

ОБМЕННОЕ ДИПОЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МНОГОУРОВНЕВОЙ КООПЕРАТИВНОЙ СИСТЕМЕ АТОМОВ

Е. В. Орленко, Б. Г. Матисов*

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2003 г.

Рассматриваются системы атомов с тремя и более эквидистантными уровнями, где возможен каскадный процесс. Для таких систем получены гамильтонианы, аналогичные гамильтонианам Гейзенберга, но для систем целочисленных спинов. Для состояний Дике в случае многоуровневых систем вычислены квантовомеханические средние значения энергии кооперативной системы, учитывающие слабые меж-атомные взаимодействия. Проанализирован характер излучения системы, предшествующий сверхизлучательному лавинному сбросу. Можно ожидать установления такого когерентного состояния, в котором взаимовлияние коллективных процессов осуществляется не только через населенность промежуточного общего уровня, но и через фазировку чистых квантовых состояний. В этой ситуации может формироваться единый импульс сверхизлучения, не являющийся простым наложением двух или более импульсов последовательных сверхизлучательных переходов двухуровневых систем.

PACS: 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в простейших квантовых системах (ансамбли двухуровневых атомов, взаимодействующих через поле излучения, электростатическое поле, диполь-дипольное взаимодействие и т. д.) возможен целый ряд светоиндуцированных фазовых переходов [1]. Изучение таких неравновесных фазовых переходов показало, что существует глубокая аналогия с равновесными фазовыми переходами второго рода, возникающими в системе спинов при наличии между ними взаимодействия, константа которого (обменное кулоновское взаимодействие) превосходит энергию теплового движения, приводящего к разориентации спинов. В этом случае в системе возникает спонтанная соориентация спинов, макроскопически проявляющая себя в остаточной намагниченности. Фазовые переходы в квантово-оптических системах вызываются также взаимодействием, приводящим к установлению определенного порядка в ориентации так называемых энергетических спинов (или изоспинов) [2, 3], которые имеют место при сверхизлучении Дике [4]. Возни-

кающая при этом корреляция дипольных оптических моментов отдельных атомов приводит к образованию макроскопического дипольного момента, пропорционального числу излучателей. Поэтому интенсивность сверхизлучения оказывается пропорциональной квадрату этого числа, а время сверхизлучения обратно пропорционально ему. Более того, как показано в [1] на основе анализа состояния поляритонной генерации в открытой среде двухуровневых атомов, взаимодействующих через стоково поле при комбинационном рассеянии света, возникновение режима сверхизлучения является по сути одним из возможных фазовых переходов.

Сверхизлучение относится к классу когерентных оптических явлений. Само понятие когерентности в данном случае относится не столько к электромагнитному полю, сколько к излучающей системе. Причиной возникновения и развития когерентности считается общее поле излучения атомов, которое оказывает влияние на состояние каждого из них. Поэтому механизм взаимодействия через поле переизлучения считается наиболее универсальным типом взаимодействия в таких системах. Однако в среде двухуровневых атомов с постоянными дипольными моментами коллективизация ансамбля атомов

*E-mail: quark@cita.del.stu.neva.ru

может осуществляться и за счет статического диполь-дипольного взаимодействия. В кристаллах появляется еще дополнительное взаимодействие через фононы.

Аналогия с равновесными фазовыми переходами второго рода, имеющими место в магнитных системах, является тем более глубокой, что гамильтониан, описывающий поведение двухуровневых атомов в поле излучения и с учетом межатомного взаимодействия, аналогичен гамильтониану Гейзенберга для спиновых систем. В квантовой оптике неоднократно предпринимались попытки свести гамильтониан непосредственно к гамильтониану Гейзенберга [5], аналогично тому, как это делается для спиновых систем.

Наряду с этим еще в самых ранних работах по сверхизлучению был разработан и эффективно применялся теоретико-групповой подход [6, 7], который по существу обобщает теорию Дике на случай многоуровневых излучателей. Там отмечалось, что существенным моментом в теории Дике является выбор в качестве стационарных состояний невозмущенного гамильтониана неприводимых представлений группы SU_2 в энергетическом пространстве системы. Аналогичную роль для многоуровневых систем играет базис неприводимых представлений группы SU_n (n — число уровней).

Важную роль в установлении состояния сверхизлучения играет электрическое дипольное взаимодействие атомов даже в том случае, когда атомы обладают только дипольными моментами переходов. В работе [8] на основе полуклассического подхода исследуется влияние кулоновского взаимодействия на сверхизлучение системы двухуровневых атомов и показано, что кулоновское взаимодействие вызывает когерентный перенос возбуждения между атомами, что приводит к приближительной пространственной однородности инверсии в цепочке атомов. Таким образом, делается и последовательно доказывается утверждение о том, что кулоновское диполь-дипольное взаимодействие не только не разрушает, как принято было считать, состояние сверхизлучения, но и способствует его установлению. Показано также, что кулоновское взаимодействие должно учитываться во всех системах с малым числом Френеля, так как в таких системах время «обмена» возбуждениями $\tau_c \ll \tau_R$, где τ_R — время сверхизлучения. Попытка учета кулоновского взаимодействия для малого числа атомов была предпринята и в более ранних работах [9], авторы которых показали, что электростатическое взаимодействие в полуклассическом приближении не влияет на динами-

ку сверхизлучения, но приводит к фазовой модуляции. Однако при более детальном анализе динамики сверхизлучения с учетом кулоновского взаимодействия [8] выяснилось, что интенсивность высвечивания имеет явные осцилляции в зависимости от времени, что можно было бы связать с распространением в системе возбуждений, имеющих волновой характер.

Механизмы фазировки и роль диполь-дипольного взаимодействия атомов в кооперативных системах изучались в работе [10], где с единой точки зрения рассматривались эффекты сверхизлучения в различных физических системах, включая малые (коллектив атомов Дике) и протяженные (когерентные волны в замагниченной плазме) тела.

Гамильтониан системы двухуровневых атомов с учетом как дипольного кулоновского взаимодействия атомов, так и взаимодействия через поле переизлучения, аналогичный гамильтониану Гейзенберга в теории магнетизма выводится из первых принципов в работе [11]. На основе полученного гамильтониана исследуются волновые возбуждения системы, аналогичные спиновым волнам в ферро- или антиферромагнетиках. Показано, что именно эти возбуждения приводят к характерной температурной зависимости интенсивности сверхизлучения. Кроме того, в этой работе вычислена критическая температура, при которой явление сверхизлучения пропадает, а в системе наступает фазовый переход второго рода.

Случай трехуровневых систем детально исследован в работе [6] на основе теоретико-группового метода. А именно, там дана полная классификация когерентных состояний, найдены когерентные характеристики и проанализированы свойства спонтанного излучения.

В системе трехуровневых атомов возможны следующие режимы, приводящие к качественно иной динамике.

- 1) Каскадное сверхизлучение [12], когда разрешены переходы 3–2, 2–1 и запрещен переход 3–1.
- 2) Двухчастотное сверхизлучение (Λ -схема) [13], когда разрешены переходы 3–2 и 3–1, но запрещен переход 2–1.
- 3) Сверхизлучение с общим нижним уровнем (V -схема).

В сверхизлучательном пределе, когда времена коллективного сверхизлучения много меньше времен некоррелированного распада, в [6] получены уравнения чистого сверхизлучения, обобщающие уравнения для совокупности двухуровневых атомов, и проведена сортировка решений в зависимости

от исходной заселенности уровней, где собственно и получены перечисленные случаи.

Случай каскадного сверхизлучения рассмотрен в квазиклассическом приближении в работе [12]. Показано, что при выполнении условия $\tau_1 < \tau_2$ (τ_1 — время коллективного распада 3–2, τ_2 — то же для перехода 2–1) импульсы сверхизлучения для верхнего и нижнего переходов не перекрываются и распад системы описывается в рамках приближения двухуровневой модели. При $\tau_1 > \tau_2$ импульсы, излучаемые на первом и втором переходах, перекрываются, и считается, что они взаимно влияют на кинетику распада только через населенность общего уровня. Такое же взаимное влияние коллективных процессов на двух переходах характерно и в других случаях распада трехуровневых систем. Эквидистантные уровни и квазиклассические состояния глауберовского типа для многоуровневой задачи Дике рассмотрены в работе [7].

В упомянутых выше работах основным механизмом, определяющим коллективизацию системы, является взаимодействие атомов через поле переизлучения, этим же взаимодействием определяется и структура гамильтониана системы. Однако следует отметить, что константа указанного взаимодействия мала [1] и по сравнению с равновесной температурой системы атомов, и по сравнению с равновесным тепловым излучением системы, и, наконец, по сравнению с интенсивностью поля накачки, которое выступает в излучающих системах в роли варьируемого параметра и является аналогом температуры. Проводя принятую аналогию со спиновыми системами, можно вспомнить о том, что константа прямого магнитно-дипольного взаимодействия так же является малой по сравнению с характерными константами ферромагнитной системы, хотя оператор этого взаимодействия и содержит в явном виде скалярное произведение операторов спина попарно взаимодействующих частиц. Но не оно определяет коллективный эффект соориентации спинов в системе. В работе [11] показано для системы двухуровневых атомов, что структура гамильтониана Дике действительно может напоминать вид гамильтониана Гейзенберга, а константа взаимодействия имеет ту же обменную природу, что и параметр Гейзенберга. Кроме того, этот параметр уже не является малым и по оценкам, приведенным в указанной работе, может достигать нескольких T , где T — температура газа в энергетической шкале. Это взаимодействие приводит к расщеплению вырожденных по главному кооперативному числу энергетических состояний системы двухуровневых атомов.

В настоящей работе рассматривается частный случай систем с тремя и более эквидистантными уровнями, где возможен каскадный процесс. Для таких систем получены гамильтонианы, аналогичные гамильтонианам Гейзенберга [11], но для систем целочисленных спинов. В отличие от двухуровневых атомов, где состояния Дике являются собственными для соответствующего гамильтониана, в случае многоуровневых атомов эти состояния не являются собственными для гамильтониана, учитывающего дипольное взаимодействие. Для этих состояний вычислены квантовомеханические средние значения энергии кооперативной системы при учете слабого межатомного взаимодействия. Анализ характера излучения системы, предшествующего сверхизлучательному лавинному сбросу, показал, что можно ожидать установления такого когерентного состояния, в котором взаимовлияние коллективных процессов осуществляется не просто через населенность промежуточного общего уровня, но и через фазовые соотношения между чистыми квантовыми состояниями. В этой ситуации может формироваться единый импульс сверхизлучения, не являющийся простым наложением двух или более импульсов последовательных сверхизлучательных переходов двухуровневых систем. Кроме того, оказалось, что в трехуровневых системах должна присутствовать задержка перед окончательным сбросом когерентного излучения, аналогичная той, что имеет место в системе двухуровневых атомов [11]. В четырех- и пятиуровневых системах подобной задержки наблюдаться не должно и процесс спонтанного излучения будет плавно переходить в состояние сверхизлучения.

2. ГАМИЛЬТониАН КООПЕРАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ($j = 1$)

Рассмотрим трехуровневую каскадную схему, в которой уровни энергии расположены в последовательности

$$E_1 < E_2 < E_3.$$

Состояние каждого атома можно описывать спином χ [4], где

$$\chi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

означает, что атом находится в энергетическом состоянии с $E = E_1, E_2$ и E_3 , соответственно или, в других обозначениях

$$\chi(1) = |j = 1, j_z = -1\rangle, \quad \chi(2) = |j = 1, j_z = 0\rangle,$$

$$\chi(3) = |j = 1, j_z = 1\rangle,$$

где j и j_z соответственно обозначают величину так называемого изоэнергетического спина и его проекцию. Тогда состояние системы двух невзаимодействующих атомов может быть записано в виде простого произведения спиноров χ_I и χ_{II} , соответствующих атомам I и II:

$$\chi_{I,II} = \chi_I(i)\chi_{II}(k),$$

где индексы i и k пробегает значения 1, 2 и 3.

Если по аналогии с [4] ввести оператор

$$\hat{j}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то гамильтониан невзаимодействующей системы может быть записан в виде

$$\hat{H}_0 = \varepsilon (\hat{j}_{Iz} + \hat{j}_{IIz}),$$

$$\varepsilon = E_3 - E_2 = E_2 - E_1.$$

Тогда

$$\hat{H}_0 \chi_{I,II} = \varepsilon (\hat{j}_{Iz} + \hat{j}_{IIz}) \chi_{I,II}. \quad (1)$$

Некоторым энергетическим состояниям системы двух невзаимодействующих атомов, например таким, в которых первый атом находится в состоянии с энергией E_1 , а второй — с энергией E_2 (энергия системы тогда будет $E = E_1 + E_2$) или, аналогично, для состояния с $E = E_1 + E_3$, могут соответствовать функции

$$\chi_{I,II} = \chi_I(1)\chi_{II}(2), \quad \chi'_{I,II} = \chi_I(2)\chi_{II}(1),$$

$$\chi_{I,II} = \chi_I(2)\chi_{II}(3), \quad \chi'_{I,II} = \chi_I(3)\chi_{II}(2),$$

$$\chi_{I,II} = \chi_I(1)\chi_{II}(3), \quad \chi'_{I,II} = \chi_I(3)\chi_{II}(1).$$

Таким образом, в системе существует вырождение. Функции $\chi_{I,II}$ и $\chi'_{I,II}$ ортогональны между собой.

Учтем взаимодействие атомов, механизм которого может быть любым из перечисленных выше в соответствии с экспериментальной ситуацией. Будем описывать это взаимодействие символически с помощью оператора $\hat{V}_{I,II}$. Константа любого из перечисленных выше типов взаимодействия мала по сравнению с разностью энергий ε , так что применима обычная теория возмущений с вырождением. Поправка к полной энергии системы на указанное возмущение хорошо известна [7]:

$$\varepsilon^{(1)} = K \pm A, \quad (2)$$

где в нашем случае

$$K = \langle \chi_{I,II} | \hat{V}_{I,II} | \chi_{I,II} \rangle, \quad A = \langle \chi'_{I,II} | \hat{V}_{I,II} | \chi_{I,II} \rangle.$$

Правильными волновыми функциями нулевого приближения будут в этом случае изоспиновые функции симметричного и антисимметричного вида. Симметричные правильные волновые функции, соответствующие верхнему знаку формулы (2), описывают состояния с полным изоспином пары атомов J и его проекции J_z :

$$|J = 2, J_z = 2\rangle = |1, 1\rangle_1 |1, 1\rangle_2$$

$$|J = 2, J_z = 1\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle_1 |1, 0\rangle_2 + |1, 0\rangle_1 |1, 1\rangle_2),$$

$$|J = 2, J_z = 0\rangle = |1, 0\rangle_1 |1, 0\rangle_2,$$

$$|J = 2, J_z = -1\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle_1 |1, 0\rangle_2 + |1, 0\rangle_1 |1, -1\rangle_2), \quad (3a)$$

$$|J = 2, J_z = -2\rangle = |1, -1\rangle_1 |1, -1\rangle_2,$$

$$|J = 0, J_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, 1\rangle_1 |1, -1\rangle_2 +$$

$$+ |1, -1\rangle_1 |1, 1\rangle_2 - 2|1, 0\rangle_1 |1, 0\rangle_2).$$

Антисимметричные правильные волновые функции, соответствующие нижнему знаку, имеют вид

$$|J = 1, J_z = 1\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle_1 |1, 0\rangle_2 - |1, 0\rangle_1 |1, 1\rangle_2),$$

$$|J = 1, J_z = 0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle_1 |1, -1\rangle_2 - |1, -1\rangle_1 |1, 1\rangle_2), \quad (3b)$$

$$|J = 1, J_z = -1\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle_1 |1, 0\rangle_2 - |1, 0\rangle_1 |1, -1\rangle_2).$$

Из (2) видно, что при учете взаимодействия более выгодными будут антисимметричные состояния, если $A > 0$ и, наоборот, симметричные, если $A < 0$. Энергетические состояния двухатомной системы с $E = 2E_1$ и $E = 2E_3$ исходно не вырождены, и для них реализуется только одно состояние, а именно, симметричное. Состояние с $E = 2E_2$ двукратно вырождено, и потому с учетом взаимодействия оно расщепляется на два состояния (симметричное $|J = 0, J_z = 0\rangle$ и антисимметричное $|J = 1, J_z = 0\rangle$, соответствующие разным энергетическим подуровням.

Введем оператор

$$\hat{P}_{1,1} = \hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 + (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - 1,$$

где $\hat{j}_{1x}, \hat{j}_{1y}, \hat{j}_{1z}, \hat{j}_{2x}, \hat{j}_{2y}, \hat{j}_{2z}$ эквиваленты матрицам оператора проекций на оси x, y, z момента, равного единице. Можно убедиться, что собственное значение оператора

$$\hat{j}^2 = (\hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{j}}_2)^2$$

для симметричного состояния соответствует полному изоспину J системы двух взаимодействующих атомов, равному 2 или 0. Для антисимметричного состояния полный изоспин J системы равен 1. Аналогично легко видеть, что собственные значения оператора $\hat{P}_{1,1}$ равны +1 для симметричных состояний и -1 для антисимметричных. Тогда оператор энергии взаимодействия двух атомов, учитывающий в явном виде их изоспиновые состояния, можно представить как

$$\hat{h}_{int} = K + A\hat{P}_{1,1}$$

или

$$\hat{h}_{int} = K + A \left(\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2 + (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - 1 \right). \quad (4)$$

Если теперь рассмотреть систему N атомов с учетом только парных взаимодействий, то соответствующий гамильтониан может быть записан в виде

$$\hat{H}_{int} = (K - A) \frac{N(N-1)}{2} + A \sum_{k < l} \left[(\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^2 + \hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l \right], \quad (5)$$

где k, l — номера атомов. Тогда полный гамильтониан, описывающий систему попарно взаимодействующих трехуровневых атомов, будет иметь вид

$$\hat{H} = \varepsilon \sum_k \hat{J}_{kz} + A \sum_{k < l} \left[(\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^2 + \hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l \right] + N E_2. \quad (6)$$

Отметим здесь, что, в отличие от двухуровневой системы, состояния Дике [4], характеризующиеся значением полного изоспина системы (или так называемым кооперативным квантовым числом R) и проекцией полного изоспина на ось z (поляризационным числом m), не являются собственными для оператора (6) из-за присутствия в нем нелинейного слагаемого.

3. СОСТОЯНИЯ ДИКЕ

Вычислим значения энергии многочастичной изоспиновой системы. Вторая сумма, входящая в (5), может быть выражена через оператор \hat{R}^2 квадрата полного изоспина системы:

$$\sum_{k < l} \hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l = \frac{1}{2} \left(\hat{R}^2 - \sum_k \hat{\mathbf{j}}_k^2 \right). \quad (7)$$

Квадратичное слагаемое может быть переписано через оператор \hat{J}^2 квадрата парного спина системы и вычислено с учетом квантового усреднения по состояниям с определенными значениями изоспина пары:

$$\sum_{k < l} (\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^2 = \frac{N(N-1)}{2} \sum_J \left\{ (j^2 - 2j^2)^2 \times \left(\sum_{J_z: j_1 j_2} \langle J, J_z | j_1 j_2 j_1 j_2 \rangle^2 \right) \right\}, \quad (8)$$

где $\langle J, J_z | j_1 j_2 j_1 j_2 \rangle^2$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Собственное значение оператора (7) при действии на состояние $|R, m\rangle$ с полным изоспином R и его проекцией m имеет вид

$$\overline{\sum_{k < l} \hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l} = \frac{1}{2} (R(R+1) - Nj(j+1)). \quad (9)$$

Усредненное значение оператора (8) будет иметь вид

$$\overline{\sum_{k < l} (\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^2} = \frac{4}{3} \frac{R(R-1)}{2}. \quad (10)$$

Тогда значение энергии взаимодействия из выражения (5) равно:

$$E_{int} = (K - A) \frac{N(N-1)}{2} + A \left[\frac{2R(R-1)}{3} + \frac{1}{2} (R(R+1) - Nj(j+1)) \right]. \quad (11)$$

С учетом $j = 1$ для энергии взаимодействия имеем

$$E_{int} = K \frac{N(N-1)}{2} - A \frac{N(N+1)}{2} + \frac{A}{6} R(7R-1). \quad (12)$$

Полная энергия кооперативной системы будет иметь вид

$$E_{tot} = \varepsilon m + N E_2 + K \frac{N(N-1)}{2} - A \frac{N(N+1)}{2} + \frac{A}{6} R(7R-1). \quad (13)$$

Теперь состояния с определенным поляризационным числом m перестают быть вырожденными, так как вырождение по полному изоспину, или кооперативному квантовому числу системы, снимается из-за наличия взаимодействия, описываемого вторым слагаемым в выражении (5). Состояния Дике $|R, m\rangle$ с разными R (R может принимать значения от N до $|m|$), но с одинаковым m теперь соответствуют разным подуровням энергии, как и в случае двухуровневых систем [11].

Легко видно, что при $A > 0$ состоянием, соответствующим минимальной энергии подуровня, является состояние с минимально возможным для определенного m значением $R = |m|$, т. е. $R = 0$ в состоянии с $m = 0$. Состояние

$$\begin{aligned} |R = 0, m = 0\rangle = & \prod_{k < l} \frac{1}{\sqrt{3}} (|j_k = 1, j_{zk} = 1\rangle_k |j_l = 1, j_{zl} = -1\rangle_l + \\ & + |j_k = 1, j_{zk} = -1\rangle_k |j_l = 1, j_{zl} = 1\rangle_l - \\ & - 2|j_k = 1, j_{zk} = 0\rangle_k |j_l = 1, j_{zl} = 0\rangle_l) \end{aligned} \quad (14)$$

полностью симметричное.

Согласно [4], интенсивность излучения системы определяется как

$$I = I_0(R + m)(R - m + 1),$$

где I_0 — интенсивность излучения одного атома [4, 13]. Отсюда хорошо видно, что когерентное излучение возможно, если R велико, а $|m|$ мало. В состоянии (14) система совсем не излучает, вероятность перехода из этого состояния равна нулю.

Рассмотрим подробнее эволюцию системы до момента начала ее когерентного распада. При переходе системы из состояния $|m\rangle$ в состояние $|m - 1\rangle$ существует конечная вероятность оказаться на одном из вырожденных по R подуровней. Эта вероятность может быть вычислена с помощью полученного в [7] соотношения специально для случая вырождения:

$$\begin{aligned} w_{R-1} = & \left| \frac{1}{V_{RR} - V_{R-1R-1}} \sum_r \frac{V_{R-1} V_{rR}}{\varepsilon(m - (m - 1))} \right|^2 = \\ = & \left| \left(K \frac{N(N-1)}{2} - A \frac{N(N+1)}{2} + \frac{A}{6} R(7R-1) \right) \times \right. \\ \times & \left(K \frac{N(N-1)}{2} - A \frac{N(N+1)}{2} + \frac{A}{6} (R-1)(7R-8) \right) \times \\ & \left. \times \left(\varepsilon \frac{A}{6} (14R - 8) \right)^{-1} \right|^2. \end{aligned}$$

При этом система стремится оказаться на подуровне с минимальным из возможных R , а именно, с $R = m$. Это приводит к уменьшению интенсивности излучения при каждом шаге по закону:

$$I \propto I_0(R + m) = 2mI_0.$$

Из всех возможных состояний $|R, m\rangle$ с $m = 0$ наиболее энергетически выгодным будет именно состояние с $R = 0$. Но в этом состоянии, как было отмечено Дике [4], система не излучает, находясь, как бы в «замороженном» состоянии в мелкой яме. Только взаимодействие с полем излучения может вызвать переход системы с подуровня с $R = 0$ на подуровень с $R = N$, что вызовет лавинный сброс всей кооперативной системы [4, 11]. Этим эффектом постепенного «замораживания» системы можно объяснить существующую задержку перед импульсом сверхизлучения. Причем переход в это состояние будет все время сопровождаться некогерентным излучением с постоянно ослабляющейся интенсивностью.

Таким образом, состоянием, предшествующим импульсу сверхизлучения, является такое состояние системы, когда половина атомов поровну распределена между верхним $E = E_3$ и нижним $E = E_1$ уровнями, а половина населяет средний уровень $E = E_2$.

4. ГАМИЛЬТониАН ПЯТИУРОВНЕВОЙ КООПЕРАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ($j = 2$)

Кооперативную систему пятиуровневых атомов можно описывать как систему частиц с энергетическим спином (изоспин) $j = 2$. В случае пары таких атомов симметрия термов такова: четные состояния с изоспинами пары атомов $J = 4, 2, 0$ являются симметричными, нечетные состояния с изоспинами пары атомов $J = 3, 1$ — антисимметричные. Собственные значения оператора скалярного произведения изоспинов атомов $\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2$ мы приведем полностью:

$$\begin{aligned} J = 4, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} &= 4 \text{ — симметричное,} \\ J = 3, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} &= 0 \text{ — антисимметричное,} \\ J = 2, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} &= -3 \text{ — симметричное,} \\ J = 1, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} &= -5 \text{ — антисимметричное,} \\ J = 0, \quad \overline{\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2} &= -6 \text{ — симметричное.} \end{aligned} \quad (15)$$

Составим теперь оператор $\hat{P}_{2,2}$, учитывающий свойства симметрии спиновой функции пары атомов таким образом, чтобы при действии его на симметричное состояние выходило собственное значение

ние (+1), на антисимметричное состояние выходило значение (-1). Этот оператор будет иметь вид

$$\hat{P}_{2,2} = \frac{1}{36} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^4 + \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^3 - \frac{13}{36} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - \frac{5}{2} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2) - 1. \quad (16)$$

Тогда, если заменить в выражении (2) $\pm A$ на указанный оператор, то для гамильтониана системы N пятиуровневых попарно взаимодействующих атомов получим выражение

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & (K - A) \frac{N(N-1)}{2} + \frac{A}{6} \times \\ & \times \sum_{i < j} \left\{ \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^4 + (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^3 - \right. \\ & \left. - \frac{13}{6} (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^2 - 15 (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j) - 6 \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

5. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ С $j = 2$

Вычислим средние по состояниям Дике значения операторов, входящих в (17), с учетом коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{i < j} (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^2} &= 6R(R-1), \\ \overline{\sum_{i < j} \hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j} &= \frac{1}{2} (R(R+1) - 6N), \\ \overline{\sum_{i < j} (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^3} &= -3R(R-1), \\ \overline{\sum_{i < j} (\hat{\mathbf{j}}_i \cdot \hat{\mathbf{j}}_j)^4} &= \frac{588}{5} R(R-1). \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда энергия взаимодействия будет иметь вид

$$E_{int} = (K - A) \frac{N(N-1)}{2} - \frac{A}{2} \left\{ \frac{7R}{10} (13R + 37) - 15N \right\}.$$

Полная энергия кооперативной системы с $j = 2$ равна

$$\begin{aligned} E_{tot} = & \varepsilon m + (K - A) \frac{N(N-1)}{2} - \\ & - \frac{A}{2} \left\{ \frac{7R}{10} (13R + 37) - 15N \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (19) видно, что основным состоянием в случае $A > 0$ будет состояние с максимальным кооперативным числом системы $R = N$. Таким образом, сразу

после накачки в самое верхнее по m состояние система всегда будет переходить только в симметричные состояния, оставаясь на подуровнях с максимальным кооперативным числом, поскольку именно эти состояния соответствуют наиболее низким подуровням при заданном m . В таком состоянии система может излучать, причем интенсивность излучения будет нарастать, пока система не достигнет состояний с малыми $|m|$ и большими R . В этом случае интенсивность становится пропорциональной квадрату числа атомов и излучение становится кооперативным.

6. КООПЕРАТИВНАЯ СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ

Кооперативную систему четырехуровневых атомов можно описывать как систему частиц с изоспином $j = 3/2$. Возможные симметричные и антисимметричные парные состояния перечислены ниже. Как и во всех предыдущих случаях, все симметричные состояния соответствуют поправке на энергию парного взаимодействия атомов равной

$$\varepsilon^{(1)} = K + A.$$

тогда как все антисимметричные комбинации соответствуют поправке, равной

$$\varepsilon^{(1)} = K - A.$$

Таким образом, можно ввести оператор, автоматически учитывающий симметрию состояний и соответствующий знак в поправке к энергии:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{3/2,3/2} = & \frac{2}{9} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^3 + \frac{11}{18} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2)^2 - \\ & - \frac{9}{8} (\hat{\mathbf{j}}_1 \cdot \hat{\mathbf{j}}_2) - \frac{67}{32}. \quad (20) \end{aligned}$$

Этот оператор будет иметь собственное значение, равное +1 при действии на симметричные состояния, и собственное значение, равное -1 при действии на антисимметричные состояния.

Симметричные состояния имеют вид

$$\begin{aligned}
 |J = 3, J_z = 3\rangle &= |3/2, 3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle, \\
 |J = 3, J_z = 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, 1/2\rangle + \\
 &+ |3/2, 1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle), \\
 |J = 3, J_z = 1\rangle &= (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) \frac{1}{\sqrt{5}} + \\
 &+ |3/2, 1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle \sqrt{\frac{3}{5}}, \\
 |J = 3, J_z = 0\rangle &= (|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle) \frac{3}{2\sqrt{5}} + \\
 &+ (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) \frac{1}{2\sqrt{5}}, \\
 |J = 1, J_z = 1\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{5}} |3/2, 1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle + \\
 &+ \sqrt{\frac{3}{10}} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle), \\
 |J = 1, J_z = 0\rangle &= \frac{3}{2\sqrt{5}} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) - \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{5}} (|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle + \\
 &+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Антисимметричные состояния имеют вид

$$\begin{aligned}
 |J = 2, J_z = 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, 1/2\rangle - \\
 &- |3/2, 1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle), \\
 |J = 2, J_z = 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle - \\
 &- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle), \\
 |J = 2, J_z = 0\rangle &= \frac{1}{2} (|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle - \\
 &- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle) + \\
 &+ \frac{1}{2} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle - \\
 &- |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle), \\
 |J = 0, J_z = 0\rangle &= \frac{1}{2} (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle - \\
 &- |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) - \\
 &- \frac{1}{2} (|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle - \\
 &- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда, если заменить в выражении (2) $\pm A$ на опе-

ратор (20), для гамильтониана для системы N четырехуровневых попарно взаимодействующих атомов получим выражение

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{int} &= \frac{N(N-1)}{2} K + A \sum_{k < l} \left\{ \frac{2}{9} (\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^3 + \right. \\
 &+ \left. \frac{11}{18} (\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l)^2 - \frac{9}{8} (\hat{\mathbf{j}}_k \cdot \hat{\mathbf{j}}_l) - \frac{67}{32} \right\}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Усредненные по состояниям Дике значения энергии имеют вид

$$\begin{aligned}
 E_{int} &= \\
 &= A \left\{ -\frac{2}{9} \cdot \frac{75}{32} \frac{N(N-1)}{2} + \frac{11}{18} \cdot \frac{75}{32} \frac{N(N-1)}{2} - \right. \\
 &- \left. \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(R(R+1) - \frac{15}{4} N \right) - \frac{67}{32} \right\} + \\
 &+ \frac{N(N-1)}{2} K, \\
 E_{int} &= m\varepsilon + \frac{N(N-1)}{2} K - \\
 &- A \left\{ \frac{N}{384} (227N - 1037) + \frac{9}{16} R(R+1) \right\}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что, как и в предыдущем случае, энергетически наиболее выгодными при определенных значениях m являются подуровни с максимальным кооперативным числом. Таким образом, система четырехуровневых атомов будет вести себя аналогично системе атомов с пятью эквидистантными уровнями.

7. КОНСТАНТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В предыдущих разделах показано, что имеющее место вырождение состояний Дике с определенными значениями m в атомной системе снимается при учете в ней парного диполь-дипольного взаимодействия атомов. Причем степень расщепления уровней с заданными m при различных значениях кооперативного числа R целиком зависит от величины обменного, а не прямого дипольного взаимодействия [11]. Системы двух- и трехуровневых атомов перед окончательным сбросом когерентного сверхизлучения импульса находятся в состоянии $|R = 0, m = 0\rangle$ промежуточного равновесия в потенциальной яме, глубина которой определяется константой обменного дипольного взаимодействия. Для систем четырех- и пятиуровневых атомов наиболее выгодными в энергетическом отношении остаются подуровни с максимальными R , и, таким образом, при переходе системы во

все более низкие по m состояния система излучает с нарастающей интенсивностью

$$I = I_0(R + m)(R - m + 1)$$

пока, наконец, не перейдет в состояние с $m = 0$, после чего произойдет сброс когерентного сверхизлучения импульса.

Приведем оценку константы обменного дипольного взаимодействия, которая определяет глубину ямы для промежуточного квазиравновесного состояния, предшествующего сбросу сверхизлучения, находясь в котором система не излучает. Для этого учтем перекрытие координатных волновых функций Φ взаимодействующих одинаковых атомов. Согласно обменной теории возмущений [6], поправка к энергии взаимодействия, связанная с перестановкой атомов, определяется по формуле

$$\varepsilon(r) = \left(\Phi' | \hat{V}(r) | \Phi \right), \quad (25)$$

где штрихом отмечена волновая функция атомов, отличающаяся от исходной (без штриха) перестановкой ядер, $\hat{V}(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия атомов в дипольном приближении, где r — расстояние между ядрами.

Расчетная модель, аналогичная использованной в работе [14], состоит в следующем. Взаимодействие атомов будем описывать в виде потенциала типа потенциала Сюзерленда:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{c}{r^3} & r \geq \alpha, \\ \infty, & r < \alpha, \end{cases}$$

где C — константа, определяемая как произведение дипольных моментов переходов между «работающими» уровнями трех-, четырех-, пятиуровневой системы, α — расстояние, на котором действуют силы отталкивания между атомами.

Пусть T — температура газа. Тогда вероятность того, что расстояние между соседними атомами равно R , определяется бoльцмановской функцией

$$W(r) = \frac{\exp(-V(r)/T)}{Z},$$

где Z — нормировочный фактор, который определяется из условия

$$\int_0^{\rho} W(r) dr = 1$$

(ρ — среднее расстояние между атомами). Усредненное значение энергии найдем по модифицированной формуле:

$$\bar{\varepsilon} = \left(\Phi' | \hat{V}(r) W(r) | \Phi \right), \quad (26)$$

что эквивалентно усреднению с матрицей плотности в координатном представлении. Вектор состояния относительного движения атомов запишем в виде

$$|\Phi\rangle = e^{ikz} + f(\Theta)/r,$$

$z = r \cos \Theta$ — координата, отсчитанная вдоль оси, соединяющей атомы, $f(\Theta)$ — амплитуда рассеяния, определяемая взаимодействием атомов, т. е. потенциалом V , $k = p/\hbar$ — волновое число, \mathbf{p} — импульс относительного движения атомов. Вектор состояния, в котором учтена перестановка атомов, имеет вид

$$|\Phi'\rangle = e^{-ikz} + f(\pi - \Theta)/r.$$

Используя эти определения, получим для искомой энергии следующее выражение [14]:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3b^2T}{k\alpha^6} \frac{1}{r_0} \exp\left(\frac{4}{3}kr_0 - \frac{b}{\alpha^3}\right) \times \left(1 + \frac{2\bar{f}}{r_0} - \frac{1.5}{\alpha}\right) = A, \quad (27)$$

где A — константа взаимодействия, которая входит в (2), r_0 — эффективный радиус обменного взаимодействия, обусловленный степенью перекрытия координатных волновых функций, $b = C/T$, \bar{f} — амплитуда рассеяния, усредненная по области перекрытия координатных волновых функций.

Приведем численные оценки [14] для случая атомарного водорода. В области температур $T = 4.2 \cdot 10^{-14}$ эрг (≈ 300 К) константа $b = 5 \cdot 10^3 c$ (где $c \approx 0.3$), а $k \approx 1$ (значения приведены в атомных единицах). Радиус потенциального барьера в модели Сюзерленда обычно выбирается в области ван-дер-ваальсового минимума и приблизительно равен $\alpha \approx 5$, а эффективный радиус $r_0 \approx 10$. При таких значениях величин из (27) получаем $A \approx 3T$. Константа прямого диполь-дипольного взаимодействия при заданных параметрах $A \approx 2 \cdot 10^{-14}$ эрг, т. е. в шесть раз меньше.

Увеличение константы взаимодействия атомов за счет обменных эффектов есть следствие интерференционного перераспределения концентрации атомов в газе таким образом, что существенно повышается вероятность «интерференционного» контакта атомов, дипольным образом попарно связанных друг с другом.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная здесь каскадная схема излучения многоуровневых атомов с эквидистантными энергетическими состояниями является таковой в классическом понимании этого термина, однако рассматривается не столько как каскад последовательных двухуровневых переходов, сколько как единая система, характеризующаяся квантовым изоспиновым числом и проекцией его на условно выделенную ось. Именно эта аналогия с системой частиц, состояние которых полностью характеризуется определенным моментом и его проекцией, позволяет использовать стандартные способы описания спиновых систем. Кооперативное число и его проекция, характеризующие состояния Дике, в указанной терминологии являются ни чем иным, как полным изоспином системы и его проекцией.

В настоящей работе мы показали, что существует закономерность в реализации основного состояния атомных сверхизлучательных систем: атомы, имеющие изоспин $j = 1/2$, $j = 1$, будут преимущественно конденсироваться в состояние с кооперативным числом $R = 0$ с последующим «зависанием» системы, после чего с некоторой задержкой наступает сброс сверхизлучения. Тогда как система с частицами, обладающими изоспином $j = 3/2$, $j = 2$, будет реализовывать в качестве основного состояние с максимальным кооперативным числом, что будет обеспечивать им плавный переход в режим коллективного когерентного сброса импульса сверхизлучения. Эта закономерность обусловлена с формальной точки зрения структурой гамильтонианов, описывающих поведение системы атомов при учете в них парного взаимодействия, а именно, степенью операторов скалярного произведения изоспинов. Так, в системе двухуровневых атомов указанный оператор входит в первой степени [11], в системе трехуровневых атомов — в первой и во второй степенях, в четырехуровневых — в первой, во второй и в третьей, в пятиуровневых — с первой по четвертую степени. При этом в случае четырех- и пятиуровневых атомов члены с четными степенями указанных операторов практически компенсируют друг друга в диапазоне изменения полного изоспина пары. Таким образом, определяющим является кубический член, тогда как в системе трехуровневых атомов определяющим является именно квадратичный член с характерной ямой параболического типа и с минимумом, соответствующим $R = 0$.

Приведенные оценки константы обменного дипольного взаимодействия позволяют судить о степе-

ни расщепления коллективных уровней энергии системы и, таким образом, о степени влияния фактора дипольного взаимодействия на наличие или отсутствие задержки перед импульсом сверхизлучения. Так, оценки константы обменного дипольного взаимодействия для щелочных металлов группы натрия дают значение около 0.06–0.07 эВ, и указанное расщепление играет существенную роль для переходов в диапазоне длин волн от 3 до 9 мкм.

Обсуждаемые в работе [10] эффекты сверхизлучения в сильно замагниченной плазме, происходящие за счет переходов между близкорасположенными уровнями Ландау, открывают широкие возможности для реализации идеи системы большого числа эквидистантных уровней, например, в низкоразмерных системах типа полупроводниковых пленок, помещенных в магнитное поле. Такие системы могут обеспечить наличие любого числа дискретных уровней Ландау, которые априори являются эквидистантными. Именно в таких системах можно было бы экспериментально наблюдать эффект Дике для многоуровневых систем в чистом виде.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17686), программы «Университеты России» (грант УР.01.01.040) и Министерства образования РФ (грант № Е02-3.2-287).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988); С. А. Ахманов, Ю. В. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику*, Наука, Москва (1981); Ю. Л. Климонтович, *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Наука, Москва (1980).
2. R. Bonifacio, P. Schwendiman, and F. Haake, *Phys. Rev. A* **4**, 302, 854 (1971).
3. F. De Martini and G. Preparata, *Phys. Lett.* **48**, 43 (1974); B. Coffey and R. Friedberg, *Phys. Rev. A* **17**, 1033 (1978).
4. R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
5. V. I. Yukalov, *Acta Phys. Pol. A* **57**, 295 (1980).
6. Т. М. Махвиладзе, Л. А. Шелепин, *ЖЭТФ* **62**, 2066 (1972); Л. А. Шелепин, *ЖЭТФ* **54**, 1463 (1968).
7. Т. М. Махвиладзе, Л. А. Шелепин, Препринт ФИАН № 145 (1971); Э. Ш. Теплицкий, *ТМФ* **2**, 399 (1970).

8. А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов
ЖЭТФ **84**, 475 (1983).
9. K. Nakamura and S. J. Washimiga, *J. Phys. C* **13**,
3483 (1980); H. Steudel, *Ann. Physik Leipz.* **37**, 57
(1980); C. R. Stroud, J. H. Eberly, W. L. Lama, and
L. Mandel, *Phys. Rev. A* **5**, 1094 (1972).
10. Л. И. Меньшиков, УФН **169**, 113 (1999).
11. Е. В. Орленко, Б. Г. Матисов, ЖЭТФ **116**, 1148
(1999).
12. А. В. Андреев, Р. В. Арутюнян, Ю. А. Ильин-
ский, *Опт. и спектр.* **50**, 1050 (1981); А. В. Андреев,
В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, УФН **131**, 653
(1980).
13. V. A. Malyshev, I. V. Ryzhov, E. D. Trifonov, and
A. I. Zaitzev, *Opt. Comm.* **180**, 59 (2000); F. Haake
and R. Reibold, *Phys. Lett. A* **92**, 29 (1982); F. Haake
and R. Reibold, *Phys. Rev. A* **29**, 3208 (1984);
F. Haake and R. Reibold, *Opt. Acta* **31**, 107 (1984).
14. Е. В. Орленко, А. А. Румянцев, ФНТ **15**, 485 (1989);
Е. Орленко, И. Мазец, Б. Матисов, ЖТФ **73**, 30
(2003).