

ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ В ГАЛАКТИКАХ И РОСТ ГИГАНТСКИХ ЧЕРНЫХ ДЫР

А. С. Ильин, К. П. Зыбин, А. В. Гуревич*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 апреля 2003 г.

Исследуется вопрос о связи темной материи с гигантскими черными дырами в ядрах галактик. Рассматривается совместная эволюция темной и барионной материи под влиянием усредненного самосогласованного гравитационного поля. Показано, что распределение темной материи сохраняет сферически-симметричный вид даже при заметной асимметрии в распределении барионного вещества галактики. Выведено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения темной материи с учетом гравитационного рассеяния на звездах. Показано, что в этих условиях возникает значительный поток темной материи на затравочную черную дыру, находящуюся в центре галактики. Установлен закон роста затравочной черной дыры за счет поглощения темной материи. Показано, что за время существования галактики происходит значительный рост затравочной черной дыры до масштабов 10^7 – $10^8 M_\odot$. Проведен краткий анализ наблюдательных данных и установлено, что представленная теория находится в разумном соответствии с экспериментом.

PACS: 98.10.+z

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие техники и использование новых методов астрофизических наблюдений (кинематика газа, кинематика мазерных источников, эокартирование, кинематика звезд) привели в последние годы к достоверному обнаружению большого числа (более 80) гигантских черных дыр [1, 2] с массами, изменяющимися в пределах $(2 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^9) M_\odot$ ($M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г — масса Солнца). Распределение масс представлено на рис. 1. Анализ данных наблюдений позволил указать на наличие связи между массой гигантской черной дыры, находящейся в центре галактики, и массой балджа¹⁾. Скорость общего вращения звезд в балдже обычно существенно меньше характерной дисперсии скоростей σ , поэтому форма балджа не слишком сильно отличается от сферической и плотность числа звезд в нем быстро нарастает к центру галактики. Характерный радиус балджа r_b увеличивается с массой галактики: в наблюдаемых галактиках $r_b \sim 1$ –30 кпк. Масса ги-

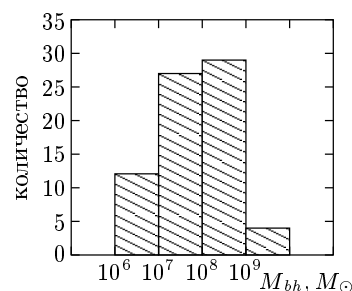


Рис. 1. Распределение масс гигантских черных дыр (по данным [1])

гантских черных дыр M_{bh} примерно на три порядка меньше массы балджа хозяйских галактик.

Согласно современным представлениям, основную часть вещества во Вселенной составляет бездиссипативная темная материя. Именно в темной материи нарастают флуктуации плотности, которые на нелинейной стадии образуют крупномасштабный гравитационно-связанный объект — гало галактик. Важным свойством такого гало является сингулярное распределение плотности в его центре [3]. Барионная материя, захваченная гравитационным по-

*E-mail: asi@lpi.ru

¹⁾ Балдж — наиболее плотная центральная область галактики, состоящая преимущественно из старых звезд.

лем гало, постепенно оседает к центру и образует галактики. Наличие особенности в распределении темной материи приводит к возможности образования в центре будущей галактики в процессе сжатия барионного газа первичной черной дыры [4] массой порядка $10^3 M_{\odot}$. В дальнейшем затравочная черная дыра интенсивно растет за счет натекания из балджа как барионной, так и темной материи. Настоящая работа посвящена исследованию вопроса об эволюции темной материи и ее поглощении черной дырой в центре галактики.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе рассмотрено распределение темной материи в галактике и ее эволюция под влиянием усредненного самосогласованного гравитационного поля барионной материи, опускающейся вследствие энергетических потерь в центральную область галактики и образующей балдж. Задача решается в адиабатическом приближении в предположении сферической симметрии барионного вещества.

В третьем разделе проанализирована роль отклонений от сферической симметрии. Показано, что распределение темной материи, адиабатически сжимающейся под влиянием совместного крупномасштабного самосогласованного поля барионной и темной материи, сохраняет сферически-симметричный вид даже при заметной асимметрии в распределении барионного вещества.

В четвертом разделе исследован рост затравочной черной дыры в центре галактики за счет прямого захвата частиц темной материи, движущихся в усредненном самосогласованном гравитационном потенциале. Показано, что данный механизм мало эффективен в реальных условиях и не может привести к сколько-нибудь заметному увеличению массы затравочной черной дыры.

В пятом и шестом разделах исследуется эволюция функции распределения темной материи при нарушении условия адиабатичности. Основным процессом такого рода является гравитационное рассеяние частиц при столкновениях со звездами в балдже. Важная особенность этого процесса состоит в том, что длина свободного пробега частиц много больше характерного размера балджа, поэтому столкновения редки. С учетом этой особенности в пятом разделе выведено выражение для интеграла столкновений, усредненного по осцилляциям частиц темной материи, захваченных в самосогласованном гравитационном поле, и получено кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения темной материи. Показано, что в силу особенности начальной функции распределения

главную роль здесь играет диффузия в пространстве моментов.

В шестом разделе получено решение диффузионного уравнения, определен поток темной материи на черную дыру и установлен закон ее роста.

И, наконец, в заключительном седьмом разделе проведен краткий анализ наблюдательных данных, показывающий, что рост гигантских черных дыр за счет поглощения темной материи является значительным.

В целом можно утверждать, что представленная здесь теория находится в разумном соответствии с существующими данными наблюдений гигантских черных дыр. Дальнейшее развитие теории и наблюдений, а также их детальное сопоставление несомненно представляют значительный интерес.

2. ВЛИЯНИЕ БАРИОННОЙ МАТЕРИИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ В ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ГАЛАКТИКИ

Бездиссипативное темное вещество играет определяющую роль в формировании крупномасштабной структуры Вселенной — галактик, скоплений галактик, сверхскоплений. Эволюция малых неоднородностей в начальном распределении темной материи на нелинейной стадии приводит к гравитационному сжатию темного вещества и образованию первичных особенностей плотности ρ , после прохождения которых в бесстолкновительном газе темной материи развивается многопотокное течение. Согласно аналитической теории, разработанной Гуревичем и Зыбиным [5], при весьма общих предположениях о форме начального возмущения со временем развитие осцилляций потоков приводит к кинетическому размешиванию темного вещества и образованию устойчивых сферически-симметричных самозахваченных объектов, имеющих в центре сингулярное распределение плотности

$$\rho = Kr^{-\xi}, \quad \xi = 12/7. \quad (1)$$

Несмотря на то что в аналитическом виде этот результат был получен сравнительно давно, в численных расчетах длительное время получались лишь плоские нелинейные структуры. Только использование специальных методов счета, сводящихся, фактически, к выделению отдельных максимумов плотности, позволило также продемонстрировать существование устойчивых сферически-симметричных ступок [6]. Дальнейшее усовершенствование методов вычислений дало

возможность выделить в центральной области сгустка сингулярное распределение плотности с параметром сингулярности ξ близким к (1) [7]. Таким образом, можно считать, что к настоящему времени численное моделирование практически полностью подтвердило результаты аналитической теории.

Следуя [5], рассмотрим отдельное локальное возмущение плотности темного вещества $\rho(\mathbf{r})$, имеющее вблизи максимума $\mathbf{r} = 0$ вид

$$\rho_{t=0} = \rho_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad a \geq b \geq c. \quad (2)$$

Развитие джинсовской неустойчивости и последующее кинетическое размешивание темного вещества приводит к образованию бездиссипативной гравитационной сингулярности (БГС) с законом скейлинга (1) и сферически-симметричной стационарной функцией распределения

$$f(E, m) = f_0 I_R^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 I_R^2), \quad (3)$$

где

$$I_R(E, m) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \left(E - \psi(r) - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{1/2}$$

— радиальное действие, m — абсолютная величина углового момента, $E = v^2/2 + \psi(r)$ — энергия, $\psi(r) \propto r^{2/7}$ — потенциал БГС, r_{\pm} — точки поворота частиц темной материи, f_0 и l_0 — константы, зависящие от масштаба и формы начального возмущения. В частности,

$$l_0 = 0.16\epsilon \quad (4)$$

где

$$\epsilon = (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_1\epsilon_2)^{1/2}, \quad \epsilon_1 = (a-b)/a, \quad \epsilon_2 = (a-c)/a$$

— параметры эллиптичности вблизи максимума начальной плотности (2). Если предположить, что в общем случае параметры $\epsilon_{1,2}$ являются случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$, то среднее значение $\langle \epsilon \rangle = \sqrt{5/12}$, откуда

$$\langle l_0 \rangle \approx 0.1. \quad (5)$$

Таким образом, как следует из (3) и (4), после формирования БГС моменты частиц темной материи m в центральной области оказываются малы и пропорциональны радиальному действию I_R , а их орбиты сильно вытянуты в направлении центра БГС.

Рассмотрим теперь влияние барионной компоненты на структуру функции распределения (3). Благодаря высвечиванию энергии при неупругих соударениях барионная материя постепенно опускается на дно потенциальных ям, создаваемых холодной темной материей, и образует галактики, при этом темное вещество образует гигантское гало галактик. Наличие у галактик гало темной материи подтверждается кривыми вращения [8]. Другие примеры подобных объектов — скопления галактик. Наличие гало темной материи проявляет себя здесь гравитационным удерживанием большого количества горячего газа [9].

Как следует из (1), масса темной материи, сосредоточенная в центральной области БГС, стремится к нулю с уменьшением размера этой области как $r^{9/7}$. Поэтому, несмотря на то, что общая доля барионного вещества мала, в процессе остывания и оседания в центр БГС его концентрация в центральной области сильно возрастает. Это, в свою очередь, может существенно повлиять на полный гравитационный потенциал Ψ , создаваемый совместно темной ψ_d и барионной ψ_b материей и, тем самым, изменить зависимость (1).

В этом разделе мы будем считать распределение барионной компоненты сферически-симметричным,

$$\psi_b = \psi_b(r).$$

Характерный масштаб r_c , на котором следует ожидать отклонения от универсального закона (1) вследствие влияния барионов, определяется соотношением $M_b(r_c) \geq M_d(r_c)$, где M_b — масса барионного вещества, а M_d — масса темного вещества. Как правило, в балдже это неравенство выполняется.

Основная особенность рассматриваемого процесса состоит в том, что частицы барионной материи теряют свою энергию медленно — за время, сравнимое со временем жизни Вселенной. В течение этого времени частицы темной материи, захваченные гравитационным полем в центральной части гало, успевают многократно проосциллировать. Таким образом, процесс изменения полного самосогласованного потенциала Ψ происходит адиабатически медленно. В этих условиях, как известно [10], радиальное действие становится интегралом движения (адиабатическим инвариантом). Так как начальная функция распределения зависит только от интегралов движения I_R и m , она сохранит свой вид (3) как функция радиального действия и момента на протяжении всей медленной эволюции полного потенциала от $\Psi = \psi_d$ до $\Psi = \psi_d + \psi_b$.

Для определения пространственной плотности темной материи в поле $\Psi(r, t)$ от переменных I_R и m удобно перейти к переменным E и m , используя соотношение

$$I_R(E, m, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \left(E - \Psi(r, t) - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

В силу явной зависимости радиального действия от времени в (6), функция распределения частиц темной материи, выраженная через энергию и момент, $f(E, m, t)$, также будет зависеть от времени. Пространственная плотность темной материи при этом определяется соотношением

$$\rho(r, t) = \frac{\sqrt{2}\pi}{r^2} \int_0^\infty dm^2 \int_\Omega dE f(E, m, t) \times \left(E - \Psi(r, t) - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{-1/2}, \quad (7)$$

где Ω — интервал энергий, в котором выполняется неравенство

$$E - \Psi(r, t) - m^2/2r^2 \geq 0.$$

В дальнейшем нас будет интересовать область пространства $r < r_c$, где в первом приближении влиянием темной массы на полный потенциал можно пренебречь и положить $\Psi = \psi_b$. Для простоты ограничимся случаем, когда в конечном состоянии барионная масса и потенциал имеют степенную зависимость от r :

$$M_b(r) \propto r^n, \quad \psi_b \propto r^{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (8)$$

Радиальное действие (6) можно тогда представить в факторизованном виде:

$$I_R = I_0(r_+) C(\mu), \quad (9)$$

где

$$I_0 = G^{1/2} M_b^{1/2}(r_+) r_+^{1/2}, \quad \mu = \frac{m}{I_0},$$

$$C(\mu) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\beta_-}^1 d\beta \left(\int_{\beta}^1 \alpha^{n-2} d\alpha - \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \right)^{1/2},$$

$$\beta_- = \beta_-(\mu) = \frac{r_-}{r_+}$$

G — гравитационная постоянная.

Пользуясь этими соотношениями и проводя в (7) замену переменных $E, m \mapsto r_+, \mu$, пространственную плотность темной материи можно также представить в степенном виде:

$$\rho_d = K' r^{\frac{9}{16}n - \frac{39}{16}}. \quad (10)$$

Важно, что как и в отсутствие барионной компоненты показатель степени в (10) не зависит от параметров f_0 и l_0 начального возмущения.

Из (10) и (1) следует, что при $n = 9/7$ плотности барионной и темной компонент изменяются по одинаковому закону $r^{-12/7}$. В случае изотермического распределения барионной материи $\rho_b \propto r^{-2}$ и $n = 1$. Из (10) тогда следует, что плотность темной материи нарастает при $r \rightarrow 0$ как $r^{-15/8}$, т. е. несколько слабее барионной. Максимального сжатия темного вещества следует ожидать при $n = 0$, когда в центре БГС образуется компактный массивный барионный объект. Распределение темной материи в его окрестности имеет вид

$$\rho_d \propto r^{-39/16}. \quad (11)$$

Заметим, однако, что в случае, когда таким объектом служит черная дыра, закон (11) будет нарушаться вследствие захвата частиц темной материи черной дырой. Подробнее этот вопрос рассмотрен в шестом разделе.

3. ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ БАРИОННОГО ВЕЩЕСТВА НА ФУНКЦИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Распределение барионной компоненты предполагалось ранее сферически-симметричным. Это ограничение могло бы в действительности оказаться весьма сильным. В самом деле, барионный потенциал обычно содержит малую сферически-несимметричную часть (связанную, например, с асимметрией в распределении барионного вещества в балдже эллиптических и спиральных галактик), а при движении в несимметричном потенциале моменты частиц темного вещества, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому на первый взгляд даже малая несимметричная добавка в потенциал может за время, много большее характерного периода осцилляций частиц темной материи, существенно изменить их моменты, изменив тем самым и вид функции распределения (3). Однако в действительности при малой асимметрии и медленном изменении потенциала эволюция радиального действия I_R , модуля момента m и проекции момента m_z заключается лишь в малых осцилляциях этих величин вокруг начальных значений, а их средние значения при этом практически не меняются.

Доказательством этого утверждения является обобщение известной теоремы об адиабатической инвариантности переменных действия [10]. Бесстолкновительное движение частиц темной материи в сферически-симметричном, не зависящем от времени потенциале Ψ_0 описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H_0, f\} = 0, \quad (12)$$

где

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} + \Psi_0$$

— функция Гамильтона,

$$p_r = v_r, \quad p_\theta = \left(m^2 - \frac{m_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2}, \quad p_\varphi = m_z$$

— канонические импульсы, а $\{, \}$ — скобка Пуассона. Совершим далее каноническое преобразование к переменным действие—угол. Пользуясь произволом, который всегда имеется в построении этих переменных [11], выберем в качестве переменных действия I_R, m и m_z . С помощью производящей функции

$$S(x, I) = \sqrt{2} \int dr \left(E(I, m) - \Psi_0 - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{1/2} + \int d\theta \left(m^2 - \frac{m_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} + m_z \varphi \quad (13)$$

соответствующие угловые переменные ϕ определяются стандартным образом:

$$\phi_k = \frac{\partial S(x, I)}{\partial I_k}. \quad (14)$$

(Здесь и далее буквой x мы обозначаем совокупность сферических координат r, θ, φ , буквой I — совокупность переменных действия $\{I_k\} = \{I_R, m, m_z\}$, а буквой ϕ — совокупность угловых переменных.) Выражая энергию E через переменные действия и дифференцируя ее по I_k , получим частоты $\omega_k(I) = \partial E / \partial I_k$, соответствующие невозмущенному движению в не зависящем от времени сферически-симметричном потенциале. При этом из-за отсутствия явной зависимости E от m_z частота ω_z тождественно равна нулю. Благодаря этому движение частицы вырождено по одной координате и происходит в плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса. Кинетическое уравнение в новых переменных будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial f}{\partial \phi_k} = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь возмущенный потенциал Ψ , отличающийся от Ψ_0 наличием малого несимметричного слагаемого $\varepsilon \Psi_1$. Мы будем предполагать также, что потенциал явно зависит от «медленного» времени $t_1 = \varepsilon t$:

$$\Psi = \Psi_0(r, t_1) + \varepsilon \Psi_1(r, \theta, \varphi, t_1).$$

Возмущенное кинетическое уравнение теперь можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial f}{\partial \phi_k} = \varepsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \phi_k} \frac{\partial f}{\partial I_k} - \frac{\partial H_1}{\partial I_k} \frac{\partial f}{\partial \phi_k} \right), \quad (16)$$

где H_1 определяется в соответствии с общими правилами [10]:

$$H_1(I, \phi, t_1) = \Psi_1(x, t_1) + \frac{\partial S(x, I, t_1)}{\partial t_1}.$$

Уравнение (16) будем решать модифицированным методом теории возмущений, который позволяет избежать появления секулярных членов. Идея метода заключается в том, чтобы представить функцию f в виде ряда последовательных приближений:

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots,$$

формально считая, что f_k являются функциями многих времен:

$$f_k = f_k(I, \phi, t_0, t_1, t_2, \dots),$$

где

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

В соответствии с этим оператор $\partial / \partial t$ также представится в виде ряда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots$$

Из уравнения нулевого приближения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_0}{\partial \phi_k} = 0$$

и независимости начальной функции (3) от угловых переменных ϕ и третьей переменной действия m_z следует, что f_0 также не зависит от ϕ , m_z и «быстрого» времени t_0 :

$$f_0 = f_0(I_R, m, t_1, \dots).$$

Уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_1} + \frac{\partial f_1}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_1}{\partial \phi_k} = \frac{\partial H_1}{\partial \phi_k} \frac{\partial f_0}{\partial I_k}.$$

Усредняя его по угловым переменным ϕ и быстрому времени t_0 с помощью операций

$$\langle \dots \rangle_\phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\phi \dots,$$

$$\langle \dots \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 \dots,$$

получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_1}{\partial \phi_k} = \frac{\partial H_1}{\partial \phi_k} \frac{\partial f_0}{\partial I_k}.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $f_1 = 0$ при $t = 0$ легко найти методом характеристик:

$$f_1 = \int_0^{t_0} dt'_0 \frac{\partial H_1(I, \phi - \omega t'_0, t_1)}{\partial \phi_k} \frac{\partial f_0}{\partial I_k}. \quad (17)$$

Заметим, что равенство

$$\frac{\partial f_0}{\partial I_3} = \frac{\partial f_0}{\partial m_z} = 0$$

обеспечивает ограниченность решения (17) несмотря на равенство нулю частоты ω_3 . Уравнение второго приближения запишем в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_2} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f_2}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_2}{\partial \phi_k} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \phi_k} f_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \phi_k} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I_k} f_1 \right),$$

откуда после усреднения по t_0 , t_1 и ϕ получим уравнение «диффузии» вида

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial I_k} \bar{R}_{kp}(I) \frac{\partial}{\partial I_p} f_0, \quad (18)$$

где коэффициенты диффузии имеют вид

$$\bar{R}_{kp}(I) =$$

$$= \left\langle \int_0^{t_0} dt'_0 \frac{\partial H_1(I, \phi, t_1)}{\partial \phi_k} \frac{\partial H_1(I, \phi - \omega t'_0, t_1)}{\partial \phi_p} \right\rangle_{\phi, t_0, t_1}. \quad (19)$$

Заметим теперь, что гамильтониан H_1 является 2π -периодической функцией угловых переменных ϕ , поэтому его можно разложить в кратный ряд Фурье:

$$H_1(I, \phi, t_1) = \sum_n h_n(I, t_1) e^{in\phi}, \quad (20)$$

где

$$n \equiv \{n_1, n_2, n_3\}, \quad n\phi \equiv n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\phi_3.$$

Подставляя эти разложения в (19), после усреднения по ϕ получим

$$\langle R_{kp} \rangle_\phi = \sum_n n_k n_p h_n h_{-n} \int_0^{t_0} dt'_0 \exp(-in\omega t'_0).$$

Далее мы будем предполагать, что частоты $\omega_k(I)$ независимы в том смысле, что равенство

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$$

влечет за собой $n_{1,2} = 0$. (Множество переменных I , для которых это условие не выполняется, имеет нулевую меру.) Тогда интегрирование по t'_0 дает

$$\langle R_{kp} \rangle_\phi = \sum_{n_{1,2} \neq 0} n_k n_p h_n h_{-n} \frac{1}{in\omega} (1 - \exp(-in\omega t_0)) +$$

$$+ \sum_{n_{1,2} = 0} n_k n_p h_n h_{-n} t_0.$$

Это выражение содержит секулярный член

$$\sum_{n_{1,2} = 0} n_k n_p h_n h_{-n} t_0,$$

однако он дает вклад только в R_{33} и поэтому в силу независимости f_0 от $I_3 = m_z$ может быть отброшен. Тогда

$$\langle R_{kp} \rangle_\phi = \sum_{n_{1,2} \neq 0} n_k n_p h_n h_{-n} \frac{1}{in\omega} (1 - \exp(-in\omega t_0)) =$$

$$= - \sum_{n_{1,2} \neq 0} n_k n_p h_n h_{-n} \frac{1}{in\omega} \exp(-in\omega t_0).$$

Усредняя теперь это равенство по t_0 , окончательно получим

$$\bar{R}_{kp} = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial t_2} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что наличие несимметричного слагаемого порядка ε в гравитационном потенциале не изменяет начальную функцию распределения частиц темной материи (3) с точностью до малых членов порядка ε^2 . Отметим, что более детальный анализ, основанный на последовательной теории возмущений, показывает, что в действительности при выполнении условий адиабатичности отклонения усредненных переменных действия от их начальных значений, как правило, экспоненциально малы. (Например, для так называемой диффузии Арнольда средняя скорость ухода переменных

действия оказывается порядка $\exp(1/\sqrt{\varepsilon})$ [11].) Это означает, что подобный эффект ухода переменных действия невозможно зафиксировать ни в каком порядке теории возмущений. Поэтому гораздо более важную роль в динамике темного вещества в реальных галактических системах играют неадиабатические процессы. Они будут рассмотрены в следующих разделах.

4. РОСТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ВСЛЕДСТВИЕ ПРЯМОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

Пусть в центре БГС в результате сжатия барионного вещества образовалась первичная черная дыра, которая начинает расти за счет поглощения темной материи. Поток темной материи на черную дыру с массой M_{bh} составляют частицы, моменты которых удовлетворяют неравенству

$$m < m_g = 2cr_g, \quad (21)$$

где $r_g = 2GM_{bh}/c^2$ — гравитационный радиус черной дыры [12]. Их поглощение ведет к уменьшению числа частиц в конусе потерь (21). С другой стороны, рост черной дыры приводит к увеличению m_g и, тем самым, самого конуса потерь. Таким образом, закон роста черной дыры определяется этими двумя конкурирующими процессами.

Найдем условия, при которых рост черной дыры останавливается и ее масса достигает значения

$$M_{bh} = M_b + M_d,$$

где M_b — масса затравочной барионной черной дыры, M_d — масса поглощенной темной материи. Так как в процессе сферически-симметричной эволюции моменты частиц сохраняются, черной дырой будут захвачены только те частицы, которые входят в конус потерь финальной черной дыры с массой M_{bh} . Суммарную массу таких частиц можно определить по начальной функции распределения f_i с помощью равенства

$$N(f_i; M_{bh}) = \int d^3r d^3v f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \theta(m_g - m),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

С другой стороны, их суммарная масса должна определять величину M_d , откуда

$$M_d = N(f_i; M_b + M_d). \quad (22)$$

Таким образом, если уравнение (22) имеет решение $M_d > 0$, черная дыра остановит свой рост при полной массе M_{bh} . В противном случае черная дыра будет неограниченно расти. Однако, как будет показано ниже, практически во всех разумных случаях уравнение (22) имеет решение и, более того, полная масса захваченных частиц темной материи M_d оказывается много меньше затравочной барионной массы M_b .

В качестве модельного примера рассмотрим рост затравочной черной дыры при начальном изотермическом распределении темной материи. В этом случае функция распределения, плотность и потенциал имеют вид

$$f_i(E, m) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma_d^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{\sigma_d^2}\right), \quad (23)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2}, \quad (24)$$

$$\psi_d(r) = 4\pi G\rho_0 \ln r, \quad (25)$$

где σ_d — дисперсия скоростей темных частиц, $\rho_0 = \sigma_d^2/2\pi G$. Плотность частиц с моментами, меньшими m_g , определенная по начальному распределению (23), имеет вид

$$\rho_g(r) = \frac{\rho_0}{r^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{m_g^2}{2\sigma_d^2 r^2}\right)\right),$$

откуда полная масса частиц с моментами, меньшими m_g ,

$$N_g = 2\pi \left(\frac{\rho_0}{G}\right)^{1/2} m_g. \quad (26)$$

С учетом (21) и (26) уравнение (22) примет вид

$$\frac{M_d}{M_b} = Q \left(1 + \frac{M_d}{M_b}\right), \quad (27)$$

где

$$Q = \frac{8\pi}{c} (G\rho_0)^{1/2}.$$

Важно, что в реальных условиях величина безразмерного параметра Q всегда мала. Действительно, учитывая, например, что масса гало нашей Галактики $M_H \sim 10^{12} M_\odot$, а его радиус $R_H \sim 100$ кпк, из (24) и (27) находим $Q \sim 10^{-3}$. Аналогичная ситуация имеет место и в других галактиках. Таким образом, поглощенная темная масса M_d оказывается пропорциональной барионной массе и составляет, согласно (27), примерно 0.1% от затравочной барионной массы M_b .

Нетрудно убедиться, что этот вывод практически не изменится, если учесть, что функция распределения темной материи существенно отличается от изотермической и описывается формулой (3). Действительно, суммарная масса частиц с моментами, меньшими m_g , определяется теперь выражением

$$N_g = \int d^3\phi \int_0^\infty dI_R \int_0^\infty dm \int_{-m}^m dm_z \times \\ \times f_0 I_R^{1/8} \delta(m^2 - I_0^2 I_R^2) \theta(m_g - m),$$

откуда

$$N_g = (2\pi)^3 \frac{8}{9} f_0 \left(\frac{m_g}{l_0} \right)^{9/8}. \quad (28)$$

Уравнение (22) перепишем теперь в виде

$$\frac{M_d}{M_b} = Q \left(1 + \frac{M_d}{M_b} \right)^{9/8}, \quad (29)$$

где

$$Q = Q' M_b^{1/8}, \quad Q' = (2\pi)^3 \frac{8}{9} f_0 \left(\frac{4G}{l_0 c} \right)^{9/8}.$$

Постоянную f_0 можно определить из соотношения

$$M_h = (2\pi)^3 \int_0^\infty dI_R \int_0^\infty dm^2 \times \\ \times f_0 I_R^{1/8} \delta(m^2 - I_0^2 I_R^2) \theta(m_g - m),$$

где, в соответствии с (9), радиальное действие граничных частиц I_m связано с радиусом R_H и массой M_H гало соотношением

$$I_m \approx \frac{1}{\pi} G^{1/2} M_H^{1/2} R_H^{1/2}.$$

Отсюда для f_0 имеем

$$f_0 = \frac{9}{8} \frac{\pi^{9/8}}{(2\pi)^3} \frac{M_H^{7/16}}{(G R_H)^{9/16}}. \quad (30)$$

Используя это соотношение, можно показать, что в условиях нашей Галактики величина параметра Q по-прежнему составляет малую величину (порядка 10^{-2}) и масса темной материи, захваченной черной дырой, оказывается незначительной.

Подчеркнем, что исследование этого же вопроса в предшествующих работах других авторов [13] приводило к утверждению о неограниченном росте

черной дыры за счет прямого натекания темной материи. Причина ошибки заключалась в том, что авторами не учитывалось изменение функции распределения темной материи, вызванное захватом частиц, попадающих в конус потерь. В результате конус потерь был постоянно заполнен, что и приводило к неограниченному росту черной дыры.

Таким образом, динамика частиц темной материи в условиях сохранения угловых моментов не может служить причиной сколько-нибудь заметного роста черной дыры, из-за того что число частиц в конусе потерь быстро уменьшается, а сам конус потерь растет недостаточно быстро, чтобы обеспечить приток новых частиц. Как следует из результатов разд. 3, наличие слабой асимметрии в потенциале также не приводит к существенному изменению моментов темных частиц и заполнению конуса потерь. Простейшими неадиабатическими процессами, которые могут приводить к заполнению конуса потерь, являются соударения частиц темной материи со звездами. Этот процесс мы и рассмотрим в следующих разделах.

5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Функция распределения частиц темной материи $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ с учетом их гравитационного взаимодействия со звездами удовлетворяет следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H_0, f\} = \text{St}[f], \quad (31)$$

где H_0 — функция Гамильтона, соответствующая движению частиц в усредненном самосогласованном потенциале, $\text{St}[f]$ — столкновительный член. Гравитационное взаимодействие частиц темной материи с отдельными звездами тождественно кулоновскому, поэтому столкновительный член может быть записан в форме Ландау [14]

$$\text{St}[f] = \frac{\partial}{\partial v_k} W_{kp} \frac{\partial}{\partial v_p} f, \quad (32)$$

где

$$W_{kp} = 2\pi G^2 M_\odot \Lambda \int d^3 v' w_{kp} F(\mathbf{v}', r),$$

$$w_{kp} = (u^2 \delta_{kp} - u_k u_p) / u^3,$$

v_k — компоненты скорости темных частиц \mathbf{v} , $F(\mathbf{v}', r)$ — функция распределения звезд, $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ — относительная скорость звезд и темных частиц, $\Lambda \sim 10$ — гравитационный кулоновский логарифм [15].

В действительности, как уже отмечалось, частота соударений частиц со звездами гораздо меньше характерной частоты их орбитального движения. В этих условиях кинетическое уравнение (31) можно существенно упростить. С этой целью, как и в разд. 3, перепишем его в переменных действие–угол:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial f}{\partial \phi_k} = \text{St}_{I,\phi}[f], \quad (33)$$

а также учтем то обстоятельство, что начальная функция распределения (3) не зависит от угловых переменных ϕ . Поэтому ее изменение обусловлено только столкновительным членом (32). Однако, как отмечалось выше, столкновения редки и $\text{St}[f] \propto \nu f$, где ν — частота соударений. В силу этого снова будем искать решение уравнения (33) в виде

$$f = f_0 + \nu f_1,$$

где νf_1 — малая поправка к f_0 , а оба члена f_0 и f_1 зависят от «быстрого» $t_0 = t$ и «медленного» $t_1 = \nu t$ времен. В нулевом приближении по ν имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_0}{\partial \phi_k} = 0,$$

откуда, как и ранее, следует независимость главной части функции распределения f_0 от угловых переменных и «быстрого» времени. Первое приближение дает

$$\nu \left(\frac{\partial f_0}{\partial t_1} + \frac{\partial f_1}{\partial t_0} + \omega_k \frac{\partial f_1}{\partial \phi_k} \right) = \text{St}_{I,\phi}[f_0].$$

Усредняя это уравнение по угловым переменным и «быстрому» времени и учитывая, что второй и третий члены при усреднении обратятся в нуль, получим окончательно

$$\frac{\partial f(I, t)}{\partial t} = \overline{\text{St}}[f(I, t)]. \quad (34)$$

(Здесь мы опустили индекс «0» у функции распределения и вернулись к обычному времени t .)

Таким образом, при сделанных выше предположениях относительно частоты соударений ν оказывается возможным искать функцию распределения, зависящую только от переменных действия, как решение кинетического уравнения (34) с усредненным столкновительным членом:

$$\overline{\text{St}}[f] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\phi \text{St}_{I,\phi}[f]. \quad (35)$$

Отметим, что впервые кинетическое уравнение в усредненной форме (34) было получено в работе

Беляева и Будкера [16] при изучении динамики релятивистских электронов. В работах [17–19] оно было использовано при изучении динамики частиц и звезд в поле кулоновского центра.

Нашей задачей является изучение динамики частиц в произвольном центрально-симметричном поле. Прежде всего необходимо вывести выражение для усредненного интеграла столкновений (35). Следуя [16], мы будем рассматривать тензорную дифференциальную форму (32) формально в шестимерном пространстве скоростей и координат $X = (\mathbf{v}, \mathbf{x})$:

$$\frac{\partial}{\partial v_k} W_{kp} \frac{\partial}{\partial v_k} = \frac{\partial}{\partial X_\mu} W_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 6,$$

считая пространственные компоненты тензора W равными нулю. В этом шестимерном пространстве совершим каноническое преобразование к переменным действие–угол:

$$X_\mu \mapsto Y_{\mu'}; \quad Y = \{I_R, m, m_z; \phi_1, \phi_2, \phi_3\}.$$

При этом преобразовании дифференциальная форма принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu} W_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial Y_{\mu'}} \sqrt{g} R_{\mu'\nu'} \frac{\partial}{\partial Y_{\nu'}},$$

$$R_{\mu'\nu'} = \frac{\partial Y_{\mu'}}{\partial X_\mu} \frac{\partial Y_{\nu'}}{\partial X_\nu} W_{\mu,\nu},$$

где \sqrt{g} — якобиан. Однако, как известно, якобиан канонического преобразования равен единице, поэтому дифференциальная форма в новых переменных сохранит свой вид:

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu} W_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_\nu} = \frac{\partial}{\partial Y_{\mu'}} R_{\mu'\nu'} \frac{\partial}{\partial Y_{\nu'}}.$$

Далее следует вспомнить, что мы ищем решение кинетического уравнения (34) независящее от угловых переменных ϕ , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial Y} R \frac{\partial}{\partial \phi} = 0.$$

Далее при усреднении по ϕ члены $(\partial/\partial\phi)R(\partial/\partial I)$ также обратятся в нуль и выражение для усредненного интеграла столкновений снова примет трехмерный вид:

$$\overline{\text{St}}[f] = \frac{\partial}{\partial I_{k'}} \overline{R}_{k'p'} \frac{\partial}{\partial I_{p'}} f, \quad (36)$$

где

$$\overline{R}_{k'p'} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\phi \frac{\partial I_{k'}}{\partial v_k} \frac{\partial I_{p'}}{\partial v_p} W_{kp}. \quad (37)$$

Чтобы конкретизировать вид дифференциальной формы, входящей в правую часть (36), необходимо задать функцию распределения звезд F . Данные наблюдений динамики звезд в балдже говорят о том, что в первом приближении функцию распределения звезд можно считать изотропной, т. е. зависящей только от энергии

$$E' = \frac{v'^2}{2} + \Psi(r),$$

но не от момента импульса. Для простоты мы также предположим, что зависимость функции распределения звезд от энергии носит степенной характер:

$$F(v', r) = F_0 E'^{-\beta}. \quad (38)$$

Можно показать, что потенциал, который создают звезды с распределением (38), также имеет степенную зависимость от r :

$$\Psi(r) = \Psi_0 r^\alpha, \quad \alpha = \frac{4}{2\beta - 1}. \quad (39)$$

Отметим, что как функцию распределения (38), так и потенциал (39) можно определить, если известна дисперсия скоростей звезд

$$\sigma = \sqrt{\langle v_k^2 \rangle} = \sqrt{\langle v^2/3 \rangle},$$

заданная как функция расстояния до центра галактики:

$$\sigma(r) = \sigma_0 r^{\alpha/2}. \quad (40)$$

При этом дисперсия скоростей, а с ней и параметры σ_0 и α однозначно связаны с функцией распределения (38) и потенциалом (39) формулами

$$\Psi_0 = 3\sigma_0^2 \frac{\int_0^\infty x^2 (1+x^2/2)^{-\beta} dx}{\int_0^\infty x^4 (1+x^2/2)^{-\beta} dx},$$

$$F_0 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(4\pi)^2 G \int_0^\infty x^2 (1+x^2/2)^{-\beta} dx} \Psi_0^{2/\alpha}.$$

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ эти соотношения формально теряют смысл. Однако, как можно показать, при $\alpha \rightarrow 0$ функция распределения звезд (38) из степенной превращается в изотермическую, совпадающую по форме с (23), с дисперсией скоростей

σ , не зависящей от расстояния. Как правило, в балдже параметр α достаточно мал.

Как показывают вычисления, для изотропной функции распределения звезд $F(E')$ квадратичная форма W_{kp} из (32) принимает вид

$$W_{kp} = A(E, r)\delta_{kp} - B(E, r)\frac{v_k v_p}{v^2}, \quad (41)$$

где

$$A = \frac{16\pi^2}{3} G^2 M_\odot \Lambda \int_{\Psi(r)}^\infty dE' \times$$

$$\times F(E') \begin{cases} 1, & E < E', \\ \frac{3}{2} \frac{v'}{v} \left(1 - \frac{v'^2}{3v^2}\right), & E > E', \end{cases}$$

$$A - B = \frac{16\pi^2}{3} G^2 M_\odot \Lambda \int_{\Psi(r)}^\infty dE' \times$$

$$\times F(E') \begin{cases} 1, & E < E', \\ \frac{v'^3}{v^3}, & E > E'. \end{cases}$$

Еще одним обстоятельством, упрощающим выкладки, является тот факт, что, как следует из (9), радиальное действие I_R частиц, движущихся в потенциале (39), с хорошей точностью можно аппроксимировать следующим простым выражением:

$$I_R(E, m) \approx J(E) - b_\alpha m, \quad (42)$$

где b_α — некоторая положительная постоянная,

$$J(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha} dx}{\pi \Psi_0^{1/\alpha}} E^{1/\alpha+1/2}, & \alpha > 0, \\ \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right), & \alpha = 0. \end{cases}$$

(Заметим, что в случае кулоновского и осцилляторного потенциалов равенство (42) становится точным и константа $b = 1$ [10].)

В силу (42) представляется естественным сделать линейную замену переменных

$$I_R, m, m_z \rightarrow J, m, m_z.$$

В этом случае выражение для тензора (37) в силу линейности преобразования не изменится. Поэтому

далее под переменными I в (36), (37) мы будем подразумевать J, m и m_z .

Заметим теперь, что начальная функция распределения (3) в силу малости коэффициента l_0 (4) в новых переменных имеет тот же вид:

$$f(J, m) = f_0 J^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 J^2). \quad (43)$$

Так как начальная функция (43) не зависит от переменной m_z , решение уравнения (36) также можно искать в виде функции только от J и m . Принимая это во внимание и вычисляя коэффициенты квадратичной формы (37), с учетом (41) столкновительный член можно записать в форме

$$\overline{\text{St}}[f] = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} m \left(\overline{R}_{22} \frac{\partial f}{\partial m} + \overline{R}_{12} \frac{\partial f}{\partial J} \right) + \frac{\partial}{\partial J} \left(\overline{R}_{12} \frac{\partial f}{\partial m} + \overline{R}_{11} \frac{\partial f}{\partial J} \right), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{R}_{11} &= \left(\frac{\partial J}{\partial E} \right)^2 \langle (A - B)v^2 \rangle_\phi, \\ \overline{R}_{12} &= \left(\frac{\partial J}{\partial E} \right) \langle (A - B)m \rangle_\phi, \\ \overline{R}_{22} &= \left\langle Ar^2 - \frac{B}{v^2} m^2 \right\rangle_\phi. \end{aligned}$$

При этом операцию усреднения по угловым переменным представим в виде

$$\langle \dots \rangle_\phi = \frac{2}{T(E, m)} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r} (\dots),$$

где

$$T = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r}$$

— период радиальных осцилляций частиц темной материи,

$$v_r = \sqrt{2} \left(E - \Psi(r) - \frac{m^2}{2r^2} \right)^{1/2}$$

— радиальная скорость. Далее на том основании, что моменты темных частиц малы, в первом приближении коэффициенты $\overline{R}_{ab}(J, m)$ в (44) будем вычислять при $m = 0$. Кроме того, из вида начальной функции распределения (43) видно, что для не слишком больших времен, пока функция распределения имеет резкий максимум при $m = l_0 J$, $l_0 \ll 1$, диффузией по J можно пренебречь по сравнению с диффузией по m . С учетом всего сказанного выше

запишем усредненное кинетическое уравнение (34) в виде уравнения диффузии только в пространстве моментов m :

$$\frac{\partial f(J, m, t)}{\partial t} = R(J) \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} m \frac{\partial}{\partial m} f(J, m, t), \quad (45)$$

где коэффициент диффузии

$$R = \overline{R}_{22}|_{m=0} = \langle Ar^2 \rangle_\phi,$$

вычисленный по распределению звезд с дисперсией скоростей (40), имеет вид

$$R(J) = 0.46 GM_\odot \Lambda \sigma_0^{2/(2+\alpha)} J^{\alpha/(2+\alpha)}. \quad (46)$$

Заметим, что в случае изотермического распределения звезд в балдже $\alpha = 0$ и коэффициент диффузии R становится константой, не зависящей от J . Подчеркнем, что возможность перехода к уравнению диффузии лишь по моментам обусловлена постановкой задачи и особенностью начальной функции распределения (3), содержащей малый параметр l_0 .

6. ПОТОК ТЕМНОЙ МАТЕРИИ НА ЧЕРНУЮ ДЫРУ

В результате прямого захвата частиц, попадающих в конус потерь затравочной черной дыры, функция распределения частиц темной материи за время порядка одного периода их орбитального движения принимает вид

$$f(J, m, 0) = f_0 J^{1/8} \delta(m^2 - l_0^2 J^2) \theta(m - m_g), \quad (47)$$

отличающийся от (43) наличием множителя $\theta(m - m_g)$. Процесс диффузии частиц темной материи в пространстве моментов с их последующим попаданием в конус потерь (21) и поглощением черной дырой описывается диффузионным уравнением (45) с начальным условием (47) и граничным условием

$$f|_{m=m_g} = 0. \quad (48)$$

Решение диффузионного уравнения можно представить в виде

$$f(J, m, t) = \int_{m_g}^{\infty} dm_1 G(J, m, m_1, t) f(J, m, 0), \quad (49)$$

где G — функция Грина граничной задачи (48)

$$G = \int_0^{\infty} d\lambda m_1 Z_\lambda(m_1, m_g) Z_\lambda(m, m_g) \exp(-\lambda R(J)t),$$

Z — ортонормированная система собственных функций граничной задачи (48):

$$Z_\lambda(m, m_g) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda}m_g) N_0(\sqrt{\lambda}m) - N_0(\sqrt{\lambda}m_g) J_0(\sqrt{\lambda}m)}{(J_0^2(\sqrt{\lambda}m_g) + N_0^2(\sqrt{\lambda}m_g))^{1/2}},$$

J_0, N_0 — цилиндрические функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. Вычислим теперь поток темной материи на черную дыру. Пусть D — область в фазовом пространстве, заданная системой неравенств

$$I_R = J - b_\alpha m \geq 0, \quad m \geq m_g, \quad -m \leq m_z \leq m.$$

Полная масса темной материи определяется интегралом

$$N(t) = \int_D d^3I d^3\phi f(J, m, t).$$

Далее из условия сохранения полной массы следует, что поток через границу

$$S = -dN/dt.$$

Принимая во внимание уравнение (32), получим

$$S(t) = - \int_D d^3I d^3\phi \frac{\partial}{\partial I_k} \bar{R}_{kp} \frac{\partial}{\partial I_p} f(J, m, t).$$

Далее преобразуем по формуле Стокса объемный интеграл в поверхностный и, учитывая, что темная материя протекает только через поверхность $m = m_g$, получим

$$S(t) = 2(2\pi)^3 \int_{b_\alpha m_g}^\infty dJ R(J) m_g \frac{\partial}{\partial m} f(J, m, t) \Big|_{m=m_g}. \quad (50)$$

Подставляя в (50) решение диффузионного уравнения (49), получим следующую формулу:

$$S(t) = 2 \frac{(2\pi)^3}{\pi} f_0 R_\alpha \int_{m_g/l_0}^\infty dJ J^{\gamma+\frac{1}{8}} \int_0^\infty d\lambda \times \exp(-\lambda R_\alpha J^\gamma t) \frac{Z_\lambda(l_0 J, m_g)}{(J_0^2(\sqrt{\lambda}m_g) + N_0^2(\sqrt{\lambda}m_g))^{1/2}},$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{2 + \alpha}, \quad R_\alpha = 0.46 \Lambda G M_\odot \sigma_0^{2/(2+\alpha)}. \quad (51)$$

Далее удобно ввести нормированное время

$$T = l_0^{-\gamma} R_\alpha t$$

и сделать следующие замены:

$$\lambda \rightarrow \eta = \lambda T^{2/(2-\gamma)}, \quad J \rightarrow y = l_0 J T^{-1/(2-\gamma)}, \\ m_g \rightarrow x = m_g T^{-1/(2-\gamma)}.$$

Выражение для потока тогда примет вид

$$S(t) = 2 \frac{(2\pi)^3}{\pi} \frac{f_0}{l_0^{9/8+\gamma}} \frac{R_\alpha}{T^\zeta} \Phi_\gamma(x), \quad (52)$$

$$\zeta = \frac{7-8\gamma}{16-8\gamma}, \quad \Phi_\gamma(x) = \int_x^\infty dy H_\gamma(x, y),$$

$$H_\gamma(x, y) = y^{1/8+\gamma} \int_0^\infty d\eta \exp(-\eta y^\gamma) \times \\ \times \frac{J_0(\sqrt{\eta}x) N_0(\sqrt{\eta}y) - N_0(\sqrt{\eta}x) J_0(\sqrt{\eta}y)}{J_0^2(\sqrt{\eta}x) + N_0^2(\sqrt{\eta}x)}.$$

Можно показать, что $H_\gamma(x, y)$ является финитной положительно определенной функцией, точно обращающейся в нуль при $y = x$ и экспоненциально малой при $y > x + 4$. На основании этого можно утверждать, что на момент времени t поток темной материи на черную дыру составляют частицы с радиальным действием, лежащим в интервале

$$\frac{m_g}{l_0} < J < \frac{m_g}{l_0} + \frac{4}{l_0} T^{1/(2-\gamma)}. \quad (53)$$

Таким образом, область в пространстве J , откуда натекает темная материя, растет со временем как $t^{1/(2-\gamma)}$. Для функции Φ , входящей в полный поток (52), справедлива оценка

$$\Phi_\gamma(x) \approx x^{1/8+\gamma/2}.$$

Используя это, окончательно получим выражение для потока темной материи на черную дыру через границу конуса потерь $m = m_g$:

$$S(t) = 2 \frac{(2\pi)^3}{\pi} \frac{f_0}{l_0^{9/8+\gamma}} R_\alpha^{1/2} \frac{m_g^{1/8+\gamma/2}}{t^{1/2}}. \quad (54)$$

Выражение (54) было получено в предположении независимости границы конуса потерь m_g от времени. Реально же граница движется вместе с полной массой черной дыры. Однако из (54) следует, что поток слабо зависит от величины m_g . Поэтому для учета эффекта движения границы при росте черной дыры можно использовать выражение (54), формально считая, что m_g зависит от времени:

$$m_g(t) = 4GM_{bh}(t)/c.$$

Таким образом, закон роста черной дыры запишем в виде

$$\frac{dM_{bh}}{dt} = 2 \frac{(2\pi)^3}{\pi} \left(\frac{4G}{c}\right)^{1/8+\gamma/2} \frac{f_0}{l_0^{9/8+\gamma}} R_\alpha^{1/2} \frac{M_{bh}^{1/8+\gamma/2}}{t^{1/2}}.$$

Считая массу заправочной черной дыры малой, получим решение этого уравнения:

$$M_{bh} = Ct^{4/(7-4\gamma)}, \quad (55)$$

$$C = \left(\left(\frac{7-4\gamma}{2} \right) \frac{(2\pi)^3}{\pi} \left(\frac{4G}{c} \right)^{1/8+\gamma/2} \times \right. \\ \left. \times \frac{f_0}{l_0^{9/8+\gamma}} R_\alpha^{1/2} \right)^{8/(7-4\gamma)},$$

где для оценки параметра f_0 можно использовать соотношение (30). Таким образом, рост черной дыры за счет поглощения темной материи, рассеивающейся при соударениях со звездами, носит степенной характер:

$$M_{bh} \propto t^a, \quad a \approx 4/7.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сопоставим результаты изложенной выше теории с данными наблюдений. На рис. 2 представлены зависимости скоростей вращения звезд от расстояния до центра нашей Галактики и галактик M31 и NGC 4258 [20]. Видно, что распределение звезд в балдже M31 и NGC 4258 близко к изотермическому, т.е. вплоть до области влияния черной дыры ($r < 4-7$ пк) звезды имеют практически постоянную, не зависящую

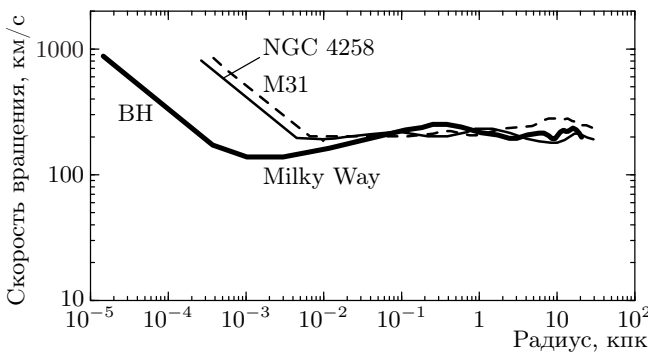


Рис. 2. Кривые вращения нашей Галактики, M31 и NGC 4258 (по данным [20])

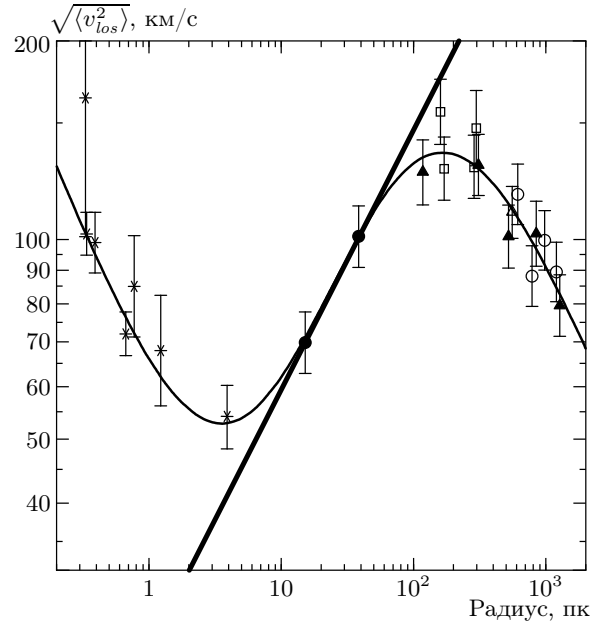


Рис. 3. Зависимость дисперсии скоростей звезд от расстояния до центра Галактики (по данным [21])

от r орбитальную скорость (а следовательно, и дисперсию) $\sigma = \sigma_0 \sim 200$ км/с. Считая, что масса и размер гало темной материи вокруг этих галактик примерно одинаковы и составляют, соответственно, $10^{12} M_\odot$ и 100 кпк, из (30) и (5) получим величины $f_0 \approx 7.3 \cdot 10^8 \text{ г} \cdot \text{с}^{9/8} \cdot \text{см}^{-9/4}$ и $l_0 \approx 0.1$. Из (40) и (51) имеем $\alpha = \gamma = 0$ и $R_\alpha \approx 6.1 \cdot 10^{33} \text{ см}^4 \cdot \text{с}^{-3}$. Считая далее, что возраст t черной дыры сопоставим с возрастом Вселенной $t \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ с}$, из (55) получим массу черной дыры $M_{bh} \approx 5 \cdot 10^7 M_\odot$. Таким образом, теоретические значения масс черных дыр для этих галактик оказывается достаточно близкими к наблюдаемым:

$$M_{bh} = 4.5(2.0-8.5) \cdot 10^7 M_\odot \quad \text{для M31,}$$

$$M_{bh} = 3.9(3.8-4.0) \cdot 10^7 M_\odot \quad \text{для NGC 4258.}$$

В центральной области балджа нашей Галактики предположение об изотермическом распределении звезд при $r \leq 100$ пк не удовлетворяется. Вместе с тем, как видно из (53), темная материя натекает в основном именно из центральной области. Зависимость дисперсии скоростей звезд от расстояния приведена на рис. 3 [21]. Видно, что на масштабе от 10 пк до 100 пк дисперсию можно приближенно представить в виде

$$\sigma = 60 \text{ км/с} \cdot \left(\frac{r}{10 \text{ пк}} \right)^{0.3}.$$

Из (40) тогда следует $\alpha \approx 0.6$. Формула (55) дает в этом случае для массы черной дыры $2 \cdot 10^7 M_\odot$, что значительно превышает наблюдаемое значение $M_{bh} \approx 2.6 \cdot 10^6 M_\odot$. Для получения более точных оценок массы черной дыры необходимо иметь более полную информацию о функции распределения звезд, ее эволюции и эволюции распределения темной материи в центральной области балджа. Важную роль может играть также вклад самой черной дыры в общий гравитационный потенциал. Тем не менее в целом мы видим, что уже в грубом приближении учет поглощения затравочной черной дырой одной лишь темной материи позволяет дать разумную оценку для наблюдаемых масс большей части гигантских черных дыр (см. рис. 1). Этот факт можно рассматривать как дополнительное подтверждение общей теории крупномасштабной структуры Вселенной [5], в основе которой лежит предположение о корпускулярной природе темной материи.

Заметим также, что разработанная в разд. 5 общая кинетическая теория позволяет описать и поглощение барионной материи, точнее захват черной дырой самих звезд в центральной области балджа за счет их гравитационного рассеяния. Этот процесс исключительно важен в особенности для гигантских черных дыр масштаба $M_{bh} \sim 10^9 M_\odot$ и активных галактических ядер.

Следует отметить, что другим важным процессом, описываемым кинетическим уравнением (34), является возможность уменьшения количества темной материи в балдже. Изменение энергии частиц темной материи в результате соударений со звездами приводит к их «разогреву» и выталкиванию из балджа (явление, аналогичное ускорению Ферми), а следовательно, к уменьшению плотности темной материи в сравнении с барионной. Качественно это соответствует результатам наблюдений последних лет, подробно обсуждаемым в литературе [22, 23].

Дальнейшая разработка обсуждаемой выше последовательной кинетической теории и ее детальное сопоставление с данными наблюдений несомненно будет способствовать пониманию основных физических процессов в ядрах галактик.

Авторы выражают благодарность В. И. Сироте и М. И. Зельникову за многочисленные и полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике». К. З. благодарен Фонду содействия науки за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Черепашук, УФН **173**, 4 (2003).
2. L. C. Ho, in *Observational Evidence for Black Holes in the Universe*, Astrophys. and Space Sci. Library (1999), Vol. 234.
3. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **94**, 5 (1988).
4. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **97**, 20 (1990).
5. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, 723 (1995).
6. J. F. Navarro, C. S. Frenk, and C. D. White, *Aph. J.* **462**, 563 (1996).
7. L. Fukshige and J. Makino, *Aph. J.* **477**, L9 (1997).
8. M. Persic and P. Salucci, *Aph. J. Suppl.* **99**, 501 (1995).
9. D. Puche and C. Carignan, *Aph. J.* **378**, 487 (1991).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1988).
11. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва (1989).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
13. J. D. MacMillan and R. N. Henriksen, E-print archives astro-ph/0201153.
14. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).
15. В. И. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
16. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, в кн. *Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций*, Гостехиздат, Москва (1958), т. 2.
17. А. В. Гуревич, *Геомагнетизм и аэрономия* **4**, 247 (1964).
18. В. И. Докучаев, Л. М. Озерной, ЖЭТФ **73**, 1587 (1977).
19. A. P. Lightman and S. L. Shapiro, *Astrophys. J.* **211**, 244 (1977).
20. Y. Sofue and V. Rubin, E-print archives astro-ph/0010594.
21. S. Tremaine et al., E-print archives astro-ph/0203468.
22. N. Napolitano, M. Arnaboldi, and M. Capaccioli, *Astron. Astrophys.* **383**, 791 (2002).
23. F. Combes, E-print archives astro-ph/0206126.