

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЧАСТИЦ

*В. Н. Родионов**

*Московский государственный геологоразведочный университет
118873, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 июня 2003 г.

При наличии аномального магнитного момента электронов и позитронов в однопетлевом приближении вычислена точная лагранжева функция интенсивного постоянного магнитного поля, заменяющая собой лагранжиан Гейзенберга–Эйлера в традиционной КЭД. Установлено, что найденное обобщение лагранжевой функции вещественно при произвольных значениях магнитного поля. В слабом поле вычисленный лагранжиан совпадает с известной формулой Гейзенберга–Эйлера. При экстремально сильных полях зависимость лагранжиана от поля полностью исчезает, и в этой области он стремится к константе, определяемой значением аномальных магнитных моментов частиц.

PACS: 12.20.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1936 г. Гейзенбергом и Эйлером [1] были впервые вычислены квантовые поправки к максвелловской лагранжевой функции постоянного электромагнитного поля. Изучение радиационных поправок, отвечающих поляризации электрон-позитронного вакуума внешними электромагнитными полями, с диаграммами, содержащими различное число электронных петель, до сих пор остается в центре внимания [2–4]. Проведенные оценки свидетельствуют о том, что лишь в экспоненциально сильных электромагнитных полях¹⁾ ($F_c \sim \exp(3\pi/\alpha)H_c$) квантовые (радиационные) поправки могли бы достигнуть величины максвелловской плотности энергии электромагнитного поля [5]. Как известно, вычисления Гейзенберга и Эйлера не содержат приближений по интенсивности внешних электромагнитных полей, а полученные ими результаты были многократно подтверждены расчетами, проведенными в рамках иных подходов.

*E-mail: physics@msgpa.ru

¹⁾ Здесь использована система единиц $\hbar = c = 1$, $H_c = m^2/|e| = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс — характерный масштаб напряженности электромагнитных полей в КЭД, e и m — заряд и масса электрона, $\alpha = e^2 = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

На этом основании в ряде работ величина поля F_c отождествлялась с границей применимости общепринятой КЭД. Однако очевидно, что хотя подобные оценки чрезмерно завышены, так как отвечающие им характерные длины оказываются на много порядков меньше не только масштаба проявления слабых взаимодействий, но и «планковской» длины, в принципиальном плане задача выявления пределов справедливости традиционной КЭД весьма актуальна. Говоря о физике сверхмалых расстояний, нельзя не сказать о глубокой аналогии²⁾, существующей между явлениями, возникающими при больших переданных импульсах, и процессами, идущими в интенсивных электромагнитных полях [2–17]. Пересечение, казалось бы, совершенно различных областей физики на самом деле не случайно и подсказывается простыми соображениями размерности.

Как известно, важную роль при изучении квантовых эффектов взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем играет учет интенсивности электромагнитного поля, опирающийся на точную интегрируемость уравнений движения. В част-

²⁾ На эту аналогию впервые обратили внимание Мигдал [6] и Ритус [2].

ности, известная швингеровская поправка к магнетону Бора

$$\mu_0 = \frac{e}{2m},$$

называемая аномальным магнитным моментом частицы,

$$\Delta\mu = \mu_0 \frac{\alpha}{2\pi},$$

проявляется лишь в нерелятивистском пределе в случае слабых квазистатических полей [7]. Действительно, при точном учете влияния интенсивного внешнего поля аномальный магнитный момент частицы, вычисленный в рамках КЭД как однопетлевая радиационная поправка, убывает с ростом интенсивности поля и увеличением энергии движущихся частиц от швингеровского значения до нуля. В частности, в области магнитных полей $H \sim H_c$ аномальный магнитный момент электрона описывается асимптотической формулой [7, 10]

$$\Delta\mu(H) = \mu_0 \frac{\alpha}{2\pi} \frac{H_c}{H} \ln \frac{2H}{H_c}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что $\Delta\mu(H)$, убывая с ростом поля, только в одной точке обращается в нуль. Аналогичное выражение для величины аномального магнитного момента электрона в интенсивном постоянном скрещенном поле $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ($E = H$) при $H p_{\perp} \gg m H_c$, где p_{\perp} — компонента импульса электрона перпендикулярная $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, представимо в виде [11]

$$\Delta\mu(E) = \mu_0 \frac{\alpha \Gamma(1/3)}{9\sqrt{3}} \left(\frac{3p_{\perp} H}{m H_c} \right)^{-2/3}. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что $\Delta\mu(E) \neq 0$ во всей области изменения параметров.

В этой связи отметим, что многочисленные расчеты лагранжевой функции электромагнитного поля (см., например, [1–3, 5–7, 11]) выполнялись в предположении, что магнитный момент электронов в точности равен магнетону Бора³⁾, т. е. при $\Delta\mu = 0$. Однако для выяснения внутренней замкнутости КЭД существенно, к каким следствиям приведет учет аномальных магнитных моментов электронов и позитронов при вычислении поляризации электрон-позитронного вакуума интенсивными электромагнитными полями.

Таким образом, представляет интерес сравнить радиационные поправки к максвелловской лагранжевой функции постоянного поля, вычисленные тра-

диционным образом, с результатами, которые можно получить из аналогичных расчетов при учете аномальных магнитных моментов частиц, отличных от нуля. Серьезного внимания заслуживает и то, что вычисления лагранжиана, заменяющего собой лагранжиан Гейзенберга–Эйлера с ненулевыми значениями аномальных магнитных моментов, можно провести, сохранив метод точных решений уравнения Дирака в электромагнитных полях произвольной интенсивности. В развиваемом подходе предлагаемое теоретическое обобщение изначально не содержит ограничений на интенсивности электромагнитных полей.

Следует отметить, что ненулевые значения аномальных магнитных моментов появляются и в некоторых модифицированных квантовых теориях поля, описывающих также и электромагнитные взаимодействия. В частности, это имеет место в варианте обобщения традиционной квантовой теории поля, известном как теория с «фундаментальной массой» (см., [12, 13] и цитируемые там работы). Отправным пунктом этой теории является условие ограниченности спектра масс элементарных частиц, представленное в виде

$$m \leq M, \quad (3)$$

где новый универсальный параметр M носит название фундаментальной массы. Соотношение (3) используется как некий дополнительный фундаментальный физический принцип, который и положен в основу новой квантовой теории поля. Существенным отличием от традиционных расчетов является то, что в «КЭД с фундаментальной массой» заряженные лептоны обладают магнитными моментами, не равными магнетону Бора. Это обусловлено тем, что в новом лагранжиане электромагнитного взаимодействия, помимо традиционного «минимального» члена, присутствуют «неминимальные» слагаемые. Тем самым в модифицированной КЭД электрон изначально обладает аномальным магнитным моментом, который равен

$$\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \mu_0 \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{M^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

Важным аспектом рассматриваемой проблемы является то, что современный уровень развития лазерной физики [14] позволяет приступить к постановке ряда оптических экспериментов для непосредственного измерения величин вкладов, обусловленных нелинейными вакуумными эффектами, предсказываемыми различными обобщениями электро-

³⁾ Отметим, что в работе [4] учет аномальных магнитных моментов частиц проводился при анализе равновесных процессов в вырожденном электрон-нуклонном газе в сильном магнитном поле.

динамики Максвелла [15]. В этой связи следует подчеркнуть, что экспериментальная проверка нелинейных эффектов в вакууме, проводимая с высокой точностью в присутствии сравнительно слабых электромагнитных полей, может дать также ценную информацию и о правильности предсказаний КЭД на малых расстояниях [16, 17]. Отметим попутно, что в том же смысле актуальны прецизионные измерения различных величин (например, аномальных магнитных моментов электрона и мюона), проводимые в нерелятивистской области энергий, наряду с изучением взаимодействия частиц при высоких энергиях.

2. ПОПРАВКА К ЛАГРАНЖЕВОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ ЧАСТИЦ

Рассмотрим с этой точки зрения поправку к лагранжевой функции электромагнитного поля, обусловленную поляризацией электрон-позитронного вакуума в присутствии сколь угодно сильного постоянного магнитного поля с учетом отличных от нуля аномальных магнитных моментов частиц. Для решения этой задачи, так же как и в известном подходе [5], удобно представить электрон-позитронный вакуум как систему электронов, заполняющих уровни с «отрицательной» энергией. Заметим, что для случая постоянного и однородного магнитного поля уравнение Дирака–Паули, содержащее взаимодействие заряженного лептона с полем (включая и аномальный магнитный момент частицы), имеет точное решение [18]. При этом собственные значения энергии явным образом зависят от ориентации спина по отношению к оси симметрии, задаваемой направлением магнитного поля. Таким образом, спектр энергии электрона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле произвольной интенсивности, имеет вид

$$E_n(p, H, \xi) = m \left[\frac{p^2}{m^2} + \left(\sqrt{\left| \frac{H}{H_c} \right| (1+2n+\xi)} + 1 + \xi \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0} \frac{H}{H_c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где p — проекция импульса электрона на направление внешнего поля \mathbf{H} , $n = 0, 1, 2, \dots$ — квантовое число, нумерующее уровни Ландау, величина $\xi = \pm 1$ характеризует проекцию спина электрона на направление магнитного поля.

Замечая, что радиационная добавка к классической плотности функции Лагранжа совпадает с точностью до знака с полной плотностью энергии электрон-позитронного вакуума при наличии внешнего поля [5],

$$\mathcal{L}' = -W^H,$$

рассчитаем W^H в постоянном магнитном поле с учетом аномального магнитного момента электрона. Не останавливаясь на деталях стандартных расчетов, представим W^H в виде

$$W^H = -\frac{|eH|}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[-\varepsilon_0^+(p) + \sum_{n=0}^{\infty} [\varepsilon_n^-(p) + \varepsilon_n^+(p)] \right], \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_n^{\pm} = \sqrt{p^2 + m^2 \left(\sqrt{1 + 2\frac{H}{H_c}n} \pm \frac{H}{4H_c^*} \right)^2}. \quad (7)$$

Используя интегральные преобразования Лапласа и Фурье для функций, определяющих (6), и проводя суммирование по уровням Ландау, для \mathcal{L}' можно получить

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4 \gamma b_1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} e^{-\eta} \times \left[\text{sh} b + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} dx}{x} \text{ctg} \left(-\frac{i\gamma\eta}{b_1} + x\gamma \right) \times \times {}_1F_2 \left(\{1\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}, -\frac{b^4}{64x^2} \right) \right], \quad (8)$$

где введены обозначения

$$a_1 = \frac{\eta H}{2H_c^*}, \quad b_1 = 1 + \left(\frac{H}{4H_c^*} \right)^2, \quad b = \frac{a_1}{b_1}, \quad \gamma = \frac{H}{H_c},$$

${}_1F_2(z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция. Формула (8) представляет собой точное выражение для функции Лагранжа с учетом аномального магнитного момента, рассчитанное в однопетлевом приближении в магнитном поле произвольной интенсивности. Важное отличие от лагранжиана Гейзенберга–Эйлера состоит в том, что выражение (8) содержит дополнительный полевой масштаб

$$H_c^* = \frac{m}{4\Delta\mu}. \quad (9)$$

Отметим, что в рамках теории с фундаментальной массой эту величину

$$H_c^* = \frac{M^2}{e} = \frac{M^2}{m^2} H_c \quad (10)$$

естественно назвать фундаментальным полем.

Перейдя в (8) к пределам интегрирования по x от нуля до ∞ и воспользовавшись свойством четности функции ${}_1F_2(z)$, имеем

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4 \gamma b_1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} e^{-\eta} \left[\text{sh } b + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{\sin(2\gamma x) \cos x + \sin x \text{sh } y}{\text{ch}(2y) - \cos(2\gamma x)} {}_1F_2(z) \right], \quad (11)$$

где $y = \eta\gamma/b_1$, $z = -b^4/64x^2$.

Из (11), в частности, непосредственно следует, что

$$\text{Im } \mathcal{L}' = 0.$$

Вещественность лагранжиана \mathcal{L}' при всех возможных значениях поля указывает на отсутствие нестабильных мод, т.е. вакуум в постоянном и однородном магнитном поле в рассматриваемом случае, так же как и в традиционной КЭД, устойчив по отношению к спонтанному образованию электрон-позитронных пар.

Выделим далее в выражении (11) интеграл по x . После ряда очевидных замен он приводится к виду

$$I = \int_0^\infty \frac{du [2a_2 \sin u \cos(b_2 u) + (1 - a_2^2) \sin(b_2 u)]}{u [1 + a_2^2 - 2a_2 \cos u]} \times {}_1F_2(z_1), \quad (12)$$

где

$$a_2 = e^{-2y}, \quad b_2 = \frac{1}{2\gamma}, \quad z_1 = -\frac{b^4(2\gamma)^2}{64u^2}.$$

Учитывая справедливость разложений

$$\frac{\sin u}{1 + a_2^2 - 2a_2 \cos u} = \sin u + a_2 \sin(2u) + a_2^2 \sin(3u) + \dots,$$

$$\frac{1 - a_2^2}{1 + a_2^2 - 2a_2 \cos u} = 1 + 2a_2 \cos u + 2a_2^2 \cos(2u) + \dots,$$

для (12) получим

$$I = \int_0^\infty \frac{du}{u} \left[-\sin(b_2 u) + 2 \sum_{k=0}^\infty a_2^k \sin[u(k + b_2)] \right] \times {}_1F_2(z_1). \quad (13)$$

Легко видеть, что в поле, которое является слабым по сравнению с фундаментальным полем H_c^* , мы можем воспользоваться разложением функции ${}_1F_2(z_1)$ в нуле:

$${}_1F_2(z_1) = 1 + \frac{16}{3} z_1 + \frac{256}{105} z_1^2 + \dots, \quad (14)$$

и для (13) получить

$$I = \frac{\pi}{2} \frac{1 + a_2}{1 - a_2} = \frac{\pi}{2} \text{cth } y, \quad (15)$$

где $y = \eta\gamma$.

Подставляя (15) в (11) и проводя стандартную регуляризацию полученного интеграла [5], имеем

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[\eta\gamma \text{cth}(\eta\gamma) - 1 - \frac{\eta^2 \gamma^2}{3} \right] d\eta. \quad (16)$$

Таким образом, из (16) следует, что в пределе «слабого поля» формула (11) совпадает с результатом Гейзенберга–Эйлера [1] для случая постоянного однородного магнитного поля произвольной интенсивности.

Рассмотрим далее область $H > 4H_c^*$. Нетрудно убедиться, что в пределе сверхсильных полей, $H \gg 16H_c^{*2}/H_c$, мы опять можем воспользоваться разложением (14) и для интеграла (13) получить выражение

$$I = \frac{\pi}{2} \text{cth } y, \quad (17)$$

где $y = 16\eta H_c^{*2}/(H_c H)$. Результаты (15) и (17) имеют простой смысл: при достаточно широкой энергетической щели, разделяющей электронные и позитронные состояния, основной вклад в интеграл (13) формируют слагаемые с большими номерами k . Однако в области магнитных полей, близких к значению фундаментального поля, $H \sim 4H_c^*$, т.е. когда ширина щели близка к нулю, в подынтегральной сумме в (13) основной вклад дает слагаемое с $k = 0$. Интеграл (13) в этом случае может быть вычислен точно. Расчеты приводят к простому результату:

$$I = \frac{\pi}{2} \text{ch} \left[\eta \frac{H}{2H_c^*} \frac{1}{1 + (H/4H_c^*)^2} \right]. \quad (18)$$

Оценки интеграла (12) в трех областях изменения магнитного поля ($H \ll H_c^*$, $H \sim 4H_c^*$,

$H \gg H_c^*$), можно представить в виде единой формулы

$$I = \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \left[\eta \frac{H}{2H_c^*} \frac{1}{1 + (H/4H_c^*)^2} \right] \times \operatorname{cth} \left[\frac{\eta\gamma}{1 + (H/4H_c^*)^2} \right]. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (11) и проводя регуляризацию оставшегося расходящегося интеграла⁴⁾, для \mathcal{L}' получим

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left[\eta b_1 \gamma \frac{\operatorname{ch}[(1+a)\eta\gamma/b_1]}{\operatorname{sh}(\eta\gamma/b_1)} - b_1^2 - \frac{\eta^2}{6} \gamma^2 (2 + 6a + 3a^2) \right], \quad (20)$$

где $a = H_c/2H_c^*$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В слабых полях ($H \ll H_c$), а также в пределе очень сильных магнитных полей ($H \gg 16H_c^{*2}/H_c$) подынтегральное выражение в (20) допускает разложение в ряд, и в первом приближении мы имеем

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4 \gamma^4}{2880\pi^2 b_1^2} [8 - 15a^2(2+a)^2] \int_0^\infty d\eta \eta e^{-\eta},$$

откуда следует

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4 \gamma^4}{2880\pi^2 b_1^2} [8 - 15a^2(2+a)^2]. \quad (21)$$

Таким образом, квантовая добавка к максвелловской лагранжевой функции в пределе слабого поля ($H \ll H_c$) представима в виде

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4}{360\pi^2} \frac{H^4}{H_c^4} \times \left[1 - \frac{15}{2} a^2 - \frac{15}{2} a^3 - \frac{15}{8} a^4 + \mathcal{O}(\gamma^2; \gamma^2 a^2) \right], \quad (22)$$

⁴⁾ Отметим, что, во-первых, как обычно [5], следует отбросить часть интеграла, не содержащую напряженности магнитного поля и представляющую собой энергию свободных вакуумных электронов. Во-вторых, необходимо вычесть вклад, пропорциональный H^2 , который уже включен в невозмущенную энергию поля. Отбрасывание этого слагаемого связано с перенормировкой напряженности поля, а тем самым и заряда. Наконец вычитание вклада порядка H^4/H_c^4 по существу соответствует перенормировке дополнительного параметра теории — аномального магнитного момента частицы.

где первый член совпадает с известной формулой Гейзенберга–Эйлера. Первая поправка к ней, обусловленная наличием аномальных магнитных моментов частиц, отрицательна и квадратична по параметру a .

В сверхсильном поле ($H \gg 16H_c^{*2}/H_c$) из (21) можно также получить

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4}{180\pi^2 a^4} (8 - 60a^2 - 60a^3 - 15a^4) \times \left(1 - \frac{8}{\gamma^2 a^2} \right). \quad (23)$$

Согласно (23), в пределе экстремально сильных полей лагранжиан \mathcal{L}' перестает зависеть от поля, т. е. квантовая поправка к плотности функции Лагранжа в рассматриваемом случае с ростом поля асимптотически стремится к константе

$$\mathcal{L}'_\infty = \frac{\alpha^2}{360\pi^2 (\Delta\mu)^4}. \quad (24)$$

Полученный результат в каком-то смысле можно сопоставить с ситуацией, наблюдающейся в Стандартной модели, когда для ряда процессов рост сечений с ростом энергии останавливается, если в рассмотрение наряду с фотоном, векторными W^\pm - и Z^0 -бозонами включается дополнительная диаграмма с хиггсовским H -бозоном. Учет этой диаграммы сокращает растущие члены в амплитуде и приводит к поведению сечений, согласующемуся с унитарным пределом. Как известно, Стандартная модель не предсказывает массу H -бозона, поэтому не исключено, что данная частица значительно тяжелее t -кварка, самой тяжелой из известных ныне элементарных частиц. Таким образом, может оказаться, что $M_H \sim 1$ ТэВ и является предельной массой, ограничивающей спектр масс элементарных частиц, т. е. играет роль фундаментальной массы (см. (3))⁵⁾.

Сопоставляя поправку \mathcal{L}' с лагранжевой функцией максвелловского поля, найдем интенсивность поля:

$$F_c^* = \sqrt{\frac{256\alpha}{45\pi}} \frac{H_c^{*2}}{H_c}, \quad (25)$$

при которой величина \mathcal{L}_0 сравнивается с (24). При $H = F_c^*$ квантовая поправка \mathcal{L}' еще не достигает своего асимптотического значения \mathcal{L}'_∞ . В ре-

⁵⁾ Заметим в этой связи, что центральным пунктом программы исследований на Большом адронном коллайдере (ЛHC) в CERN является поиск хиггсовских бозонов в диапазоне значений масс до 1 ТэВ.

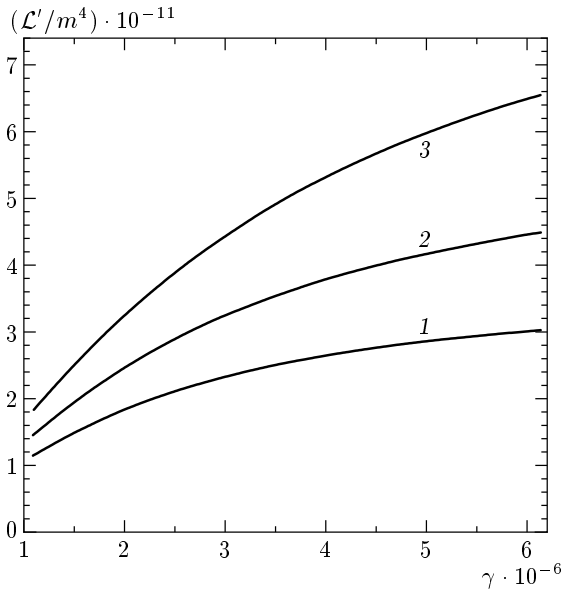


Рис. 1. Зависимость нормированной лагранжевой функции \mathcal{L}'/m^4 от интенсивности магнитного поля $\gamma = H/H_c$ при различных значениях аномальных магнитных моментов частиц: 1 — $\Delta\mu_1/\mu_0 = 10^{-3}$; 2 — $\Delta\mu_2/\mu_0 = 10^{-3.05}$; 3 — $\Delta\mu_3/\mu_0 = 10^{-3.1}$

зультате сравнения \mathcal{L}_0 и \mathcal{L}' в других областях изменения поля становится очевидным, что поправки \mathcal{L}' всегда малы по сравнению с лагранжевой функцией \mathcal{L}_0 . Зависимости относительных величин поправок \mathcal{L}'/m^4 от параметра интенсивности магнитного поля $\gamma = H/H_c$, построенные на основании (20) в случае, когда аномальные магнитные моменты частиц принимают значения: $\Delta\mu_1/\mu_0 = 10^{-3}$, $\Delta\mu_2/\mu_0 = 10^{-3.05}$, $\Delta\mu_3/\mu_0 = 10^{-3.1}$, представлены на рис. 1.

Оценку лагранжевой функции в области сильных магнитных полей проведем, исходя из формулы (20), которую с помощью замены $\gamma\eta/b_1 \rightarrow x$ представим в виде

$$\mathcal{L}' = -\frac{m^4\gamma^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-b_1 x/\gamma)}{x^3} \times \left[x \frac{\text{ch}[x(1+a)]}{\text{sh}(x)} - 1 - \frac{x^2}{3} \left(1 + 3a + \frac{3}{2}a^2 \right) \right] dx. \quad (26)$$

При $H_c \ll H \ll 16H_c^{*2}/H_c$ в интеграле (26) существенна область $1 \ll x \ll 16H_c^{*2}/H_c^2$. В этом случае гиперболические функции можно заменить экспонентами, и подынтегральная функция в (26) при-

обретает вид

$$\frac{\exp[f_1(a, \gamma, x)]}{x^2} - \frac{\exp[f_2(a, \gamma, x)]}{x^3} - \frac{\exp[f_2(a, \gamma, x)]}{3x} \left(1 + 3a + \frac{3}{2}a^2 \right), \quad (27)$$

где

$$f_1(a, \gamma, x) = -\frac{1}{4\gamma}(2 - a\gamma)^2 x, \\ f_2(a, \gamma, x) = -\frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{a^2}{4}\gamma^2 \right) x.$$

При $H_c \ll H < 4H_c^*$ ($1 \ll \gamma < 2/a$) получаем $f_1 \sim f_2 = -x/\gamma$ и с логарифмической точностью из (26) имеем

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4\gamma^2}{24\pi^2} \left(1 + 3a + \frac{3}{2}a^2 \right) \ln \gamma, \quad (28)$$

что при $a \rightarrow 0$ совпадает с результатом Гейзенберга–Эйлера в пределе сильных магнитных полей $H \gg H_c$ [5].

Если $4H_c^* < H \ll 16H_c^{*2}/H_c$, или $2/a < \gamma \ll 4/a^2$, имеем $f_1 \sim f_2 = -\gamma a^2 x/4$. Основной вклад в интеграл дает область $1 \ll x \ll 4/(a^2\gamma)$. Из (26) в этом случае находим

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4\gamma^2}{24\pi^2} \left(1 + 3a + \frac{3}{2}a^2 \right) \left(2 \ln \frac{2}{a} - \ln \gamma \right). \quad (29)$$

При $H \gg 16H_c^{*2}/H_c$ мы возвращаемся к случаю, рассмотренному выше (см. (23)), когда основной вклад в интеграл (26) дает область $x \ll 1$.

Если $a\gamma = 2$, т. е. при $H = 4H_c^*$, в одной из экспонент в (27) показатель (f_1) обращается в нуль. Нетрудно убедиться, что это слагаемое обусловлено вкладом основного энергетического состояния ε_0^- (см. формулу (7)), в котором при этом значении поля полностью выпадает зависимость от массы частиц. Такого состояния с «выпадающей» массой при фиксированном поле нет в структуре лагранжиана Гейзенберга–Эйлера. Однако, если рассмотреть предельный переход $m^2 \rightarrow 0$, то лагранжиан Гейзенберга–Эйлера может имитировать подобный эффект. Легко видеть, что интегральный вклад основного состояния оказывается малым по сравнению с вкладом последнего члена в (27), возникновение которого обязано проведению процедуры перенормировки поля в выражении (11). К аналогичному выводу можно прийти, и рассматривая интеграл (16).

Комментируя аналогию между пределами $m^2 \rightarrow 0$ в лагранжиане Гейзенберга–Эйлера (см. формулу (16)) и $H \rightarrow 4H_c^*$ в (26), следует подчеркнуть следующее. Как показано выше, при

$H = 4H_c^*$ в модифицированном лагранжиане, так же как и в лагранжиане Гейзенберга–Эйлера при $m^2 = 0$, обращается в нуль показатель экспоненты в слагаемых, вклад которых исчезающе мал на фоне вкладов, обусловленных процедурой перенормировки. Другими словами, в обоих случаях основные состояния в структуре подынтегральной функции одинаково выделены, но их вклад в интеграл не является определяющим.

Пренебрегая первым и вторым членами в (27), из (26) имеем

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4}{6\pi^2 a^2} \left(1 + 3a + \frac{3a^2}{2} \right) \ln \frac{2}{a}.$$

Отметим, что этот результат согласуется с формулами (28) и (29), из которых он может быть получен простой подстановкой $\gamma = 2/a$. Таким образом, в точке $H = 4H_c^*$ эти функции непрерывно сшиваются.

Наконец, оценим лагранжиан \mathcal{L}' в рамках традиционной КЭД, т. е. учтем отличные от нуля аномальные магнитные моменты частиц в интенсивных электромагнитных полях, обусловленные радиационными эффектами. Подставляя в выражение $b_1 = 1 + (\Delta\mu H/m)^2$ значения $\Delta\mu$ из (1), получим оценку \mathcal{L}' (26) в пределе сверхсильных полей. Для случая постоянного магнитного поля $\gamma \gg \mu_0/\Delta\mu$, имеем

$$b_1 \sim \alpha_2 \ln^2(2\gamma),$$

где

$$\alpha_2 = \alpha^2/16\pi^2.$$

Показатель экспоненты в (26) в этом случае равен

$$f_3 = -x \frac{b_1}{\gamma} = -\frac{\alpha_2 \ln^2(2\gamma)}{\gamma} x.$$

Если $\gamma \gg \alpha_2 \ln^2(2\gamma)$, в (26) существенна область $1 \ll x \ll \gamma/\alpha_2 \ln^2(2\gamma)$. Таким образом, из (26) можно получить

$$\mathcal{L}' = \frac{m^4 \gamma^2}{24\pi^2} [\ln \gamma - \ln \alpha_2 - 2 \ln(\ln 2\gamma)]. \quad (30)$$

Отметим, что первое слагаемое в (30) совпадает с аналогичной оценкой в теории Гейзенберга–Эйлера [5]. Зависимость относительной эффективной функции Лагранжа \mathcal{L}'/m^4 от интенсивности магнитного поля, построенная на основе интегрального представления (26) (при этом величина $\alpha_2 \approx 3.4 \cdot 10^{-7}$), приведена на рис. 2 (кривая 1). На том же графике для сравнения изображена и зависимость, соответствующая случаю $\Delta\mu = 0$ (кривая 2).

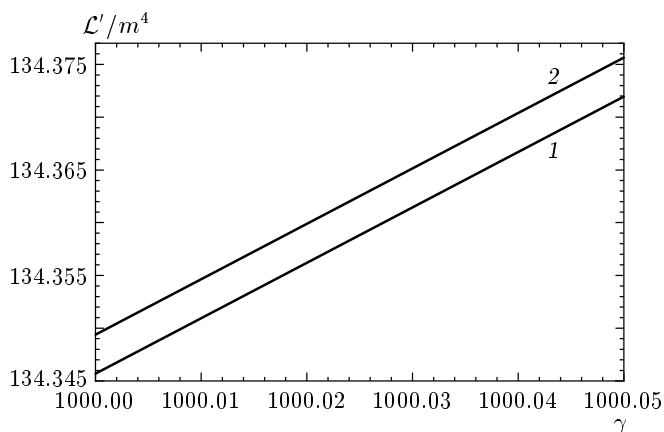


Рис. 2. Зависимость лагранжевой функции от интенсивности магнитного поля $\gamma = H/H_c$ с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) аномального магнитного момента электрона

Обратим внимание, что учет аномальных магнитных моментов вакуумных частиц, проведенный в рамках общепринятой КЭД, приводит к уменьшению радиационной поправки к плотности энергии поля. Напомним, что к аналогичному выводу мы пришли, рассматривая случай статического аномального магнитного момента, возникающего, в частности, в модифицированной теории поля. Таким образом, независимо от природы аномального магнитного момента, обусловленной динамическим или статическим типами взаимодействия, мы получаем согласующиеся результаты. Полученные выводы важны и с точки зрения изучения аномального магнитного момента, как наиболее точной расчетной и измеримой в многочисленных прецизионных экспериментах характеристики частиц.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты могут иметь важное значение при построении астрофизических моделей, в частности, при изучении экстремально намагниченных нейтронных звезд — магнетаров, интерес к существованию которых заметно возрос в последнее время (см., например, [4] и цитируемые там работы). Согласно моделям макроскопической намагниченности тел, состоящих в основном из нейтронов, индукция «вмороженных» в них магнитных полей увеличивается от поверхности к центральным областям и может достигать $10^{15} - 10^{17}$ Гс [19].

Заметим также, что усиление радиационных эффектов посредством внешних интенсивных электро-

магнитных полей может иметь место не только в абелевых, но и в неабелевых квантовых теориях поля. В этой связи укажем, что к нетривиальным результатам приводит, например, учет в рамках Стандартной модели влияния внешнего поля на такие характеристики, как масса и магнитный момент лептонов. В этом случае однопетлевой массовый оператор заряженного лептона наряду с электродинамическим содержит также вклады, обусловленные взаимодействием с вакуумом W^{\pm} , Z^0 - и H -бозонов. Легко видеть, что в отсутствие внешнего поля вклад в радиационный сдвиг массы лептона m от слабых взаимодействий по сравнению с электродинамическим вкладом подавлен в $(m/M_i)^2$ раз ($i = W, Z, H$). Однако в ультрарелятивистском пределе в интенсивных внешних полях вклады слабых токов могут доминировать, на что впервые было обращено внимание в работе [20] (см. также [21]).

Аномальные магнитные моменты заряженных лептонов в Стандартной модели, в полной аналогии с квантовыми поправками к массам частиц, обусловлены вакуумными радиационными эффектами электромагнитных и слабых взаимодействий, а также содержат вклад адронной поляризации вакуума. Например, для аномального магнитного момента мюона имеем

$$a_{\mu}^{SM} = a_{\mu}^{QED} + a_{\mu}^{weak} + a_{\mu}^{had}.$$

Согласно теоретическим оценкам, проведенным в рамках Стандартной модели совсем недавно [22], вклады от электромагнитных и слабых взаимодействий можно записать в виде

$$a_{\mu}^{QED} = 11658470.57(0.29) \cdot 10^{-10},$$

$$a_{\mu}^{weak} = 15.1(0.4) \cdot 10^{-10}.$$

Хотя расчеты вкладов в a_{μ}^{SM} , обусловленные адронной поляризацией вакуума, имеют почти сорокалетнюю историю, на сегодняшний день величина a_{μ}^{had} известна с наибольшей неопределенностью (см., например, [23–28]). Одна из наиболее надежных оценок вкладов в адронную поляризацию вакуума низшего порядка, обобщающая данные по адронному τ -распаду и e^+e^- -аннигиляции, выглядит как [23, 24]⁶⁾

$$a_{\mu}^{had} = 692(6) \cdot 10^{-10},$$

⁶⁾ См., однако, работу [25], где проведено вычисление вклада высших порядков адронной поляризации вакуума, а также недавние работы [26, 27], содержащие учет вклада диаграмм третьего порядка в a_{μ}^{had} , обусловленного фотон-фотонным рассеянием.

и теоретическое значение аномального магнитного момента мюона в Стандартной модели приобретает вид [28]

$$a_{\mu}^{SM} = 11659177(7) \cdot 10^{-10}.$$

Результаты одного из последних $(g - 2)$ -экспериментов по измерению аномальных магнитных моментов положительных поляризованных мюонов, проведенного на накопительном кольце со сверхпроводящими магнитами Брукхейвенской национальной лаборатории (BNL) [29], представимы в виде

$$a_{\mu}^{exp} = 11659204(7)(5) \cdot 10^{-10}, \quad (31)$$

где указаны статистическая и систематическая погрешности. Полученные данные позволяют определить разность

$$\Delta_{\mu} = a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{SM} = 27 \cdot 10^{-10}, \quad (32)$$

превышающую суммарные погрешности измерений и неопределенности теоретических оценок. Согласно последним сообщениям мюонной $(g - 2)$ -коллекции BNL [29], относительная величина этого превышения составляет 2.6. Ожидается, что в ближайшем будущем будет достигнуто двукратное повышение указанной точности. Очевидно, что решение мюонной $(g - 2)$ -проблемы может привести к появлению новой теории, возникающей за пределами Стандартной модели.

В этой связи напомним, что аномальный магнитный момент мюона в модифицированной теории изначально содержит вклад, обусловленный наличием нового универсального параметра M . В соответствии с (4) имеем

$$a_{\mu}(M) = \frac{m_{\mu}^2}{2M^2}, \quad (33)$$

где m_{μ} — масса мюона. Легко видеть, что по порядку величины $a_{\mu}(M)$ совпадает с (32) при $M \sim 1$ ТэВ.

Главный вывод из сравнения приведенных оценок состоит в том, что нельзя исключить возможность совпадения наблюдаемой разности теоретических и экспериментальных результатов для Δ_{μ} с величиной $a_{\mu}(M)$. Как уже отмечалось, параметр M новой теории можно связать с массой M_H хиггсовского бозона. В этом случае наличие разности между a_{μ}^{exp} и a_{μ}^{SM} позволяет получить весьма ценную информацию о частице, масса которой не определена в Стандартной модели. Подставляя значение m_{μ} и данные для аномального магнитного момента мюона в (33), нетрудно установить следующие ограничения на массу H -бозона:

$$1.2 \text{ ТэВ} \leq M_H \leq 1.8 \text{ ТэВ}.$$

Как известно, вариант Стандартной модели, в котором масса хиггсовских бозонов $M_H \geq 1$ ТэВ, влечет за собой ряд дополнительных особенностей и, в частности, невозможность описания слабых взаимодействий в секторе H -, W - и Z -частиц в рамках теории возмущений [30]. При этом, естественно, возникает необходимость построения новой непертурбативной теории. Хиггсовский механизм возникновения масс и компенсации расходимостей наряду с условием ограниченности спектра масс, $m \leq M_H$ (см. (2)), могут стать неотъемлемыми элементами одного из перспективных вариантов модифицированной теории — Стандартной модели с фундаментальной массой.

Автор признателен В. Г. Кадышевскому за полезные обсуждения и ценные замечания, а также В. Р. Халилову и А. Е. Лобанову за внимание к работе и плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-16784).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heisenberg and H. Euler, Zs. Phys. **98**, 714 (1936).
2. В. И. Ритус, ЖЭТФ **69**, 1517 (1975); **73**, 807 (1977).
3. V. I. Ritus, E-print archives, hep-th/9812124.
4. В. Р. Халилов, ТМФ **133**, 103 (2002).
5. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).
6. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **62**, 1621 (1972).
7. И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов, *Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем*, Изд-во МГУ, Москва (1982).
8. В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, Письма в ЖЭТФ **75**, 435 (2002); **78**, 253 (2003).
9. В. Н. Родионов, Г. А. Кравцова, А. М. Мандель, ДАН **386**, 753 (2002).
10. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ЯФ **24**, 379 (1976).
11. В. И. Ритус, ЖЭТФ **57**, 2176 (1969).
12. В. Г. Кадышевский, ЭЧАЯ **11**, 5 (1980).
13. В. Г. Кадышевский, ЭЧАЯ **29**, 563 (1998).
14. G. E. Stedman, Z. Li, and H. R. Bilger, Phys. Rev. A **51**, 4944 (1995).
15. В. И. Денисов, И. П. Денисова, ТМФ **129**, 131 (2001); ДАН **378**, 4 (2001).
16. В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов, в сб. *Труды семинара «Симметрии и интегрируемые системы»*, под ред. А. Н. Сисакяна, ОИЯИ, Дубна (1999), с. 103.
17. В. Г. Кадышевский, В. Н. Родионов, ТМФ **125**, 432 (2000).
18. И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. Ч. Жуковский, Вестник МГУ, серия физика, астрономия № 1, 30 (1966).
19. R. C. Duncan, E-print archives, astro-ph/0002442.
20. И. М. Тернов, В. Н. Родионов, А. И. Студеникин, в сб. *Тезисы докладов Всесоюзного совещания по квантовой метрологии и фундаментальным физическим константам*, Ленинград (1982), с. 47.
21. И. М. Тернов, В. Н. Родионов, А. И. Студеникин, ЯФ **37**, 1270 (1983).
22. A. Czarnecki and W. Marciano, Phys. Rev. D **64**, 012014 (2001).
23. M. Davier and A. Hocker, Phys. Lett. **435B**, 427 (1998).
24. M. Davier, S. Eidelman, A. Hocker, and Z. Zhang, E-print archives, hep-ph/0208177.
25. B. Krause, Phys. Lett. **390B**, 392 (1997).
26. E. Bartos, A. Z. Dubnichkova, S. Dubnichka et al., Nucl. Phys. B **632**, 330 (2002).
27. E. Bartos, S. Dubnichka, A. Z. Dubnichkova et al., E-print archives, hep-ph/0305051.
28. C. S. Ozben, G. W. Bennett, B. Bousquet et al., E-print archives, hep-ex/0211044.
29. G. W. Bennett et al. (Muon g-2 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **89**, 101804 (2002).
30. Л. Б. Окунь, *Лептоны и кварки*, Наука, Москва (1981).