & \exp\left[a\frac{\partial}{\partial y_+} + i\zeta\frac{x_0}{a}\right] + \exp\left[-a\frac{\partial}{\partial y_+} - i\zeta\frac{x_0}{a}\right] + \\ & + \exp\left[-a\frac{\partial}{\partial x_0} + a\frac{\partial}{\partial y_+} + i\zeta\frac{(y_+ + x_0)}{a}\right] + \\ & + \exp\left[a\frac{\partial}{\partial x_0} - a\frac{\partial}{\partial y_+} - i\zeta\frac{(y_+ + x_0)}{a}\right] + \\ & + \exp\left[-a\frac{\partial}{\partial x_0} + i\zeta\frac{y_+}{a}\right] + \exp\left[a\frac{\partial}{\partial x_0} - i\zeta\frac{y_+}{a}\right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что оператор  $\exp\{\mathbf{a}\partial/\partial\mathbf{r}\}$  представляет собой оператор сдвига аргумента функции на  $\mathbf{a}$ , так что результат действия гамильтониана (28) соответствует уравнениям Харпера:

$$\begin{aligned} E\Psi = & \Psi(x_0, y_+ + a) \exp\frac{i\zeta x_0}{a} + \\ & + \Psi(x_0, y_+ - a) \exp\left(-\frac{i\zeta x_0}{a}\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{i\zeta(x_0 + y_+)}{a}\right) \Psi(x_0 + a, y_+ - a) + \\ & + \exp\left(\frac{i\zeta(x_0 + y_+)}{a}\right) \Psi(x_0 - a, y_+ + a) + \\ & + \exp(-i\zeta y_+) \Psi(x_0 + a, y_+) + \\ & + \exp(i\zeta y_+) \Psi(x_0 - a, y_+). \end{aligned} \quad (25)$$

Условием их разрешимости является конечность волновой функции при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ . Отметим, что параметр задачи  $\zeta = |e|Ha^2\sqrt{3}/\hbar c$  равен отношению магнитного потока через элементарную ячейку к кванту потока. Узлы решетки имеют целочисленные координаты. Поэтому уравнение (28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E\Psi(n_x, n_y) = & \Psi(n_x, n_y + 1) \exp(i\zeta n_x) + \\ & + \Psi(n_x, n_y - 1) \exp(-i\zeta n_x) + \\ & + \exp(-i\zeta(n_x + n_y)) \Psi(n_x + 1, n_y - 1) + \\ & + \exp[i\zeta(n_x + n_y)] \Psi(n_x - 1, n_y + 1) + \\ & + \exp(-i\zeta n_y) \Psi(n_x + 1, n_y) + \\ & + \exp(i\zeta n_y) \Psi(n_x - 1, n_y). \end{aligned} \quad (26)$$

Будем искать решение уравнений (26) в виде

$$\Psi(n_x, n_y) = \exp\left(-\frac{\zeta i(n_x^2 - n_y^2)}{2}\right) W(n_x, n_y). \quad (27)$$

Тогда функция  $W(n_x, n_y)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} W(n_x, n_y) E = & \exp(i\zeta(n_x + n_y)) \times \\ & \times W(n_x, n_y + 1) \exp\frac{i\zeta}{2} + \\ & + \exp(-i\zeta(n_x + n_y)) W(n_x, n_y - 1) \exp\frac{i\zeta}{2} + \\ & + \exp(-2i\zeta(n_x + n_y)) W(n_x + 1, n_y - 1) + \\ & + \exp(2i\zeta(n_x + n_y)) W(n_x - 1, n_y + 1) + \\ & + \exp(-i\zeta(n_x + n_y)) \exp\left(-\frac{i\zeta}{2}\right) W(n_x + 1, n_y) + \\ & + \exp(i\zeta(n_x + n_y)) \exp\left(-\frac{i\zeta}{2}\right) W(n_x - 1, n_y). \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что коэффициенты в уравнении (30) зависят только от суммы  $n_x + n_y$ .

Это обстоятельство дает возможность перейти к переменным  $N = n_x + n_y$ ,  $M = n_x - n_y$  и искать решение в виде

$$W(N, M) = e^{i\varphi M} S_N. \quad (29)$$

Тогда уравнения (28) приводятся к цепочке разностных линейных уравнений

$$\begin{aligned} S_N [E - 2 \cos(2r_N)] = \\ = 2S_{N+1} \cos\left(r_N + \frac{\zeta}{2}\right) + 2S_{N-1} \cos\left(r_N - \frac{\zeta}{2}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $r_N = N\zeta - \varphi$ . Для проведения численных расчетов уравнение (30) удобно записать в виде (14)

$$\hat{G}_{N+1} = \hat{Y}_N \hat{G}_N,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Y}_N = & \begin{pmatrix} U(\epsilon, r_N, \zeta) & V(r_N, \zeta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{G}_N = & \begin{pmatrix} S_N \\ S_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{G}_{N+1} = \begin{pmatrix} S_{N+1} \\ S_N \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{E}{2}, \quad U(\epsilon, r_N, \zeta) = \frac{\epsilon - \cos 2r_N}{\cos(r_N + \zeta/2)}, \\ V(\beta, \zeta) = -\frac{\cos(r_N - \zeta/2)}{\cos(r_N + \zeta/2)}, \quad r_N = N\zeta - \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Физическое условие, накладываемое на волновую функцию, — ограниченность при всех значениях  $N$ .

Предположим, что матрица  $\hat{A}(N)$  периодична по  $N$  с периодом  $m$ , т. е.

$$2\pi(N + m)\kappa = 2\pi N\kappa + 2\pi i. \quad (33)$$

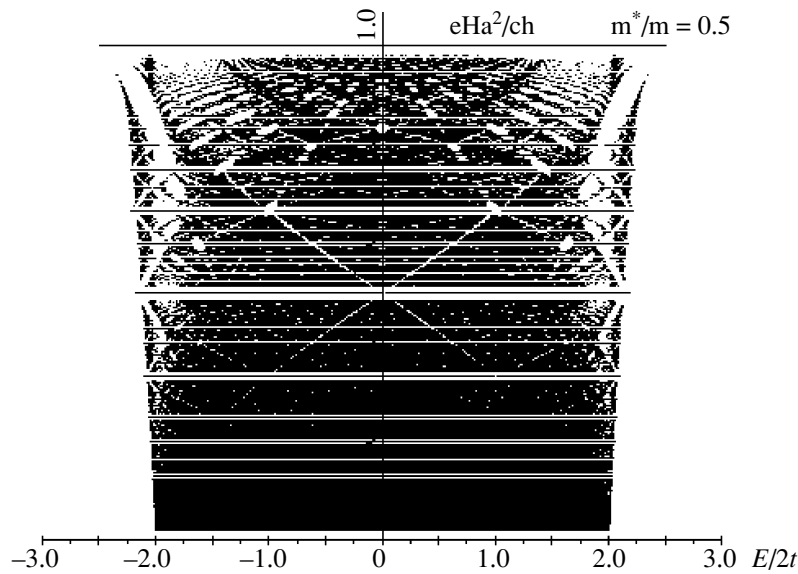


Рис. 1. Электронные спектры *p*-электронов в квадратной решетке

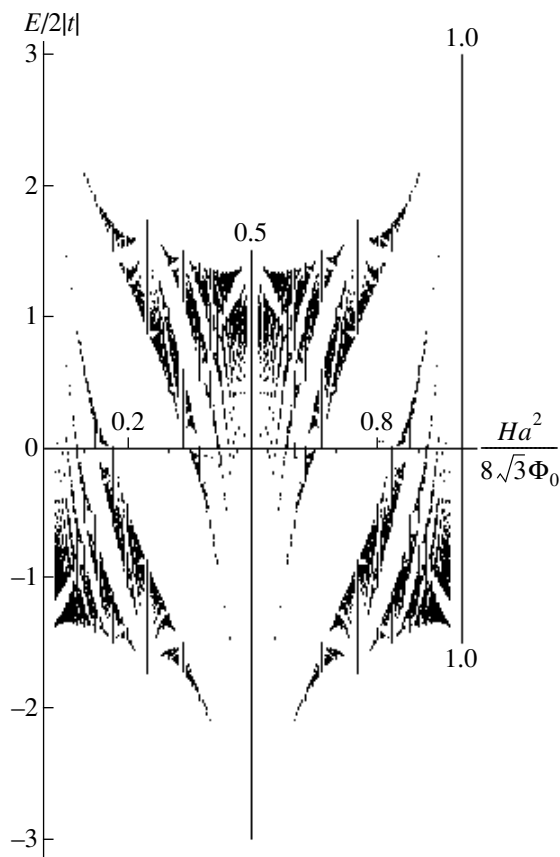


Рис. 2. Энергетический спектр *s*-электронов в треугольной решетке

Это означает, что параметр  $\kappa = \zeta/2\pi$  является рациональным числом:  $\kappa = i/m$  (см. рис. 2).

Произведение произвольного числа  $k$  матриц  $\hat{Y}_N$  обозначим через  $\hat{Q}_k$ . Можно заметить, что определитель любой из этих матриц равен единице, так что либо оба собственных значения матрицы  $Q$  по модулю равны единице, либо одно собственное значение по модулю больше единицы, а другое собственное значение по модулю меньше единицы. Условие ограниченности волновой функции при всех  $n$  накладывает условие на величину собственных значений матрицы  $Q$  — оба собственных значения по модулю должны быть равными единице. Таким образом, мы снова получаем уравнение (18).

Приведем решение этого уравнения в простейших случаях для целочисленных значений параметра  $2\pi/\zeta$ . В случае  $\zeta = \pi$

$$\epsilon(\theta, \varphi)_{\pm} = \cos 2\varphi \pm 2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34a)$$

В случае  $\zeta = 2\pi/3$  для нахождения спектра имеем кубическое уравнение

$$\epsilon^3 + \frac{9}{4}\epsilon + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos 3\varphi \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 6\varphi = 0. \quad (34б)$$

В случае  $\zeta = \pi/2$  имеем четыре ветви спектра:

$$\epsilon(\theta, \varphi) = \pm \sqrt{1 + \cos^2 2\varphi \pm \cos \frac{\theta}{2} \cos 2\varphi}. \quad (34в)$$

#### 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР В РЕШЕТКЕ ТИПА ПЧЕЛИНЫХ СОТ

При изучении явлений, связанных с квантовым эффектом Холла, мы имеем дело с двумерным газом, который образуется на границе между двумя бинарными соединениями типа GaAs и  $Al_xGa_{1-x}As$ , каждое из которых имеет незаполненную  $p$ -оболочку. В идеальном случае на границе образуется двумерная сотовая решетка чередующихся катионов и анионов (см. рис. 3). Средние числа заполнения  $n_a, n_b$   $p$ -электронов (например, А — Ga, В — As) удовлетворяют условию электронейтральности  $n_a + n_b = 4$ , которое определяет величину химического потенциала  $\mu = -(\epsilon_a + \epsilon_b)/2$ . Здесь и ниже через  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_b$  обозначены одночастичные энергии соответствующих электронов. Величина разности  $r = \epsilon_a - \epsilon_b$  определяется электростатическими свойствами данного гетероперехода и считается заданным энергетическим параметром.

##### 4.1. $p_x, p_y$ -электроны

Далее мы предположим, что перескоки происходят между соседними атомами, каждый из которых имеет волновую функцию, пропорциональную  $x$  или  $y$ , в то время как  $p_z$ -оболочка остается незаполненной.

Для изучения магнитных свойств, связанных с орбитальным расщеплением, необходимо выбрать две комплексно-сопряженные волновые функции  $x \pm iy$ , имеющие различную энергию в заданном маг-

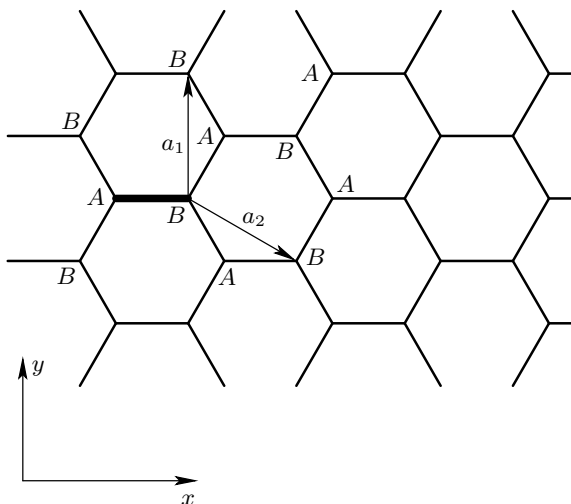


Рис. 3. Элементарная ячейка сотовой решетки

нитном поле  $\pm H$  (магнитное поле измеряется в энергетических единицах).

Матрица интегралов перехода между ближайшими ионами пропорциональна интегралу перекрытия, который положен равным единице.

В приближении ближайших соседей обратная одночастичная функция Грина записывается в виде следующей матрицы:

$$G^{-1}(E) = \begin{pmatrix} E - \epsilon_a^+ & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & E - \epsilon_a^- & \gamma & \delta \\ \alpha^* & \gamma^* & E - \epsilon_b^+ & 0 \\ \beta^* & \delta^* & 0 & E - \epsilon_b^- \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \epsilon_a^\pm &= \frac{r}{2} - \mu \pm H, & \epsilon_b^\pm &= -\frac{r}{2} - \mu \pm H, \\ \alpha &= \delta = 1 + \nu_1^* + \nu_2^*, \\ \beta &= 1 + \nu_1^* \exp(2i\psi) + \nu_2^* \exp(-2i\psi), \\ \gamma &= 1 + \nu_1^* \exp(-2i\psi) + \nu_2^* \exp(2i\psi), \\ \nu_k &= \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_k), \\ \psi &= \frac{\pi}{3}, & \mathbf{r}_1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), & \mathbf{r}_2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

В данном случае матричные элементы вычисляются по атомным волновым функциям, принадлежащим единичному орбитальному моменту и различающимся знаком его проекции.

Таким образом, уравнения для нахождения энергетического спектра электронов в ненулевом магнитном поле имеют вид

$$\begin{aligned} E_+^a x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 0, \\ E_-^a x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 &= 0, \\ E_+^b x_3 + \alpha^* x_1 + \gamma^* x_2 &= 0, \\ E_-^b x_4 + \beta^* x_1 + \delta^* x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $E_\pm^a = E - \epsilon_a \mp H$ ,  $E_\pm^b = E - \epsilon_b \mp H$ . Влияние магнитного поля на орбитальное межъячеечное движение электронов определяется градиентным преобразованием фазы

$$\mathbf{q} \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (0, Hx, 0). \quad (38)$$

Дальнейшие преобразования сводятся к тому, чтобы выразить экспоненты от операторов дифференцирования в выражениях (36) для величин  $\nu_k$  через конечные сдвиги вдоль ортов элементарной ячейки.

Все эти преобразования представлены в Приложении.

В результате получим систему разностных уравнений с действительными коэффициентами (см. формулы (П.7)):

$$\begin{aligned} E_+^a x_1(n+1) + S_{n+1}(34) + 2x_3(n) \cos \theta_n + \\ + 2x_4(n) \cos \theta_n^+ = 0, \\ E_-^a x_2(n+1) + S_{n+1}(34) + 2x_4(n) \cos \theta_n + \\ + 2x_3(n) \cos \theta_n^- = 0, \\ E_+^b x_3(n) + S_n(12) + 2x_1(n+1) \cos \theta_n + \\ + 2x_2(n+1) \cos \theta_n^- = 0, \\ E_-^b x_4(n) + S_n(12) + 2x_2(n+1) \cos \theta_n + \\ + 2x_1(n+1) \cos \theta_n^+ = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_n = \frac{eH}{4c} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\varphi}{2}, \quad \theta_n^\pm = \theta_n \pm \frac{2\pi}{3}, \\ S_n(12) = x_1(n) + x_2(n), \\ S_n(34) = x_3(n) + x_4(n), \end{aligned} \tag{40}$$

где  $\varphi$  — произвольная фаза, имеющая смысл сохраняющегося квазиимпульса.

Для того чтобы преобразовать систему (39) к форме, использованной Хофштадтером, решим ее относительно  $x_{1,2}(1+n)$ , и  $x_{3,4}(n)$  при заданных  $S_n(12)$  и  $S_{n+1}(34)$ :

$$\begin{aligned} x_1(1+n) = -\frac{2}{3} E_+^b x_3(n) \cos \theta_n + \\ + \frac{2}{3} E_-^b x_4(n) \cos \theta_n^- + \\ + \frac{2}{3} S_n(12) [\cos \theta_n^- - \cos \theta_n], \\ x_2(1+n) = -\frac{2}{3} E_-^b x_4(n) \cos \theta_n + \\ + \frac{2}{3} E_+^b x_3(n) \cos \theta_n^+ + \\ + \frac{2}{3} S_n(12) [\cos \theta_n^+ - \cos \theta_n], \\ x_3(n) = -\frac{2}{3} E_+^a x_1(n+1) \cos \theta_n + \\ + \frac{2}{3} E_-^a x_2(n+1) \cos \theta_n^+ + \\ + \frac{2}{3} S_{n+1}(34) [\cos \theta_n^+ - \cos \theta_n], \\ x_4(n) = \frac{2}{3} E_+^a x_1(n+1) \cos \theta_n^- - \\ - \frac{2}{3} E_-^a x_2(n+1) \cos \theta_n + \\ + \frac{2}{3} S_{n+1}(34) [\cos \theta_n^- - \cos \theta_n]. \end{aligned} \tag{41}$$

Полученную систему уравнений решаем относительно  $x_{1,2}(1+n)$  и  $x_{3,4}(n)$ , после чего находим  $x_3(n) + x_4(n) = S_n(34)$  и тем самым связь между  $S_{n+1}(34)$  и  $S_n(34)$ ,  $S_n(12)$ :

$$\begin{aligned} S_{(1+n)}(12) = S_n(12) \frac{U_n(\theta_n)}{\Delta_n(\theta_n)} + \\ + S_{(1+n)}(34) \frac{W_{12}(\theta_n)}{\Delta_n(\theta_n)}, \\ S_{(1+n)}(34) = -S_n(12) \frac{W_{34}(\theta_n)}{U_n(\theta_n)} + \\ + S_n(34) \frac{\Delta_n(\theta_n)}{U_n(\theta_n)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} U_n(\theta_n) = -2 \cos \theta_n + \frac{2}{9} [(E_+^a E_+^b + E_-^a E_-^b) \cos \theta_n + \\ + E_+^a E_-^b \cos \theta_n^- + E_-^a E_+^b \cos \theta_n^+], \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} W_{12}(\theta_n) = \frac{4}{9} [E_+^b (\cos \theta_n - \cos \theta_n^+)^2 + \\ + E_-^b (\cos \theta_n - \cos \theta_n^-)^2] - \\ - \frac{1}{9} E_+^b E_-^b (E_+^a + E_-^a), \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} W_{34}(\theta_n) = \frac{4}{9} [E_+^a (\cos \theta_n - \cos \theta_n^-)^2 + \\ + E_-^a (\cos \theta_n - \cos \theta_n^+)^2] - \\ - \frac{1}{9} E_+^a E_-^a (E_+^b + E_-^b). \end{aligned}$$

Определитель системы (41) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\theta_n) = 1 - \frac{4}{9} [(E_+^a E_+^b + E_-^a E_-^b) \cos^2 \theta_n + \\ + E_+^a E_-^b \cos^2 \theta_n^- + E_-^a E_+^b \cos^2 \theta_n^+] + \\ + \frac{1}{9} E_+^a E_-^a E_+^b E_-^b. \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, мы получили систему двух рекуррентных уравнений:

$$\begin{pmatrix} S_{n+1}(12) \\ S_{n+1}(34) \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} S_n(12) \\ S_n(34) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \frac{U_n^2(\theta_n) - W_{12}(\theta_n)W_{34}(\theta_n)}{\Delta_n(\theta_n)U_n(\theta_n)} & \frac{W_{12}(\theta_n)}{U_n(\theta_n)} \\ -\frac{W_{34}(\theta_n)}{U_n(\theta_n)} & \frac{\Delta_n(\theta_n)}{U_n(\theta_n)} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что двумерная матрица  $\hat{R}$  имеет определитель, равный единице.



Непосредственное вычисление показывает, что выполняется следующее соотношение:

$$U_n^2(\theta_n) - W_{12}(\theta_n)W_{34}(\theta_n) = \Delta_n(\theta_n)V_n(\theta_n), \quad (47)$$

где

$$V_n(\theta_n) = 4 \cos^2 \theta_n - \frac{1}{9} (E_a^+ + E_a^-) (E_b^+ + E_b^-). \quad (48)$$

Отсюда заключаем, что матрица  $\hat{R}$  имеет вид

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} V_n(\theta_n)/U_n(\theta_n) & W_{12}(\theta_n)/U_n(\theta_n) \\ -W_{34}(\theta_n)/U_n(\theta_n) & \Delta_n(\theta_n)/U_n(\theta_n) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Полученная система имеет коэффициенты, периодически зависящие от числа квантов потока через элементарную ячейку. Уравнение для нахождения спектра возбуждений имеет канонический вид (18).

В предельном случае, когда собственным орбитальным моментом можно пренебречь, имеем  $E_{\pm}^{a,b} = E^{a,b}$ :

$$\begin{aligned} U_n(\theta_n) &\rightarrow u_n(\theta) = 2 \cos \theta_n \left[ -1 + \frac{1}{9} E_a E_b \right], \\ V_n(\theta_n) &\rightarrow v_n(\theta) = 4 \cos^2 \theta_n - \frac{4}{9} E_a E_b, \\ W_{12}(\theta_n) &\rightarrow w_{12}(\theta_n) = E_b w_n(\theta_n), \\ W_{34}(\theta_n) &\rightarrow w_{34}(\theta_n) = E_a w_n(\theta_n), \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$w_n(\theta_n) = \frac{2}{3} \left\{ [1 + 2 \cos^2 \theta_n] - \frac{1}{3} E^b E^a \right\}. \quad (51)$$

Далее можно провести масштабное преобразование  $S_{(n)}(12) = s_{(n)}(12)\sqrt{E_b}$ ,  $S_{(n)}(34) = s_{(n)}(34)\sqrt{E_a}$ . В результате элементы матрицы  $\hat{R}$  будут зависеть только от произведения  $E_a E_b$ :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} v_n(\theta_n)/u_n(\theta_n) & \frac{\sqrt{E_a E_b} w_n(\theta_n)}{u_n(\theta_n)} \\ -\frac{\sqrt{E_a E_b} w_n(\theta_n)}{u_n(\theta_n)} & \frac{\Upsilon_n(\theta_n)}{u_n(\theta_n)} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где

$$\Upsilon_n(\theta_n) = 1 - \frac{4}{9} E_a E_b \left[ \frac{3}{2} + \cos^2 \theta_n \right] + \frac{1}{9} (E_a E_b)^2. \quad (53)$$

Таким образом, в этом пределе дисперсионные уравнения достаточно исследовать в двух переменных  $F = E_a E_b$  и  $\theta$  с помощью общего соотношения (18). При этом энергия системы выражается через  $F$  и величину энергетического сдвига с помощью формулы  $E = \pm \sqrt{r^2 + F} + \mu$ .

#### 4.2. $p_z$ - и $s$ -электроны в решетке типа пчелиных сот

Предположим, что перескоки происходят между соседними атомами, каждый из которых имеет волновую функцию, не зависящую от координат  $x, y$ .

По этой причине уравнения для действительных амплитуд имеют следующий вид (см. (39)):

$$\begin{aligned} E_a x_1(n+1) + x_3(n+1) + 2x_3(n) \cos \theta_n &= 0, \\ E_b x_3(n) + x_1(n) + 2x_1(n+1) \cos \theta_n &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Отсюда сразу получим систему рекуррентных соотношений типа (49):

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = \hat{P} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}, \quad (55)$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2 \cos \theta_n} & -\frac{E_b}{2 \cos \theta_n} \\ \frac{E_a}{2 \cos \theta_n} & \frac{E_a E_b - 4 \cos^2 \theta_n}{2 \cos \theta_n} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что двумерная матрица преобразования, соответствующая системе (55), имеет определитель равный единице.

Наша задача существенно упрощается, если провести масштабное преобразование  $x_1 = y_1 \sqrt{E_b}$ ,  $x_3 = y_3 \sqrt{E_a}$ . В результате матрица  $\hat{P}$  будет зависеть только от произведений  $E_a E_b$ :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2 \cos \theta_n} & -\frac{\sqrt{E_a E_b}}{2 \cos \theta_n} \\ \frac{\sqrt{E_a E_b}}{2 \cos \theta_n} & \frac{E_a E_b - 4 \cos^2 \theta_n}{2 \cos \theta_n} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Так что дисперсионные уравнения можно исследовать в двух переменных  $F = E_a E_b$  и  $\theta$  с помощью общего соотношения (18). При этом энергия системы выражается через  $F$  и величину сдвига с помощью формулы  $E = \pm \sqrt{r^2 + F} + \mu$ .

В качестве примера приведем спектр возбуждений для случая  $eH/\hbar c = \pi$ :

$$\epsilon(\varphi, \omega) = \pm \sqrt{r^2 + 3 - 2 \cos \varphi \pm 4 \sin(\omega/2) \sin(\varphi/2)} - \mu.$$

Плотности состояний  $s$ - и  $p$ -электронов в сотовой решетке при  $m^* \ll m$  приведены на рис. 4 — видно, что они совпадают.

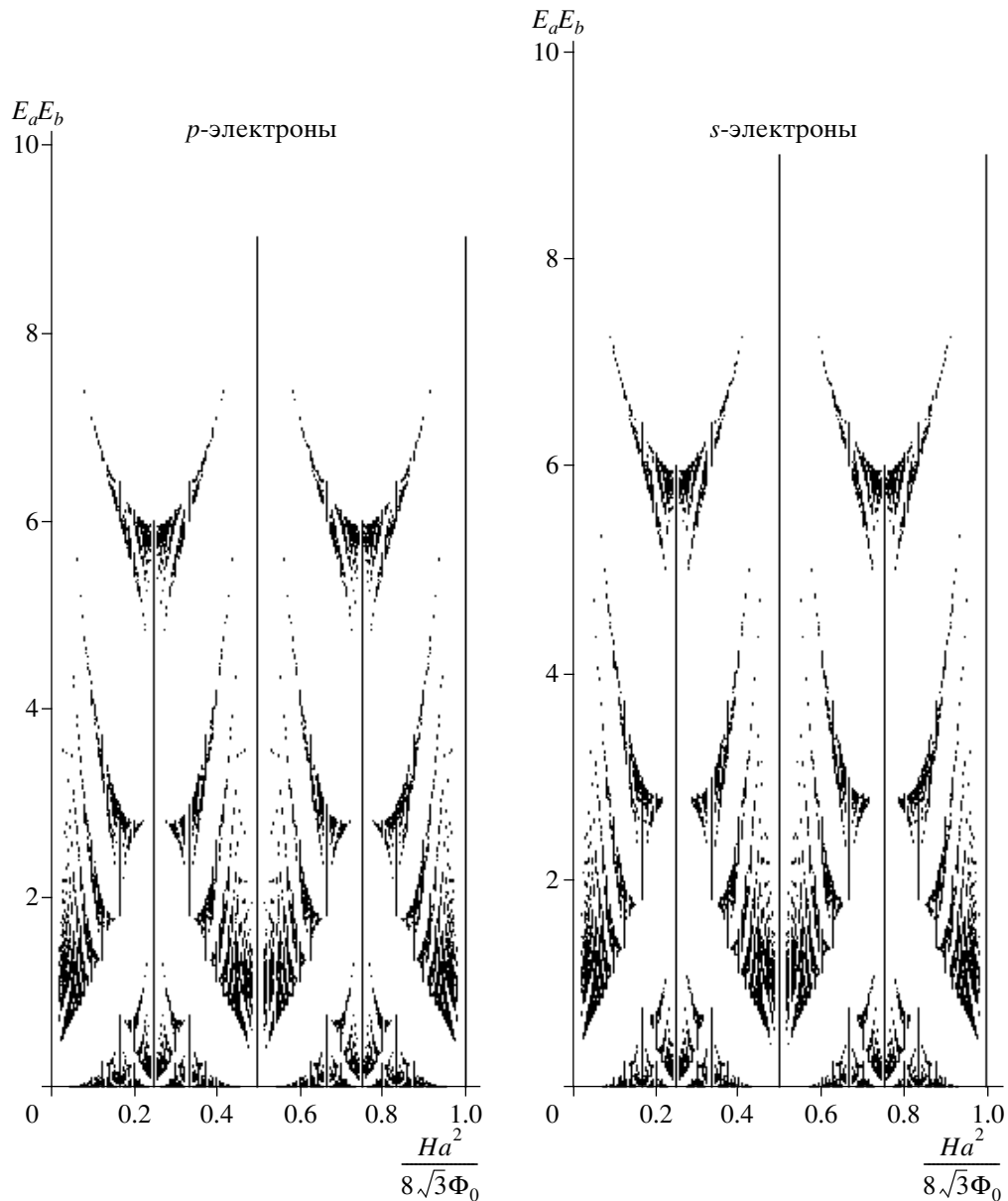


Рис. 4. Энергетические спектры  $p$ - и  $s$ -электронов в сотовой решетке при  $m^* \ll m$

### 5. ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В ПРЕДЕЛЕ МАЛЫХ ПОЛЕЙ

Как видно на рис. 1, 2, 4, в предельном случае  $H \rightarrow 0$  спектр возбуждений становится непрерывным, однако вычислению не поддается. По этой причине рассмотрим предельный случай с помощью обычной теории возмущений.

Для того чтобы провести вычисление орбитальной восприимчивости, используем фурье-разложение векторного потенциала, удовлетворяющего по-

перечной калибровке [11]

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = (A_x(q_y), 0, 0). \quad (57)$$

Далее находим первую токовую поправку при заданной форме поверхности Ферми  $\xi_{\mathbf{p}}$ , вычисленной при нулевом поле:

$$\begin{aligned} \langle j_x \rangle = & -2Te^2 \times \\ & \times \sum_{\omega, \mathbf{p}} \left[ v_s^2 G_{\omega} \left( \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) G_{\omega} \left( \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) + \xi_{xx}'' G_{\omega}(\mathbf{p}) \right] \times \\ & \times A_x(\mathbf{q}). \quad (58) \end{aligned}$$

Здесь  $G_\omega(\mathbf{p}) = (i\omega - \xi_{\mathbf{p}})^{-1}$  — термодинамическая гриновская функция, а  $v_s$  — симметризованный оператор скорости в направлении оси  $x$ :

$$v_s = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial p_x} \xi \left( \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial p_x} \xi \left( \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \right], \quad (59)$$

$$\mathbf{q} = (0, q_y, 0), \quad \xi''_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} \xi(\mathbf{p}).$$

Для нахождения орбитальной восприимчивости в однородном магнитном поле необходимо провести разложение подынтегральной функции по степеням волнового вектора  $\mathbf{q}$ . После интегрирования второго слагаемого по частям замечаем, что происходит сокращение первой суммы при  $\mathbf{q} = 0$ . Первое исчезающее слагаемое оказывается пропорциональным  $q_y^2$ , а соответствующий коэффициент перед  $A_x q_y^2$  как раз и есть орбитальная магнитная восприимчивость  $\chi$  [11]:

$$\chi(T) = \frac{e^2}{6} \sum \left\{ \left[ \frac{\partial v_x}{\partial p_x} \frac{\partial v_y}{\partial p_y} - \frac{\partial v_y}{\partial p_x} \frac{\partial v_x}{\partial p_y} \right] + \frac{3}{2} \left[ v_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial p_x^2} + v_y \frac{\partial^2 v_y}{\partial p_y^2} \right] \right\} n'_F(\xi_{\mathbf{p}}). \quad (60)$$

Здесь  $v_\alpha = \partial \xi / \partial p_\alpha$  — компоненты скорости, а суммирование по импульсам проводится в пределах первой зоны Бриллюэна.

При малой концентрации частиц или дырок, когда интегрирование проводится вблизи минимального или максимального значения на энергетической поверхности, величина тензора кривизны

$$\frac{\partial v_x}{\partial p_x} \frac{\partial v_y}{\partial p_y} - \frac{\partial v_y}{\partial p_x} \frac{\partial v_x}{\partial p_y} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial p_x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial p_y^2} - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial p_x \partial p_y} \right)^2 \quad (61)$$

оказывается положительной и сводится к произведению обратных масс. Так что во всех случаях кубической, треугольной и квадратной решеток соотношение (60) сводится к формуле диамагнетизма Ландау.

В точках сингулярности Ван Хова компоненты скорости обращаются в нуль, а тензор кривизны (61) оказывается отрицательным. По этой причине для энергии Ферми, которая пересекает сингулярные точки Ван Хова, восприимчивость оказывается положительной и при нулевой температуре обращается в бесконечность.

При конечной температуре имеем  $\chi \approx \ln(1/T)$  для двумерных решеток и  $\chi \approx \ln^2(1/T)$  для ОЦК-решетки.

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПОЛЯ

При конечном значении магнитного поля, когда число квантов потока через элементарную ячейку есть простая дробь  $N/K$ , происходит  $K$ -кратное увеличение размера элементарной ячейки, что соответствует такому же  $K$ -кратному уменьшению размера первой зоны Бриллюэна и превращению ее в подзону Бравэ–Зэка (см. подробную работу Зэка [9]).

А. Рассмотрим сначала случай  $N = 1$ .

Для квадратной и треугольной решеток  $s$ -электронов для каждого заданного  $K$  уравнения (18) дают точно  $K$  решений, каждое из которых зависит от двух квазиимпульсов  $\theta$  и  $\varphi$ .

В случае квадратной решетки  $p_x, p_y$ -электронов для каждого  $K$  из уравнений (15) находим  $2K$  решений. С увеличением магнитного поля происходит все более четкое разделение на зоны, относящиеся к верхнему и нижнему орбитальным дублетам. Однако при малой эффективной массе ( $m^* \ll m$ ) имеет место существенное перекрытие подзон, относящихся к разным проекциям собственного орбитального момента.

В случае сотовой решетки с двумя атомами в ячейке и для  $p_z$ -электронов имеется четкое разделение на верхнюю и нижнюю подгруппы состояний, каждая из которых содержит  $K$  подзон, возникающих как решения соответствующей системы уравнений (55).

В общем случае  $p_x, p_y$ -электронов в сотовой решетке расположение уровней снова определяется уравнениями типа Харпера (49). В данном случае имеются два независимых параметра — орбитальное расщепление, пропорциональное магнитному полю, и расщепление, связанное с электростатической разностью потенциалов в местах расположения различных атомов. Как следует из уравнений (49), для заданного числа  $m$  в данном случае имеется  $4K$  состояний, каждое из которых зависит от двух квазиимпульсов.

В. Случай  $N \neq 1$ .

Как показано в работе Дзялошинского [10], число  $N$  определяет степень вырождения каждого квантового состояния, вычисленного при заданном  $K$ . Это соображение позволяет качественно понять причины возникновения дробного эффекта Холла.

Значения кулоновских матричных элементов, вычисленных по волновым функциям типа Ванье, оказываются значительно большими, чем ширина отдельной магнитной подзоны. По этой причине

естественно предположить, что соответствующая энергия Хаббарда является бесконечной.

В этом приближении заполнение нижней магнитной подзоны происходит через так называемые концевые множители, которые равны сумме средних чисел заполнения начального и конечного состояний:  $f = n_0 + n_1$ .

Рассмотрим для простоты заполнение нижней подзоны  $s$ -электронов, которой соответствуют переходы из пустого на  $N$ -кратно вырожденное одночастичное состояние. При этом уравнение состояния выражается через произведение кратности вырождения на концевой множитель [12]:

$$n = Nf \sum_{\mathbf{q}} n_F(f\epsilon_1(\mathbf{q}) - \mu), \quad f = n_0 + n_1. \quad (62)$$

Здесь  $n$  — среднее число частиц, приходящееся на ячейку,  $n_0$  и  $n_1$  — средние числа заполнения пустых и одночастичных состояний,  $\epsilon_1(\mathbf{q})$  — решения уравнений Харпера для пустой квадратной или треугольной решетки, относящиеся к нижнему уровню, зависящему от двумерного квазиимпульса  $\mathbf{q}$ . В предельном случае бесконечной энергии Хаббарда величины  $n_0$  и  $n_1$  выражаются через кратность вырождения  $N$  и среднее число электронов  $n$  с помощью условия нормировки и определения  $n_1$  через кратность вырождения,

$$n_0 + Nn_1 = 1, \quad n_1 = \frac{n}{N}. \quad (63)$$

Удобно также заменить сумму по квазиимпульсам на интегралы по углам, которые соответствуют первой магнитной подзоне. В результате получим явный вид уравнения состояния

$$n = Nf(n) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} n_F [f(n)\epsilon_1(\alpha, \beta) - \mu] \frac{d\alpha d\beta}{(2\pi)^2}, \quad (64)$$

$$f(n) = 1 - n \frac{N-1}{N}.$$

Это уравнение удобно записать через плотность состояний. При  $T = 0$  имеем

$$n = \frac{NS}{1 + S(N-1)}, \quad S = \int^{\mu/f} \rho_1(E) dE, \quad (65)$$

$$\rho_1(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta [E - \epsilon_1(\alpha, \beta)] \frac{d\alpha d\beta}{(2\pi)^2}.$$

Значения возникающих энергетических щелей определяются соответствующими кулоновскими матричными элементами. Однако энергетическое расположение этих щелей совпадает с энергетическим расположением особенностей Ван Хова внутри каждой

разрешенной магнитной подзоны. При заданном конечном поле положение каждой корреляционной щели определяется условием прохождения поверхности Ферми через одну или несколько эквивалентных точек Ван Хова.

При этом положение каждой такой точки можно определить, анализируя соответствующие уравнения движения (12), (31), (46), (49).

Можно показать, что для квадратной решетки уравнения Харпера определяют единственную поверхность Ван Хова, для которой при  $T = 0$  получаем дробные значения  $S = S_1 = 1/2$ .

Для треугольной решетки уравнения Харпера дают только две поверхности Ван Хова, для которых при  $T = 0$  имеем  $S = S_1 = 1/4$  или  $S = S_2 = 3/4$ .

В точках особенностей Ван Хова плотность состояний обращается в бесконечность. Соответственно этому при  $T = 0$  в этих точках обращаются в бесконечность восприимчивость и проводимость. Однако уже при небольшом повышении температуры эти особенности исчезают.

Таким образом, при  $T = 0$  получаем серии критических особенностей. Для квадратной решетки

$$n_{c1} = \frac{N}{1+N} \quad \text{или} \quad \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad (66)$$

Для треугольной решетки необходимо различать случаи четного и нечетного чисел уровней, т. е. случаи с четным и нечетным числом  $K$ .

В случае четного  $K$  имеет место парное перекрытие, т. е. в пределе больших  $K = 2M$  можно видеть  $M = K/2$  узких подзон. Отсюда заключаем, что в этом случае кратность вырождения каждого уровня удваивается, т. е. в уравнении состояния (65) число  $N$  принимает только четные значения.

В случае нечетного  $K$  число подзон совпадает с самим числом  $K$ . Поэтому кратность вырождения каждого состояния совпадает с числом  $N$ , которое в данном случае пробегает весь ряд целочисленных значений.

Таким образом, в случае треугольной решетки имеем две серии критических значений:

$$n_{c1} = \frac{N}{3+N} \quad \text{или} \quad n_{c2} = \frac{3N}{1+3N}. \quad (67)$$

В случае четных  $K$  числа  $N$  — четные:  $N = 2, 4, 6, \dots$ . В случае нечетных  $K$  числа  $N$  — любые целые:  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

В случае квадратной и сотовой решеток для  $p$ -электронов можно также получить разнообразные серии критических значений, которые отвечают ван-хововским поверхностям Ферми, что заслуживает отдельного рассмотрения.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Переход к уравнениям Харпера**

Для того чтобы выделить влияние операторов сдвига

$$\exp\left(\pm i\frac{\sqrt{3}}{2\hbar}\hat{p}_x\right)\Psi(x,y) = \Psi\left(x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, y\right), \quad (\text{П.1})$$

$$\exp\left(\pm i\frac{1}{2\hbar}\hat{p}_x\right)\Psi(x,y) = \Psi\left(x, y \mp \frac{1}{2}\right),$$

используем общую формулу, которая справедлива при условии, что  $[\hat{A}, \hat{B}]$  не является оператором:

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp \hat{A} \exp \hat{B} \times \exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right). \quad (\text{П.2})$$

В результате получим следующие четыре соотношения:

$$\begin{aligned} \nu_1^* \Psi(x,y) &= \exp\left\{-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c} + \frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right\} \Psi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(n_1-1), \frac{1}{2}(n_2+1)\right) = \\ &= \exp\left\{-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c} + \frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right\} \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}_2) = \exp\left\{\frac{ieH\sqrt{3}(n_1-1/2)}{4c}\right\} \psi(n_1-1, n_2). \end{aligned} \quad (\text{П.3a})$$

Здесь и ниже используются соотношения, записанные в согласии с рис. 3:  $x = n_1\sqrt{3}/2$ ,  $y = n_2 - n_1/2$ :

$$\begin{aligned} \nu_2^* \Psi(x,y) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{2c}Hx\right)\right) \Psi(x,y) = \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{2c}Hx\right)\right) \Psi\left(x, y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{ieHx^2}{2c\sqrt{3}}\right) \exp\left(\frac{ieH(x-\sqrt{3}/2)^2}{2c\sqrt{3}}\right) \Psi\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieHx}{2c}\right) \Psi\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieHx}{2c}\right) \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}_1) = \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}(n_1-1/2)}{4c}\right) \psi(n_1-1, n_2-1), \end{aligned} \quad (\text{П.3б})$$

$$\begin{aligned} \nu_1 \Psi(x,y) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{2c}Hx\right)\right) \Psi(x,y) = \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{2c}Hx\right)\right) \Psi\left(x, y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{ieHx^2}{2c\sqrt{3}}\right) \exp\left(-\frac{ieH(x+\sqrt{3}/2)^2}{2c\sqrt{3}}\right) \Psi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieHx}{2c}\right) \Psi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{1}{2}\right) = \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}(n_1+1/2)}{4c}\right) \psi(n_1+1, n_2), \end{aligned} \quad (\text{П.3в})$$

$$\begin{aligned}
\nu_2 \Psi(x, y) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} i \hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} i \hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{2c} H x\right)\right) \Psi(x, y) = \\
&= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} i \hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{2c} H x\right)\right) \Psi\left(x, y + \frac{1}{2}\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{i e H x^2}{2c\sqrt{3}}\right) \exp\left(\frac{i e H (x + \sqrt{3}/2)^2}{2c\sqrt{3}}\right) \Psi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{1}{2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H x}{2c}\right) \Psi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{1}{2}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H x}{2c}\right) \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}_1) = \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} (n_1 + 1/2)}{4c}\right) \psi(n_1 + 1, n_2 + 1). \quad (\text{П.3г})
\end{aligned}$$

Таким образом, нам удастся преобразовать уравнения (37) к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned}
E_+^a x_1(n_1, n_2) + x_3(n_1, n_2) + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_3(n_1 - 1, n_2) + \\
+ \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_3(n_1 - 1, n_2 - 1) + x_4(n_1, n_2) + \\
+ \exp(2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_4(n_1 - 1, n_2) + \\
+ \exp(-2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_4(n_1 - 1, n_2 - 1) = 0, \quad (\text{П.4а})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_-^a x_2(n_1, n_2) + x_3(n_1, n_2) + \exp(-2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_3(n_1 - 1, n_2) + \\
+ \exp(2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_3(n_1 - 1, n_2 - 1) + x_4(n_1, n_2) + \\
+ \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_4(n_1 - 1, n_2) + \\
+ \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_4(n_1 - 1, n_2 - 1) = 0, \quad (\text{П.4б})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_+^b x_3(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2) + \exp(2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_2(n_1 + 1, n_2) + \\
+ \exp(-2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_2(n_1 + 1, n_2 + 1) + x_1(n_1, n_2) + \\
+ \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_1(n_1 + 1, n_2) + \\
+ \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{i e H \sqrt{3} n_1}{4c}\right) x_1(n_1 + 1, n_2 + 1) = 0, \quad (\text{П.4в})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_-^b x_4(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2) + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) x_2(n_1 + 1, n_2) + \\
 + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) x_2(n_1 + 1, n_2 + 1) + x_1(n_1, n_2) + \\
 + \exp(-2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) x_1(n_1 + 1, n_2) + \\
 + \exp(2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) x_1(n_1 + 1, n_2 + 1) = 0. \quad (\text{II.4г})
 \end{aligned}$$

Во всех этих уравнениях проведем замену

$$x_k(n_1, n_2) \rightarrow \exp(i\alpha n_2 - i\alpha n_1/2) x_k(n_1, n_2). \quad (\text{II.5})$$

В результате имеем систему разностных уравнений, не содержащих зависимости от второго аргумента:

$$\begin{aligned}
 E_+^a x_1(n_1) + x_3(n_1) + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_3(n_1 - 1) + \\
 + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_3(n_1 - 1) + x_4(n_1) + \exp(2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \times \\
 \times \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_4(n_1 - 1) + \exp(-2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \times \\
 \times \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_4(n_1 - 1) = 0, \quad (\text{II.6a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_-^a x_2(n_1) + x_4(n_1) + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_4(n_1 - 1) + \\
 + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_4(n_1 - 1) + x_3(n_1) + \\
 + \exp(-2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_3(n_1 - 1) + \\
 + \exp(2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_3(n_1 - 1) = 0, \quad (\text{II.6б})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_+^b x_3(n_1) + x_1(n_1) + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_1(n_1 + 1) + \\
 + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_1(n_1 + 1) + \\
 + x_2(n_1) + \exp(2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_2(n_1 + 1) + \\
 + \exp(-2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_2(n_1 + 1) = 0, \quad (\text{II.6в})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_-^b x_4(n_1) + x_2(n_1) + \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_2(n_1+1) + \\
& \quad + \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_2(n_1+1) + \\
& \quad + x_1(n_1) + \exp(-2i\varphi) \exp\left(\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(-\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\right) x_1(n_1+1) + \\
& \quad + \exp(2i\varphi) \exp\left(-\frac{i\sqrt{3}eH}{8c}\right) \exp\left(\frac{ieH\sqrt{3}n_1}{4c}\right) \exp\left(\frac{i\alpha}{2}\right) x_1(n_1+1) = 0. \quad (\text{П.6г})
\end{aligned}$$

Запишем полученные уравнения в форме, использованной Хофштадтером. Для этого в уравнениях (П.6) проведем замену  $n_1 \rightarrow n$  и перейдем к действительным коэффициентам:

$$\begin{aligned}
& E_+^a x_1(n+1) + x_3(n+1) + x_4(n+1) + 2x_3(n) \cos \theta_n + 2x_4(n) \cos \theta_n^+ = 0, \\
& E_-^a x_2(n+1) + x_3(n+1) + x_4(n+1) + 2x_4(n) \cos \theta_n + 2x_3(n) \cos \theta_n^- = 0, \\
& E_+^b x_3(n) + x_1(n) + x_2(n) + 2x_1(n+1) \cos \theta_n + 2x_2(n+1) \cos \theta_n^- = 0, \\
& E_-^b x_4(n) + x_1(n) + x_2(n) + 2x_2(n+1) \cos \theta_n + 2x_1(n+1) \cos \theta_n^+ = 0.
\end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Harper, Proc. Phys. Soc. London A **68**, 874 (1955).
2. D. R. Hofstadter, Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976).
3. В. Я. Демиховский, А. А. Перов, ЖЭТФ **87**, 7355 (1992).
4. В. Я. Демиховский, Д. В. Хомицкий, ЖЭТФ **120**, 191 (2001).
5. U. Kuhl and H.-J. U. Stockman, Phys. Rev. Lett. **80**, 3232 (1998).
6. T. Schlosser et al., Europhys. Lett. **33**, 683 (1996).
7. R. R. Gerhardtts, D. Weiss, and U. Wulf, Phys. Rev. B **43**, 5192 (1991).
8. D. Weiss, M. L. Roukes, A. Menshing et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 27 (1991).
9. J. Zak, Phys. Rev. A **3**, 776 (1964).
10. I. E. Dzaloschinski, Phys. Rev. B **65**, 205325 (2002).
11. G. Wentzel, Phys. Rev. **108**, 1593 (1957).
12. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **112**, 2223 (1997).