

ЭЛЕКТРОННЫЙ СПЕКТР И ТЕМПЕРАТУРА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА СИЛЬНОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ФЕРМИОНОВ С ТРЕХЦЕНТРОВЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

В. В. Вальков^{a,b,c}, Д. М. Дзедзисаивили^{a,c}*

^a *Институт физики Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

^b *Красноярский государственный технический университет
660074, Красноярск, Россия*

^c *Красноярский государственный университет
660075, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 2 августа 2002 г.,
после переработки 14 июля 2004 г.

В рамках t - J^* -модели рассмотрены ренормировки фермиевского спектра при учете трехцентровых взаимодействий ($H_{(3)}$) и магнитных флуктуаций. Для вычисления квазиспиновых корреляторов получены уравнения самосогласования спиновой динамики сильнокоррелированных фермионов с трехцентровыми взаимодействиями. На основе численного самосогласованного решения системы десяти уравнений показано, что в приближении ближайших соседей одновременный учет $H_{(3)}$ и магнитных флуктуаций при $n > n_1$ ($n_1 \approx 0.72$ для $2t/U = 0.25$) приводит к качественным изменениям структуры энергетического спектра. При этом в плотности состояний индуцируется новая особенность Ван Хова, а в концентрационной зависимости температуры перехода $T_c(n)$ в сверхпроводящую фазу с $d_{x^2-y^2}$ -типом симметрии параметра порядка появляется дополнительный максимум.

PACS: 71.27.+a, 74.90.+n, 75.10.Lp

1. ВВЕДЕНИЕ

Принято считать [1–5], что сильные электронные корреляции играют существенную роль в механизме высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Одной из центральных моделей, отражающих сильные электронные корреляции, является модель Хаббарда [6], содержащая в простейшем случае два энергетических параметра: интеграл электронного перескока t между ближайшими узлами и энергию кулоновского отталкивания U двух электронов, находящихся на одном узле и обладающих противоположными проекциями спиновых моментов (двойки). В режиме сильных электронных корреляций выполняется неравенство $U \gg |t|$.

При малых электронных концентрациях, $n \ll 1$, такая система хорошо описывается теорией фер-

ми-жидкости [7]. В другом предельном случае, $n \rightarrow 1$, реализуется сценарий гейзенберговского антиферромагнетика. Для промежуточной области концентраций, $n < 1$, проблема основного состояния поддается только приближенному описанию.

При $U \gg t$ и $n < 1$ часто переходят к описанию модели Хаббарда в усеченном гильбертовом пространстве, не содержащем двоек. Соответствующий эффективный гамильтониан, как известно [8, 9], кроме слагаемых, описывающих антиферромагнитные корреляции между спиновыми моментами носителей тока, содержит также трехцентровые слагаемые. Трехцентровые взаимодействия оказывают незначительное влияние на дисперсионную зависимость фермиевского спектра возмущений [10, 11]. В то же время для сверхпроводящей фазы их вклад становится существенным. Впервые это было показано в работах [12, 13]. В частности, перенормиров-

*E-mail:vvv@iph.krasn.ru

ка константы связи за счет трехцентровых слагаемых [13] приводит к уменьшению более чем на порядок температуры сверхпроводящего перехода [14].

Изучение роли магнитных флуктуаций при сверхпроводящем спаривании являлось предметом многих исследований [3, 4, 15–17]. В последнее время появились работы, связанные с введением в теорию электронного строения CuO₂-плоскости магнитополяронных связанных состояний [18].

В данной работе показано, что магнитные флуктуации способны качественно ренормировать электронный энергетический спектр и плотность состояний, как только трехцентровые взаимодействия принимаются во внимание. Такие модификации существенно сказываются на концентрационной зависимости температуры перехода T_c в сверхпроводящее состояние. В этой связи следует отметить недавнюю работу [19], в которой идеология существенного влияния трехцентровых взаимодействий и магнитных корреляций была применена для описания свойств купратов n -типа.

Изложение статьи организовано следующим образом. В разд. 2 выясняется смысл эффективных взаимодействий в t - J^* -модели. В разд. 3 представлены уравнения самосогласования. Вычисление спиновых корреляторов в t - J^* -модели описано в разд. 4. В последующих разделах отражены результаты совместного влияния трехцентровых взаимодействий и магнитных флуктуаций.

2. ОПЕРАТОР ДВОЕК И ЭФФЕКТИВНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Переход к эффективному гамильтониану в атомном представлении при $U \gg t$ и $n < 1$ может быть реализован либо на основе канонического преобразования [4], либо по операторной форме теории возмущений [14, 20]. С точностью до членов, пропорциональных t^2/U , имеем

$$H_{eff} \equiv H_{t-J^*} = H_{t-J} + H_{(3)}, \quad (1)$$

где

$$H_{t-J} = \sum_{f\sigma} (\epsilon - \mu) X_f^{\sigma\sigma} + \sum_{fm\sigma} t_{fm} X_f^{\sigma 0} X_m^{0\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{fm\sigma} J_{fm} (X_f^{\sigma\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} - X_f^{\sigma\sigma} X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}) \quad (2)$$

является гамильтонианом t - J -модели [21] ($J_{fm} = 2t_{fm}^2/U$), а трехцентровый оператор

$$H_{(3)} = \sum_{\substack{fmg\sigma \\ f \neq g}} \left(\frac{t_{fm} t_{mg}}{U} \right) \times \{ X_f^{\sigma 0} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} X_g^{0\bar{\sigma}} - X_f^{\sigma 0} X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_g^{0\sigma} \} \quad (3)$$

соответствует учету эффектов коррелированных перескоков электронов.

Остановимся на физическом смысле слагаемых, пропорциональных t^2/U , в эффективном гамильтониане. С этой целью рассмотрим оператор $\hat{N}_2 = \sum_f X_f^{22}$, определяющий полное число двоек. Если $|\Psi_0\rangle$ — основное состояние системы, описываемой исходным гамильтонианом Хаббарда, то число двоек $N_2 = \langle \Psi_0 | \hat{N}_2 | \Psi_0 \rangle$. При каноническом преобразовании

$$H \rightarrow H_{eff} = \exp(iS) H \exp(-iS)$$

функция основного состояния преобразуется по закону

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Phi_0\rangle = \exp(iS) |\Psi_0\rangle$$

и поэтому

$$N_2 = \langle \Phi_0 | \exp(iS) \hat{N}_2 \exp(-iS) | \Phi_0 \rangle.$$

Отсюда следует, что при работе в гильбертовом пространстве эффективного гамильтониана оператор двоек определяется выражением

$$\tilde{N}_2 = \exp(iS) \hat{N}_2 \exp(-iS).$$

Очевидно, этот вывод остается в силе и при переходе к конечным температурам. Вычисляя с квадратичной по (t/U) точностью, получаем эффективный оператор двоек:

$$\tilde{N}_2 = - \sum_{fmg\sigma} \left(\frac{t_{fm} t_{mg}}{U^2} \right) \times \{ X_f^{\sigma 0} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} X_g^{0\bar{\sigma}} - X_f^{\sigma 0} X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_g^{0\sigma} \} = - (H_{exch} + H_{(3)}) / U, \quad (4)$$

где обменная часть H_{exch} определяется известным выражением

$$H_{exch} = \frac{1}{2} \sum_{fm\sigma} J_{fm} \{ X_f^{\sigma\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}\sigma} - X_f^{\sigma\sigma} X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \}. \quad (5)$$

Из полученных формул следует, что гамильтониан t - J^* -модели представим в виде

$$H_{t-J^*} = \sum_{f\sigma} (\epsilon - \mu) X_f^{\sigma\sigma} + \sum_{fm\sigma} t_{fm} X_f^{\sigma 0} X_m^{0\sigma} - U \tilde{N}_2. \quad (6)$$

Видно, что возникновение в H_{t-J^*} обменных и трех-узельных взаимодействий имеет одинаковую причину, обусловленную наличием конечного числа двоек в системе.

3. УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Для исследования одновременного влияния магнитных корреляций и трехцентровых взаимодействий на ренормировки спектра фермиевских квазичастиц, а также на условия реализации $d_{x^2-y^2}$ -сверхпроводимости воспользуемся методом неприводимых функций Грина, построенных на операторах Хаббарда [22, 23].

При учете трехцентровых взаимодействий первое точное уравнение движения для антикоммутирующей функции Грина записывается в виде

$$\begin{aligned}
 (\omega - \varepsilon + \mu) \langle\langle X_f^{0\sigma} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle_\omega &= \delta_{fg} N_{0\sigma} + \\
 &+ \sum_{m\sigma_1} t_{fm} \langle\langle (X_f^{\sigma_1\sigma} + \delta_{\sigma_1\sigma} X_f^{00}) X_m^{0\sigma_1} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle_\omega + \\
 &+ \sum_{m\sigma_1} J_{fm} 4\sigma_1 \sigma \langle\langle X_f^{0\bar{\sigma}_1} X_m^{\bar{\sigma}_1\sigma} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle_\omega + \\
 &+ \sum_{\substack{m\sigma_1 \\ (m \neq l)}} \left(\frac{t_{fm} t_{ml}}{U} \right) 4\sigma_1 \sigma \langle\langle X_f^{0\sigma_1} X_l^{0\bar{\sigma}_1} X_m^{\bar{\sigma}_1\sigma} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle_\omega + \\
 &+ \sum_{\substack{m\sigma_1 \\ (l \neq f)}} \left(\frac{t_{fm} t_{ml}}{U} \right) \langle\langle (X_m^{\sigma_1\bar{\sigma}_1} X_l^{0\sigma_1} - X_m^{\sigma_1\sigma_1} X_l^{0\bar{\sigma}_1}) \times \\
 &\quad \times (X_f^{\bar{\sigma}_1\sigma} + \delta_{\sigma_1\bar{\sigma}} X_f^{00}) | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle_\omega. \quad (7)
 \end{aligned}$$

В этом уравнении слагаемые, явно содержащие множители, пропорциональные t^2/U , происходят от учета трехцентровых взаимодействий. Дальнейшая схема расчета обычна для метода неприводимых функций Грина [22, 23]. Проводится линеаризация уравнения (7) с введением аномальной функции $\langle\langle X_f^{\bar{\sigma}0} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle$. Затем составляется уравнение движения для $\langle\langle X_f^{\bar{\sigma}0} | X_g^{\sigma 0} \rangle\rangle$ и повторяется схема линеаризации. Возникающие при этом средние $\langle X_f^{\sigma\sigma} X_g^{\sigma'\sigma'} \rangle$ расписываются по приближенной формуле [19]

$$\begin{aligned}
 \langle X_f^{\sigma\sigma} X_g^{\sigma'\sigma'} \rangle &= \frac{1}{4} n^2 + \eta(\sigma)\eta(\sigma') \langle S_f^z S_g^z \rangle, \quad (8) \\
 \eta(\sigma) &= +1, -1, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow,
 \end{aligned}$$

которая следует из точного соотношения

$$\begin{aligned}
 \langle X_f^{\sigma\sigma} X_g^{\sigma'\sigma'} \rangle &= \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} \langle (\hat{n}_f - n)(\hat{n}_g - n) \rangle + \\
 &+ \eta(\sigma)\eta(\sigma') \langle S_f^z S_g^z \rangle \quad (9)
 \end{aligned}$$

после пренебрежения коррелятором $\langle\langle (\hat{n}_f - n)(\hat{n}_g - n) \rangle\rangle$. Аналогичное приближение используется для представления трехузельного среднего через квазиспиновые корреляторы

$$\begin{aligned}
 \langle\langle (X_f^{00} + X_f^{\sigma\sigma}) X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} (X_g^{00} + X_g^{\sigma\sigma}) \rangle\rangle &= \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 - \\
 - \left(1 - \frac{n}{2}\right) (\langle S_f^z S_m^z \rangle + \langle S_m^z S_g^z \rangle) &+ \frac{n}{2} \langle S_f^z S_g^z \rangle. \quad (10)
 \end{aligned}$$

После перехода к квазиимпульсному представлению получается замкнутая система уравнений, аналогичная уравнениям Горькова:

$$\begin{aligned}
 (E - \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} + \mu) \langle\langle X_{\mathbf{k}\sigma} | X_{\mathbf{k}\sigma}^+ \rangle\rangle_E &- \\
 - \Delta_{\mathbf{k}} \langle\langle X_{-\mathbf{k}\bar{\sigma}}^+ | X_{\mathbf{k}\sigma}^+ \rangle\rangle_E &= 1 - \frac{n}{2}, \quad (11) \\
 - (\Delta_{\mathbf{k}})^* \langle\langle X_{\mathbf{k}\sigma} | X_{\mathbf{k}\sigma}^+ \rangle\rangle_E &+ (E + \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \mu) \times \\
 \times \langle\langle X_{-\mathbf{k}\bar{\sigma}}^+ | X_{\mathbf{k}\sigma}^+ \rangle\rangle_E &= 0,
 \end{aligned}$$

где перенормированный спектр фермиевских возбуждений определяется выражением

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} &= \epsilon - \left(\frac{n^2}{16} \right) \frac{(1-n)}{(1-n/2)} J_0 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) t_{\mathbf{k}} - \\
 &- \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n}{2}\right) \frac{t_{\mathbf{k}}^2}{U} - \\
 - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ t_{\mathbf{q}} + \frac{n}{2} J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + [(2-n)t_{\mathbf{k}} + (1-n)t_{\mathbf{q}}] \frac{t_{\mathbf{q}}}{U} \right\} &\times \\
 \times \frac{K_{\mathbf{q}}}{1-n/2} &+ \\
 + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \frac{n}{2} J_{\mathbf{q}} + (2-n) \frac{t_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{U} - \frac{n}{2} \frac{t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{U} \right\} &\times \\
 \times \frac{C_{\mathbf{q}}}{1-n/2}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Здесь $t_{\mathbf{q}}$ и $J_{\mathbf{q}}$ — фурье-образы соответственно интеграла перескока и обменного интеграла. Ренормировки спектра (12), обусловленные трехцентровыми взаимодействиями, пропорциональны отношению второй степени интеграла перескока к параметру U . Большинство из них зависит от кинетического ($K_{\mathbf{q}} = \langle X_{\mathbf{q}\sigma}^+ X_{\mathbf{q}\sigma} \rangle$) и квазиспинового

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbf{q}} &= \sum_f \exp\{-i(\mathbf{R}_f - \mathbf{R}_m)\mathbf{q}\} \times \\
 &\times \{ \langle S_f^z S_m^z \rangle + \langle S_f^+ S_m^- \rangle \} \quad (13)
 \end{aligned}$$

корреляторов. Решая уравнения (11) и применяя спектральную теорему, находим кинетический коррелятор и энергетический спектр системы:

$$K_{\mathbf{q}} = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(\frac{E_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} f\left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{T}\right)\right),$$

$$f(x) = (\exp x + 1)^{-1}, \quad E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2}, \quad (14)$$

$$\xi_{\mathbf{k}} = \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} - \mu,$$

а также уравнение самосогласования для сверхпроводящего параметра порядка $\Delta_{\mathbf{k}}$:

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ 2t_{\mathbf{q}} + \frac{n}{2} (J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + 4 \left(1 - \frac{n}{2}\right) \frac{t_{\mathbf{k}} t_{\mathbf{q}}}{U} - n \frac{t_{\mathbf{q}}^2}{U} \right\} \frac{\Delta_{\mathbf{q}}}{2E_{\mathbf{q}}} \operatorname{th} \left(\frac{E_{\mathbf{q}}}{2T}\right). \quad (15)$$

4. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

С целью замыкания уравнений самосогласования получим выражение для квазиспинового коррелятора. Используя идеологию квантовой спиновой жидкости [24–26], запишем уравнения движения бозевских функций Грина, отражающих динамику спиновых степеней свободы. Первое уравнение движения имеет вид

$$\omega \langle \langle X_{j+l}^{\sigma\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} = - \sum_n t_{nl} L_{nl}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) + 2 \sum_n J_{ln} L_{ln}^z(\omega) + \langle \langle [X_{j+l}^{\sigma\bar{\sigma}}, H_{(3)}] | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega}, \quad (16)$$

где $L_{nl}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ и $L_{nl}^z(\omega)$ — антисимметричные по l и n функции

$$L_{nl}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = \langle \langle X_{j+n}^{\sigma_0} X_{j+l}^{0\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} - [l \leftrightarrow n],$$

$$L_{ln}^z(\omega) = \frac{1}{2} \langle \langle (X_{j+l}^{\sigma\sigma} - X_{j+l}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}) X_{j+n}^{\sigma\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} - [l \leftrightarrow n]. \quad (17)$$

Посредством $[l \longleftrightarrow n]$ в правых частях соотношений (17) обозначено слагаемое, получаемое из предыдущего взаимной заменой индексов l и n . Последний член уравнения (16) приводит к появлению функций Грина, содержащих произведение трех операторов Хаббарда. Если два оператора Хаббарда имеют одинаковые индексы узлов, то, благодаря алгебре операторов Хаббарда, такая высшая функция Грина сводится к низшей. Если же все индексы узлов различны, то сведение к низшей функции Грина осуществляется по схеме расщепления

$$\begin{aligned} & \langle \langle X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_n^{\sigma_0} X_l^{0\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} \rightarrow \\ & \rightarrow \langle X_m^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \rangle \langle \langle X_n^{\sigma_0} X_l^{0\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega}, \\ & \langle \langle X_m^{\sigma\bar{\sigma}} X_l^{\sigma_0} X_n^{0\sigma} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} \rightarrow \\ & \rightarrow \langle X_l^{\sigma_0} X_n^{0\sigma} \rangle \langle \langle X_m^{\sigma\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega}. \end{aligned} \quad (18)$$

После проведения фурье-преобразования уравнение (16) принимает вид

$$\omega G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_k \left(-t_k + \frac{n}{2} \frac{t_k^2}{U}\right) L_{k,q-k}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) + 2 \frac{1}{N} \sum_k J_k L_{q-k,k}^z(\omega), \quad (19)$$

где введены фурье-образы соответствующих функций Грина

$$\langle \langle X_{j+l}^{\sigma\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle \rangle_{\omega} = \frac{1}{N} \sum_q e^{iql} G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega),$$

$$L_{nl}^{\alpha}(\omega) = \frac{1}{N^2} \sum_{qp} e^{iqn+ipl} L_{qp}^{\alpha}(\omega), \quad \alpha = \{\sigma, \bar{\sigma}, z\}. \quad (20)$$

При вычислении высших функций Грина $L_{nl}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ и $L_{ln}^z(\omega)$ используется аналогичная процедура. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат.

Уравнение для функции Грина $L_{qp}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \omega L_{q,p}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = & 2(K_q - K_p) + \\ & + G_{q+p}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \left\{ \frac{2}{U} \frac{1}{N} \sum_k t_k \left[t_q \left(K_k + \frac{2}{3} C_{k+q} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - t_p \left(K_k + \frac{2}{3} C_{k+p} \right) \right] + \frac{2}{U} t_q t_p (K_q - K_p) + \right. \\ & \left. + \frac{n}{2} (J_0 + J_{q+p}) (K_q - K_p) + \left(n \frac{t_q + t_p}{U} - 2 \right) \times \right. \\ & \left. \times (t_p K_p - t_q K_q) \right\} + \\ & + M_{q,p}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \left\{ \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(t_p - t_q + \frac{n}{2} \frac{t_q^2 - t_p^2}{U} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{N} \sum_k \frac{t_k}{U} \left[t_q \left(K_k - \frac{2}{3} C_{k+q} \right) - t_p \left(K_k - \frac{2}{3} C_{k+p} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_k J_k (K_{k+p} - K_{k+q}) \right\} + \\ & + \left[\frac{n}{2} \left(1 - \frac{n}{2}\right) (t_p - t_q) + t_q K_q - t_p K_p \right] \times \\ & \times \frac{1}{U} \frac{1}{N} \sum_k t_k M_{q+p-k,k}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) + (K_q - K_p) \times \\ & \times \frac{1}{N} \sum_k M_{q+p-k,k}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \left[\frac{t_k t_{q+p-k}}{U} - \frac{1}{2} J_{p-k} \right] + \\ & + \frac{1}{U} \frac{1}{N} \sum_k t_k M_{q+p-k,k}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \frac{1}{N} \sum_{k_1} t_{k_1} \left[\frac{2}{3} C_{q+k_1} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} C_{p+k_1} + K_{q+k_1-k} - K_{p+k_1-k} \right], \quad (21) \end{aligned}$$

где $M_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ — фурье-образ симметричной по индексам n и l высшей функции Грина

$$M_{nl}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = \langle\langle X_{j+n}^{\sigma 0} X_{j+l}^{0\bar{\sigma}} | X_j^{\bar{\sigma}\sigma} \rangle\rangle_{\omega} + [n \longleftrightarrow l].$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения связано с использованием приближения, примененного ранее в работе [25] при изучении t - J -модели. Учитывая, что вклады от функций $M_{n,l}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ в уравнение (21) пренебрежимо малы, если $n \neq l$, а при $n = l$

$$M_{l,l}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = 2G_n^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega),$$

получаем приближенное выражение

$$M_{n,l}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = 2\delta_{nl}G_n^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega).$$

В квазиимпульсном представлении это соотношение записывается в виде

$$M_{qp}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) = 2G_{q+p}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega). \quad (22)$$

При этом уравнение (21) приобретает форму, явно связывающую рассматриваемую высшую функцию Грина с низшими:

$$\begin{aligned} \omega L_{k,q-k}^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) &= 2(K_k - K_{q-k}) + \\ &+ G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \left[(t_k - t_{q-k}) \left(n - 2 + \frac{4}{U} \frac{1}{N} \sum_{k_1} K_{k_1} t_{k_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + n \left(1 - \frac{n}{2} \right) \frac{t_k^2 - t_{q-k}^2}{U} + \right. \\ &\quad \left. + (K_k - K_{q-k}) \left(\frac{2t_k t_{q-k}}{U} + n \frac{J_0 + J_q}{2} + J_q \right) + \right. \\ &\quad \left. + (t_{q-k} K_{q-k} - t_k K_k) \left(-2 + n \frac{t_k + t_{q-k}}{U} \right) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Для фурье-образа третьей функции Грина $L_{q,k}^z(\omega)$, определенного согласно формуле (20), в приближении (22) находим

$$\begin{aligned} \omega L_{q-k,k}^z(\omega) &= \frac{4}{3}(C_{q-k} - C_k) + \frac{4}{3}G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \times \\ &\quad \times \frac{1}{N} \sum_{k_1} J_{k_1} (\tilde{C}_{q-k+k_1} - \tilde{C}_{k-k_1}) + \\ &\quad + \frac{4}{3}G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) [J_q \tilde{C}_{q-k} - J_{q-k} \tilde{C}_{q-k} - J_q \tilde{C}_k + J_k \tilde{C}_k] + \\ &\quad + G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) \left[\frac{n}{2}(J_{q-k} - J_k) + \frac{2}{U} \frac{1}{N} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k_1} t_{k_1} (t_{k-k_1} K_{k-k_1} - t_{q-k-k_1} K_{q-k-k_1}) \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_q = \alpha C_q + (1 - \alpha)3n/4$. Здесь, как и в [24–26], введена вершинная поправка α согласно уравнению

$$\tilde{C}_{nl} = (\alpha(1 - \delta_{nl}) + \delta_{nl})C_{nl}.$$

Такая процедура позволяет скорректировать погрешности расщепления посредством требования выполнения соответствующих правил сумм. В нашем случае в роли такого правила выступает условие $C_{ll} = 3n/4$. Заметим, что все слагаемые в двух последних строках уравнения (24) обусловлены взаимодействием $H_{(3)}$.

Полученная система из трех уравнений (19), (23) и (24) позволяет найти квазиспиновый коррелятор. Для упрощения окончательных аналитических выражений воспользуемся малыми параметрами системы: $\lambda = 2|t|/U \ll 1$ и $\delta = (1 - n) \ll 1$ (ниже рассмотрение ограничено областью малого дырочного допирования). Легко видеть, что при $n \rightarrow 1$ величина $K_p = (1 - n/2)f(\varepsilon_p) \rightarrow 1/2$ и в уравнениях (23) и (24) сокращаются все слагаемые, связанные с кинематикой задачи. Оставшиеся три первые строки уравнения (24) описывают спиновые корреляции в гейзенберговском пределе [24, 26]. Очевидно, что все связанные с кинематикой слагаемые пропорциональны либо концентрации дырок $\delta = 1 - n$, либо кинематическим корреляторам K_f ($f \neq 0$), которые также пропорциональны $(1 - n)$. Для характерного значения $\lambda = 0.25$ и концентрации электронов $n > 0.75$ оба указанных параметра имеют одинаковый порядок малости. Как показывают конкретные расчеты, в малой области допирования значения кинематических корреляторов K_f ($f \neq 0$) значительно меньше значений параметров λ и магнитных корреляторов C_f (при $f \neq 0$).

Сказанное позволяет упростить уравнения посредством сохранения лишь слагаемых порядка δ , $\lambda\delta$ и λ^2 и пренебрежением всех слагаемых порядка $\lambda^2\delta$. Тогда из уравнений (19), (23) и (24) для функции Грина $G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega)$ окончательно находим

$$\begin{aligned} G_q^{\sigma\bar{\sigma}}(\omega) &= \frac{A_q(\omega)}{\omega^2 - \omega^2(q)}, \\ A_q(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_k \left[\left(-2t_k + \frac{n}{U} t_k^2 \right) (K_k - K_{q-k}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3} J_k (C_{q-k} - C_k) \right], \quad (25) \end{aligned}$$

где спектр магнитных возбуждений $\omega(q)$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} \omega^2(q) = & \frac{1}{N} \sum_k \left[t_k(t_k - t_{q-k}) \left((2-n) \left(1 - n \frac{t_k}{U} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2nK_k \frac{t_k + t_{q-k}}{U} - \frac{4}{U} \frac{1}{N} \sum_{k_1} t_{k_1} K_{k_1} \right) + \right. \\ & \left. + 2t_k(t_{q-k}K_{q-k} - t_kK_k) - t_k(K_k - K_{q-k}) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{2t_k t_{q-k}}{U} + n \frac{J_0 + J_q}{2} + J_q \right) + \right. \\ & \left. + \frac{8}{3} J_k \frac{1}{N} \sum_{k_1} J_{k_1} (\tilde{C}_{q-k+k_1} - \tilde{C}_{k-k_1}) + \right. \\ & \left. + \frac{8}{3} J_k (J_q \tilde{C}_{q-k} - J_{q-k} \tilde{C}_{q-k} - J_q \tilde{C}_k + J_k \tilde{C}_k) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

В пределе $n \rightarrow 1$ остаются только две последних строчки уравнения (26), что соответствует спектру магнов модели Гейзенберга [24, 26].

Применение спектральной теоремы обычным образом приводит к самосогласованным уравнениям для магнитных корреляторов. Численное решение этих уравнений позволяет вычислить конкретные значения корреляторов. После этого определяются ренормировки энергетического спектра за счет магнитных флуктуаций и их влияние на температуру сверхпроводящего перехода.

5. СПЕКТР И ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ФЕРМИЕВСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ t - J^* -МОДЕЛИ

Хорошо известно [3–5], что условия реализации ВТСП в существенной степени определяются особенностями энергетического спектра фермиевских квазичастиц. Эти особенности могут формировать сингулярное поведение плотности состояний носителей тока. Имея это в виду, остановимся прежде всего на сравнительном анализе ренормировок энергетического спектра за счет одновременного воздействия магнитных флуктуаций и трехцентровых взаимодействий.

При проведении численных расчетов воспользуемся приближением ближайших соседей (влияние дальних перескоков частично обсуждено в Заключение). В общем случае решалась система из десяти самосогласованных трансцендентных уравнений. Эта система определяет десять величин: три магнитных и пять кинетических корреляторов, химический потенциал, а также вершинную ренормировку α . Для удобства сравнения полученных результатов приведем вначале вид фермиевского энергетического спектра t - J -модели без учета магнитных корреляторов

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_H(\mathbf{k}) = & -4|t| \left[1 - \frac{n}{2} + \frac{\lambda K_1}{1 - n/2} \right] \gamma_1(\mathbf{k}), \\ \gamma_1(\mathbf{k}) = & \frac{1}{2} (\cos(k_x a) + \cos(k_y a)), \end{aligned} \quad (27)$$

где a — расстояние между узлами квадратной решетки.

Включение трехцентровых взаимодействий (t - J^* -модель) приводит к тому, что квазиимпульсная зависимость энергетического спектра $\tilde{\varepsilon}_{tJ^*}(\mathbf{k})$ описывается посредством линейной суперпозиции трех инвариантов для квадратной решетки. Без учета магнитных флуктуаций фермиевский спектр определяется выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'_{tJ^*}(\mathbf{k}) = & -4|t| \left[1 - \frac{n}{2} + \frac{(4 - 3n/2)\lambda K_1}{1 - n/2} \right] \gamma_1(\mathbf{k}) - \\ & - |t|\lambda n \left(1 - \frac{n}{2} \right) [2\gamma_2(\mathbf{k}) + \gamma_3(\mathbf{k})]. \quad (28) \end{aligned}$$

Появление, по сравнению с (27), двух новых инвариантов

$$\begin{aligned} \gamma_2(\mathbf{k}) = & \cos(k_x a) \cos(k_y a), \\ \gamma_3(\mathbf{k}) = & \frac{1}{2} (\cos(2k_x a) + \cos(2k_y a)) \end{aligned} \quad (29)$$

в формальном отношении означает наличие в системе эффективных перескоков между узлами из дальних координационных сфер. Физическое происхождение таких перескоков достаточно простое, если учесть операторную структуру трехцентровых взаимодействий.

Самосогласованные вычисления кинетического коррелятора для спектра (28) при $n = 0.92$ приводят к результату $K_1 = 0.0628$. Рассчитанная для этого случая дисперсионная зависимость энергии возбуждений представлена штрихпунктирной кривой на рис. 1. При построении дисперсионных зависимостей использовалась стандартная система обозначений для выделенных точек зоны Бриллюэна: $\Gamma = (0, 0)$, $X = (\pi, 0)$, $M = (\pi, \pi)$. Из сравнения штрихпунктирной кривой со штриховой, отражающей спектр (27), следует, что в количественном отношении в данном режиме ренормировки спектра незначительны. Этот вывод полностью соответствует результатам работ [10, 11].

Существенно иной результат имеет место, если наряду с трехцентровыми взаимодействиями учитываются и магнитные корреляции. В этом случае вы-

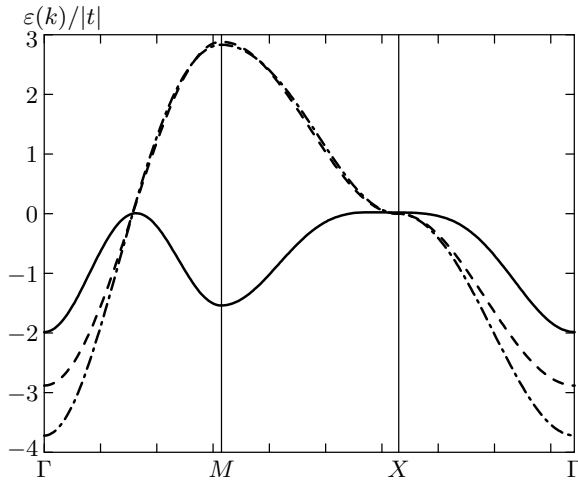


Рис. 1. Спектр фермиевских возбуждений модели Хаббарда для различных аппроксимаций в режиме сильных электронных корреляций

ражение для энергетического спектра представимо в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{tJ^*}(\mathbf{k}) = & \\ = -4|t| & \left[1 - \frac{n}{2} + \frac{(4 - 3n/2)\lambda K_1 + C_1}{1 - n/2} \right] \gamma_1(\mathbf{k}) - \\ - 2|t|\lambda & \left[n \left(1 - \frac{n}{2} \right) - 4C_1 + \frac{nC_2}{1 - n/2} \right] \gamma_2(\mathbf{k}) - \\ - |t|\lambda & \left[n \left(1 - \frac{n}{2} \right) - 4C_1 + \frac{nC_3}{1 - n/2} \right] \gamma_3(\mathbf{k}), \quad (30) \end{aligned}$$

где C_2 и C_3 — магнитные корреляторы соответственно для второй и третьей координационных сфер [26]. Самосогласованные расчеты, выполненные с таким энергетическим спектром для $n = 0.92$, дают следующие значения корреляторов: $C_1 = -0.2639$, $C_2 = 0.1347$, $C_3 = 0.1115$; $K_1 = 0.0037$. Возникающая при этом квазиимпульсная зависимость энергетического спектра показана сплошной кривой на рис. 1. Главная особенность, качественно отличающая этот спектр от двух предыдущих, заключается в наличии минимума в M -точке зоны Бриллюэна. Этот минимум имеет место только при $n > n_1$. Значение n_1 зависит от параметров модели и для спектра (30) с $\lambda = 0.25$ самосогласованные расчеты показывают, что $n_1 \approx 0.72$.

Для демонстрации отмеченных ренормировок спектра остановимся на эволюции плотности состояний при изменении n . На рис. 2а показана рассчитанная самосогласованным образом плотность состояний для $n = 0.665$. Поскольку $n < n_1$, имеется лишь одна, хорошо известная, особенность Ван Хова, со-

ответствующая седловым X -точкам зоны Бриллюэна. Она проявляется для всех рассмотренных выше спектров и при всех концентрациях n . Заполнение состояний с энергиями, соответствующими этой особенности Ван Хова, происходит при $n \approx 0.66$. С этим фактом связаны максимумы на теоретических концентрационных зависимостях $T_c(n)$ при $n \approx 0.66$ (см. рис. 3). Структура плотности состояний при $n > n_1$ продемонстрирована на рис. 2б. В этом случае в окрестности потолка зоны появляется вторая особенность Ван Хова. Она формируется при появлении минимума спектральной кривой в M -точках зоны Бриллюэна, как только $n = n_1$ (при $n < n_1$ значения кинетических и спиновых корреляторов таковы, что в дисперсионной зависимости (30) нет минимума в точках M зоны Бриллюэна, а имеется максимум). Именно возникновение локального минимума при $n \approx n_1$ и индуцирует новую логарифмическую особенность в плотности состояний. При дальнейшем увеличении концентрации эта особенность Ван Хова сохраняется вплоть до $n = 1$. При $n \approx n_1$ две особенности достаточно разнесены по энергии друг от друга, но с увеличением n расстояние между ними уменьшается, поскольку происходит понижение потолка зоны. На рис. 2в структура плотности состояний соответствует концентрации, при которой значение T_c максимально (см. сплошную кривую на рис. 3). В этом случае расстояние между пиками плотности состояний соизмеримо с критической температурой T_c . При этом положение химического потенциала и значение температуры таковы, что вклад в термодинамику определяется всеми состояниями в окрестности потолка зоны. В заключение этого раздела отметим еще раз, что новый пик в плотности состояний в приближении ближайших соседей возникает лишь при одновременном учете как спиновых корреляций, так и трехцентровых взаимодействий.

6. КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА

Очевидно, что отмеченные выше особенности энергетического спектра будут проявляться во многих характеристиках t - J^* -модели. Продемонстрируем этот тезис на примере концентрационной зависимости температуры перехода в сверхпроводящее состояние с $d_{x^2-y^2}$ -типом симметрии параметра порядка.

Сверхпроводящее состояние может реализоваться, если интегральное уравнение (15) имеет нетри-

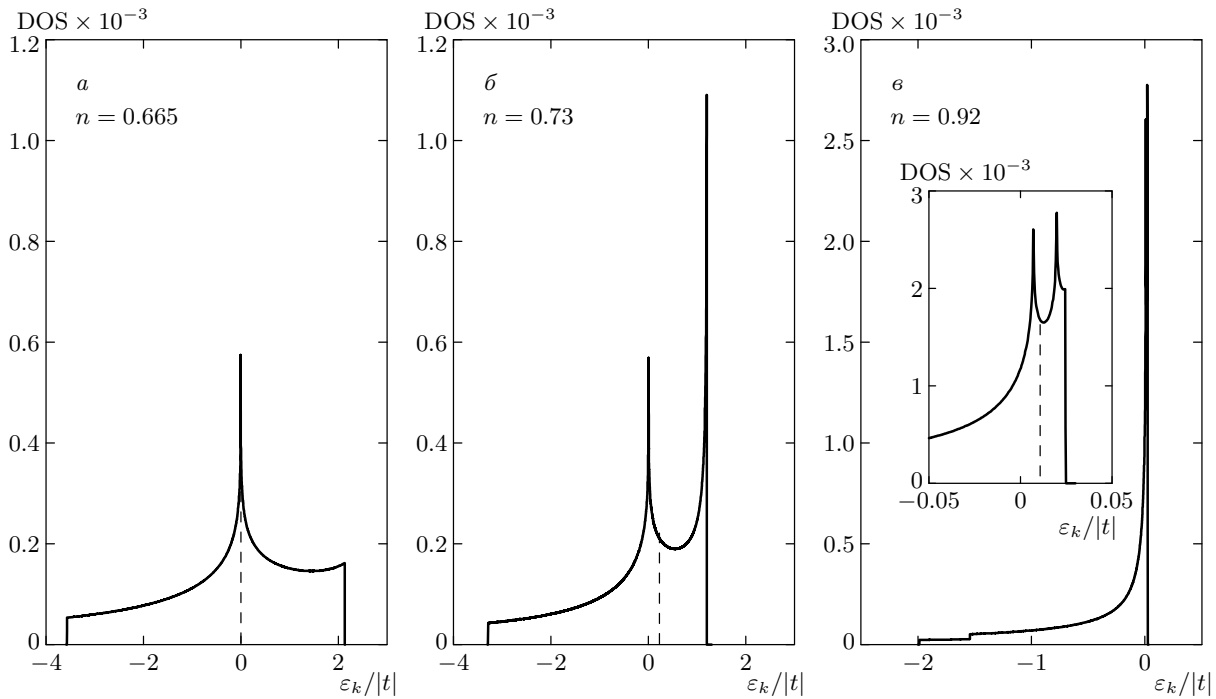


Рис. 2. Эволюция плотности фермиевских состояний $t\text{-}J^*$ -модели при изменении концентрации n . На вставке рис. 2*в* в мелком масштабе показана структура плотности при $n = 0.92$ (два пика близки друг к другу). Вертикальной штриховой линией показано положение химического потенциала

виальное решение $\Delta_{\mathbf{k}} \neq 0$. Ядром этого уравнения является сумма четырех слагаемых. Первое слагаемое, пропорциональное $2t_{\mathbf{q}}$, соответствует кинематическому механизму спаривания [2]. Происхождение второго члена ядра обусловлено как обменными, так и трехцентровыми взаимодействиями. Обменное взаимодействие дает слагаемое, пропорциональное $(J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})$, а трехцентровые взаимодействия вносят поправку, пропорциональную $(-1 + n/2)(J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})$, действующую в направлении подавления сверхпроводимости. В результате суперпозиции этих вкладов перед слагаемым, пропорциональным $(J_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})$, вместо единицы (как в $t\text{-}J$ -модели) возникает перенормировочный фактор $n/2$ [13]. Эта ренормировка константы связи в $t\text{-}J^*$ -модели и приводит к существенному подавлению T_c [14].

В приближении ближайших соседей уравнение (15), как известно, сводится к трансцендентному. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только $d_{x^2-y^2}$ -симметрии параметра порядка сверхпроводящей фазы, когда его квазиимпульсная зависимость описывается выражением $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_0(\cos k_x a - \cos k_y a)$. При этом уравнение, определяющее температуру сверхпроводящего

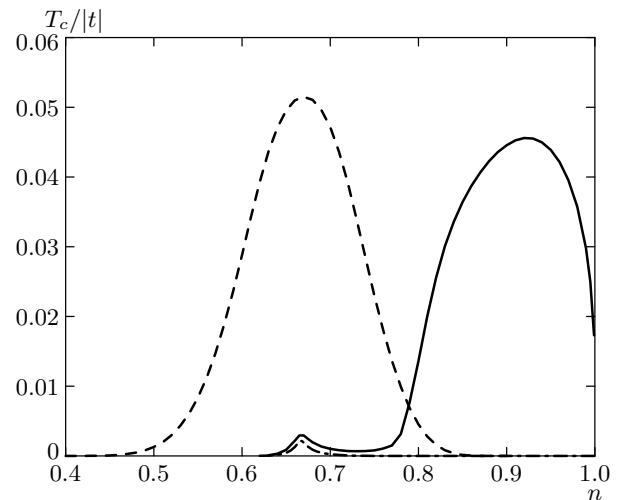


Рис. 3. Концентрационные зависимости критической температуры для различных приближений

перехода, имеет вид

$$1 = \frac{n}{2} \frac{J}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{(\cos q_x a - \cos q_y a)^2}{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{q}} - \mu} \text{th} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{\mathbf{q}} - \mu}{2T_c} \right). \quad (31)$$

Видно, что для $d_{x^2-y^2}$ -типа симметрии первое, тре-

ть и четвертое слагаемые ядра уравнения (15) вклада не дают. Поэтому трехцентровые взаимодействия проявляются только посредством перенормировки константы связи и модификации спектра фермиевских квазичастиц.

Результаты численного решения уравнения (31) представлены сплошной кривой на рис. 3. Для лучшей демонстрации обсуждаемых эффектов на этом же рисунке приведена концентрационная зависимость критической температуры T_c для спектра (27) t - J -модели (штриховая кривая), а также зависимость $T_c(n)$ для t - J^* -модели, но без учета магнитных корреляций [14] (штрихпунктирная кривая). Видно, что при одновременном учете трехцентровых взаимодействий и магнитных флуктуаций зависимость $T_c(n)$ становится качественно иной: в области слабого легирования имеет место второй максимум. Этот максимум обусловлен существенным увеличением числа электронов, принимающих участие в куперовском спаривании. Как видно на рис. 2в, такое увеличение связано со значительным возрастанием плотности фермиевских состояний в окрестности уровня Ферми, а также с эффективным уширением энергетической области, определяющей главный вклад при интегрировании. Тот факт, что второй максимум $T_c(n)$ (при $n = 0.92$) много больше максимума при $n = 0.66$, объясняется как значительно большим числом электронов в окрестности химического потенциала, так и большим значением эффективной константы связи из-за ее зависимости от n .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты исследований показывают существенную роль совместного влияния трехцентровых взаимодействий и магнитных корреляций t - J^* -модели. В этом случае в плотности состояний фермиевских квазичастиц в области высоких энергий индуцируется новая особенность Ван Хова. Учитывая, что появление этой особенности реализуется при малой концентрации дырок, можно сделать предположение о магнитополяронной природе индуцирования новой особенности Ван Хова. Такой вывод коррелирует с недавними результатами по исследованию электронной структуры сильнокоррелированной спин-фермионной жидкости с привлечением расширенного базиса для включения магнитополяронных состояний [27]. Вторым аргументом в пользу данной гипотезы является

структура $H_{(3)}$, в соответствии с которой перескок электронов становится связанным со спиновой динамикой соседних узлов. Отмеченные факторы объясняют, в частности, почему ранее включение $H_{(3)}$ без учета магнитных корреляций не приводило к существенным изменениям электронного спектра и плотности состояний фермиевских квазичастиц.

Проявление изменений энергетического спектра продемонстрировано в работе на примере концентрационной зависимости температуры перехода в сверхпроводящую фазу. Очевидно, что такие качественные изменения плотности фермиевских состояний будут приводить и к другим заметным изменениям термодинамических свойств системы. Немаловажным представляется и тот факт, что при восстановлении параметров энергетического спектра, например, по ARPES-данным необходимо учитывать рассмотренные ренормировки. В этой связи заметим, что несмотря на ограничение приближением ближайших соседей, в системе эффективно присутствуют и дальние перескоки. Это обстоятельство существенно повлияет на численные значения восстанавливаемых параметров.

Учет в гамильтониане кинетической энергии дальних перескоков (t' и t'') может как усилить, так и подавить новую особенность Ван Хова в области малых концентраций дырок. Проведение соответствующего расчета является предметом отдельного рассмотрения, поскольку в этом случае в теорию будут входить новые магнитные корреляторы между узлами из более далеких координационных сфер (до девятой включительно). Решение самосогласованной задачи о численных значениях этих корреляторов выходит за рамки проведенных исследований. Если же говорить о влиянии дальних перескоков на условия реализации сверхпроводящей фазы, то здесь прежде всего необходимо учитывать изменение ядра интегрального уравнения [28]. При этом рассмотренные в настоящей работе перенормировки эффективных перескоков также могут повлиять на концентрационную зависимость $T_c(n)$. Отметим, в этой связи, еще один нюанс. Формально эффект трехцентровых взаимодействий, связанный с индуцированием перескоков между узлами из дальних координационных сфер, можно смоделировать посредством выхода за рамки приближения ближайших соседей, но без учета $H_{(3)}$. Однако при этом теряется существенный для сверхпроводимости второй эффект $H_{(3)}$, связанный с перенормировкой эффективной константы связи [13], приводящей к зависимости T_c от n именно такой, как показано на рис. 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ККФН «Енисей» (грант № 02-02-97705), РФФИ (грант № 03-02-16124), INTAS (грант № 01-0654), а также в рамках комплексной программы научных исследований РАН «Квантовая макрофизика». Один из авторов (Д. М. Д.) признателен Благотворительному фонду содействия отечественной науке, а также Лаврентьевскому конкурсу молодежных проектов СО РАН за финансовую поддержку исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987).
2. Р. О. Зайцев, В. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **46**, 140 (1987).
3. N. M. Plakida, *High-Temperature Superconductivity*, Springer, Berlin (1995).
4. Ю. А. Изюмов, *УФН* **167**, 465 (1997).
5. С. Г. Овчинников, *УФН* **167**, 1043 (1997).
6. J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. A* **276**, 238 (1963).
7. М. А. Баранов, А. В. Чубуков, и М. Ю. Кagan, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 2471 (1992).
8. Л. П. Булаевский, Э. Л. Нагаев, Д. Л. Хомский, *ЖЭТФ* **54**, 1562 (1968).
9. K. A. Chao, J. Spalek, and A. M. Oles, *J. Phys. C* **10**, L271 (1977).
10. Q. L. Li, E. C. Koltenbah, and R. Joynt, *Phys. Rev. B* **48**, 437 (1993).
11. V. Yu. Yushankhai, V. S. Oudovenko, and R. Hayn, *Phys. Rev. B* **55**, 15562 (1997).
12. J. E. Hirsch, *Phys. Lett. A* **136**, 153 (1989).
13. V. Yu. Yushankhai, G. M. Vujicic, and R. B. Zakula, *Phys. Lett. A* **151**, 254 (1990).
14. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, Д. М. Дзедзисашвили, С. Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 450 (2002).
15. A. P. Kampf, *Phys. Rep.* **249**, 219 (1994).
16. Ю. А. Изюмов, *УФН* **169**, 225 (1999).
17. Н. М. Плакида, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 38 (2001).
18. R. O. Kuzian, R. Hayn, A. F. Barabanov, and L. A. Maksimov, *Phys. Rev. B* **58**, 6194 (1998).
19. М. М. Коршунов, С. Г. Овчинников, А. В. Шерман, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 45 (2004).
20. Н. Н. Боголюбов, *Лекции по квантовой статистике*, Наукова думка, Киев (1949).
21. G. Baskaran, Z. Zou, and P. W. Anderson, *Sol. St. Comm.* **63**, 973 (1987).
22. N. M. Plakida, V. Yu. Yushankhay, and I. V. Stasyuk, *Physica C* **162–164**, 787 (1989).
23. V. Yu. Yushankhay, N. M. Plakida, and P. Kalinay, *Physica C* **174**, 401 (1991).
24. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, № 7, 2394 (1991).
25. H. Shimahara and S. Takada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, № 3, 989 (1992).
26. А. Ф. Барабанов, В. М. Березовский, *ЖЭТФ* **106**, 1156 (1994); *Письма в ЖЭТФ* **77**, 450 (2003).
27. A. F. Barabanov, A. A. Kovalev, O. V. Urazaev, and A. M. Belemouk, *Phys. Lett. A* **265**, 221 (2000).
28. В. В. Вальков, Д. М. Дзедзисашвили, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 450 (2003).