

СТРУКТУРА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И ЕЕ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЛАЗЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев*

*Научно-исследовательский институт лазерной физики
199034, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 27 мая 2003 г.

Выполнен анализ пространственных двумерных солитонов в широкоапертурном лазере класса А с насыщающимся поглощением. Численным решением управляющего уравнения найдены новые типы асимметричных вращающихся солитонов. Продемонстрировано наличие слабо и сильно связанных структур солитонов. Принципиальное различие между ними проявляется в структуре энергетических потоков. В процессе установления сильно связанного состояния из исходной суперпозиции полей двух солитонов со временем происходят последовательные бифуркации (топологические изменения) фазовой плоскости потока энергии (вектора Пойнтинга).

PACS: 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические солитоны — локализованные сгустки света, линейное (дифракционное и/или дисперсионное) расплывание которых уравновешено нелинейным сжатием, — делятся на два типа. Первый из них отвечает консервативным солитонам, которые формируются и распространяются в прозрачной среде с пренебрежимо малыми потерями [1, 2]. Спектр основных характеристик консервативных солитонов сплошной, т. е. они формируют семейства с непрерывно (в определенных пределах) меняющейся максимальной интенсивностью или шириной сгустка. Второй тип отвечает диссипативным солитонам, или автосолитонам [3, 4]. Диссипативные оптические солитоны предсказаны и теоретически изучены первоначально в широкоапертурных нелинейных интерферометрах [5, 6] и лазерах с насыщающимся поглощением [7]. Дополнительное, по сравнению со случаем консервативных солитонов, требование энергетического баланса приводит к дискретности спектра основных характеристик диссипативных солитонов, ввиду чего свойства двух указанных типов солитонов существенно различаются. Диссипативные оптические солитоны возбуждаются жестко (пороговым образом), что вместе со свойством

дискретности спектра повышает их потенциал для приложений в области обработки информации. Для прогресса в экспериментах и для приложений важным было обращение к полупроводниковым микрорезонаторам [8, 9]. Современный уровень теории и экспериментов с диссипативными оптическими солитонами отражен в обзорах [10, 11] и монографии [12].

Лазерные солитоны, принадлежащие к числу диссипативных оптических солитонов, реализуются в одномерной, двумерной и трехмерной геометриях в ряде схем с обратной связью и без нее [12, 13]. В данной статье мы рассматриваем пространственные солитоны в широкоапертурном лазере с нелинейными (насыщающимися) усилением и поглощением. Малость изменений огибающей электрического поля в продольном направлении позволяет использовать усредненное по этому направлению квазиоптическое уравнение [14], так что такие солитоны эффективно двумерны. Здесь мы ограничиваемся случаем сред с быстрой оптической нелинейностью, когда отклик среды определяется мгновенными значениями огибающей электрического поля, т. е. пренебрегаем эффектами, связанными с конечностью времен релаксации (последние рассмотрены в работах [12, 15–17]). Тогда динамика определяется обобщенным комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау для огибающей электрического поля. Управляющее уравнение и его основные свойства

*E-mail: rosanov@ilph.spb.su

описаны в разд. 2. Численное решение управляющего уравнения выявляет ряд необычных структур, которые можно интерпретировать как сильно связанные состояния лазерных солитонов (см. [12, 18] и приведенную там литературу). В данной статье мы также численно находим ряд новых структур такого вида. Однако основное внимание здесь уделяется раскрытию «внутренней структуры» лазерных солитонов, которая особенно ярко проявляется в структуре энергетических потоков. При этом используются хорошо известные методы теории нелинейных колебаний для анализа фазовой плоскости линий тока вектора Пойнтинга (разд. 3). Для одиночных солитонов с осесимметричным распределением интенсивности сравнительно простая структура этой фазовой плоскости обсуждается в разд. 4. Затем в разд. 5 мы рассматриваем взаимодействие пары лазерных солитонов и выявляем качественные (топологические) различия структуры энергетических потоков в случаях далеких (слабое взаимодействие) и близких (сильное взаимодействие) солитонов. Отсюда следует вывод о бифуркациях этой структуры в процессе сближения солитонов. Общие выводы приводятся в Заключение.

2. МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим широкоапертурный лазер, резонатор которого образован плоскопараллельными зеркалами, между которыми помещена среда с насыщающимся усилением и поглощением. Усредненное по продольной координате z квазиоптическое уравнение для огибающей электрического поля $E(\mathbf{r}_\perp, t)$ (приближение среднего поля, справедливое при малости линейных и нелинейных искажений огибающей за один проход через резонатор, $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ — двумерный вектор поперечных координат, t — время) для случая быстрой оптической нелинейности (лазер класса А) имеет вид обобщенного комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау [12]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (i + d)\Delta_\perp E + f(|E|^2) E. \quad (2.1)$$

Здесь использованы безразмерные переменные и величины: t — время в единицах времени затухания поля в пустом резонаторе, d — эффективный коэффициент диффузии, описывающий слабую дисперсию среды ($0 < d \ll 1$), $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — поперечный оператор Лапласа, поперечные координаты x и y выражены в единицах эффективной ширины зоны Френеля $w_F = [L_c/2k(1 - |R|)]^{1/2}$, где

L_c — длина резонатора, k — волновое число в линейной среде, R — произведение амплитудных коэффициентов отражения зеркал резонатора. Функция $f(|E|^2)$ интенсивности поля $I = |E|^2$ описывает насыщение усиления и поглощения, в нее же включаются и постоянные (нерезонансные) потери. Не конкретизируя пока вида этой функции, заметим, что необходимым условием существования устойчивых локализованных структур (с достаточно быстрым убыванием интенсивности излучения на периферии) служит неравенство

$$\operatorname{Re} f_0 = \operatorname{Re} f(0) < 0 \quad (2.2)$$

(в противном случае периферия структуры была бы неустойчивой относительно роста малых возмущений).

Управляющее уравнение (2.1) инвариантно по отношению к сдвигу фазы поля

$$E \rightarrow E \exp(i\Phi_0), \quad (2.3)$$

к сдвигу поперечных координат

$$E(x, y, t) \rightarrow E(x + X_0, y + Y_0, t) \quad (2.4)$$

(Φ_0, X_0, Y_0 — постоянные величины) и к инверсии любой из поперечных координат, например,

$$E(x, y, t) \rightarrow E(x, -y, t). \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.1) вытекает также следующее энергетическое соотношение для интегральной мощности локализованных структур [13]:

$$\frac{d}{dt} \int |E|^2 d\mathbf{r}_\perp = 2W'(E), \quad (2.6)$$

где функционал $W'(E)$ определяется выражением

$$W'(E) = \int [|E|^2 \operatorname{Re} f(|E|^2) - d|\nabla_\perp E|^2] d\mathbf{r}_\perp. \quad (2.7)$$

Для установившихся структур (в том числе движущихся и вращающихся как целое)

$$W'(E) = 0. \quad (2.8)$$

В пренебрежении частотными расстройками функция f вещественна ($\operatorname{Im} f = 0$). В приводимых ниже расчетах использовался вид функции f , следующий из двухуровневой модели сред с усилением и поглощением:

$$f(|E|^2) = -1 + \frac{g_0}{1 + |E|^2} - \frac{a_0}{1 + b|E|^2}, \quad (2.9)$$

где g_0 и a_0 — линейные коэффициенты усиления и поглощения, b — отношение интенсивностей насыщения усиления и поглощения, а нерезонансные потери представлены первым членом в правой части, равным -1 ввиду нормировки времени.

3. ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

В используемом квазиоптическом (параксиальном) приближении средний за период оптических колебаний вектор Пойнтинга \mathbf{S} для излучения с фиксированной поляризацией (например, близкой к линейной) связан с медленно меняющимися комплексной амплитудой (огibaющей) E , вещественной амплитудой $A = |E|$ и фазой $\Psi = \arg E$ соотношениями [19, 20]

$$\mathbf{S} = A^2 \nabla \Psi = \text{Im}(E^* \nabla E). \quad (3.1)$$

В рассматриваемой схеме, в соответствии с моделью лазера, выделена продольная координата z преимущественного направления распространения излучения, и в усредненном по z управляющем уравнении (2.1) фигурируют только поперечные координаты $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. Соответственно, в фиксированный момент времени t поперечные компоненты вектора Пойнтинга $\mathbf{S}_\perp = (S_x, S_y)$ имеют вид

$$\mathbf{S}_\perp = A^2 \nabla_\perp \Psi = \text{Im}(E^* \nabla_\perp E). \quad (3.2)$$

Линии тока для этих компонент (кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с вектором \mathbf{S}_\perp) определяются уравнениями, которые удобно записать, введя параметр τ , меняющийся вдоль кривой вместе с ее длиной (ср. с уравнением лучей в геометрической оптике):

$$\frac{dx}{d\tau} = S_x(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = S_y(x, y). \quad (3.3)$$

Заметим, что при замене в (3.3) компонент вектора Пойнтинга на компоненты градиента фазы мы почти всюду получили бы те же линии тока. Однако использование вектора Пойнтинга в большинстве случаев предпочтительно. Действительно, тогда как фаза поля не определена в точках винтовых дислокаций волнового фронта, где амплитуда поля обращается в нуль, вектор Пойнтинга в этих точках равен нулю. Отметим также четкий физический смысл энергетических потоков и вектора Пойнтинга (в параксиальном приближении). Поперечное распределение вектора Пойнтинга в сочетании с поперечным распределением интенсивности дает однозначное (с точностью до несущественной постоянной фазы) описание поля.

Уравнения вида (3.3) детально изучены в теории нелинейных колебаний [21, 22]. Вырожденным случаем служат консервативные системы, для которых (почти) всюду выполняется соотношение $\text{div}_\perp \mathbf{S}_\perp = 0$. Консервативные системы не имеют

изолированных замкнутых траекторий и принадлежат к числу негрубых, т. е. структура разбиения их фазовой плоскости на ячейки с однотипным характером траекторий может меняться при сколь угодно малом изменении вида функций $S_x(x, y)$ и $S_y(x, y)$ [21, 22]. Примеры линий тока вектора Пойнтинга для консервативных оптических систем можно найти в обзоре [23].

Лазерные схемы принадлежат к числу диссипативных систем, для которых $\text{div}_\perp \mathbf{S}_\perp \neq 0$, что связано с обменом энергией между полем и усиливающей и поглощающей средами. Для разбиения фазовой плоскости на ячейки с одинаковым поведением траекторий $x(\tau), y(\tau)$ следует сначала найти особые (неподвижные) точки (x_0, y_0) , в которых одновременно $S_x(x_0, y_0) = 0$ и $S_y(x_0, y_0) = 0$. С учетом (3.1) особые точки делятся на два типа. Действительно, вектор Пойнтинга обращается в нуль, если нулю равна либо интенсивность поля, либо градиент фазы поля. В первом случае разложение комплексной огibaющей поля в окрестности особой точки начинается с линейных членов по малым отклонениям координат x и y от равновесных значений x_0, y_0 :

$$E(x, y) = E_{(x)}x + E_{(y)}y + \frac{1}{2}E_{(xx)}x^2 + E_{(xy)}xy + \frac{1}{2}E_{(yy)}y^2 + \dots, \quad (3.4)$$

где производные $E_{(x)} = \partial E / \partial x|_{x=y=0}$ и т. д. вычисляются в особой точке. Тогда

$$S_x = qy, \quad S_y = -qx, \quad (3.5)$$

где $q = \text{Im}(E_{(x)}E_{(y)}^*)$. Теперь уравнения (3.3) принимают вид

$$\frac{dx}{d\tau} = qy, \quad \frac{dy}{d\tau} = -qx. \quad (3.6)$$

Решения этих уравнений отвечают на фазовой плоскости xy траекториям (окружности радиуса R с центром в особой точке) $x^2 + y^2 = R^2$. В этом случае имеем особую точку типа центра, т. е. она является негрубой и меняет свой тип при учете следующих членов разложения поля (3.4). Как мы увидим далее, для лазерного солитона с осесимметричным распределением интенсивности эта точка в действительности оказывается фокусом.

Для особых точек второго типа в разложении поля вблизи особой точки присутствует постоянный член $E_0 \neq 0$:

$$E(x, y) = E_0 + E_{(x)}x + E_{(y)}y + \frac{1}{2}E_{(xx)}x^2 + E_{(xy)}xy + \frac{1}{2}E_{(yy)}y^2 + \dots \quad (3.7)$$

Теперь вектор Пойнтинга обращается в особой точке ($x = y = 0$) в нуль при условии $\text{Im}(E_0^* E_{(x)}) = \text{Im}(E_0^* E_{(y)}) = 0$, а линии тока энергии определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \text{Im}(E_0^* E_{(xx)})x + (q + p)y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= (p - q)x + \text{Im}(E_0^* E_{(yy)})y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $p = \text{Im}(E_0^* E_{(xy)})$. Характер особой точки определяется типом корней квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma &= -\text{Im}(E_0^* E_{(xx)}) - \text{Im}(E_0^* E_{(yy)}), \\ \Delta &= \text{Im}(E_0^* E_{(xx)})\text{Im}(E_0^* E_{(yy)}) - p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $\sigma \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ особая точка оказывается грубой, типа узла, фокуса или седла. В общем случае для разбиения фазовой плоскости на ячейки нужно знать не только особые точки и их характер, но и нелокальные элементы — предельные циклы (замкнутые траектории с периодическим изменением x и y при изменении τ) и расположение сепаратрис седел [21, 22].

Изменение параметров системы, начальных условий или времени приводит к изменению потоков энергии и линий тока. Особый интерес представляют бифуркации, при которых разбиение фазовой плоскости на ячейки меняется качественно (топологические изменения). Для уравнений вида (3.3) все типы возможных бифуркаций известны [21, 22], что облегчает задачу исследования структуры энергетических потоков для двумерных лазерных солитонов.

4. СОЛИТОНЫ С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ

Для стационарного солитона временная зависимость огибающей имеет вид $\exp(-ivt)$, где ν — частотный сдвиг, служащий собственным значением задачи. Для солитонов с осесимметричным распределением интенсивности удобно использовать полярные координаты r, φ ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$). Тогда, полагая

$$E = F(r) \exp(im\varphi) \exp(-ivt), \quad (4.1)$$

где целое число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — топологический индекс, приходим к уравнению для комплексной радиальной функции $F(r)$:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{m^2}{r^2} F + \frac{1}{i+d} [i\nu + f(|F|^2)] F = 0. \quad (4.2)$$

«Мгновенная» фаза $\Psi = \arg E$ связана с радиальной фазой $\Psi_0(r) = \arg F$ соотношением

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(r) + m\varphi. \quad (4.3)$$

Здесь фиксирован момент времени t и ввиду несущественности постоянной составляющей фазы считается, что $\Psi_0(0) = 0$. В области малых интенсивностей уравнение (4.2) становится линейным:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{m^2}{r^2} F - p^2 F = 0, \quad (4.4)$$

где

$$p^2 = -\frac{i\nu + f_0}{i + d}. \quad (4.5)$$

Без ограничения общности можно считать $\text{Re} p > 0$. При $m = 0$ можно использовать соотношение (4.5) с заменой $f_0 \rightarrow f(|F_0|^2)$, где $|F_0|^2$ — значение интенсивности в центре фундаментального солитона. Решение (4.4) выражается через цилиндрические функции, однако оправдано только использование их асимптотики при $r \rightarrow \infty$ (периферия солитона) и $r \rightarrow 0$ (при $m \neq 0$, так как при этом интенсивность в центре солитона обращается в нуль). При $r \rightarrow \infty$ для комплексной амплитуды F , вещественной амплитуды $A = |F|$ и радиальной фазы Ψ_0 имеют

$$\begin{aligned} F &\approx F_\infty \exp(-pr), \quad A \approx A_\infty \exp(-p'r), \\ \Psi_0 &= \text{const} - p''r, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $p' = \text{Re} p > 0, p'' = \text{Im} p$.

При $r \rightarrow 0$ степенное разложение решения (4.4) при $m \neq 0$ или (4.2) при $m = 0$ имеет вид

$$F = F_0 r^{|m|} (1 + F_2 r^2 + \dots). \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в (4.4), найдем

$$F_2 = \frac{p^2}{4(|m| + 1)}, \quad (4.8)$$

откуда низший член радиальной фазы

$$\begin{aligned} \Psi_0(r) &= \frac{r^2}{4(|m| + 1)} \text{Im} p^2 = \\ &= -\frac{r^2}{4(|m| + 1)} \text{Im} \frac{f_0 + i\nu}{i + d}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отметим, что асимптотика радиальной фазы как при $r \rightarrow \infty$, так и при $r \rightarrow 0$ определяется одной и той же комплексной величиной p .

Вектор Пойнтинга (3.2) для рассматриваемых солитонов в полярных координатах (соответствующие орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$) имеет вид

$$\mathbf{S}_\perp = A^2(r) \left(\frac{d\Psi_0}{dr} \mathbf{e}_r + \frac{m}{r} \mathbf{e}_\varphi \right). \quad (4.10)$$

Поэтому уравнения линий тока для потоков энергии излучения (3.3) принимают вид

$$\frac{dr}{d\tau} = A^2 \frac{d\Psi_0}{dr}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{m}{r^2} A^2, \quad (4.11)$$

откуда для траекторий находим

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{m}{r^2 d\Psi_0/dr}, \quad \varphi - \varphi_0 = m \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 d\Psi_0/dr}. \quad (4.12)$$

Первое из уравнений (4.11) чисто радиальное (полярный угол φ в него не входит). При $\tau \rightarrow \pm\infty$ радиус $r(\tau)$ приближается к постоянной величине R_0 , где R_0 служит корнем уравнения

$$\frac{d\Psi_0}{dr}(R_0) = 0,$$

причем одним из корней служит $R_0 = 0$. При $m = 0$ траектории представляют собой радиальные лучи, исходящие и останавливающиеся на окружностях радиуса R_0 . При $m \neq 0$ окружности такого радиуса являются предельными циклами и изображающая точка вращается по ним с постоянной угловой скоростью $\Omega = mA^2(R_0)/R_0^2$. Вопрос об устойчивости на фазовой плоскости потоков энергии излучения требует оговорок. Речь здесь не идет об истинной, «временной» устойчивости, поскольку рассматривается фиксированный момент времени. Можно, однако, говорить об «устойчивости» применительно к возрастанию параметра τ (поэтому мы заключаем этот термин в кавычки). При этом особые точки типа узлов и фокусов и периодические решения — предельные циклы, «неустойчивые» в пределе $r \rightarrow \infty$, — становятся «устойчивыми» при изменении знака τ . Это обстоятельство удобно использовать в расчетах, в частности, для поиска «неустойчивых» предельных циклов.

Служащее для определения осесимметричного локализованного распределения уравнение (4.2) комплексно, так что оно эквивалентно нелинейной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для вещественных амплитуды A и «радиальной» фазы Ψ_0 из (4.2) вытекает

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} - \frac{m^2}{r^2} A - A \left(\frac{d\Psi_0}{dr} \right)^2 + \\ + \operatorname{Re} \frac{i\nu + f(A^2)}{i + d} A = 0, \\ \frac{d^2 \Psi_0}{dr^2} + 2 \frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \frac{d\Psi_0}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_0}{dr} + \\ + \operatorname{Im} \frac{i\nu + f(A^2)}{i + d} = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поскольку в (4.13) сама фаза не входит, размерность системы понижается до трех. Соответствующая система уравнений для $A(r)$, $Q(r) = d\Psi_0/dr$ и $K(r) = (1/A)dA/dr$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} - KA = 0, \quad \frac{dQ}{dr} + 2KQ + \frac{Q}{r} + \\ + \operatorname{Im} \frac{i\nu + f(A^2)}{i + d} = 0, \\ \frac{dK}{dr} + K^2 - Q^2 + \frac{K - m^2}{r} + \operatorname{Re} \frac{i\nu + f(A^2)}{i + d} = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Асимптотику этих функций при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$ нетрудно определить из выражений (4.6) и (4.7). А именно, при $r \rightarrow \infty$ находим $K \rightarrow -p' < 0$ и $Q \rightarrow -p'' > 0$. При $r \rightarrow 0$ значения $Q(r)$ и $K(r) - |m|/r$ должны одновременно обращаться в нуль. Эту асимптотику удобно использовать для численного определения характеристик рассматриваемых солитонов с осесимметричным распределением интенсивности.

Приводимые далее расчеты выполнены для функции нелинейности (2.7) при значении параметров $a_0 = 2$, $b = 10$. При фиксированных параметрах схемы решения (4.14) с должной асимптотикой возможны только для дискретного набора собственных значений ν . Если варьировать какой-либо (контрольный) параметр схемы, например, коэффициент усиления g_0 или коэффициент диффузии d , то график зависимости ν от параметра имеет вид кривой («спирали») с несколькими петлями и самопересечением (рис. 1). Различные ветви спирали характеризуются различным числом нулей N_Q и N_K функций $Q(r)$ и $K(r)$ при $r > 0$. Числа N_Q и N_K меняются на 1 (при $m = 0$) или 2 (при любых m) при переходе по спирали через точки S_N с вертикальной касательной (на рис. 1 $N = 1, 2$).

При $m = 0$ на внешней петле спирали (до точки S_1) $N_Q = N_K = 0$ и локализованные структуры неустойчивы. Здесь уже устойчивость (без кавычек) понимается в полном, временном аспекте и определяется из стандартного линейного анализа [12]. Устойчивые солитоны появляются на участках следующей петли с $N_Q = 1$, $N_K = 0$. При $m = 1, 2$ на внешней петле $N_Q = N_K = 1$ и устойчивых солитонов также нет. Они возникают на участках следующих петель, где $N_Q = 3$, $N_K = 1$ (основной солитон) и $N_Q = 3$, $N_K = 3$ (возбужденный солитон). На рис. 1г точками со стрелками указаны два близких значения ν при одном и том же значении параметра g_0 , которые принадлежат двум разным петлям спирали вблизи ее самопересечения. Эти точки характеризуют основной и возбужденный солитоны

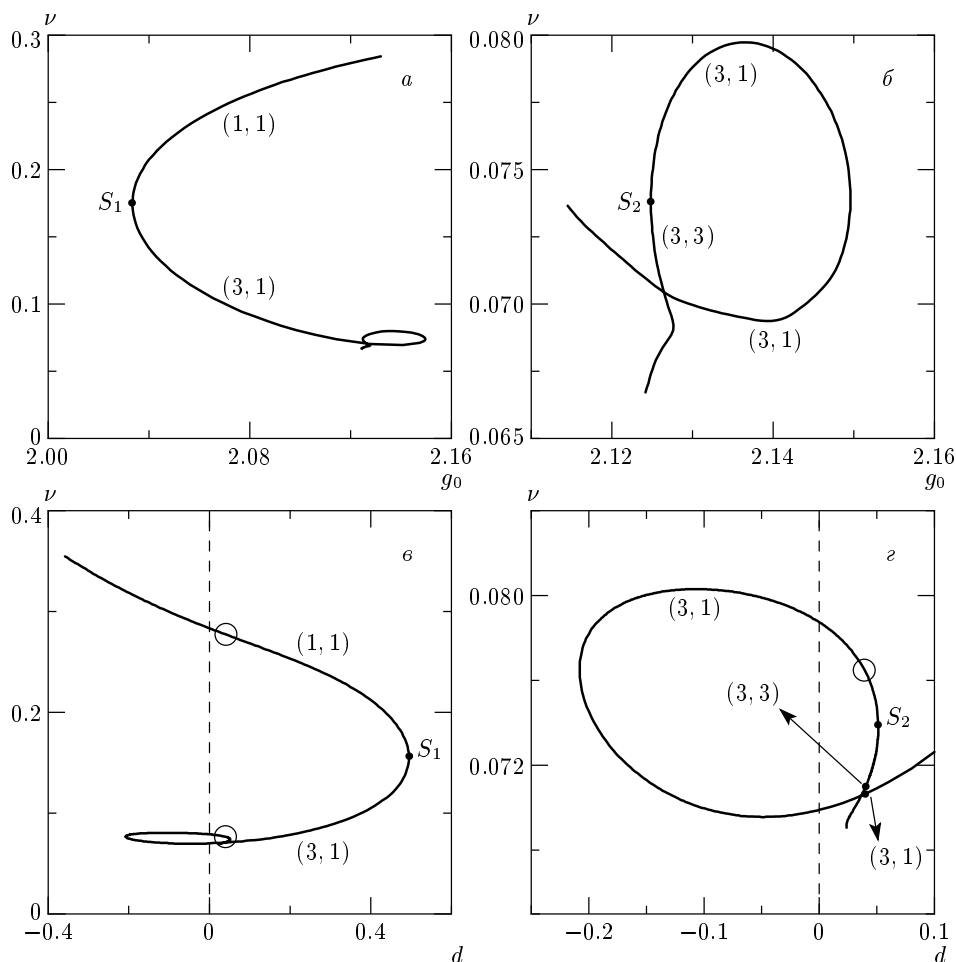


Рис. 1. Зависимость собственного значения ν от коэффициента усиления g_0 при $d = 0$ (*a*, *б*) и от коэффициента диффузии d при $g_0 = 2.13$ (*в*, *г*) для локализованных структур с топологическим зарядом $m = 1$; на рис. *б* и *г* более подробно, по сравнению с *a* и *в*, показана область второй петли спирали. Вблизи ветвей спирали приведены значения (N_Q, N_K) , меняющиеся при переходе через точки S_N с вертикальными касательными. Неустойчивые локализованные структуры отмечены кружками. Точки со стрелками вблизи самопересечения второй петли спирали (*г*, $d = 0.04$) указывают основной и возбужденный солитоны, радиальные профили которых представлены на рис. 2*в*, *г*

с радиальными зависимостями амплитуды и фазы, приведенными на рис. 2*в*, *г*.

Далее мы будем интересоваться только устойчивыми локализованными структурами, т. е. солитонами. Для них при $m = 0$ амплитуда монотонно убывает с ростом радиуса, при $m \neq 0$ радиальный профиль амплитуды (интенсивности) имеет один максимум, а зависимость радиальной фазы от радиуса включает осцилляции, число которых зависит от $|m|$ (рис. 2). Заметим, что между случаями устойчивого солитона в основном и возбужденном состояниях (различные петли спиралей вида, представленного на рис. 1) различие только количественное (ср. рис. 2*б* и рис. 2*в*).

Из изложенного следует представленный на рис. 3 вид фазовой плоскости для потоков вектора Пойнтинга. Центральная точка $r = 0$ отвечает «устойчивому» узлу (при $m = 0$) или фокусу (при $m \neq 0$). В последнем случае эту точку окружает нечетное число предельных циклов — окружностей, радиус которых R_0 определяется условием

$$Q(R_0) = \frac{d\Psi_0}{dr}(R_0) = 0$$

(см. выше). «Устойчивость» циклов чередуется: ближайший к центральной точке цикл «неустойчив» и служит границей области притяжения фокуса; следующий цикл «устойчив», траектории притягивают-

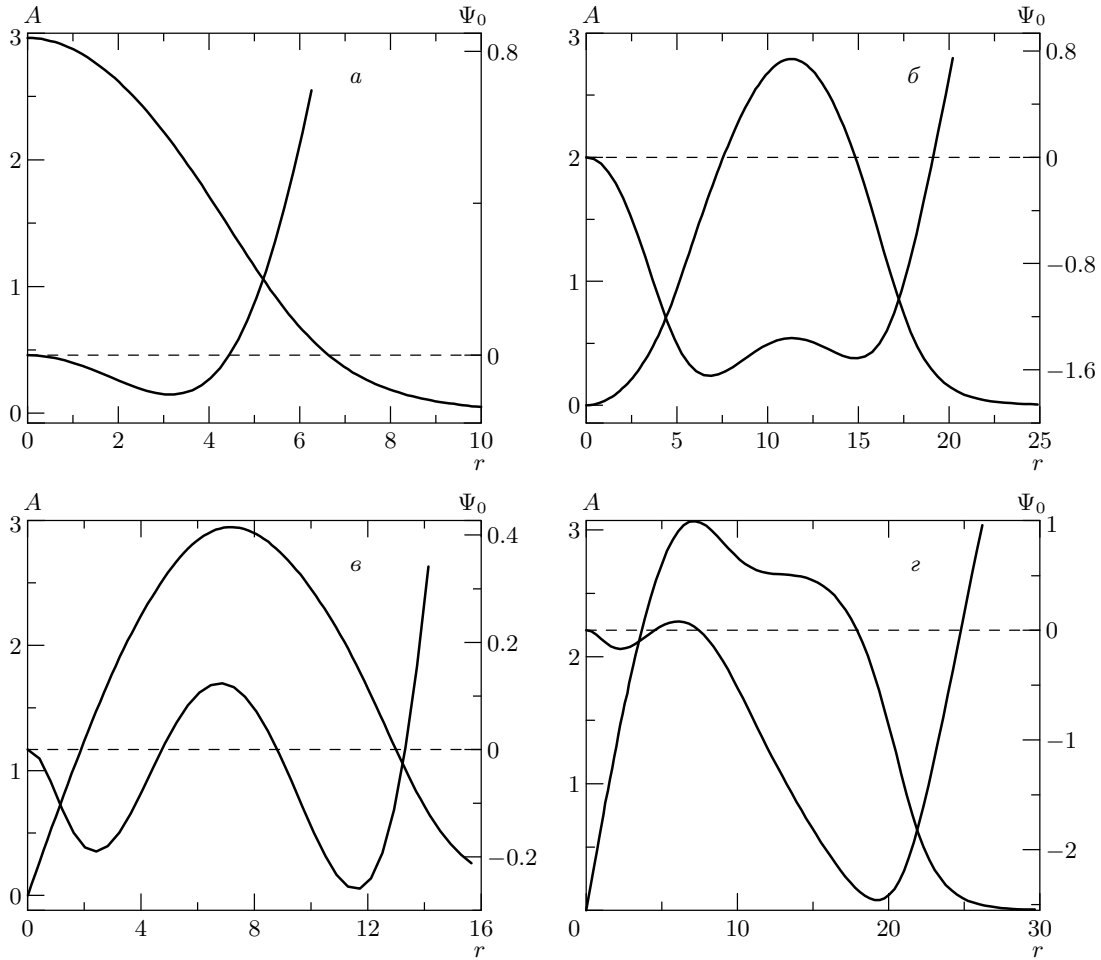


Рис. 2. Радиальные профили амплитуды $A(r)$ и «радиальной» фазы $\Psi_0(r)$ для устойчивых солитонов с топологическим зарядом $m = 0$ (*a*, $g_0 = 2.11$, $d = 0.01$, $\nu = 0.12036$), $m = 1$ (*в*, $g_0 = 2.13$, $d = 0.04$, $\nu = 0.070658$ — основной солитон и *г*, $\nu = 0.070998$ — возбужденный солитон) и $m = 2$ (*б*, $g_0 = 2.10$, $d = 0.06$, $\nu = 0.0809$)

ся к нему при $\tau \rightarrow \infty$; внешний цикл «неустойчив», и траектории вне его при $r \rightarrow \infty$ уходят на бесконечность. На рис. 1–3 показаны варианты с $m \geq 0$, поскольку из них легко получаются и варианты с $m < 0$ ввиду симметрии к инверсии координаты (2.5). Случай $m = 0$ является негрубым (вырожденным). Для него окружность около «устойчивого» узла не является траекторией (предельным циклом), а состоит из несвязанных неподвижных точек. При внесении малого возмущения, например, воздействия далекого второго солитона, в диаметрально противоположных точках окружности возникают две пары «неустойчивых» узлов N и седел S , а четыре дуги окружности между ними превращаются в сепаратрисы седел, входящие в них (см. ниже рис. 4б). Такая структура является грубой (невыврожденной).

5. СЛАБОЕ И СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

Пусть расстояние между центрами двух солитонов L значительно превосходит размеры одиночных солитонов, определяемые радиусом окружности — внешнего предельного цикла. Тогда вызываемые слабым перекрытием крыльев солитонов искажения их структуры малы и мгновенное поле может быть записано в виде

$$E = A(r_1) \exp [i\Psi_0(r_1) + im_1\varphi_1] + A(r_2) \exp [i\Psi_0(r_2) + im_2\varphi_2 + i\vartheta]. \quad (5.1)$$

Здесь мы рассматриваем для простоты случай равных по модулю топологических зарядов одиночных солитонов ($|m_1| = |m_2|$), ввиду чего собственные зна-

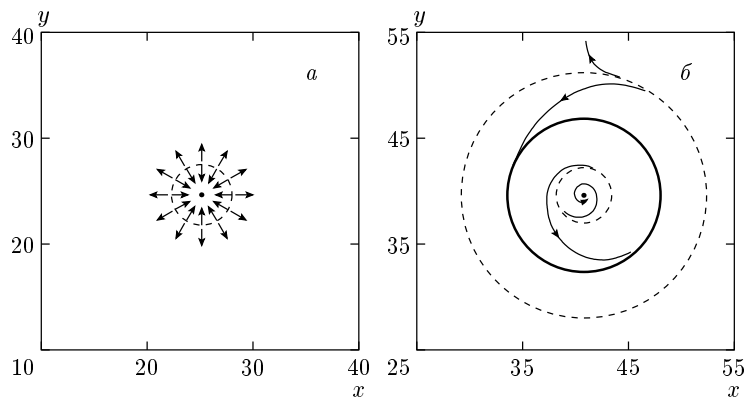


Рис. 3. Фазовая плоскость энергетических потоков для одиночных устойчивых солитонов с топологическим зарядом $m = 0$ (а), 1 (б). В центре ($r = 0$) находятся неподвижные точки типа узла N (а) или фокуса F (б). Ячейки с различным характером траекторий разделены окружностями, отвечающими «устойчивым» (сплошные жирные линии) и «неустойчивым» (штриховые) предельным циклам ($m \neq 0$) или набору неподвижных точек (вырожденный случай $m = 0$). Тонкие линии со стрелками иллюстрируют направление вектора Пойнтинга. Фазовые плоскости при $m = 1$ и $m = 2$ топологически эквивалентны

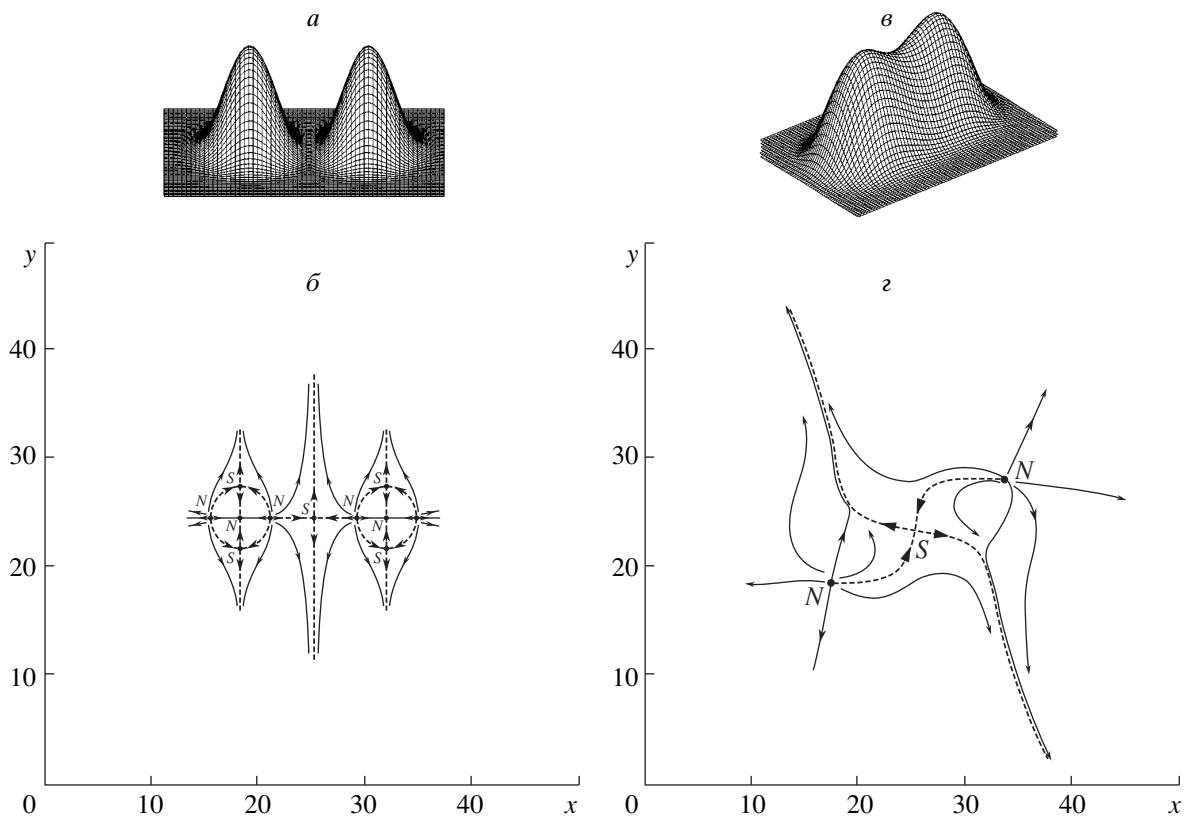


Рис. 4. Мгновенные поперечные распределения интенсивности $I(x, y)$ (а, б) и фазовые плоскости энергетических потоков (б, г) для пары слабо (а, б) и сильно (в, г) связанных солитонов с $m_1 = m_2 = 0$. На фазовых плоскостях сепаратрисы седел S изображены штриховыми линиями, N — узлы, стрелки указывают направление вектора Пойнтинга. Здесь и далее параметры $g_0 = 2.11$, $d = 0.06$

чения ν и радиальные зависимости вещественных амплитуды A и радиальной фазы Ψ_0 солитонов совпадают. Однако аргументы этих функций различаются: r_n и φ_n ($n = 1, 2$) служат двумя наборами полярных координат, центры которых совпадают с центрами n -го солитона:

$$r_n^2 = \left(x \pm \frac{L}{2}\right)^2 + y^2, \quad \cos \varphi_n = \frac{x \pm L/2}{r_n}, \quad (5.2)$$

$$\sin \varphi_n = \frac{y}{r_n}.$$

Постоянная разность фаз ϑ влияет на характер взаимодействия солитонов [12].

Ввиду слабости перекрытия полей солитонов распределение их энергетических потоков вблизи центров солитонов меняется слабо. Соответственно, в определяемом уравнениями (3.3) фазовом портрете линий тока вектора Пойнтинга для произвольной разности фаз ϑ сохраняются все замкнутые линии (устойчивые и неустойчивые предельные циклы и замкнутые линии, составленные из отдельных сепаратрис), окружающие соответствующие неподвижные точки, которые представляют индивидуальные солитоны. В промежуточной между ними области могут возникать дополнительные неподвижные точки, типично — седла, исходящие сепаратрисы которых служат «водоразделами» траекторий, уходящих от индивидуальных солитонов. Распределение интенсивности и энергетическая диаграмма для установившейся пары сравнительно слабо связанных солитонов с нулевыми топологическими зарядами показаны на рис. 4а, б.

При фиксированной разности фаз ϑ и произвольном расстоянии между солитонами L структура типа (5.1) не является стационарной и меняется со временем. Возможные даже при $L \gg R_0$ (слабое взаимодействие солитонов) равновесные расстояния L для стационарных (устойчивых и неустойчивых) пар могут быть найдены из условия стационарности (2.8) при подстановке в него поля в форме (5.1). Со временем, в случае сближения солитонов до расстояний $L \leq R_0$, они вступают в сильное взаимодействие. При этом топологическая структура фазовой плоскости качественно отличается от структуры в случае $L \gg R_0$. Отметим, что здесь мы имеем дело с бифуркациями внутренней структуры солитона при изменении времени (а не контрольного параметра). Саму динамику поля мы находим численным решением управляющего уравнения (2.1) с функцией нелинейности (2.9) методом расщепления с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Мгновенное распределение интенсивности и фазовая плоскость потоков энергии для установившейся двугорбой структуры, вращающейся с постоянной угловой скоростью, показаны на рис. 4в, г. Эту структуру можно считать сильно связанным состоянием двух фундаментальных лазерных солитонов (с нулевыми топологическими зарядами). Отметим, что в энергетической диаграмме теперь имеются только «неустойчивые» неподвижные точки. Это означает, что два узла, «устойчивых» для слабо связанных солитонов (см. рис. 4б), превратились для сильно связанной структуры в «неустойчивые» узлы (рис. 4г). Проявлением сильного взаимодействия служит также отсутствие вокруг этих узлов «индивидуальных» замкнутых линий, присутствовавших в режиме слабого взаимодействия, в связи с чем и изменился характер их «устойчивости». Почти все траектории при $\tau \rightarrow \infty$ уходят на бесконечность. Сепаратрисы седла S , расположенного между узлами, служат водоразделами между траекториями, уходящими на бесконечность по разным направлениям. Общее вращение системы солитонов происходит здесь в отсутствие дислокаций волнового фронта. Это демонстрирует то, что главным условием вращения является асимметрия распределения поля [12].

Рассмотрим теперь взаимодействие двух лазерных солитонов с одинаковыми топологическими зарядами $m_1 = m_2 = 1$ (рис. 5). Их сильно связанное состояние устанавливается со временем из начального ($t = 0$) состояния, отвечающего суперпозиции полей двух индивидуальных солитонов вида (5.1) с определенными значениями параметров ϑ и L . Исходные солитоны пары сопоставляются на рис. 5а двум неподвижным точкам — «устойчивым» фокусам (они отвечают дислокациям волнового фронта, в них интенсивность поля обращается в нуль, тогда как в других неподвижных точках она отлична от нуля). В конечном установившемся состоянии сильно связанной вращающейся структуры (рис. 5е) из присутствовавших первоначально для каждой из двух дислокаций трех индивидуальных предельных циклов (см. рис. 4а) сохраняется только один, внутренний «неустойчивый» цикл. В то же время возникают два коллективных (охватывающих оба фокуса) предельных цикла — «устойчивый» и «неустойчивый». В области вне внешнего предельного цикла траектории уходят на бесконечность, а внутри него приближаются либо к коллективному «устойчивому» предельному циклу, либо к устойчивым фокусам (разграничение идет по сепаратрисам седла S , расположенного между фокусами). Входящие в седло сепаратрисы сматываются с индивидуаль-

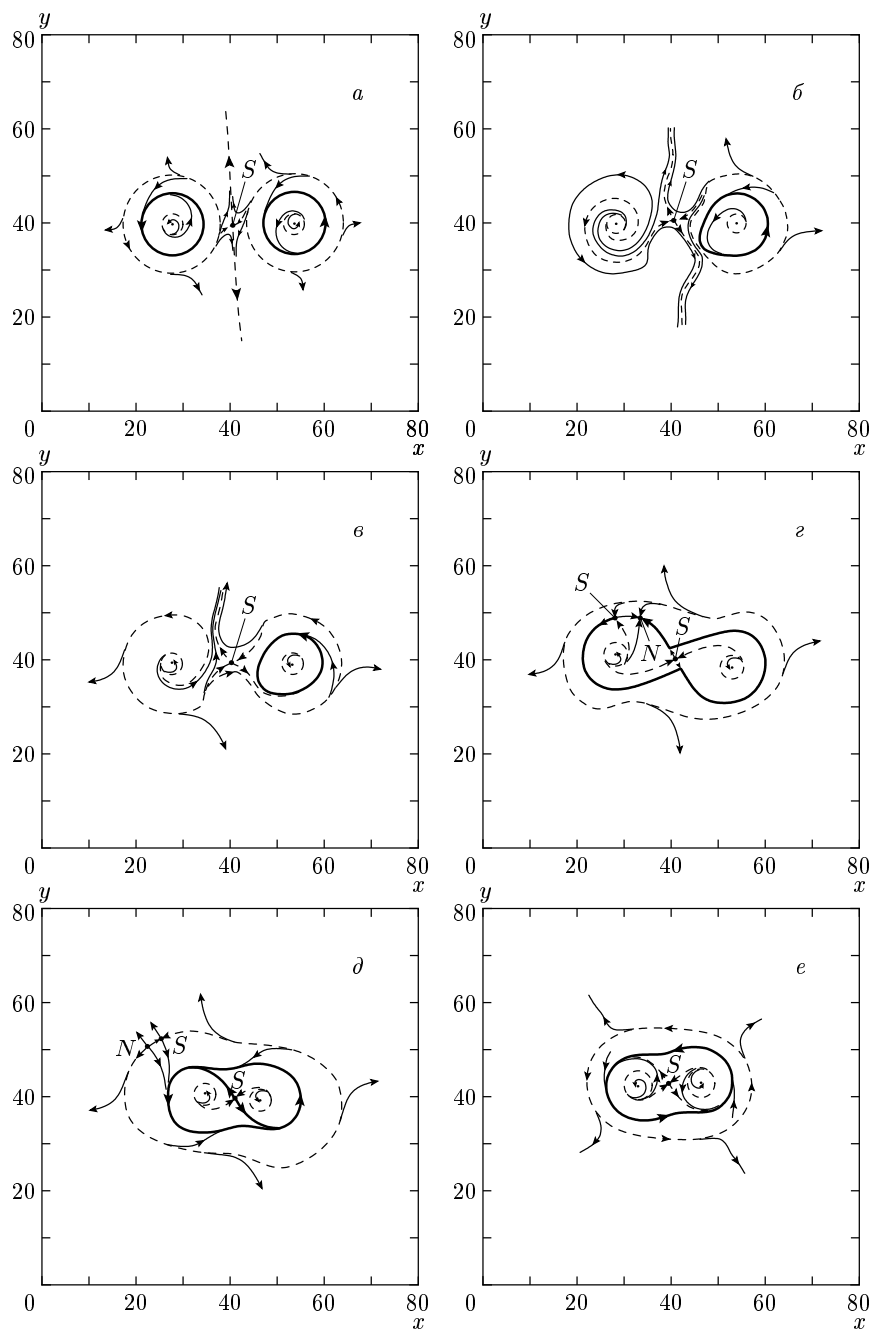


Рис. 5. Мгновенные фазовые портреты энергетических потоков при установлении сильно связанной вращающейся пары солитонов в моменты времени $t = 0$ (а), 5.6 (б), 6 (в), 30 (г), 59 (д), ∞ (е); $m_1 = m_2 = 1$

ных «неустойчивых» предельных циклов, а выходящие сепаратрисы наматываются на коллективный «устойчивый» предельный цикл. Общий характер деления фазовой плоскости на ячейки с различным поведением траекторий для установившейся структуры очевиден из рис. 5е. В действительности переход от начального состояния к конечному вклю-

чает значительное число последовательных по времени бифуркаций энергетической диаграммы. Некоторые из них представлены на рис. 5. Так, переход между структурами, изображенными на рис. 5а и б, включает бифуркацию слияния и уничтожения двух внешних предельных циклов, окружающих левый фокус. Переход от рис. 5б к рис. 5в можно

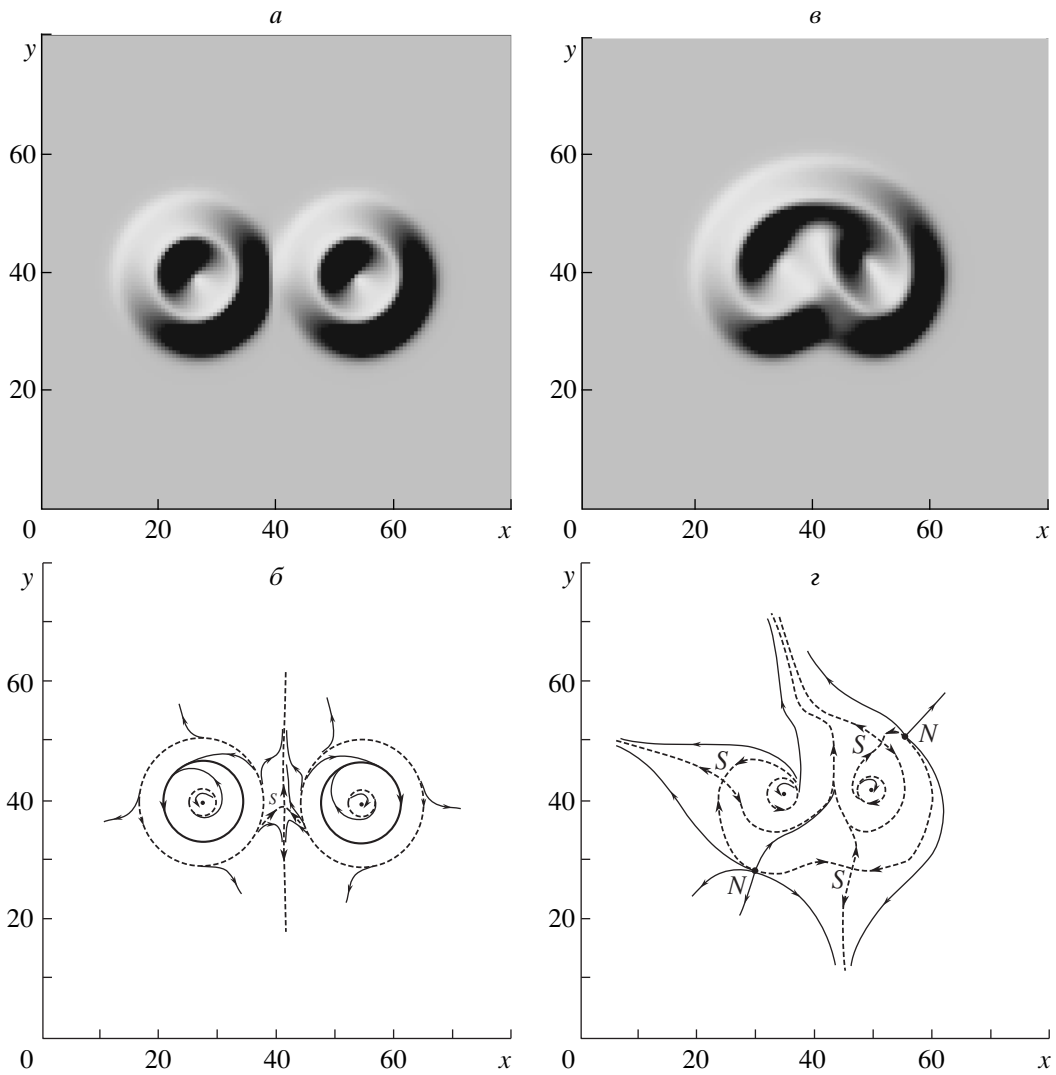


Рис. 6. Мгновенные поперечные распределения интенсивности $I(x, y)$ (*a, в*) и фазовые плоскости энергетических потоков (*б, з*) для пар солитонов с $m_1 = 1, m_2 = -1$ в моменты времени $t = 0$ (*a, б*), 10000 (*в, з*)

связать с бифуркацией формирования петли сепаратрисы центрального седла S , охватывающей правый внешний предельный цикл. Несколько бифуркаций, включая последнюю (при переходе от рис. 5*д* к рис. 5*е*), соответствуют возникновению и слиянию двух неподвижных точек — узла N и нецентрального седла S , см. рис. 5*г, д*.

Более сложен фазовый портрет сильно связанной пары солитонов с разноименными топологическими зарядами ($m_1 = 1, m_2 = -1$). Такая вращающаяся и медленно движущаяся структура получается для достаточно больших времен из пары солитонов с полем, отвечающим суперпозиции вида (5.1). Дислокации волнового фронта — центры ин-

дивидуальных солитонов — представлены на рис. 6 двумя «устойчивыми» фокусами, каждый из которых окружен в конечном состоянии уже только одним индивидуальным «неустойчивым» предельным циклом (с противоположными направлениями вращения для зарядов разного знака). Среди траекторий, разматывающихся с этих предельных циклов, имеются сепаратрисы соседних седел. Всего седел три, и из каждого из них выходит сепаратриса, уходящая на бесконечность, причем сепаратрисы различных седел асимптотически сближаются. Кроме двух фокусов и трех седел, фазовая плоскость включает два «неустойчивых» узла, причем к числу лучей, выходящих из узлов, принадлежат и сепаратри-

сы седел.

Взаимодействие лазерных солитонов может приводить и к другим видам их сильно связанных структур. Некоторые из них, полученные нами численным решением (2.1), иллюстрируются рис. 1, 2 нашей работы [24], где представлены линейные цепочки нескольких солитонов с одинаковым топологическим зарядом $m = 1$, а также двух- и трехзвенные цепочки, включающие не только основные, но и возбужденные солитоны. Все эти структуры вращаются. Фазовая плоскость потоков энергии для них аналогична обсуждавшимся выше.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, фазовая плоскость энергетических потоков (вектора Пойнтинга) предоставляет важную информацию о «внутренней структуре» лазерных солитонов. Уже для одиночных солитонов с осесимметричным распределением интенсивности фазовая плоскость разбивается концентрическими окружностями на несколько ячеек с топологически одинаковым видом траекторий (потоков энергии), причем радиусы окружностей отвечают экстремумам радиальной зависимости фазы. Для пары слабо взаимодействующих солитонов на фазовой плоскости сохраняются «индивидуальные» элементы солитонов (неподвижные точки и замкнутые линии, являющиеся слабо деформированными окружностями). К ним добавляются «коллективные» элементы — типично, седло, в которое входят две ветви, приходящие от замкнутых линий, а выходящие из сепаратрисы две ветви уходят на бесконечность. Условием слабого взаимодействия служит заметное превышение расстояния между солитонами над размерами внешней «индивидуальной» замкнутой линии. По мере сближения солитонов в результате бифуркаций структура фазовой плоскости энергетических потоков качественно (топологически) меняется, что отвечает случаю сильного взаимодействия солитонов. При этом исчезают «индивидуальные» элементы (прежде всего, внешние), которые могут заменяться такими «коллективными» элементами как предельные циклы, охватывающие оба солитона. Наконец, может меняться характер «устойчивости» и число неподвижных точек. Хотя бифуркации отражаются и на распределении интенсивности излучения, фазовые плоскости энергетических потоков представляются более информативными.

Набор сильно связанных солитонных структур оказывается весьма обширным. Он включает в

себя многочастичные линейные цепочки и пары с резко выраженной асимметрией поля. Рассмотрение энергетических потоков для этих структур также заслуживает внимания. Заметим, что анализ энергетических диаграмм (типа вектора Пойнтинга или Умова) представляется полезным и для других типов диссипативных (и не только оптических) солитонов.

Авторы чрезвычайно благодарны А. М. Кокушкину за помощь в оформлении рисунков. Работа поддержана РФФИ (грант № 02-02-17242).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния*, Наука, Москва (1980).
2. Е. М. Дианов, П. В. Мамышев, А. М. Прохоров, КЭ **15**, 5 (1988).
3. Б. С. Кернер, В. В. Осипов, *Автосолитоны*, Наука, Москва (1991).
4. B. S. Kerner and V. V. Osipov, *Autosolitons*, Kluwer, Dordrecht (1994).
5. Н. Н. Розанов, Г. В. Ходова, *Опт. и спектр.* **65**, 1375 (1988).
6. N. N. Rosanov, A. V. Fedorov, and G. V. Khodova, *Phys. Stat. Sol. (b)* **150**, 545 (1988).
7. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, *Опт. и спектр.* **72**, 1394 (1992).
8. D. Michaelis, U. Peschel, and F. Lederer, *Phys. Rev. A* **56**, R3366 (1997).
9. M. Brambilla, L. A. Lugiato, F. Prati, L. Spinelli, and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2042 (1997).
10. V. B. Taranenko and C. O. Weiss, *J. Select. Topics Quant. Electron.* **8**, 488 (2002).
11. *IEEE J. Quant. Electron.* **39**, № 2 (2003).
12. N. N. Rosanov, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Berlin, Springer-Verlag (2002).
13. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах*, Наука, Москва (1997).
14. А. Ф. Сучков, ЖЭТФ **49**, 1495 (1965).
15. S. V. Fedorov, A. G. Vladimirov, G. V. Khodova, and N. N. Rosanov, *Phys. Rev. E* **61**, 5814 (2000).

16. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, Г. В. Ходова, *Опт. и спектр.* **88**, 869 (2000).
17. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, *Опт. и спектр.* **91**, 252 (2001).
18. S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, A. N. Shatsev, N. A. Veretenov, and A. G. Vladimirov, *IEEE J. Quant. Electron.* **39**, 197 (2003).
19. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
20. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород (1997).
21. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*, Наука, Москва (1967).
22. Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фужаев, *Введение в теорию нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1976).
23. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, *Progr. Opt.* **42**, 219 (2001).
24. Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, *Опт. и спектр.* **95**, 902 (2003).