

# ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ СИСТЕМЫ: СТИМУЛИРОВАННОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА НАЗАД И МНОГОЛУЧЕВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ю. Е. Лозовик\*, И. В. Овчинников, В. А. Шарапов

Институт спектроскопии Российской академии наук  
142190, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 5 сентября 2003 г.

Рассматривается стимулированное отражение света назад от электронно-дырочной системы в когерентной фазе, связанное с когерентной рекомбинацией двух экситонов из бозе-конденсата, либо двух электронно-дырочных пар в плотной системе. Эффект изучается на примерах двумерной электронно-дырочной системы в связанных квантовых ямах GaAs/AlGaAs и трехмерной системы в GaAs для случаев высоких и низких концентраций электронов и дырок. Получена оценка скорости испускания двух фотонов с противоположными импульсами. Рассматривается также многофотонное испускание, обусловленное когерентной рекомбинацией нескольких экситонов из бозе-конденсата. Обсуждается возможное экспериментальное наблюдение предсказываемых эффектов.

PACS: 71.35.Lk, 78.45.+h

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, электронно-дырочная система в полупроводниках или полуметаллах при температурах  $T < T_c$ , где  $T_c$  — критическая температура перехода, должна находиться в когерентном состоянии [1–8]. Экспериментальное наблюдение этого явления как в трехмерных, так и в двумерных системах представляет значительный интерес. За последние годы в этой области наблюдается большой экспериментальный прогресс, в особенности для квазидвумерных систем межъямных экситонов в связанных квантовых ямах [9–12], для которых ранее был предсказан ряд аномальных транспортных свойств, сверхтекучесть, эффекты увлечения, аналог эффекта Джозефсона и т. п. [13–31].

Для электронно-дырочной системы могут осуществляться два предельных режима по концентрации, отвечающих высоким ( $na_B^3 \gg 1$  в трехмерном [1] и  $na_B^2 \gg 1$  в двумерном [13] случаях) или низким ( $na_B^3 \ll 1$  для трехмерных систем [3, 4] или  $na_B^2 \ll 1$  для двумерных [14]) концентрациям носителей  $n$  ( $a_B$  — радиус Бора).

При низких концентрациях в системе существуют экситоны, которые при температуре  $T < T_c$

переходят в когерентное состояние. Это когерентное состояние отвечает бозе-конденсации экситонов в трехмерном случае [3, 4]. В двумерном случае возникает локальный бозе-конденсат с флуктуирующей фазой параметра порядка и последующим переходом в низкотемпературную фазу Березинского–Костерлица–Таулеса с квазидальним порядком (см., например, [15] и цитируемую там литературу).

В случае высоких концентраций электронов и дырок изолированные экситоны отсутствуют, и при низких температурах  $T < T_c$  возникает когерентная фаза электронно-дырочной системы, аналогичная состоянию БКШ в сверхпроводниках<sup>1)</sup>, с раз-

<sup>1)</sup> Для перехода полуметаллов или плотной, созданной лазерной накачкой, квазиравновесной электронно-дырочной системы в когерентную фазу необходимо выполнение с определенной точностью условия конгруэнтности — совпадения формы участков ферми-поверхностей электронов и дырок,  $v_F \delta p < \Delta$ , где  $v_F$  — скорость Ферми,  $\delta p$  — раздвижка ферми-поверхностей спаривающихся частиц,  $\Delta$  — щель, возникающая при спаривании. При этом температура перехода достаточно медленно убывает с уменьшением размера конгруэнтных участков ферми-поверхностей [7]. В небольшой области раздвижек  $\delta p$  может также осуществляться состояние типа Фулде–Феррела–Ларкина–Овчинникова [32, 33] с неоднородной щелью. Конкурирующим типом основного состояния является жидкая металлическая электронно-дырочная фаза (электронно-дырочные капли), стабилизации которой способствует многодолинность полупроводников (типа Ge и Si) [34].

\*E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

мером электронно-дырочных пар, существенно большим среднего расстояния между ними [1, 2, 6]. В квазидвумерной электронно-дырочной системе состояние БКШ рассмотрено в работах [13, 15]. В работах [13] состояние БКШ изучается для пространственно-разделенной электронно-дырочной системы. В последующих работах [13–30] детально рассмотрены сверхтекучесть системы, фазовая диаграмма, роль процессов туннелирования, эффект типа Джозефсона, эффекты увлечения и т. п. Случай промежуточной плотности, отвечающий жидкой фазе квазидвумерных экситонов, был детально исследован в работах [17] (см. также трехмерный случай [35]). Фазовая диаграмма и свойства такой системы при  $T < T_c$  рассматривались в работах [13, 15].

Появление когерентной фазы в системе экситонов при температуре  $T < T_c$  должно сопровождаться возникновением ряда новых оптических свойств этой системы [36–40]. Одним из оптических проявлений когерентной фазы является возникновение интенсивной узкой линии в спектре флуоресценции, отвечающей рекомбинации экситонов из бозе-конденсата, интенсивность которой пропорциональна бозе-фактору  $n_0$ , т. е. плотности бозе-конденсата. Для сильно взаимодействующей системы экситонов концентрация надконденсатных экситонов в основном состоянии довольно велика. На фоне их спектра рекомбинации выделить линию, отвечающую бозе-конденсату экситонов, непросто. Поэтому хотелось бы найти качественный эффект, который бы более однозначно свидетельствовал о когерентности электронно-дырочной системы.

В данной работе мы рассматриваем когерентную рекомбинацию двух электронно-дырочных пар с испусканием двух фотонов (в плотной когерентной электронно-дырочной системе), выражающуюся через аномальные функции Грина и потому однозначно свидетельствующую о когерентных корреляциях в системе. В разреженном случае рассматривается когерентная рекомбинация двух экситонов из бозе-конденсата, выражающаяся через аномальную функцию Грина [40].

Двухэкситонная рекомбинация является процессом второго порядка по экситон-фотонному взаимодействию, но малость эффекта частично компенсируется тем, что, в отличие от рекомбинации одного экситона из бозе-конденсата, вероятность процесса когерентной рекомбинации из бозе-конденсата пропорциональна  $n_0^2$ , а не  $n_0$ .

Поскольку оба экситона из бозе-конденсата имели нулевой импульс, суммарный импульс пары ро-

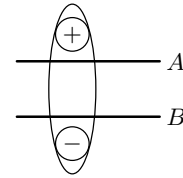


Рис. 1. Связанные квантовые ямы GaAs/AlGaAs. Слои A и B разделены барьером

дившихся фотонов также равен нулю. Следовательно, в трехмерной системе импульсы рожденных фотонов противоположны по направлению, а в двумерной экситонной системе противоположны их компоненты вдоль плоскости в силу сохранения импульса лишь вдоль плоскости системы. Такой процесс может быть обнаружен, в частности, по зависящей от времени угловой корреляции числа фотонов с помощью эксперимента типа Хенбери Брауна и Твисса с соответствующим образом размещенными детекторами, работающими в режиме счета фотонов [37, 41].

Если описанная выше когерентная двухэкситонная рекомбинация происходит под воздействием лазерного луча с импульсом  $\mathbf{k}$ , то, поскольку это единый процесс, индуцируется не только фотон с импульсом  $\mathbf{k}$ , но и фотон с противоположным импульсом  $-\mathbf{k}$  (в двумерной системе с противоположной компонентой импульса вдоль плоскости системы). Это можно рассматривать как фотоиндуцированное отражение света назад (по отношению к падающему лучу). В двумерной системе противоположной компоненте импульса соответствуют два индуцированных луча (см. ниже рис. 5) — отраженный назад и аномально проходящий. В системе бозе-конденсированных экситонов возможен также ряд многофотонных эффектов, связанных с когерентной многоэкситонной рекомбинацией (см. ниже, а также [40]).

Мы рассматриваем эффект стимулированного отражения света от двумерной электронно-дырочной системы в связанных квантовых ямах GaAs/AlGaAs (рис. 1) как при низких, так и при высоких концентрациях  $n$  электронов и дырок. Также мы исследуем обратное отражение света от когерентной фазы плотной электронно-дырочной системы в массивном GaAs. В связи с экспериментами и дискуссией о возможной бозе-конденсации экситонов в  $\text{Cu}_2\text{O}$  [7, 8, 39, 42–49], мы рассматриваем когерентную многоэкситонную рекомбинацию из бозе-конденсата в  $\text{Cu}_2\text{O}$ , а именно трех- и четырехэкситонную рекомбинацию.

## 2. КОГЕРЕНТНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И АНОМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Как известно, лазерным излучением можно возбуждать в полупроводниках равное число электронов и дырок, зависящее от интенсивности падающего излучения. Если время жизни таких возбуждений много больше времени их релаксации, то электронно-дырочная система может находиться в квазиравновесном состоянии и образовывать ряд равновесных фаз. Рекомбинация электронно-дырочной пары в прямом полупроводнике, таком как GaAs, происходит с испусканием одного фотона. Как уже было сказано, электронно-дырочная система при достаточно низких температурах переходит в когерентную фазу, что проявляется в наличии ненулевых аномальных средних, которые связывают одночастичные состояния с противоположными импульсами. Именно благодаря наличию этих средних, возможны процессы, при которых в результате аннигиляции двух скоррелированных электронно-дырочных пар или экситонов происходит рождение двух фотонов с противоположными импульсами (в трехмерной системе). Этот процесс может быть стимулирован лазерным излучением резонансной частоты.

Упомянутая выше когерентность для случая низких концентраций электронов и дырок проявляется в отличной от нуля аномальной функции Грина

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{p}) = -i \int dt e^{i\omega t} \langle T a_{\mathbf{p}}(t) a_{-\mathbf{p}}(0) \rangle =$$

$$= - \frac{\beta}{[\omega - (\varepsilon(\mathbf{p}) - i\gamma)][\omega + (\varepsilon(\mathbf{p}) - i\gamma)]},$$

где  $a_{\mathbf{p}}$  — оператор уничтожения экситона с импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $T$  — оператор хронологического упорядочения,  $\varepsilon(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon_{\mathbf{p}}$  и  $\gamma$  — соответственно дисперсия и обратное время жизни элементарного возбуждения электронно-дырочной системы (для простоты считаем, что  $\gamma$  не зависит от энергии и импульса элементарного возбуждения). Будем использовать единицы, в которых  $\hbar = 1$ , тогда  $\beta = \rho_{cond} V_0$ ,  $\rho_{cond}$  — концентрация экситонов в конденсате,  $V_0$  — нулевая фурье-компонента межэкситонного взаимодействия. Дисперсия элементарных возбуждений экситонной системы записывается в виде

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{v^2 k^2}{M} + \left(\frac{k^2}{2M}\right)^2}, \quad (1)$$

где  $v = \sqrt{\beta/M}$  — скорость звука,  $M$  — масса экситона в GaAs.

В случае высоких концентраций аномальная функция Грина электронно-дырочной системы имеет вид

$$F(\omega, \mathbf{p}) = -i \int dt e^{i\omega t} \langle T e_{\mathbf{p}}(t) h_{-\mathbf{p}}(0) \rangle =$$

$$= \Delta \prod_{\pm} \left[ \omega - \frac{1}{2} [\varepsilon_1(\mathbf{p}) + \varepsilon_2(\mathbf{p})] \pm (\xi(\mathbf{p}) + i\eta) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $e_{\mathbf{p}}$  — оператор уничтожения электрона,  $h_{\mathbf{p}}$  — оператор уничтожения дырки,  $\xi(\mathbf{p}) \equiv \xi_{\mathbf{p}}$  — дисперсия элементарного возбуждения электронно-дырочной системы, аналогичная закону дисперсии в теории БКШ,

$$\xi_{\mathbf{p}} = \sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_1(\mathbf{p}) - \varepsilon_2(\mathbf{p}))^2},$$

$\Delta$  — щель,  $\varepsilon_1(\mathbf{p})$  и  $\varepsilon_2(\mathbf{p})$  — дисперсии электронов соответственно в электронной зоне слоя  $A$  (зона 1) и дырочной зоне слоя  $B$  (зона 2) при отсутствии взаимодействия между ними. Для случая квадратичной дисперсии имеем

$$\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) = (-1)^{\alpha} \left( -\frac{p^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_F^2}{2m_{\alpha}} \right),$$

где импульс Ферми  $p_F$  определяется концентрацией возбужденных электронов,  $m_1$  и  $m_2$  — эффективные массы электрона соответственно в зонах 1 и 2.

Если рассматриваемая нами электронно-дырочная система является квазидвумерной, то в процессе рекомбинации электрона и дырки сохраняется лишь компонента импульса, лежащая в плоскости квантовой ямы, и, следовательно, компонента импульса фотона, перпендикулярная плоскости, фиксируется лишь законом сохранения энергии.

Скорость генерации двух фотонов с компонентами импульса  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  ( $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{\parallel}$ ), лежащими в плоскости квантовой ямы, дается выражением (величины, относящиеся к случаю низких (высоких) концентраций, мы обозначаем с индексом  $a$  ( $b$ ))

$$\mathcal{W}_{(a,b),\mathbf{k}_{\parallel}} = \int 2\pi \delta(\omega_1 + \omega_2) |\mathcal{M}_{(a,b)}(\omega_1, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \times$$

$$\times \prod_{i=1,2} \frac{dk_{\perp,i}}{2\pi}, \quad (3)$$

где  $k_{\perp,i}$  — компоненты импульса двух фотонов, перпендикулярные плоскости квантовой ямы,

$$\omega_i(\mathbf{k}_{\parallel}, k_{\perp,i}) = c\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + k_{\perp,i}^2} - \mu$$

— энергии фотонов, отсчитанные от химического потенциала  $\mu$  электронно-дырочной системы,

$\mathcal{M}_{(a,b)}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})$  — матричный элемент перехода. Химический потенциал  $\mu$  можно записать как  $\mu_a = E_g - E_b$  и  $\mu_b = E_g + \mu_e + \mu_h$  соответственно в пределах низких и высоких концентраций, где  $E_g$  — ширина запрещенной зоны полупроводника,  $E_b$  — энергия связи экситона,  $\mu_{e,h}$  — химические потенциалы носителей заряда, отсчитанные соответственно от зоны проводимости и от валентной зоны. Ширина запрещенной зоны на несколько порядков больше, чем любая из этих величин, поэтому  $\mu_a \approx \mu_b \approx E_g$ .

### 3. РАЗРЕЖЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ КОГЕРЕНТНАЯ ФАЗА ЭКСИТОНОВ

Сначала рассмотрим случай низких концентраций электронов и дырок. Гамильтониан экситон-фотонного взаимодействия записывается в виде

$$H_{int}^{(a)} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\mathbf{k}}}{\sqrt{L}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}} + \text{H.c.}, \quad (4)$$

где  $g_{\mathbf{k}}$  — константа экситон-фотонного взаимодействия. Для удобства положим, что толщина ямы  $L = 1$ , так как эта величина не входит в конечный результат. С учетом сказанного выше рассматриваемый процесс является переходом системы из состояния

$$|\Phi_0\rangle = |N_{ex}\rangle |0\rangle$$

в состояние

$$|\Phi_f\rangle = |(N - 2)_{ex}\rangle |1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2}\rangle,$$

где  $|N_{ex}\rangle$  — основное состояние системы из  $N_{ex}$  экситонов, взаимодействующих друг с другом,  $|0\rangle$  — основное состояние системы фотонов и  $|1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2}\rangle = c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} |0\rangle$ ,  $c_{\mathbf{k}_1}^{\dagger}$  — оператор рождения фотона с импульсом  $(\mathbf{k}_1, k_{\perp,1})$ . В низшем порядке по экситон-фотонному взаимодействию матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид (рис. 2)

$$S_{0 \rightarrow f}^{(a)} = \frac{1}{2} \int \langle \Phi_f | H_{int}^{(a)}(t_1) H_{int}^{(a)}(t_2) | \Phi_0 \rangle dt_1 dt_2 = \mathcal{M}_a(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) \delta(\omega_1 + \omega_2) = g^2 \hat{G}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) \delta(\omega_1 + \omega_2). \quad (5)$$

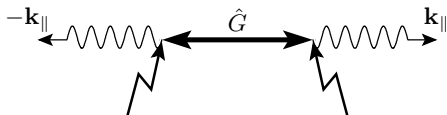


Рис. 2. Диаграмма двухэкситонной рекомбинации в GaAs

Матричный элемент (5) отличен от нуля лишь при  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_{\parallel}$ , т. е. испускаются два фотона с противоположными проекциями на плоскость квантовой ямы. При условии, что  $\gamma \ll \epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ , можно использовать полюсное приближение:

$$|\mathcal{M}_a(\omega, \mathbf{k}_{\parallel})|^2 \approx \frac{\pi g^4 \beta^2}{\gamma(4\epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}^2 + \gamma^2)} \sum_{\pm} \delta(\omega \pm \epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}). \quad (6)$$

Выражение для скорости процесса двухфотонного испускания можно упростить следующим образом:

$$\mathcal{W}_{a,\mathbf{k}_{\parallel}} = \frac{\beta^2}{\gamma(4\epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}^2 + \gamma^2)} \times \times \prod_{\pm} \left[ g^2 \int 2\pi \delta(\omega \pm \epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}) \frac{dk_{\perp}}{2\pi} \right], \quad (7)$$

где  $\omega$  следует рассматривать как функцию от  $\mathbf{k}_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$ . Величина в квадратных скобках является обратным временем жизни экситона с импульсом  $\mathbf{k}$ . Из (6) следует, что энергии испущенных фотонов отличаются друг от друга на величину порядка  $\epsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ , которая мала по сравнению с химическим потенциалом  $\mu$ . Следовательно, абсолютные значения импульсов рожденных фотонов можно с большой точностью положить равными  $k_0 \approx E_g/c$ . Таким образом, углы, которые импульсы фотонов составляют с плоскостью квантовой ямы, приблизительно равны.

Скорость испускания одного фотона с компонентой импульса  $\mathbf{k}$ , лежащей в плоскости квантовой ямы, есть  $W_{a,\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}} \tau_{\mathbf{k}}^{-1}$ , где  $n_{\mathbf{k}}$  — число экситонов с импульсом  $\mathbf{k}$ ,  $n_{\mathbf{k}} = \beta/2\epsilon_{\mathbf{k}}$ . Таким образом, можно оценить отношение числа фотонов, испущенных в единицу времени в результате однофотонной рекомбинации, к числу фотонов, испущенных в результате когерентной двухфотонной рекомбинации:

$$\alpha_a = \frac{W_{a,\mathbf{k}}}{W_{a,\mathbf{k}}} = \frac{2\epsilon_{\mathbf{k}}\beta}{\gamma(4\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \gamma^2)\tau_{\mathbf{k}}}.$$

Для оценок возьмем  $\beta = 0.8 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1} \equiv 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$ ,  $\tau_{\mathbf{k}} \approx 10^{-8} \text{ с}$ . Эффективная масса экситона в GaAs составляет  $0.22m_e$ , где  $m_e$  — масса свободного электрона. Тогда скорость звука в системе экситонов равна  $v \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ . Значение  $\gamma$  оценим как  $\gamma \sim v/l \sim 10^8 - 10^9 \text{ с}^{-1}$ , где  $l$  — длина свободного пробега экситона. Тогда значение  $\alpha_a$  для различных  $\mathbf{k}$  варьируется в пределах от нуля до десяти.

#### 4. ВЫСОКИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ДЫРОК. ПЛОТНАЯ ДВУМЕРНАЯ ЭКСИТОННАЯ ФАЗА

Рассмотрим теперь случай высоких концентраций,  $na_B^2 \gg 1$ . Гамильтониан электронно-дырочно-фотонного взаимодействия можно записать в виде

$$H_{int}^{(b)} = \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \frac{f_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}}{\sqrt{V}} e^{\dagger}_{\mathbf{q}} h^{\dagger}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}} + \text{H.c.}, \quad (8)$$

где  $V$  — объем системы. В дальнейшем пренебрегаем слабой зависимостью  $f_{\mathbf{q}, \mathbf{k}}$  от  $\mathbf{q}$ , т.е. считаем, что  $f_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}$ , и полагаем  $V = 1$ . Мы рассматриваем процесс перехода системы из состояния

$$|\Phi_0\rangle = |\psi\rangle_{(N)} |0\rangle$$

в состояние

$$|\Phi_f\rangle = |\psi\rangle_{(N-2)} |1_{\mathbf{k}_1}\rangle |1_{\mathbf{k}_2}\rangle,$$

где  $|\psi\rangle_{(N)}$  — волновая функция основного состояния системы, состоящей из  $N$  дырок и электронов, аналогичная волновой функции основного состояния в теории БКШ [6]. Этот процесс есть не что иное, как двухфотонное испускание, обусловленное когерентной рекомбинацией двух электронно-дырочных пар. Запишем матричный элемент перехода в виде (рис. 3)

$$S_{0 \rightarrow f}^{(b)} = \frac{1}{2} \int \langle \Phi_f | H_{int}^{(b)}(t_1) H_{int}^{(b)}(t_2) | \Phi_0 \rangle dt_1 dt_2 = \mathcal{M}_b(\omega_1, \mathbf{k}_1) \delta(\omega_1 + \omega_2), \quad (9)$$

где

$$\mathcal{M}_b(\omega, \mathbf{k}) = f_{\mathbf{k}}^2 \int F(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) F(\omega - \omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{k} - \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} d\omega_{\mathbf{p}}. \quad (10)$$

Выполняя интегрирование по  $\omega_{\mathbf{p}}$ , получаем

$$\mathcal{M}_b(\omega, \mathbf{k}) = i\pi \Delta^2 f_{\mathbf{k}}^2 \int \frac{[\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{p}}(\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}) + (\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + 2i\eta)(\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} - \omega)]}{(\xi_{\mathbf{p}} + i\eta)(\xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + i\eta) [(\omega - \alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{p}})^2 - (\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} + 2i\eta)^2]} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (11)$$

где

$$\alpha_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} = \frac{\varepsilon_1(\mathbf{p}) + \varepsilon_2(\mathbf{p})}{2} - \frac{\varepsilon_1(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \varepsilon_2(\mathbf{k} - \mathbf{p})}{2}.$$

Интеграл (11) является достаточно громоздким, поэтому мы вычислим матричный элемент  $\mathcal{M}_b(\omega, \mathbf{k})$  при  $\mathbf{k} = 0$ , т.е. в том случае, когда фотоны испускаются перпендикулярно плоскости квантовой ямы. Для малых значений  $|\mathbf{k}|$  полученная оценка скорости двухфотонного испускания будет качественно верной. При  $\mathbf{k} = 0$  интеграл (11) сильно упрощается:

$$\mathcal{M}_b(\omega, 0) \equiv \mathcal{M}_b(\omega) = i\pi \Delta^2 f_0^2 \int \frac{1}{(\xi_{\mathbf{p}} + i\eta)(\omega'^2 - 4(\xi_{\mathbf{p}} + i\eta)^2)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Поскольку подынтегральное выражение зависит лишь от  $|\mathbf{p}| \equiv p$ , удобно перейти к интегрированию по  $\varepsilon = p^2/2M_1$ , где  $M_1 = 2m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Возникающий при этом однократный интеграл можно вычислить аналитически, в результате чего при усло-

вии  $\Delta \ll p_F^2/2M_1$  получим

$$\mathcal{M}_b(\omega) = \frac{M_1}{2\pi} \Delta^2 f_0^2 \left( -\frac{A^- \ln(\alpha^- \beta^+ / \alpha^+ \beta^-) + A^+ D}{2\omega r} + i \frac{A^+ \ln(\alpha^- \beta^+ / \alpha^+ \beta^-) - A^- D}{2\omega r} \right),$$

где

$$r = \sqrt{(\omega'^2 - 4\Delta^2 - 4\eta^2)^2 + 16\omega'^2 \eta^2},$$

$$A^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r \pm (\omega'^2 - 4\Delta^2 - 4\eta^2)},$$

$$\alpha^{\pm} = \sqrt{\left(\Delta \pm \frac{\omega}{2} - \frac{A^+}{2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{A^-}{2}\right)^2},$$

$$\beta^{\pm} = \sqrt{\left(\Delta \pm \frac{\omega}{2} + \frac{A^+}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{A^-}{2}\right)^2},$$

$$D = \arcsin\left(\frac{\Delta + \omega - A^+/2}{\alpha^+}\right) - \arcsin\left(\frac{\Delta - \omega - A^+/2}{\alpha^-}\right) + \arccos\left(\frac{\Delta - \omega + A^+/2}{\beta^-}\right) - \arccos\left(\frac{\Delta + \omega + A^+/2}{\beta^+}\right).$$

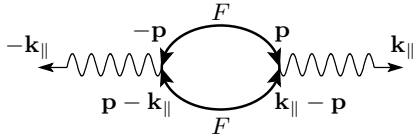


Рис. 3. Диаграмма когерентной рекомбинации двух электронно-дырочных пар в GaAs

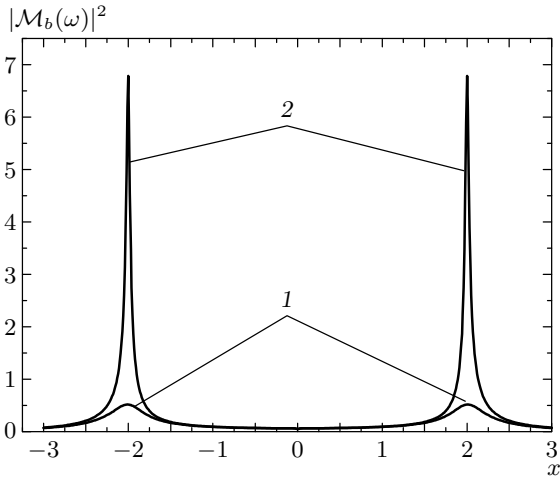


Рис. 4. Зависимость  $|M_b(\omega)|^2$  от  $x \equiv \omega/\Delta$  для различных значений  $\eta/\Delta$ : 1 — 0.1; 2 — 0.01

Нас интересует функция  $|M_b(\omega)|^2$ . Ее график изображен на рис. 4 для различных значений параметра  $\eta$ . Как видно из рис. 4, эта функция отлична от нуля лишь в узкой области около значений  $\omega = \pm 2\Delta$ . При  $\eta/\Delta \rightarrow 0$  размеры этой области стремятся к нулю, поэтому мы можем аппроксимировать  $|M_b(\omega)|^2$  следующим образом:

$$|M_b(\omega)|^2 = \left(\frac{M_1}{2\pi}\right)^2 \Delta f_0^4 S_\eta [\delta(\omega - 2\Delta) + \delta(\omega + 2\Delta)], \quad (12)$$

где  $S_\eta \approx 0.3 \ln(\eta/\Delta)$ . Используя выражение (12), легко оценить скорость двухфотонного испускания в направлении, перпендикулярном плоскости квантовой ямы. Взяв интеграл (3) аналогично тому, как это было сделано в (7), получим

$$W_b = \left(\frac{M_1}{2\pi}\right)^2 \frac{\Delta S_\eta}{n^2} W_b^2, \quad (13)$$

где  $W_b$  — скорость однофотонного испускания. По-

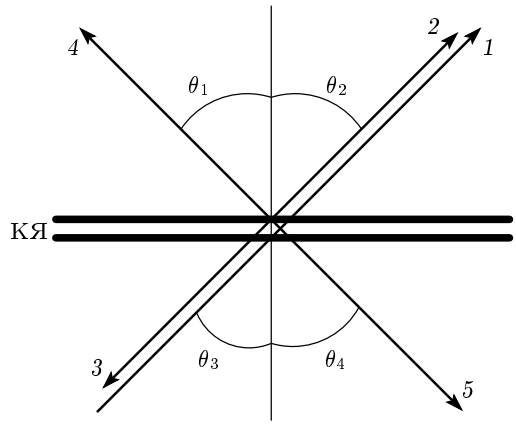


Рис. 5. Фотоиндуцированное отражение света назад и аномальное прохождение света: 1 — падающий лазерный луч; 2 и 3 — стимулированное двухфотонное испускание в направлениях соответственно  $(k_{\parallel}, k_{\perp})$  и  $(-k_{\parallel}, k_{\perp})$ ; 4 — стимулированное аномальное прохождение в направлении  $(-k_{\parallel}, k_{\perp})$ ; 5 — обычное отражение в направлении  $(k_{\parallel}, -k_{\perp})$ ;  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4$  (КЯ — связанные квантовые ямы)

лагая  $n \sim 10^{12} \text{ см}^{-2}$ ,  $\Delta \sim 0.001 \text{ эВ}$ ,  $\eta/\Delta \sim 0.001$ ,  $W_b \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $M_1 = 0.1m_e$ , получаем

$$\alpha_b = W_b/W_b \sim 10^{-6} - 10^{-5}. \quad (14)$$

При наличии стимулирующего излучения резонансной частоты с числом  $N_0$  фотонов в одной лазерной моде скорость испускания фотонов в направлении, обратном направлению падения лазерного луча, дается выражением

$$W_{opp} = (N_0 + 1)W_b. \quad (15)$$

Таким образом, если  $N_0 \sim 10^5 - 10^6$ , то скорость  $W_{opp}$  испускания фотонов назад сравнима со скоростью однофотонной эмиссии, что говорит о возможности экспериментального наблюдения рассматриваемого эффекта.

Следует отметить, что в обоих рассмотренных случаях (высоких и низких концентраций) в связи с двумерностью электронно-дырочной системы лазерная мода стимулирует испускание фотонов с волновыми векторами  $(k_{\parallel}, \pm k_{\perp,1})$  и  $(-k_{\parallel}, \pm k_{\perp,2})$ , причем  $k_{\perp,1} \approx k_{\perp,2}$ . Таким образом, помимо рассеяния назад, может испуститься аномально проходящий фотон 4, отличающийся от обычного проходящего фотона противоположной проекцией импульса на плоскость квантовой ямы, что можно рассматривать как эффект аномального прохождения света (рис. 5).

### 5. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА НАЗАД ОТ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛОТНОЙ ЭКСИТОННОЙ ФАЗЫ В ПРЯМОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Рассмотрим эффект стимулированного отражения света в трехмерной системе GaAs для случая высоких концентраций электронов и дырок ( $na_B^3 \gg 1$ ). В этом случае гамильтониан взаимодействия электронно-дырочной системы с электромагнитным полем имеет вид (8), а матричный элемент перехода из состояния  $|\Phi_0\rangle$  в состояние  $|\Phi_f\rangle$  дается выражением (9), однако теперь аргумент  $\mathbf{k}$  — трехмерный вектор, и интегрирование в (10) ведется по трехмерному вектору  $\mathbf{p}$ . Следует отметить, что в трехмерной системе законы сохранения импульса и энергии фиксируют как модуль, так и направление волновых векторов фотонов, излучаемых в результате когерентной рекомбинации двух электронно-дырочных пар и, следовательно, фотоны излучаются с равными и противоположно направленными импульсами. Вычислим матричный элемент  $\mathcal{M}_b(\omega, \mathbf{k}) \equiv \mathcal{M}_b(\mathbf{k})$ . Интегрирование по  $\omega_{\mathbf{p}}$ , как и в двумерном случае, приводит к интегралу (11); направив ось  $z$  по вектору  $\mathbf{k}$ , запишем интеграл (11) в виде

$$\mathcal{M}_b(\mathbf{k}) = (2M_1)^{3/2} \sqrt{\Delta} f_{\mathbf{k}}^2 I(p_i), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (16)$$

Здесь  $I(p_i)$  — интеграл, зависящий от безразмерных параметров

$$p_1 = \frac{k^2}{2M_1\Delta}, \quad p_2 = \frac{k^2}{2M_2\Delta}, \quad p_3 = \frac{M_1 k^2}{2M_2^2\Delta},$$

$$p_4 = \frac{p_F^2}{2M_1\Delta}, \quad p_5 = \frac{\omega}{\Delta} \approx \frac{E_g}{\Delta}, \quad p_6 = \frac{\eta}{\Delta},$$

где  $M_2 = 2m_1m_2/(m_2 - m_1)$ ,  $m_1 \neq m_2$ . Константу  $I(p_i)$  можно найти численно при определенных значениях параметров  $p_i$ . В нашем случае  $E_g \approx 1.5$  эВ,  $n = 10^{21}$  см $^{-3}$ ,  $p_F = 3 \cdot 10^7$  см $^{-1}$ ,  $M_2 \approx 0.2m_e$ ,  $\Delta = 0.2p_F^2/2M_1$ . Эти величины полностью определяют значения параметров  $p_i$ , при которых  $|I(p_i)|^2 \approx 250$ . Таким образом, легко оценить, что скорость испускания двух фотонов с векторами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$  ( $|\mathbf{k}| \approx E_g/c$ ) равна по порядку величины  $\mathcal{W}_{b,\mathbf{k}} \approx 5 \cdot 10^{21}$  с $^{-1}$ .

### 6. МНОГОЭКСИТОННАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ ИЗ БОЗЕ-КОНДЕНСАТА В $\text{Cu}_2\text{O}$

Рассмотрим трех- и четырехэкситонную когерентную рекомбинацию из бозе-конденсата. Эти процессы являются по своей сути обобщением двухэкситонной когерентной комбинации, рассмотренной выше. Здесь мы проанализируем эти процессы лишь в

системе бозе-конденсированных трехмерных экситонов в  $\text{Cu}_2\text{O}$ . Как известно, в  $\text{Cu}_2\text{O}$  вероятность прямой рекомбинации электрона и дырки очень мала, и поэтому экситоны распадаются преимущественно с испусканием фотона и оптического фонона. Таким образом, оператор экситон-фотон-фононного взаимодействия имеет вид

$$V^{(1)} = \sum_{\mathbf{p}-\mathbf{k}-\mathbf{q}=0} \frac{\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{\sqrt{V}} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} Q_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{q}} + \text{H.c.}, \quad (17)$$

где  $b_{\mathbf{q}}$  — оператор уничтожения фонона с импульсом  $\mathbf{q}$ ,  $\lambda$  — эффективная константа взаимодействия.

Процесс  $N$ -экситонной рекомбинации с рождением  $N$  фотонов переводит систему из начального состояния  $\langle i |$  в состояние  $\langle f |$ :

$$\langle i | \xrightarrow{V^{(1)}} c_{\mathbf{k}_1} \dots c_{\mathbf{k}_N} a_0^N \langle i | = \langle f |.$$

Как и в случае двухэкситонной рекомбинации, рассматриваемые процессы могут быть обнаружены с помощью экспериментов типа Хенбери Брауна и Твисса с  $N$ -фотонными детекторами, работающими в режиме схемы совпадения. Мы же остановимся на возможности обнаружения этих эффектов посредством воздействия на систему индуцирующими внешними лазерными лучами.

Поскольку конденсатные экситоны имеют нулевой импульс, суммарный импульс  $N$  рожденных фотонов равен нулю:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i = 0. \quad (18)$$

Напомним, что мы отсчитываем энергию фотонов от положения химического потенциала  $\mu$  экситонов, т. е. дисперсия фотонов имеет вид

$$\omega_{\mathbf{k}} = ck - \mu \equiv c(k - k_0).$$

Этот выбор фотонной дисперсии фиксирует шкалу энергий экситонов и фотонов так, что конденсатные экситоны обладают нулевой энергией ( $\mu = 0$ ). Закон сохранения энергии в процессе  $N$ -экситонной рекомбинации из конденсата требует выполнения следующего соотношения между энергиями рожденных фотонов:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 0, \quad \omega_i \equiv \omega_{\mathbf{k}_i}. \quad (19)$$

Процесс  $N$ -экситонной рекомбинации из конденсата, будучи индуцированным внешними  $N-1$  лазерными

лучами с волновыми векторами  $\mathbf{k}_i, i = 1, \dots, N - 1$ , должен проявлять себя в том, что возникает однонаправленное излучение от конденсата с волновым вектором «отдачи», удовлетворяющим условию (18):

$$\mathbf{k}_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i, \quad (20)$$

и энергией, удовлетворяющей условию (19):

$$\omega_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \omega_i. \quad (21)$$

Интенсивность излучения в стимулированном процессе  $N$ -экситонной рекомбинации по сравнению с интенсивностью спонтанного излучения в этом процессе возрастает в

$$\prod_{i=1}^{N-1} (N_i + 1) \quad (22)$$

раз, где  $N_i$  — среднее количество квантов в моде индуцирующего лазерного луча с волновым вектором  $\mathbf{k}_i$ . Как и в случае двухэкситонной рекомбинации, стимулированная одноэкситонная рекомбинация (при соответствующем направлении падающего луча) не будет давать вклада в люминесценцию в направлении вектора  $\mathbf{k}_N$  (20). По этой причине в этом направлении фонон будет являться лишь спонтанная одноэкситонная рекомбинация. Именно с интенсивностью этого процесса нужно сравнивать скорость  $N$ -экситонной стимулированной рекомбинации в направлении  $\mathbf{k}_N$ , для того чтобы понять, возможно ли выделить ее из фона. Если считать, что индуцирующие лазерные лучи имеют по  $10^3$  квантов в моде и если обозначить через  $W_N$  скорость спонтанной  $N$ -экситонной рекомбинации, то критерий возможности выделения этого эффекта из фона можно записать в виде

$$10^{3(N-1)} W_N > W_1, \quad (23)$$

где  $W_1$  — скорость спонтанной одноэкситонной рекомбинации, которая дается выражением

$$W_1 = \rho_{cond} / \tau. \quad (24)$$

Здесь  $\tau = \pi / \lambda^2 k_0^2 \approx 10^{-5}$  с — время распада экситона в  $\text{Cu}_2\text{O}$ , откуда  $\lambda \approx 2.5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{3/2}$ .

Как будет видно из дальнейшего, при изучении трехэкситонной рекомбинации нам понадобится также и фонон-экситонное взаимодействие, оператор которого мы запишем в виде

$$V^{(2)} = \sum_{\mathbf{p}-\mathbf{k}-\mathbf{q}=0} \frac{g_{\mathbf{k},\mathbf{q}}}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{q}} + \text{H.c.} \quad (25)$$

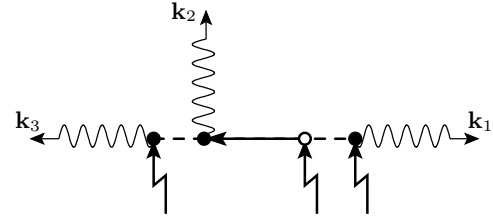


Рис. 6. Диаграмма четырехэкситонной рекомбинации из конденсата

Для оценок возьмем константу взаимодействия  $g = 10^2 \lambda$ , что соответствует тому, что процессы фононного обмена между экситонами на четыре порядка интенсивнее, чем процесс испускания фотонов, который характеризуется временами порядка  $10^{-10}$  с.

Скорость рождения фотонов в процессе спонтанной  $N$ -экситонной рекомбинации с помощью золотого правила Ферми можно записать как

$$W_N = N \int 2\pi \delta \left( \sum_{i=1}^N \omega_i \right) \times \\ \times |\mathcal{M}_N(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_N)|^2 V^N \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3}, \quad (26)$$

где  $\mathcal{M}_N$  — матричный элемент процесса, а множитель  $N$  учитывает тот факт, что в каждом элементарном процессе рождается  $N$  фотонов. Матричный элемент  $\mathcal{M}_N$  имеет  $N$  множителей  $V^{-1/2}$ , так что объем системы  $V$  выпадает из конечного результата; поэтому можно положить  $V = 1$ .

### 6.1. Трехэкситонная когерентная рекомбинация из конденсата

Полный матричный элемент трехэкситонной рекомбинации является суммой матричных элементов, получающихся из приведенного на рис. 6 всевозможными перестановками аргументов фотонных концов. Аналитическое выражение, соответствующее этому матричному элементу, дается выражением

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \\ = g \lambda^3 \rho_{cond}^{3/2} \sum_{i \neq j} G(\omega_i) G(\omega_j) G_{-\mathbf{k}_j}(\omega_j), \quad (27) \\ i, j = 1, 2, 3,$$

где  $G(\omega, \mathbf{k})$  — функция Грина экситонов,

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega + \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \beta^2}}{[\omega - (\varepsilon_{\mathbf{k}} - i\gamma)][\omega + (\varepsilon_{\mathbf{k}} - i\gamma)]}, \quad (28)$$



а  $\mathcal{G}(\omega)$  — фононная функция Грина,

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{2\Omega}{[\omega - (\Omega - i\delta)][\omega + (\Omega - i\delta)]}, \quad (29)$$

которую мы считаем не зависящей от волнового вектора. Последнее справедливо, поскольку все волновые векторы, встречающиеся в данном расчете, имеют порядок волнового вектора  $k_0$  радиационной зоны, который, в свою очередь, в масштабе зоны Бриллюэна является малой величиной. При таких значениях волновых векторов оптических фононов их энергию можно считать константой.

Основной вклад в скорость процесса дают те области, в которых аргументы гриновских функций наиболее близки к своей массовой поверхности, т. е. к своему резонансу. В свою очередь, энергии фотонов (при выбранном законе дисперсии фотонов) в этих областях имеют порядок энергии  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  элементарных возбуждений в экситонной системе или энергии  $\Omega$  оптических фононов (см. ниже выражения (31)). Оба этих значения значительно меньше (по порядку величины) химического потенциала  $\mu$  экситонов, отсчитываемого от потолка валентной зоны и приближенно равного полупроводниковой щели. По этой причине длины волновых векторов фотонов можно считать приближенно равными волновому вектору  $k_0$  радиационной зоны и, следовательно, применимо приближение фиксированных длин волновых векторов фотонов, приведенное в Приложении. В (27) волновой вектор  $-\mathbf{k}_j$  может быть заменен на  $k_0$ , и матричный элемент (27) становится только функцией энергий фотонов. Полагая  $\delta \ll \Omega$  и  $\gamma \ll \varepsilon_{k_0}$ , можно воспользоваться полюсным приближением, которое позволяет в выражении для  $|\mathcal{M}_3|^2$  оставить только шесть резонансных членов, дающих одинаковый вклад в скорость процесса:

$$|\mathcal{M}_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 \approx 6g^2\lambda^6\rho_{cond}^3 |\mathcal{G}(\omega_2)\mathcal{G}(\omega_1)G_{k_0}(\omega_1)|^2.$$

Приближение фиксированных длин волновых векторов позволяет свести выражение для скорости спонтанной трехэкситонной рекомбинации к следующему виду:

$$W_3 = 18 \frac{g^2\lambda^6\rho_{cond}^3 k_0^3}{\pi c^3} \int |\mathcal{G}(\omega_1)G_{k_0}(\omega_1)|^2 \frac{d\omega_1}{2\pi} \times \int |\mathcal{G}(\omega_2)|^2 \frac{d\omega_2}{2\pi}.$$

Энергия оптических фононов  $\Omega \approx 10^{-2}$  эВ значительно больше энергии элементарных возбуждений в экситонной системе  $\varepsilon_{k_0} \approx 10^{-4}$  эВ. Воспользовав-

шись этим фактом, можно записать окончательный результат:

$$W_3 = 18 \frac{g^2\lambda^6\rho_{cond}^3 k_0^3}{\pi c^3} \frac{1}{\Omega^2\delta} \left[ \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{\beta^2}{2\varepsilon_{k_0}^2} \right) \right] = 18 \frac{g^2\lambda^4\rho_{cond}^2 k_0}{c^2\Omega^2\delta} \left[ \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\gamma} \left( 1 + \frac{\beta^2}{2\varepsilon_{k_0}^2} \right) \right] W_1. \quad (30)$$

Для оценки возьмем следующие значения параметров: масса экситона в  $\text{Cu}_2\text{O}$  равна примерно  $2.7m_e$ ,  $\beta \approx 0.5$  мэВ ( $0.5 \cdot 10^{12}$  с $^{-1}$ ),  $\rho_{cond} \approx 10^{19}$  см $^{-3}$ ,  $\gamma \approx 0.1\beta$ ,  $\delta \approx 10^9$  с $^{-1}$ . В  $\text{Cu}_2\text{O}$  диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon \approx 9$ ,  $c = c_0/\sqrt{\varepsilon} \approx 10^{10}$  см/с,  $E_g \approx 2$  эВ, так что  $k_0 = 3 \cdot 10^5$  см $^{-1}$ . При выбранных нами параметрах скорость спонтанной трехэкситонной рекомбинации оценивается как

$$W_3 \approx 10^{-2}W_1,$$

т. е. каждый сотый экситон распадается благодаря этому процессу. Таким образом, процесс стимулированной трехэкситонной рекомбинации должен быть экспериментально обнаружен (см. (23)).

Эксперимент, в котором можно обнаружить эффект стимулированной трехэкситонной рекомбинации, состоит в следующем. Подвергнем экситонную систему облучению двумя лазерными лучами, направленными друг относительно друга под углом  $2\pi/3$ . В результате должно появиться исходящее из конденсата излучение, компланарное индуцирующим лазерным пучкам и направленное под углами  $2\pi/3$  к ним.

Как уже было отмечено, основной вклад в скорость дают области энергий фотонов, в которых виртуальные частицы наиболее близки к своим массовым поверхностям. Таковыми являются области, в которых энергии трех испущенных фотонов близки к следующим наборам величин энергий:

$$\begin{aligned} &(\mu + \Omega, \mu - \Omega, \mu), \\ &(\mu + \Omega, \mu \pm \varepsilon_{k_0}, \mu - \Omega \mp \varepsilon_{k_0}), \\ &(\mu - \Omega, \mu \mp \varepsilon_{k_0}, \mu + \Omega \pm \varepsilon_{k_0}) \end{aligned} \quad (31)$$

(здесь явно включен химический потенциал  $\mu$  экситонов). Первый набор величин энергий соответствует первому члену в скобках выражения (30), так что близким к своему резонансу оказывается виртуальный оптический фонон. Последние два набора величин энергий соответствуют второму члену в (30), так что в резонанс попадает элементарное возбуждение экситонной системы.

Очевидно, что для того чтобы увеличить интенсивность стимулированной трехэкситонной рекомбинации, необходимо выбирать энергии (частоты) индуцирующих лазерных пучков равными любым двум величинам из любого набора (31). Исходящее излучение будет в этом случае иметь энергию (частоту), равную третьей оставшейся величине в выбранном наборе.

### 6.2. Четырехэкситонная рекомбинация из конденсата

В низшем порядке по экситон-фонон-фотонному взаимодействию матричный элемент четырехэкситонной рекомбинации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4) &= \rho_{cond} \lambda^4 \times \\ &\times \sum_{\substack{l \neq m \\ m \neq n \\ n \neq l}} F_{-(\mathbf{k}_l + \mathbf{k}_m)}(-(\omega_l + \omega_m)) \mathcal{G}(-\omega_l) \mathcal{G}(-\omega_n), \\ & l, m, n = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Этот матричный элемент состоит из двенадцати диаграмм, получающихся из приведенной на рис. 7 всеми неэквивалентными перестановками фотонных концов. Необходимо отметить, что явно диаграмма на рис. 7 имеет лишь две входящие линии конденсатных экситонов. Остальные две линии неявно присутствуют в аномальной экситонной функции Грина.

В полюсном приближении в величине  $|\mathcal{M}_4|^2$  можно оставить лишь двенадцать резонансных членов, которые будут давать одинаковые вклады в скорость процесса:

$$|\mathcal{M}_4|^2 = 12 \rho_{cond}^2 \lambda^8 |F_{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|}(\omega_1 + \omega_2) \mathcal{G}(\omega_1) \mathcal{G}(\omega_3)|^2. \quad (32)$$

В приближении фиксированных длин волновых векторов (см. Приложение Б) выражение для скоро-

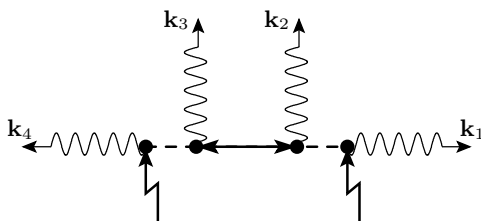


Рис. 7. Диаграмма четырехэкситонной рекомбинации из конденсата

сти процесса четырехэкситонной рекомбинации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_4 &= 48 \rho_{cond}^2 \lambda^8 \frac{k_0^4}{2\pi^2 c^4} \int \frac{du}{2\pi} \int_0^{2k_0} dk |F_k(u)|^2 \times \\ &\times \int \frac{d\omega_1}{2\pi} |\mathcal{G}(\omega_1)|^2 \int \frac{d\omega_3}{2\pi} |\mathcal{G}(\omega_3)|^2, \end{aligned}$$

где мы произвели замену  $u = \omega_1 + \omega_2$  и  $k = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$ . В приближении малой и не зависящей от волнового вектора скорости  $\gamma$  затухания элементарных возбуждений ( $\gamma \ll \varepsilon_{k_0}$ ) первый интеграл даст

$$\int \frac{du}{2\pi} \int_0^{2k_0} dk |F_k(u)|^2 = \frac{\pi \beta^2}{8 \gamma^2 v}.$$

В нашем случае справедлива оценка  $v \approx 0.5 \cdot 10^6$  см/с. Окончательно скорость испускания фотонов в процессе четырехэкситонной рекомбинации из конденсата дается выражением

$$W_4 = \frac{3 \rho_{cond}^2 \lambda^8 \beta^2 k_0^4}{\pi c_v c^4 \delta^2 \gamma^2} = \frac{3 \rho_{cond} \lambda^6 \beta^2 k_0^2}{c_v c^2 \delta^2 \gamma^2} W_1. \quad (33)$$

Численные оценки дают

$$W_4 = 5 \cdot 10^{-3} W_1,$$

т. е. приближенно каждый двухсотый экситон распадается благодаря этому процессу, и исследуемый процесс экспериментально обнаружим (см. (23)).

Волновые векторы фотонов, рожденных в исследуемом процессе, имеют относительную направленность, показанную ниже на рис. 8б в Приложении. Следствием условия (18) является то, что суммарный импульс любых двух фотонов противоположен суммарному импульсу другой пары фотонов. Угол между волновыми векторами фотонов любой пары равен углу между волновыми векторами фотонов другой пары. Однако относительная ориентация плоскостей, в которых лежат волновые векторы фотонов двух пар, не фиксирована, т. е. в общем случае волновые векторы фотонов не компланарны. Суть эксперимента для обнаружения четырехэкситонной рекомбинации состоит в следующем: когерентная экситонная система облучается тремя индуцирующими лазерными пучками. Процесс четырехэкситонной рекомбинации должен проявлять себя как однонаправленное излучение с волновым вектором (20). Волновые векторы стимулирующих пучков и индуцированного излучения от конденсата имеют относительную ориентацию, описанную выше.

Как и в случае трехэкситонной рекомбинации, процесс четырехэкситонной рекомбинации наиболее интенсивно идет в областях фотонных энергий, близких к следующему набору энергий (здесь, также как и в (31), химический потенциал  $\mu$  экситонов включен явно):

$$(\mu + \Omega, \mu - \Omega \pm \varepsilon_{k_0}, \mu - \Omega, \mu + \Omega \mp \varepsilon_{k_0}).$$

Для усиления эффекта четырехэкситонной стимулированной рекомбинации необходимо, чтобы индуцирующие лазерные пучки имели энергии (частоты), равные любым трем величинам из набора. Энергия индуцированного излучения в этом случае будет равна оставшейся величине из набора.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели эффект стимулированного отражения света назад от когерентной фазы электронно-дырочной системы в связанных квантовых ямах GaAs и в трехмерном GaAs, вызванный когерентной рекомбинацией двух конденсатных экситонов или двух электронно-дырочных пар. На основе полученных оценок для скорости двухфотонного испускания мы приходим к выводу, что эффект стимулированного отражения света можно обнаружить экспериментально в случаях как высоких, так и низких концентраций электронов и дырок. При наличии порядка  $10^2$ – $10^5$  квантов в стимулирующей лазерной моде скорость двухфотонного испускания сравнима со скоростью однофотонной рекомбинации. Мы также рассмотрели явление когерентной многоэкситонной рекомбинации в массивном  $\text{Cu}_2\text{O}$ .

Одним из методов изучения систем экситонов являются эксперименты с четырехволновым смешиванием [50–52]. Однако физические основы явлений четырехволнового смешивания и многоэкситонной рекомбинации, рассмотренной в этой работе, различны. В частности, в экспериментах с четырехволновым смешиванием волны экситонной плотности создаются лазерным источником, в то время как при многоэкситонной рекомбинации мы изначально имеем когерентную систему и лазерный луч лишь стимулирует когерентную рекомбинацию.

Следует отметить, что в случае высоких концентраций электронов и дырок когерентная рекомбинация нескольких скоррелированных электронно-дырочных пар также является возможной, что аналогично явлению когерентной многоэкситонной рекомбинации в случае низких концентраций. Экспериментальное подтверждение

рассматриваемых эффектов может служить доказательством существования когерентной фазы в электронно-дырочной системе, так как стимулированное отражение света возможно лишь в системе с когерентной фазой. Другая возможность наблюдения когерентной рекомбинации двух экситонов (в разреженной электронно-дырочной системе) или рекомбинации двух электронно-дырочных пар (в плотной электронно-дырочной системе) с испусканием пары скоррелированных фотонов с противоположными импульсами — эксперимент типа Хенбери Брауна и Твисса с детектированием пары скоррелированных фотонов с помощью двух соответствующим образом расположенных детекторов. Аналогичный эксперимент с  $n$  детекторами может обнаружить  $n$ -экситонную когерентную рекомбинацию.

Один из авторов (Ю. Е. Л.) признателен Ю. М. Кагану, Л. В. Келдышу, Л. А. Максиму и В. Г. Лысенко за полезные обсуждения результатов. Работа поддержана грантами INTAS и РФФИ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегрирование в (26) проводится по трехмерным волновым векторам  $N - 1$  фотонов, в то время как в приближении фиксированных длин волновых векторов фотонов матричные элементы процессов трех- и четырехэкситонной рекомбинации зависят от меньшего количества переменных. Однако можно уменьшить количество переменных интегрирования в (26), т. е. в выражении

$$\int \dots 2\pi\delta \left( \sum_{i=1}^N c(k_i - k_0) \right) \prod_{i=1}^{N-1} \frac{k_i^2 d\omega_i d \cos \theta_i d\phi_i}{c(2\pi)^3}, \quad (34)$$

где использованы сферические координаты фотонных волновых векторов:

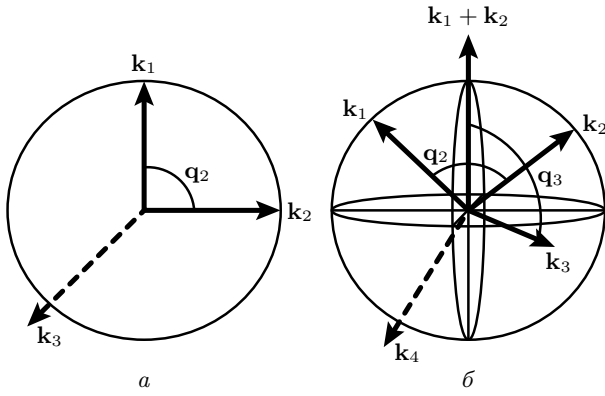
$$\mathbf{k}_i = k_i (\cos \theta_i; \sin \theta_i \cos \phi_i; \sin \theta_i \sin \phi_i). \quad (35)$$

Полагая, что  $k_i = k_0$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , дифференциалы пространств волновых векторов можно записать как

$$\frac{k_0^2 d\omega_i d \cos \theta_i d\phi_i}{c(2\pi)^3},$$

а  $\delta$ -функцию по энергии как

$$\frac{1}{c} \delta \left( \left| \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \right| - k_0 \right). \quad (36)$$



**Рис. 8.** Схематическое представление зависимости длины волнового вектора  $N$ -го фотона от взаимной ориентации волновых векторов остальных  $N-1$  фотонов в приближении фиксированной длины волновых векторов фотонов:  $a - N = 3$ ;  $b - N = 4$

В этом приближении закон сохранения энергии служит для того, чтобы обеспечить такую относительную ориентацию волновых векторов  $N-1$  фотонов  $\mathbf{k}_i, i = 1, \dots, N-1$ , чтобы волновой вектор  $N$ -го фотона, описываемый соотношением (20), имел длину  $k_0$ .

### А. Случай трех фотонов

Матричный элемент трехэкситонной рекомбинации зависит лишь от энергий трех фотонов, и его можно проинтегрировать по остальным переменным, не проводя интегрирования самого матричного элемента. Без потери общности можно считать, что направление азимутальной оси сферических координат второго фотона совпадает с направлением волнового вектора первого фотона, так что справедливо выражение

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| = k_0 \sqrt{2(1 + \cos \theta_2)}$$

(рис. 8а). Выражение (36) для  $\delta$ -функции по энергии принимает вид

$$\frac{1}{ck_0} \delta \left( \sqrt{2(1 + \cos \theta_2)} - 1 \right) = \frac{1}{ck_0} \delta \left( \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \right).$$

Интегрирование по сферическим углам фотонов упрощает выражение (34) в случае трехэкситонной рекомбинации:

$$\frac{k_0^3}{\pi c^3} \int \dots \prod_{i=1}^2 \frac{d\omega_i}{2\pi}. \quad (37)$$

Тот факт, что  $\cos \theta_2 = -1/2$ , означает, что угол, под которым направлены друг к другу волновые векторы фотонов, равен  $2\pi/3$ , как это и должно быть.

### Б. Случай четырех фотонов

В случае четырехфотонной рекомбинации матричный элемент зависит от энергий фотонов, а также величины  $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$ . Чтобы уменьшить количество интегрирований в (26), выберем азимутальную ось сферических координат третьего фотона совпадающей по направлению с вектором  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , так что

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \right| = \sqrt{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 + k_0^2 + 2k_0|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \cos \theta_3}.$$

Выражение (36) для  $\delta$ -функции по энергии принимает вид

$$c^{-1} \delta \left( \sqrt{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^2 + k_0^2 + 2k_0|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \cos \theta_3} - k_0 \right) = (c|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|)^{-1} \delta(\cos \theta_3 - X),$$

где  $X = -(2k_0)^{-1}|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \in [-1, 0]$ . Интегрирование по сферическим углам третьего фотона упрощает выражение (34):

$$\int \dots \frac{k_0^2}{c^2|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \frac{d\omega_3}{(2\pi)} \prod_{i=1}^2 \frac{k_0^2 d\omega_i}{c(2\pi)^3} d \cos \theta_i d\phi_i.$$

Теперь выберем азимутальную ось второго фотона направленной по волновому вектору первого фотона, так что

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| = k_0 \sqrt{2(1 + \cos \theta_2)}$$

(рис. 8б). Интегрирование по  $\cos \theta_2$  можно заменить на интегрирование по  $|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$ :

$$\frac{d \cos \theta_2}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} = \frac{d(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|)}{k_0^2}, \quad |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \in (0, 2k_0).$$

Окончательно получаем, что в случае четырехэкситонной рекомбинации выражение (34) можно представить в виде

$$\frac{k_0^4}{2\pi^2 c^4} \int \dots d|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \prod_{i=1}^3 \frac{d\omega_i}{2\pi}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964).

2. А. Н. Козлов, Л. А. Максимов, ЖЭТФ **48**, 1184 (1965).
3. С. А. Москаленко, ФТТ **4**, 276 (1962).
4. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, ЖЭТФ **54**, 978 (1968).
5. I. M. Blatt, K. W. Boer, and W. Brandt, Phys. Rev. **126**, 1691 (1962).
6. D. Jerome, T. M. Rice, and W. Kohn, Phys. Rev. **158**, 462 (1967).
7. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ФТТ **17**, 1613 (1975);
8. A. L. Ivanov, H. Haug, and L. V. Keldysh, Phys. Rep. **296**, 237 (1998); V. I. Halperin and T. M. Rice, Sol. St. Phys. **21**, 115 (1968); S. A. Moskalenko and D. W. Snoke, *Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons and Coherent Nonlinear Optics with Excitons*, Cambridge Univ. Press, New-York (2000).
9. А. А. Дремин, В. Б. Тимофеев, А. В. Ларионов и др., Письма в ЖЭТФ **76**, 526 (2002); А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, П. А. Ни и др., Письма в ЖЭТФ **75**, 689 (2002); А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, Д. Хвам и др., Письма в ЖЭТФ **75**, 233 (2002).
10. L. V. Butov, A. C. Gossard, and D. S. Chemla, Nature **418**, 751 (2002); L. V. Butov, C. W. Lai, A. L. Ivanov et al., Nature **417**, 47 (2002).
11. S. A. Moskalenko, M. A. Liberman, D. W. Snoke et al., Phys. Rev. B **66**, 245316 (2002).
12. V. V. Krivolapchuk, E. S. Moskalenko, and A. L. Zhmodikov, Phys. Rev. B **64**, 045313 (2001); J.-P. Cheng, J. Kono, B. D. McCombe et al., Phys. Rev. Lett. **74**, 450 (1995); L. V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, G. Bohm, and G. Weimann, Phys. Rev. Lett. **73**, 304 (1994); U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **68**, 1196 (1992); T. Fukuzawa, E. E. Mendez, and J. M. Hong, Phys. Rev. Lett. **64**, 3066 (1990); J. A. Kash, M. Zachau, E. E. Mendez et al., Phys. Rev. Lett. **66**, 2247 (1991); J. B. Stark, W. H. Knox, D. S. Chemla et al., Phys. Rev. Lett. **65**, 3033 (1990).
13. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 556 (1975); Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ЖЭТФ **71**, 738 (1976).
14. Yu. E. Lozovik and A. V. Poushnov, Phys. Lett. **228A**, 399 (1997); И. В. Лернер, Ю. Е. Лозовик, ЖЭТФ **80**, 1488 (1981); А. В. Ключник and Yu. E. Lozovik, J. Low Temp. Phys. **38**, 761 (1980); Yu. E. Lozovik and M. Willander, Appl. Phys. A **71**, 379 (2000).
15. Ю. Е. Лозовик, О. Л. Берман, Письма в ЖЭТФ **64**, 526 (1996).
16. Yu. E. Lozovik, O. L. Berman, and V. G. Tsvetus, Phys. Rev. B **59**, 5627 (1999).
17. Yu. E. Lozovik, O. L. Berman, and M. Willander, J. Phys. C **14**, 12457 (2002); А. В. Ключник, Ю. Е. Лозовик, ФТТ **20**, 625 (1978).
18. D. Yoshioka and A. H. MacDonald, J. Phys. Soc. Jpn. **59**, 4211 (1990).
19. X. M. Chen and J. J. Quinn, Phys. Rev. Lett. **67**, 895 (1991).
20. G. E. W. Bauer, Phys. Rev. Lett. **64**, 60 (1990); Phys. Scripta **45**, 154 (1992).
21. X. Zhu, P. B. Littlewood, M. S. Hybertsen, and T. M. Rice, Phys. Rev. Lett. **74**, 1633 (1995).
22. Y. Naveh and B. Laikhtman, Phys. Rev. Lett. **77**, 900 (1996).
23. Ю. Е. Лозовик, А. М. Рувинский, ЖЭТФ **112**, 1791 (1997).
24. A. Imamoglu, Phys. Rev. B **57**, R4195 (1998).
25. S. Conti, G. Vignale, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **57**, R6846 (1998).
26. A. V. Korolev and M. A. Liberman, Phys. Rev. Lett. **72**, 270 (1994); S. V. Korepov and M. A. Liberman, Phys. Lett. A **233**, 121 (1997); S. A. Moskalenko and M. A. Liberman, Phys. Rev. B **65**, 064303 (2002).
27. S. I. Shevchenko, Phys. Rev. Lett. **72**, 3242 (1994).
28. R. Ferreira and G. Bastard, Rep. Progr. Phys. **60**, 345 (1997).
29. A. Parlangei, P. C. M. Christianen, J. C. Maan et al., Phys. Rev. B **62**, 15323 (2000); A. Parlangei, P. C. M. Christianen, A. K. Geim et al., Phys. Stat. Sol. **164**, 587 (1997).
30. H. C. Tso, P. Vasilopoulos, and F. M. Peeters, Phys. Rev. Lett. **70**, 2146 (1993).
31. J. S. Thakur, D. Neilson, and M. P. Das, Phys. Rev. B **57**, 1801 (1998); L. Swierkowski, J. Szymanski, and D. Neilson, Acta Phys. Polon. A **84**, 445 (1993).
32. P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. A **135**, 550 (1964);
33. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
34. Т. Райс, Дж. Хенсел, Т. Филлипс, Г. Томас, *Электронно-дырочная жидкость в полупроводниках*, Мир, Москва (1980).

35. Л. В. Келдыш, А. П. Силин, Кратк. сообщ. по физике ФИАН **8**, 33 (1975).
36. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, ЖЭТФ **53**, 544 (1967).
37. В. Laikhtman, Europhys. Lett. **43**, 53 (1998).
38. H. Shi, G. Verechaka, and A. Griffin, Phys. Rev. B **50**, 1119 (1994).
39. Yu. E. Lozovik and A. V. Poushnov, Phys. Rev. B **58**, 6608 (1999).
40. Ю. Е. Лозовик, И. В. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **74**, 318 (2001); Yu. E. Lozovik and I. V. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **66**, 075124 (2001).
41. A. Olaya-Castro, F. J. Rodriguez, L. Quiroga, and C. Tejedor, Phys. Rev. Lett. **87**, 246403 (2001).
42. *Bose-Einstein Condensation*, ed. by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
43. S. Denev and D. W. Snoke, Phys. Rev. B **65**, 085211 (2002).
44. A. Schmitt, L. Banyai, and H. Haug, Phys. Rev. B **63**, 205113 (2001).
45. G. M. Kavoulakis and A. Mysyrowicz, Phys. Rev. B **61**, 16619 (2000); G. M. Kavoulakis, Y. C. Chang, and G. Baym, Phys. Rev. B **55**, 7593 (1997).
46. M. Y. Shen, T. Yokouchi, S. Koyama, and T. Goto, Phys. Rev. B **56**, 13066 (1997).
47. E. Benson, E. Fortin, and A. Mysyrowicz, Sol. St. Comm. **101**, 313 (1997); Phys. Stat. Sol. (b) **191**, 345 (1995); E. Fortin, S. Fafard, and A. Mysyrowicz, Phys. Rev. Lett. **70**, 3951 (1993); D. W. Snoke, J. P. Wolfe, and A. Mysyrowicz, Phys. Rev. Lett. **64**, 2543 (1990).
48. J. L. Lin and J. P. Wolfe, Phys. Rev. Lett. **71**, 1222 (1993); D. W. Snoke and J. P. Wolfe, Phys. Rev. B **42**, 7876 (1990).
49. H. Shi, G. Verechaka, and A. Griffin, Phys. Rev. B **50**, 1119 (1994); M. Inoue and E. Hanamura, J. Phys. Soc. Jpn. **41**, 1273 (1976).
50. P. Kner, S. Bar-Ad, M. V. Marquezini, D. S. Chemla et al., Phys. Rev. B **60**, 4731 (1999); Phys. Stat. Sol. **164**, 579 (1997).
51. S. R. Bolton, U. Neukirch, L. J. Sham et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 2002 (2000); Phys. Rev. B **63**, 115303 (2001).
52. K. Elsayed, D. Birkedal, V. G. Lyssenko, and J. M. Hvam, Phys. Rev. B **55**, 2456 (1997).