

# ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ НЕПЬЕЗОАКТИВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В КРИСТАЛЛАХ

*В. И. Альшиц\*, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук  
119333, Москва, Россия*

*А. Радович\*\**

*Технологический университет  
25-314, Кельце, Польша*

Поступила в редакцию 15 сентября 2004 г.

Исследуются условия существования нулевых компонент электрического поля  $\mathbf{E}$  и электрической индукции  $\mathbf{D}$ , сопутствующих распространению объемных акустических волн в пьезоэлектриках. Получены общие уравнения, задающие положения линий нулевого электрического поля,  $\mathbf{E}(\mathbf{m}) = 0$ , и точек  $\mathbf{m}_0$  нулевой электрической индукции,  $\mathbf{D}(\mathbf{m}_0) = 0$ , на единичной сфере направлений распространения,  $\mathbf{m}^2 = 1$ . Сформулированы общие теоремы, гарантирующие существование таких линий и точек даже в триклинных кристаллах. Кроме того, проанализирована связь подобных направлений с различными элементами симметрии кристаллов. Показано, что векторные поля  $\mathbf{D}(\mathbf{m})$ , всегда ортогональные волновым нормальям  $\mathbf{m}$ , в окрестности нулевых точек  $\mathbf{m}_0$  имеют определенные ориентационные сингулярности, которые могут быть охарактеризованы индексами Пуанкаре  $n = 0, \pm 1, \pm 2$ . Полученные общие аналитические выражения для индексов  $n$  в кристаллах произвольной анизотропии конкретизированы для большой серии кристаллов различных сингоний. Рассмотрены условия устойчивости указанных сингулярностей при малых возмущениях материальных модулей и при изменении симметрии кристалла.

PACS: 72.50.+b

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, акустической волне смещений в пьезоэлектриках обычно сопутствует квазистатическая волна электропотенциала. Иными словами, методами акустики можно переносить по кристаллу электрические сигналы со звуковой скоростью. Это породило многочисленные приложения акустических волн в электронных приборах и даже отдельную науку — акустоэлектронику. Конечно, прикладной аспект создает серьезный стимул для активного исследования разнообразных особенностей акустических полей в пьезокристаллах [1]. К этому добавляется и чисто академический интерес изучения новых эффектов в средах, допускающих взаи-

модействие электромеханических полей [2, 3]. Акустика пьезоэлектриков и поныне остается весьма популярным разделом физики твердого тела (см. обзор [4]), причем в этой области даже сугубо академические исследования зачастую содержат в себе зерна прикладной полезности, которые отнюдь не всегда удается сразу разглядеть.

Следует также отметить, что далеко не все проблемы пьезоакустики уже нашли свое окончательное решение, особенно применительно к средам произвольной анизотропии. Анизотропия часто влияет на акустические свойства кристаллов нетривиальным образом и порой приводит к качественно новым явлениям. В частности, представляется практически важным знать, вдоль каких направлений распространения  $\mathbf{m}$  электрические компоненты волны имеют максимальные амплитуды [5], а какие, напротив, непьезоактивны [1, 3], т. е. не передают электриче-

\*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

\*\*A. Radowicz

ских сигналов. При этом, имея в виду, что независимо от анизотропии в акустической волне электрическое поле всегда продольно ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{m}$ ), а электрическая индукция всегда поперечна ( $\mathbf{D} \perp \mathbf{m}$ ), в любом кристалле следует различать [3] направления продольной и поперечной пьезоактивности, вдоль которых соответственно  $\mathbf{E} = 0$  и  $\mathbf{D} = 0$ . Именно детальное исследование обоих типов пьезоактивности, относительно которых в литературе имеются лишь разрозненные данные, является одним из главных предметов настоящей работы.

Другой принципиально важный аспект связан с направлениями  $\mathbf{m}$ , в окрестности которых векторные поля амплитуд смещений ( $\mathbf{u}$ ) и сопутствующих электрических компонент ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ) характеризуются сингулярным поведением. Согласно работам [6, 7], именно такая ситуация реализуется вокруг акустических осей, вблизи которых в вырожденных ветвях собственных волн реализуются ориентационные сингулярности в полях  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{D}$ , а также амплитудные сингулярности в поле  $\mathbf{E}$ . В настоящей работе изучен принципиально новый тип ориентационной сингулярности, возникающий в окрестности направлений поперечной пьезоактивности в векторных полях  $\mathbf{D}(\mathbf{m})$ , т. е. вокруг точек  $\mathbf{m}_0$  на единичной сфере направлений, где  $\mathbf{D}(\mathbf{m}_0) = 0$ .

Ниже на основе общих выражений, описывающих электрические компоненты  $\mathbf{E}_\alpha$  и  $\mathbf{D}_\alpha$  во всех трех ветвях  $\alpha = 1, 2, 3$  акустического спектра в зависимости от направления распространения объемных волн в кристалле, сформулированы уравнения, задающие специальные направления  $\mathbf{m}$ , вдоль которых либо  $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{m}) = 0$ , либо  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m}) = 0$ . Показано, что эти направления имеют разную размерность: типичные решения образуют на единичной сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  линии нулевой амплитуды  $\mathbf{E}_\alpha$  и точки нулевого поля  $\mathbf{D}_\alpha$ . Полученные уравнения проанализированы как в общем случае, так и применительно к различным классам симметрии кристаллов. Оба типа пьезоактивности тесно связаны с элементами симметрии кристалла, но они также возникают и в триклинных кристаллах, не имеющих никаких элементов симметрии. Доказаны соответствующие теоремы существования.

Применительно к описанию ориентационных сингулярностей векторного поля  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  в окрестности направлений поперечной пьезоактивности установлены возможные типы этих сингулярностей и, в частности, показано, что в зависимости от материальных модулей сингулярность в изолированной точке  $\mathbf{m}_0$  может иметь индекс Пуанкаре (топологический заряд)  $n = 0, \pm 1, \pm 2$ . Для индексов  $n$  полу-

чены аналитические выражения как в общем случае триклинного кристалла, так и для серии кристаллов конкретных сингоний. Показано, что только реализации  $n = \pm 1$  являются топологически стабильными. Любые другие сингулярности должны расщепляться или исчезать при произвольном триклинном возмущении материальных тензоров. Однако сумма индексов при любых расщеплениях должна быть равна исходному индексу  $n$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как уже упоминалось, в пьезоэлектриках чисто механические характеристики, такие как вектор упругого смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , тензор дисторсий  $\hat{\beta}(\mathbf{r}, t)$  и тензор напряжений  $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ , связаны с электрическими величинами: потенциалом  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , электрическим полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и индукцией  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ . Поля  $\hat{\beta}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  выражаются через свои собственные потенциалы:

$$\hat{\beta}(\mathbf{r}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Взаимозависимость всех этих характеристик явно выражена следующими уравнениями связи [8]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \beta_{kl} + e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ikl} \beta_{kl} - \varepsilon_{ik} E_k, \quad (2)$$

где  $c_{ijkl} = \hat{c}$  — тензор упругих модулей,  $e_{kij} = \hat{e}$  — тензор пьезоэлектрических модулей и  $\varepsilon_{ik} = \hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости. Соответственно в такой среде объемная акустическая волна с волновым вектором  $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$  и фазовой скоростью  $v$  должна быть суперпозицией механического и электрического динамических полей:

$$\{\mathbf{u}, \phi\} = \{\mathbf{u}_0, \phi_0\} \exp [ik(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - vt)]. \quad (3)$$

Введенные поля удовлетворяют обычным уравнениям движения [8]

$$\text{div } \hat{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность среды. Здесь использовано известное квазистатическое приближение, справедливое с точностью до членов, пропорциональных множителю  $(v/c)^2 \sim 10^{-10}$ , где  $c$  — скорость света).

Комбинируя приведенные выше соотношения, нетрудно получить соответствующее однородное уравнение для вектора поляризации  $\mathbf{u}_0$  [3, 9]:

$$\hat{F}(v, \mathbf{m}) \mathbf{u}_0 \equiv \left[ \hat{F}^{(0)} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} / \varepsilon \right] \mathbf{u}_0 = 0, \quad (5)$$

где символ « $\otimes$ » означает диадное произведение и введены обозначения

$$\hat{F}^{(0)} = \mathbf{m}\hat{\mathbf{c}}\mathbf{m} - \rho v^2 \hat{I}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{m}\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m}, \quad \varepsilon = \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{e}}\mathbf{m}, \quad (6)$$

а  $\hat{I}$  — единичная матрица. Условие существования нетривиальных решений однородного уравнения (5),

$$\det \hat{F}(v, \mathbf{m}) = 0, \quad (7)$$

будучи кубическим уравнением для квадрата фазовой скорости  $v^2$ , задает три скоростных ветви объемных собственных волн:  $v_\alpha(\mathbf{m}), \alpha = 1, 2, 3$ .

Ориентации соответствующих взаимно ортогональных векторов поляризации  $\mathbf{u}_{0\alpha}(\mathbf{m})$  изонормальных собственных волн могут быть выражены в терминах матрицы  $\overline{\hat{F}}_\alpha$ , взаимной к  $\hat{F}_\alpha(\mathbf{m}) \equiv \hat{F}_\alpha(v_\alpha(\mathbf{m}), \mathbf{m})$  и определяемой условием  $\overline{\hat{F}}_\alpha \hat{F}_\alpha = \hat{I} \det \hat{F}_\alpha$ . Легко видеть, что для любого вектора  $\mathbf{c}$ , обеспечивающего неравенство  $\overline{\hat{F}}_\alpha \mathbf{c} \neq 0$ , уравнение (5) удовлетворяется при

$$\mathbf{u}_{0\alpha} \parallel \overline{\hat{F}}_\alpha(\mathbf{m})\mathbf{c}. \quad (8)$$

Заметим, что найденная прямая связь (8) между поляризацией  $\mathbf{u}_{0\alpha}$  и волновой нормалью  $\mathbf{m}$  широко используется в нашем дальнейшем анализе.

Зная поле упругих смещений для данной волновой ветви  $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , можно найти и электрические компоненты волны (см., например, [8]). Для наших целей, как и в случае уравнений (3)–(8), удобно представить их в бескоординатной форме:

$$\phi_\alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_\alpha / \varepsilon, \quad \mathbf{E}_\alpha = -ik\phi_\alpha \mathbf{m}, \quad \mathbf{D}_\alpha = \hat{N} \mathbf{u}_\alpha, \quad (9)$$

$$\hat{N} = \hat{\mathbf{e}}\mathbf{m} - (\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m}) \otimes \mathbf{m}\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m} / \mathbf{m}\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m}. \quad (10)$$

Вместе с условием (8) уравнения (9) фактически задают необходимые для дальнейшего анализа зависимости  $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{m})$  и  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$ .

Нетрудно видеть, что  $\mathbf{m}\hat{N} \equiv 0$ . Вместе с последним уравнением в (9) это наглядно иллюстрирует

известное общее свойство (см. Введение), в соответствии с которым независимо от анизотропии электрическое поле  $\mathbf{E}_\alpha$  является чисто продольным, а индукция  $\mathbf{D}_\alpha$  — чисто поперечной:

$$\mathbf{E}_\alpha \parallel \mathbf{m}, \quad \mathbf{D}_\alpha \perp \mathbf{m}. \quad (11)$$

С другой стороны, тождество  $\mathbf{m}\hat{N} = 0$  приводит к полезному свойству матрицы  $\hat{N}$ :

$$\det \hat{N} = 0, \quad (12)$$

указывающему, что она планальна, т. е. может быть представлена в виде суммы двух диад.

### 3. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ

Существуют три группы пьезоэлектриков, поперечно-изотропных по отношению к акустическим свойствам. Они принадлежат следующим классам симметрии [10]:

$$\infty 2, 622, \quad (13)$$

$$\infty m, 6mm, \quad (14)$$

$$\infty, 6. \quad (15)$$

Вследствие поперечной изотропии в приводимые ниже формулы входит только полярный угол  $\theta$  между вектором  $\mathbf{m}$  и осью  $z$ , направленной вдоль главной оси симметрии. При этом без всякой потери общности можно вести рассмотрение, выбрав для анализа любое сечение, проходящее через главную ось; удобно положить

$$\mathbf{m} = (m_1, 0, m_3) \equiv (\sin \theta, 0, \cos \theta). \quad (16)$$

В этих координатах для всех шести классов симметрии (13)–(15) матрица  $\hat{F}^{(0)}$  (6) задается одной и той же квазидиагональной формой [11]:

$$\hat{F}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{ccc} c_{11}m_1^2 + c_{44}m_3^2 - \rho v^2 & 0 & dm_1m_3 \\ 0 & c_{66}m_1^2 + c_{44}m_3^2 - \rho v^2 & 0 \\ dm_1m_3 & 0 & c_{44}m_1^2 + c_{33}m_3^2 - \rho v^2 \end{array} \right\}, \quad (17)$$

где  $d = c_{13} + c_{44}$ . Вектор  $\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m}$  и скаляр  $\varepsilon$  (6) тоже одинаковы для всех классов симметрии (13)–(15) [10]:

$$\hat{\mathbf{e}}\mathbf{m} = (\varepsilon_1 m_1, 0, \varepsilon_3 m_3), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 m_1^2 + \varepsilon_3 m_3^2. \quad (18)$$

Однако форма электрического вектора  $\mathbf{e}$  (6) ока-

зывается различной для всех трех типов поперечно-изотропных кристаллов. Для сред классов симметрии (13) и (14) соответственно имеем

$$\mathbf{e} = e_{14}(0, m_1 m_3, 0), \quad (19)$$

$$\mathbf{e} = \{(e_{15} + e_{31})m_1 m_3, 0, e_{15}m_1^2 + e_{33}m_3^2\}. \quad (20)$$

А для сред классов симметрии (15) вектор  $\mathbf{e}$  равен сумме выражений (19) и (20). Таким образом, для классов симметрии (13) и (14) структура матрицы  $\hat{F}$  (5) та же, что и в (17). Однако это несправедливо для классов симметрии (15), для которых матрица  $\hat{F}$  не содержит ни одного элемента тождественно равного нулю.

В тех же координатах матрица  $\hat{N}$  для сред с классами симметрии (13) и (14) соответственно имеет вид

$$\hat{N} = e_{14} \begin{Bmatrix} 0 & (\varepsilon_3/\varepsilon)m_3^2 & 0 \\ -m_3 & 0 & -m_1 \\ 0 & -(\varepsilon_3/\varepsilon)m_1 m_3^2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

$$\hat{N} = \begin{Bmatrix} e_{15}m_3 & 0 & e_{15}m_1 \\ 0 & e_{15}m_3 & 0 \\ e_{31}m_1 & 0 & e_{33}m_3 \end{Bmatrix} - \frac{1}{\varepsilon} \begin{Bmatrix} (e_{15} + e_{31})\varepsilon_1 m_1^2 m_3 & 0 & (e_{15}m_1^2 + e_{33}m_3^2)\varepsilon_1 m_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ (e_{15} + e_{31})\varepsilon_3 m_1 m_3^2 & 0 & (e_{15}m_1^2 + e_{33}m_3^2)\varepsilon_3 m_3 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Для сред классов симметрии (15) матрица  $\hat{N}$ , аналогично вектору  $\mathbf{e}$ , равна сумме выражений (21) и (22).

В более симметричных классах (13), (14) для любого направления распространения  $\mathbf{m}$  одна из собственных волновых ветвей является чисто поперечной:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &\parallel (0, 1, 0), \\ \rho v_t^2 &= c_{66}m_1^2 + c_{44}m_3^2 + (e_{14}^2/\varepsilon)m_1^2 m_3^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Подобные чисто поперечные волны  $t$ -моды в литературе часто называют  $SH$ -волнами. Две другие ветви поляризованы в плоскости  $\{m_1, m_3\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{l,v} &\parallel (2dm_1 m_3, 0, -\Delta_{14}^- m_1^2 + \Delta_{34}^- m_3^2 \pm R), \\ \rho v_{l,v}^2 &= (\Delta_{14}^+ m_1^2 + \Delta_{34}^+ m_3^2 \pm R)/2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\Delta_{14}^- m_1^2 - \Delta_{34}^- m_3^2)^2 + (2dm_1 m_3)^2}, \\ \Delta_{ij}^\pm &= c_{ii} \pm c_{jj}. \end{aligned} \quad (25)$$

Электрические компоненты приведенных выше волновых полей также могут быть найдены для произвольного направления  $\mathbf{m}$ . В средах класса симметрии (13) имеем

$$\begin{aligned} \phi_t &= (e_{14}/\varepsilon)m_1 m_3 u_t, \\ \mathbf{D}_t &= e_{14}(\varepsilon_3/\varepsilon)m_3^2(m_3, 0, -m_1)u_t, \\ \phi_{l,v}(\mathbf{m}) &\equiv 0, \\ \mathbf{D}_{l,v} &= -e_{14}\{0, 1, 0\} [m_1(\mathbf{u}_{l,v})_3 + m_3(\mathbf{u}_{l,v})_1]. \end{aligned} \quad (26)$$

В менее простом случае (14) приведем лишь результат для  $t$ -ветви:

$$\phi_t(\mathbf{m}) \equiv 0, \quad \mathbf{D}_t = (0, e_{15}m_3, 0)u_t. \quad (27)$$

Структура акустических волн в средах с классами симметрии (15) более сложна. Даже чисто поперечная ветвь ( $\mathbf{u}_t \parallel y$ ) существует здесь только в базисной плоскости  $xy$ .

#### 4. ЛИНИИ НУЛЕВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ

Согласно второму выражению в (9), распределение амплитуды электрического поля  $\mathbf{E}_\alpha$  на единичной сфере направлений определяется зависимостью

$$\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{m}) = \text{const} \cdot \phi_\alpha(\mathbf{m})\mathbf{m}. \quad (28)$$

Это значит, что нули вектора  $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{m})$  совпадают с нулями потенциала  $\phi_\alpha(\mathbf{m}) = \mathbf{e}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{m})/\varepsilon$  и в соответствии с условием (8) определяются уравнением

$$\mathbf{e}(\mathbf{m}) \cdot \overline{\hat{F}}_\alpha(\mathbf{m})\mathbf{c} = 0. \quad (29)$$

Вдоль таких направлений акустические волны (3) не содержат электростатических компонент  $\mathbf{E}_\alpha$ , как в непьезоэлектрических кристаллах. При этом отличное от нуля поле индукций  $D_i = e_{ijk} u_{k,j}$  вдоль таких направлений не оказывает обратного влияния на параметры волны смещений.

Полученное скалярное уравнение (29) налагает только одно ограничение на направление волновой нормали  $\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}(\theta, \varphi)$ , представляющей собой функцию двух углов сферических координат. Другими словами, уравнение (29) задает на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  линию (или линии) непьезоактивных направлений, где  $\mathbf{E}_\alpha = 0$ . Здесь следует оговориться, что условие продольной непьезоактивности, сводящееся к требованию

$$\mathbf{e}(\mathbf{m}) \perp \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{m}), \quad (30)$$

в специальных случаях может быть удовлетворено даже на всей сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ . Как мы видели, это реализуется в кристаллах поперечно-изотропных классов симметрии (13) для  $l$ - и  $t'$ -мод (26) и в классах симметрии (14) для  $t$ -моды (27). Однако в любых других кристаллах, включая менее симметричные поперечно-изотропные классы симметрии (15), геометрическое место направлений продольной пьезоактивности действительно реализуется в виде линий на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ . Такие линии существуют и в пьезоактивных ветвях упомянутых высокосимметричных сред классов симметрии (13), (14). В частности, в  $l$ - и  $t'$ -ветвях классов симметрии (14) и (15) линии  $\mathbf{E}_\alpha = 0$  возникают на пересечении сферы  $\mathbf{m}^2 = 1$  с конусами направлений, задаваемых полярными углами  $\theta_l$  и  $\theta_{l'}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta_l &\approx -e_{33}/(2e_{15} + e_{31}), \\ \operatorname{tg}^2 \theta_{l'} &\approx (e_{15} + e_{31} - e_{33})/e_{15}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для простоты эти выражения даны в приближенной форме, отвечающей слабому электромеханическому взаимодействию и малой упругой анизотропии. Тем не менее, как нетрудно убедиться, точные критерии существования указанных конусов пьезоактивности сводятся к положительности правых частей в приближенных формулах (31).

В действительности можно доказать, что линии продольной пьезоактивности присутствуют практически во всех кристаллах, даже триклинных. Рассмотрим кристалл произвольной анизотропии, содержащий по крайней мере одну акустическую ось общего (конического) типа. Заметим попутно, что к настоящему времени неизвестно ни одного кристалла без акустических осей и ни одного триклинного кристалла без конических осей. Как было показано в работах [12, 13], поляризационные поля упругих смещений  $\mathbf{u}_{0\alpha}(\mathbf{m})$  объемных собственных волн в таком кристалле могут быть организованы на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  так, что одно из них четное,

$$\mathbf{u}_{02}(-\mathbf{m}) = \mathbf{u}_{02}(\mathbf{m}), \quad (32)$$

и два нечетных,

$$\mathbf{u}_{01}(-\mathbf{m}) = -\mathbf{u}_{01}(\mathbf{m}), \quad \mathbf{u}_{03}(-\mathbf{m}) = -\mathbf{u}_{03}(\mathbf{m}). \quad (33)$$

Невырожденная ветвь  $\mathbf{u}_{03}(\mathbf{m})$  всегда нечетна и непрерывна на всей сфере направлений. Что же касается вырожденных ветвей  $\mathbf{u}_{01}(\mathbf{m})$  и  $\mathbf{u}_{02}(\mathbf{m})$ , то их четности зависят от выбора представления и могут быть одновременно изменены. Они непрерывны в любых точках сферы, кроме ряда незамкнутых линий, на которых функции  $\mathbf{u}_{01}(\mathbf{m})$  и  $\mathbf{u}_{02}(\mathbf{m})$  меняют

знак. Эти антизнаковые линии могут быть произвольно деформированы на сфере без изменения положения конечных точек, совпадающих с точками вырождения. Фактически выбором представления является задание фиксированного положения антизнаковых линий на сфере, причем совпадающих в обеих вырожденных ветвях.

Нетрудно убедиться, что указанные свойства, введенные в работах [12, 13] применительно к чисто упругим средам, остаются справедливыми и для пьезоэлектриков. Принимая во внимание, что согласно соотношениям (33), функция  $\mathbf{u}_{03}(\mathbf{m})$  нечетна, а, по определению (6), зависимость  $\mathbf{e}(\mathbf{m})$  четна, мы заключаем, что потенциал

$$\phi_{03}(\mathbf{m}) = \mathbf{e}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{u}_{03}(\mathbf{m})/\varepsilon$$

является нечетной функцией:

$$\phi_{03}(-\mathbf{m}) = -\phi_{03}(\mathbf{m}). \quad (34)$$

Но тогда вдоль любого пути, соединяющего противоположные точки  $\mathbf{m}$  и  $-\mathbf{m}$  на сфере, должна существовать хотя бы одна точка  $\mathbf{m}_0$ , где  $\phi_{03}(\mathbf{m}_0) = 0$ . При сканировании указанного пути по сфере точка  $\mathbf{m}_0$ , очевидно, должна прочертить замкнутую линию направлений продольной пьезоактивности для невырожденной ветви.

Для вырожденных ветвей  $\phi_{01}(\mathbf{m})$  и  $\phi_{02}(\mathbf{m})$  приведенное выше рассуждение должно быть несколько модифицировано, будучи однако совершенно аналогичным рассмотрению сходной проблемы [12] о существовании в вырожденных ветвях линий решения для особых объемных волн в полубесконечных упругих средах<sup>1)</sup>. Мы не будем здесь воспроизводить это рассуждение, а приведем лишь его результат: линии пьезоактивности должны существовать в обеих вырожденных ветвях, переходя с ветви на ветвь в точках вырождения. Таким образом, справедлива следующая теорема существования:

все три волновые ветви произвольного кристалла, содержащего конические акустические оси, должны иметь линии направлений продольной пьезоактивности.

Следует также отметить, что при распространении волны вдоль акустической оси  $\mathbf{m}_d$  любого типа среди континуума допустимых ориентаций ее поляризации  $\mathbf{u}$ , в плоскости вырождения всегда найдется вектор, ортогональный направлению  $\mathbf{e}(\mathbf{m}_d)$ ,

<sup>1)</sup> На это обстоятельство внимание авторов обратил А. Л. Шувалов.

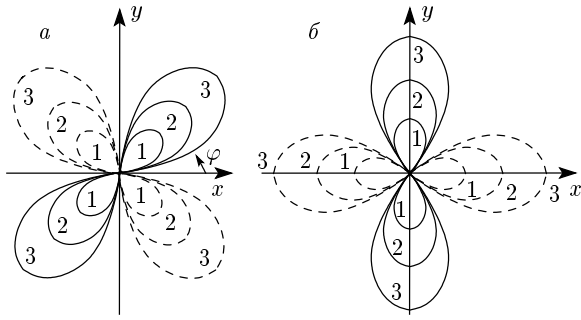


Рис. 1. Полярные диаграммы электрических потенциалов  $\phi_{l,v}(\varphi)$  (а) и  $\phi_t(\varphi)$  (б) при  $\theta = \text{const}$  в окрестности направления  $(0, 0, 1)$  кубического пьезоэлектрика; цифры 1, 2, 3 соответствуют углам  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ , сплошные и штриховые линии означают потенциалам разных знаков

что гарантирует непьезоактивность соответствующей волне. Таким образом, акустические оси должны принадлежать линиям продольной непьезоактивности.

Элементы симметрии кристалла могут стать самостоятельным фактором, обуславливающим рассматриваемую непьезоактивность. Так, согласно [1], любая ось симметрии задает непьезоактивное направление для чисто поперечных мод, а плоскость симметрии есть геометрическое место непьезоактивных направлений распространения для соответствующих  $SH$ -волн. Рассмотрим, например, моноклинный пьезоэлектрик одного из двух возможных классов симметрии,  $m$  или  $2$ . В первом случае для волн, распространяющихся в плоскости симметрии  $m$ , вектор  $\mathbf{e}$ , очевидно, должен принадлежать этой плоскости, будучи автоматически ортогональным поляризации  $t$ -ветви. Во втором случае для волновой нормали, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси симметрии второго порядка, вектор  $\mathbf{e}$  должен быть параллелен этой оси и поэтому ортогонален принадлежащим той же плоскости поляризациям  $l$ - и  $t'$ -волн. Последнее свойство, конечно, должно быть справедливо и для любой другой оси четного порядка. В монографии [1] оно сформулировано для плоскостей, ортогональных осям симметрии 4 и 6.

В частности, в кубических пьезоэлектриках (классы симметрии  $\bar{4}3m$  и  $23$ ) координатные плоскости кристаллофизической системы, ортогональные осям  $\bar{4}$  и  $2$ , должны быть непьезоактивны для соответствующих  $l$ - и  $t'$ -ветвей. Одновременно диагональные плоскости симметрии  $\{110\}$  непьезоактивны для соответствующих  $t$ -волн. Нетрудно проверить, что в окрестности координатных осей

амплитуды потенциала этих ветвей могут быть представлены в форме (рис. 1)

$$\phi_{l,v} \propto \theta^2 \sin 2\varphi, \tag{35}$$

$$\phi_t \propto \theta^2 \cos 2\varphi. \tag{36}$$

## 5. НУЛЕВЫЕ ТОЧКИ ПОЛЯ ИНДУКЦИЙ

### 5.1. Общее рассмотрение для произвольной анизотропии

Обратимся теперь к условиям, задающим направление распространения  $\mathbf{m}_0$ , вдоль которых вектор электрической индукции  $\mathbf{D}_\alpha = \hat{N}\mathbf{u}_\alpha$  (9) обращается в нуль. Принимая во внимание тождество (12) и определение взаимного тензора

$$\hat{N}\bar{N} = \hat{I}\det \hat{N}, \tag{37}$$

нетрудно убедиться, что  $\mathbf{D}_\alpha = 0$  вдоль таких направлений  $\mathbf{m}_0$ , для которых  $\mathbf{u}_\alpha \parallel \bar{N}\mathbf{d}$  (здесь  $\mathbf{d}$  — любой вектор, обеспечивающий неравенство  $\bar{N}\mathbf{d} \neq 0$ ). Тогда в соответствии с условием (8) вдоль направления  $\mathbf{m}_0$  имеем

$$\bar{F}_\alpha \mathbf{c} \parallel \bar{N}\mathbf{d}. \tag{38}$$

Это условие в общем случае задает два уравнения с двумя неизвестными,  $\theta$  и  $\varphi$ , которые определяют положения изолированных точек  $\mathbf{m}_0(\theta, \varphi)$  на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ , где  $\mathbf{D}_\alpha = 0$ .

В топологии имеется хорошо известная теорема Брауэра, в соответствии с которой

любое непрерывное преобразование точек на сфере, не переводящее ни одну из них в диаметрально противоположное положение, имеет пару фиксированных точек.

Рассмотрим распределение векторов  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$ , которое везде непрерывно на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ . Непрерывность распределения  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  гарантирована, когда соответствующая ветвь  $\alpha$  невырождена. Такое распределение векторов  $\mathbf{D}_\alpha$ , касательных к сфере, согласно теореме Брауэра, должно иметь пару стационарных точек, где  $\mathbf{D}_\alpha = 0$ . С другой стороны, как вытекает из соотношений (9), (10), рассматриваемое распределение обладает дополнительным свойством:  $\mathbf{D}_\alpha(-\mathbf{m}) \parallel \mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$ . Поэтому в нашем случае упомянутая пара из теоремы Брауэра включает инверсионно эквивалентные точки  $\mathbf{m}_0$  и  $-\mathbf{m}_0$ . Тем самым доказана следующая теорема существования направлений поперечной непьезоактивности:

в любом кристалле произвольной анизотропии каждая из его невырожденных ветвей должна содержать на единичной сфере направлений по крайней мере одну инверсионно неэквивалентную нулевую точку  $\mathbf{m}_0$ , где  $\mathbf{D}_\alpha = 0$ .

Таким образом, нулевые точки индукции в волновых полях  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  должны существовать даже в триклинных кристаллах. Конечно, нахождение положений таких точек, т. е. решение уравнения (38) в общем случае, не может быть осуществлено в аналитическом виде. Однако в более симметричных кристаллах направления  $\mathbf{m}_0$  могут быть найдены без громоздких вычислений.

## 5.2. Нулевые точки индукции, связанные с элементами симметрии кристаллов

### 5.2.1. Продольные волны, распространяющиеся вдоль осей симметрии

Рассмотрим направление распространения  $\mathbf{m}_0$  в пьезоэлектрике, совпадающее с осью симметрии любого порядка, кроме оси 2 (иными словами, это могут быть оси 3, 4,  $\bar{4}$ , 6,  $\bar{6}$ ). Как известно [11], любая ось симметрии (включая ось 2) является продольной нормалью. Очевидно, что в этом случае электрическая индукция  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m}_0)$ , сопутствующая продольной волне ( $\mathbf{u}_l \parallel \mathbf{m}_0$ ), должна обращаться в нуль, поскольку в противном случае вектор  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m}_0)$  имел бы две эквивалентные ориентации вопреки однозначности третьего соотношения в (9):

$$\mathbf{D}_l = \hat{N}(\mathbf{m}_0)\mathbf{m}_0. \quad (39)$$

Заметим, что приведенное рассуждение несправедливо для поперечных ветвей, которые для рассматриваемого направления всегда вырождены, т. е. имеют равные фазовые скорости ( $v_t = v_{t'}$ ) и, как следствие, произвольную ориентацию векторов  $\mathbf{u}_{t,t'}$  и  $\mathbf{D}_{t,t'}$  в плоскости, т. е.

$$\mathbf{u}_{t,t'}, \mathbf{D}_{t,t'} \perp \mathbf{m}_0. \quad (40)$$

Направление оси симметрии второго порядка должно быть рассмотрено отдельно (впрочем, с тем же результатом). В общем случае это направление не является акустической осью. С другой стороны, векторы  $\mathbf{u}_\alpha$  и  $\mathbf{D}_\alpha$  в принципе определены с точностью до знака, и их повороты осью 2 не могут рассматриваться как различные решения. Нетрудно убедиться, что вдоль оси 2 поперечные ветви опять характеризуются ненулевыми векторами индукции. Но можно продемонстрировать, что в том же направлении для продольной ветви всегда  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m}_0) = 0$ .

Действительно, комбинируя условие (39) с выражением (10) при  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ , имеем

$$\mathbf{D}_l = \hat{N}(\mathbf{m}_0)\mathbf{m}_0 = (\hat{e}\mathbf{m}_0)\mathbf{m}_0 - \frac{(\hat{e}\mathbf{m}_0)[(\mathbf{m}_0\hat{e}\mathbf{m}_0)\mathbf{m}_0]}{\mathbf{m}_0 \cdot \hat{e}\mathbf{m}_0}. \quad (41)$$

Покажем, что даже в моноклинном кристалле класса симметрии 2 правая часть выражения (41) тождественно равна нулю. Действительно, выбирая в (41) ось  $z$  вдоль оси симметрии 2  $\parallel \mathbf{m}_0$ , получим

$$\mathbf{D}_l = \left\{ e_{13} - \frac{\varepsilon_{13}e_{33}}{\varepsilon_{33}}, e_{23} - \frac{\varepsilon_{23}e_{33}}{\varepsilon_{33}}, 0 \right\}. \quad (42)$$

Но согласно [1, 10] для моноклинного кристалла класса симметрии 2 в выбранной системе координат фигурирующие в (42) недиагональные компоненты тензоров  $\hat{e}$  и  $\hat{\varepsilon}$  тождественно равны нулю:  $e_{13} = e_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ , т. е.

$$\mathbf{D}_l(\mathbf{m}_0 \parallel 2) = 0. \quad (43)$$

Очевидно, что уравнение (43) выполняется для всех кристаллов различных классов, имеющих оси симметрии 2. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

вдоль любой оси симметрии в пьезоэлектрическом кристалле продольной собственной волне должна сопутствовать электрическая компонента с нулевой индукцией.

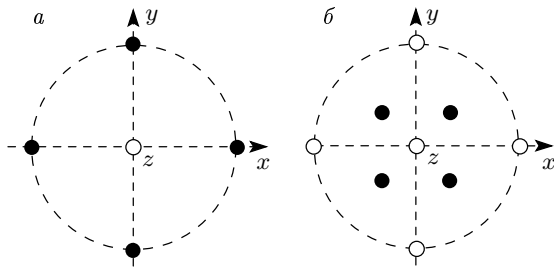
Рассмотрим, например, пьезоэлектрический кристалл ромбического класса симметрии 222. В соответствии с приведенной выше теоремой в этом случае все три оси симметрии второго порядка задают направления  $\mathbf{m}_0$  нулевой индукции в продольных модах. Однако можно показать, что в квазипродольной ветви такого кристалла могут существовать еще четыре инверсионно неэквивалентных несимметричных направления  $\mathbf{m}_0$  нулевой индукции  $\mathbf{D}_l = 0$ :

$$(\theta_0, \pm\varphi_0), (\theta_0, \pm\varphi_0 + \pi), \quad (44)$$

$$\theta_0 = \text{arcctg} \sqrt{\frac{e_{36}\varepsilon_1\varepsilon_2}{(e_{14}\varepsilon_2 + e_{25}\varepsilon_1)\varepsilon_3}}, \quad (45)$$

$$\varphi_0 = \text{arctg} \sqrt{\frac{e_{25}\varepsilon_1}{e_{14}\varepsilon_2}}. \quad (46)$$

Решения (45), (46) для простоты записаны в приближении малых пьезомодулей и слабой упругой анизотропии. В этом приближении условием существования указанной серии нулевых точек является одинаковость знаков всех входящих в (45), (46) пьезо-



**Рис. 2.** Направления распространения поперечно-непьезоактивных квазипродольных акустических волн в кристаллах класса симметрии 222. Стереографические проекции приведены для случаев, когда знак пьезомодуля  $e_{36}$  противоположен знаку пьезомодуля  $e_{14}$  и/или  $e_{25}$  (а) и когда знаки всех пьезомодулей одинаковы (б)

модулей (рис. 2). Заметим, что в кубических пьезоэлектриках (классы симметрии  $\bar{4}3m$  и 23) всегда реализуется ситуация, показанная на рис. 2б, поскольку в этом случае дополнительные направления нулевой индукции (44)–(46) с необходимостью возникают вдоль осей симметрии третьего порядка.

### 5.2.2. $t$ -волны ( $SH$ ) в плоскостях симметрии

1. Рассмотрим моноклинный кристалл класса симметрии  $m$  в системе координат с осью  $z \perp m$ . Будем интересоваться ветвью  $t$ -волн, распространяющихся в плоскости симметрии  $m$ :

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, 0), \quad \mathbf{u}_t \parallel (0, 0, 1). \quad (47)$$

Нетрудно убедиться, что для таких волн

$$\mathbf{D}_t = (0, 0, e_{35}m_1 + e_{34}m_2)u_t \parallel \mathbf{u}_t. \quad (48)$$

Таким образом, в рассматриваемой плоскости симметрии всегда имеется одно и только одно направление  $\mathbf{m}_0$  нулевой индукции  $\mathbf{D}_t$ , определяемое азимутом  $\varphi_0$ :

$$\mathbf{m}_0 = (m_{01}, m_{02}, 0), \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{m_{02}}{m_{01}} = -\frac{e_{35}}{e_{34}}. \quad (49)$$

При этом максимальное значение амплитуды  $\mathbf{D}_t$  в этой плоскости реализуется в направлении  $\mathbf{m}_{max} = (m_{02}, -m_{01}, 0)$ , перпендикулярном  $\mathbf{m}_0$ .

2. В тригональных кристаллах класса симметрии  $3m$  ситуация с поперечно-непьезоактивными направлениями для  $t$ -волн во всех трех плоскостях симметрии, проходящих через ось 3, совершенно аналогична рассмотренному случаю моноклинного

кристалла. Например, применительно к координатной плоскости симметрии  $yz$  достаточно заменить соотношения (47)–(49) на следующие:

$$\mathbf{m} = (0, m_2, m_3), \quad \mathbf{u}_t \parallel (1, 0, 0), \quad (50)$$

$$\mathbf{D}_t = (-e_{22}m_2 + e_{15}m_3, 0, 0)u_t \parallel \mathbf{u}_t, \quad (51)$$

$$\mathbf{m}_0 = (0, m_{02}, m_{03}), \quad \text{tg } \theta_0 = \frac{m_{02}}{m_{03}} = \frac{e_{15}}{e_{22}}, \quad (52)$$

где  $\theta_0$  — полярный угол (между направлением  $\mathbf{m}_0$  и осью симметрии 3).

3. В кристаллах ромбического класса симметрии  $mm2$  для  $t$ -волн, распространяющихся в той же самой координатной плоскости симметрии  $yz$ , можно написать

$$\mathbf{m} = (0, m_2, m_3), \quad \mathbf{u}_t \parallel (1, 0, 0), \quad (53)$$

$$\mathbf{D}_t = (e_{15}m_3, 0, 0)u_t \parallel \mathbf{u}_t.$$

Очевидно, что теперь

$$\mathbf{m}_0 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{m}_{max} = (0, 0, 1). \quad (54)$$

Соотношения (53) и (54) остаются справедливыми и для тетрагонального класса симметрии  $4mm$ .

4. В средах классов симметрии  $42m$ ,  $\bar{4}3m$  и 23 ( $x \parallel 2$ )  $t$ -волны, распространяющиеся в диагональной плоскости  $(1\bar{1}0)$ , характеризуются соотношениями

$$\mathbf{m} = (m_1, -m_1, m_3), \quad \mathbf{u}_t \parallel (1, 1, 0). \quad (55)$$

Эти волны сопровождаются электрической компонентой с амплитудой индукции

$$\mathbf{D}_t = e_{14}m_3(1, 1, 0)u_t \parallel \mathbf{u}_t \quad (56)$$

и, следовательно, характеризуются специальными направлениями

$$\mathbf{m}_0 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}, \quad \mathbf{m}_{max} = (0, 0, 1). \quad (57)$$

5. В кристаллах классов симметрии  $6mm$  и  $o3m$  (14) любая плоскость, проходящая через главную ось симметрии, является плоскостью симметрии  $m$ . Согласно (27), электрическая индукция  $t$ -волн, распространяющихся в таких плоскостях, ортогональна  $m$  и пропорциональна  $m_3$ . Поэтому в этих случаях электрическая индукция  $\mathbf{D}_t$  тождественно равна нулю на всем экваторе  $m_3 = 0$ :

$$\mathbf{D}_t(m_1, m_2, 0) = 0. \quad (58)$$

Заметим попутно, что на том же экваторе для тех же классов симметрии другая поперечная ветвь  $t'$ ,



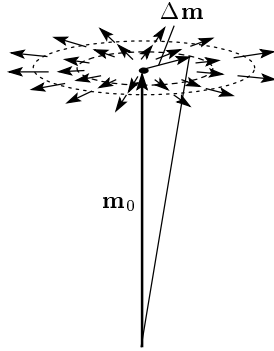


Рис. 3. Сингулярное векторное распределение векторов  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  в окрестности нулевой точки  $\mathbf{m}_0$

поляризованная вдоль главной оси симметрии, также характеризуется линией нулевых индукций:

$$\mathbf{D}_\alpha(m_1, m_2, 0) = 0. \quad (59)$$

Проверка показывает, что уравнение (58), но не (59), справедливо также для классов симметрии (13) и (15).

### 6. СИНГУЛЯРНОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ИНДУКЦИИ ВБЛИЗИ ТОЧЕК $\mathbf{D} = 0$

#### 6.1. Общее рассмотрение для произвольной анизотропии

Будучи ортогональным волновой нормали  $\mathbf{m}$ , векторное поле  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  может иметь ориентационную сингулярность в окрестности собственных нулевых точек  $\mathbf{m}_0$  (рис. 3). Рассмотрим функцию  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  при  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}$  ( $\Delta\mathbf{m} \perp \mathbf{m}_0$ ,  $|\Delta\mathbf{m}| \ll 1$ ). Используя условие (8) и третье соотношение в (9), получаем

$$\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m}) \parallel \hat{N}(\mathbf{m}) \overline{F}_\alpha(\mathbf{m}) \mathbf{c}. \quad (60)$$

С учетом того что  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m}_0) = 0$ , в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m}) \parallel \Delta\mathbf{m} \hat{Q}_\alpha &\equiv \\ &\equiv \Delta m_i \left\{ \frac{\partial}{\partial m_i} \left[ \hat{N}(\mathbf{m}) \overline{F}_\alpha(\mathbf{m}) \mathbf{c} \right] \right\}_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}. \end{aligned} \quad (61)$$

Ввиду поперечности поля  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$ , см. (11), присутствующий в (61) несимметричный тензор

$$\hat{Q}_\alpha = \nabla_{\mathbf{m}} \otimes \hat{N}(\mathbf{m}) \overline{F}_\alpha(\mathbf{m}) \mathbf{c}|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} \quad (62)$$

должен быть планальным, т. е. его спектральное разложение должно включать сумму только двух диад:

$$\hat{Q}_\alpha = \lambda_{\alpha 1} \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1} \otimes \mathbf{e}_{\alpha 1} + \lambda_{\alpha 2} \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 2} \otimes \mathbf{e}_{\alpha 2}, \quad (63)$$

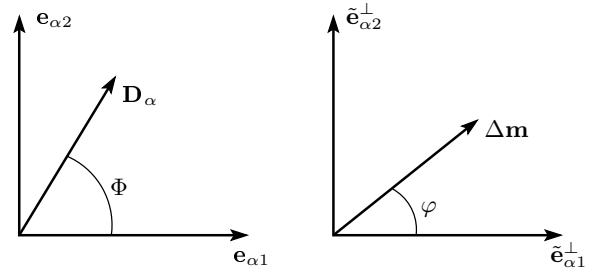


Рис. 4. Углы ориентации векторов  $\mathbf{D}_\alpha$  и  $\Delta\mathbf{m}$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{m}_0$

где  $\lambda_{\alpha j}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}$  и  $\mathbf{e}_{\alpha j}$  — соответственно собственные значения и собственные векторы (слева и справа) тензора  $\hat{Q}_\alpha$ , причем векторы  $\mathbf{e}_{\alpha 1}$  и  $\mathbf{e}_{\alpha 2}$  должны быть ортогональны  $\mathbf{m}_0$ . Заметим, что в отличие от  $\mathbf{e}_{\alpha j}$  собственные векторы  $\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}$  в общем случае не принадлежат плоскости, ортогональной  $\mathbf{m}_0$ , однако их компоненты  $\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}^\parallel$ , направленные вдоль  $\mathbf{m}_0$ , несущественны для нашего анализа. Разложим каждый из векторов  $\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}$  на два слагаемых:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j} &= \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}^\parallel + \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}^\perp, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}^\parallel \parallel \mathbf{m}_0, \\ \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j}^\perp &= \left( \hat{I} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \right) \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha j} \perp \mathbf{m}_0, \end{aligned} \quad (64)$$

и образуем более удобную матрицу

$$\begin{aligned} \hat{Q}_\alpha^\perp &= \left( \hat{I} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \right) \hat{Q}_\alpha = \\ &= \lambda_{\alpha 1} \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1}^\perp \otimes \mathbf{e}_{\alpha 1} + \lambda_{\alpha 2} \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 2}^\perp \otimes \mathbf{e}_{\alpha 2}, \end{aligned} \quad (65)$$

которая может быть использована в дальнейшем анализе вместо  $\hat{Q}_\alpha$ :

$$\mathbf{D}_\alpha \parallel \Delta\mathbf{m} \hat{Q}_\alpha^\perp. \quad (66)$$

Будем отсчитывать угол ориентации  $\Phi$  вектора  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  от направления  $\mathbf{e}_{\alpha 1}$  и аналогичный угол  $\varphi$  в той же плоскости для  $\Delta\mathbf{m}$  — от направления  $\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1}^\perp$  (рис. 4). В этих терминах

$$\text{tg } \Phi = \frac{\mathbf{D}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\alpha 2}}{\mathbf{D}_\alpha \cdot \mathbf{e}_{\alpha 1}} = \frac{\lambda_{\alpha 2}}{\lambda_{\alpha 1}} \frac{\Delta\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 2}^\perp}{\Delta\mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1}^\perp} = \frac{\lambda_{\alpha 2}}{\lambda_{\alpha 1}} \text{tg } \varphi. \quad (67)$$

Таким образом, полному обороту вектора  $\Delta\mathbf{m}$  вокруг  $\mathbf{m}_0$  в плоскости ортогональной  $\mathbf{m}_0$  должен соответствовать также полный оборот вектора  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  в том же самом или противоположном направлении в зависимости от знака  $\det \hat{Q}_\alpha^\perp = \lambda_{\alpha 1} \lambda_{\alpha 2}$ , что соответствует индексу Пуанкаре сингулярной точки (рис. 5),

$$n = \text{sign } \det \hat{Q}_\alpha^\perp. \quad (68)$$

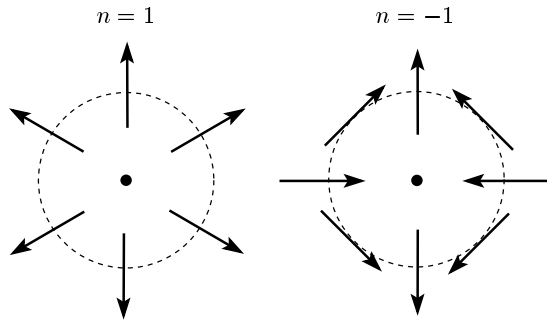


Рис. 5. Два основных типа сингулярностей в окрестности нулевых точек поля векторов  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$

Приведенные рассуждения утрачивают корректность в частных случаях, когда одно из собственных значений,  $\lambda_{\alpha 1}$  или  $\lambda_{\alpha 2}$ , матриц (63), (65) обращается в нуль. В этом случае  $\det \hat{Q}_\alpha^\perp = 0$ , но формула (68) больше неприменима. Действительно, пусть  $\lambda_{\alpha 2} = 0$  в точке  $\mathbf{m}_0$ . Тогда

$$\mathbf{D}_\alpha \parallel \Delta \mathbf{m} \hat{Q}_\alpha^\perp = \lambda_{\alpha 1} (\Delta \mathbf{m} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1}^\perp) \mathbf{e}_\alpha \quad (69)$$

и в направлении  $\Delta \mathbf{m} \perp \tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 1}^\perp$  через  $\mathbf{m}_0$  может проходить линия нулевой индукции, но только в том случае, если равенство  $\lambda_{\alpha 2} = 0$  сохраняет на ней свою справедливость. В этой ситуации сама концепция индекса Пуанкаре оказывается неприменимой. Если, однако, обращение в нуль величины  $\lambda_{\alpha 2}$  имеет строго локальный характер и реализуется только вдоль  $\mathbf{m}_0$ , то речь идет о весьма специфической сингулярности, аналогичной локально-клиновому вырождению в теории акустических осей [6]. Можно показать, что в этом случае топологический заряд соответствующей сингулярности в поле векторов  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  может равняться одному из трех значений:  $n = 0, \pm 1$ . Впрочем, обе ситуации нулевой амплитуды индукции этого типа (и в точке, и на линии) являются совершенно исключительными и не возникают в реальных кристаллах, даже благодаря симметрии среды. Ниже мы встретимся с нулевыми линиями индукции рассматриваемого типа только в модельных кристаллах. Как будет показано, примеры линий  $\mathbf{D}_\alpha = 0$ , отвечающие уравнениям (58), (59), принадлежат к совершенно иному типу.

С другой стороны, сингулярные точки  $n = \pm 1$ , показанные на рис. 5, являются весьма распространенными объектами в реальных кристаллах. Например, все направления  $\mathbf{m}_0$  на рис. 2б, отвечающие кристаллам ромбического (222) или кубических (43m и 23) классов симметрии, характеризуются топологическими зарядами  $\pm 1$  (темные точки на рис. 2

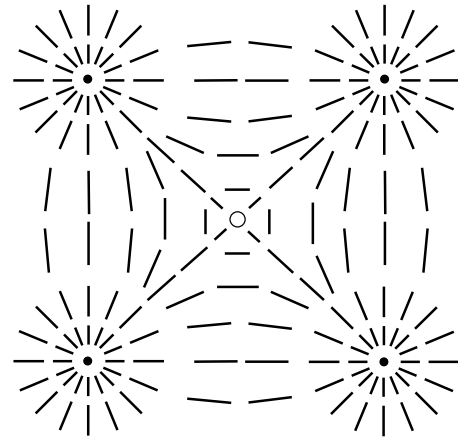


Рис. 6. Схематическое изображение в представлении ненаправленных отрезков векторного поля  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m})$  вокруг группы из пяти сингулярных точек  $\mathbf{m}_0$  в центральной части круга на рис. 2б

соответствуют индексу  $n = +1$ , а светлые — индексу  $n = -1$ ). Рисунок 6 схематически демонстрирует распределение  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m})$  в центральной части круга на рис. 2б.

Рассмотрим также некоторые дополнительные примеры кристаллов конкретных сингоний.

### Продольные волны вдоль осей симметрии

1. Направление  $\mathbf{m}_0 \parallel 2$  в моноклинном кристалле класса симметрии 2:

$$n = \text{sign} \{ (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - c_1 c_2 \}, \quad (70)$$

где

$$a_1 = \frac{e_{14} c_{36}}{\Delta_{34}^-}, \quad b_1 = \frac{e_{15} d_1}{\Delta_{35}^-} - \frac{e_{33} \epsilon_1}{\epsilon_3}, \quad (71)$$

$$c_1 = \frac{e_{14} d_2}{\Delta_{34}^-} + \frac{e_{15} c_{36}}{\Delta_{35}^-},$$

$$a_2 = \frac{e_{25} c_{36}}{\Delta_{35}^-}, \quad b_2 = \frac{e_{24} d_2}{\Delta_{34}^-} - \frac{e_{33} \epsilon_2}{\epsilon_3}, \quad (72)$$

$$c_2 = \frac{e_{24} c_{36}}{\Delta_{34}^-} + \frac{e_{25} d_1}{\Delta_{35}^-},$$

$d_i = c_{i3} + c_{33}$ . Тензор  $\hat{\epsilon}$  предполагается диагональным, что обеспечивается выбором ориентации осей  $(x, y)$  кристаллофизической системы координат с осью  $z$  параллельной оси симметрии 2.

2. Направление  $\mathbf{m}_0 \parallel 2$  в ромбическом кристалле класса симметрии  $mm2$ :

$$n = \text{sign}(b_1 b_2). \quad (73)$$

3. Направление  $\mathbf{m}_0 \parallel 2 \parallel z$  в ромбическом кристалле класса симметрии 222:

$$n^{(z)} = \text{sign}(a_1 d_2 / a_2 d_1). \quad (74)$$

Аналогичные формулы для  $n^{(x)}$  и  $n^{(y)}$  получаются из (74) соответствующей циклической перестановкой индексов. Заметим попутно, что в изотропном пределе

$$d_1 / \Delta_{35}^- = d_2 / \Delta_{34}^- \rightarrow 2, \quad (75)$$

и только очень большая упругая анизотропия могла бы изменить знак соответствующих отношений в (74). Поэтому обычно для большинства ромбических кристаллов знак в (74) определяется только пьезоэлектрическими модулями:  $n^{(z)} = \text{sign}(e_{14} / e_{25})$ .

4. Нетрудно убедиться, что вдоль главных осей симметрии в кристаллах классов симметрии 422, 622,  $\infty 22$ ,  $4mm$ ,  $6mm$ ,  $\infty mm$ , 4, 6,  $\infty$ , 32,  $3m$ , 3 имеем

$$n^{(z)} = 1, \quad (76)$$

а в классах симметрии  $\bar{4}2m$ ,  $\bar{4}$ ,  $\bar{4}3m$ , 23 —

$$n^{(z)} = -1. \quad (77)$$

### $t$ -волны ( $SH$ ) в плоскостях симметрии

Мы не станем приводить здесь громоздкие формулы, определяющие выбор между индексами  $n = \pm 1$  для моноклинных и тригональных кристаллов вдоль направлений  $\mathbf{m}_0$  (см. соответственно (49) и (52)), и начнем рассмотрение с ромбических кристаллов.

1. В кристаллах ромбического класса симметрии  $mm2$  поперечные акустические волны (53), (54), распространяющиеся вокруг нулевой точки  $\mathbf{m}_0 = (0, 1, 0)$ , сопровождаются сингулярным полем индукций, характеризуемым индексом Пуанкаре

$$n = \text{sign} \left[ \frac{e_{32}(c_{12} + c_{66}) / \Delta_{26}^- - e_{31}}{e_{15}} \right]. \quad (78)$$

2. Для тетрагональных кристаллов класса симметрии  $4mm$  вдоль того же направления имеем

$$n = \text{sign} \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} \frac{c_{12} - c_{11} + 2c_{66}}{\Delta_{16}^-} \right). \quad (79)$$

3. Для тетрагональных кристаллов класса симметрии  $\bar{4}2m$  вдоль направления  $\mathbf{m}_0 = (1, -1, 0) / \sqrt{2}$  получаем

$$n = -\text{sign}(e_{14} / e_{36}). \quad (80)$$

4. Для кубических кристаллов классов симметрии  $\bar{4}3m$  и 23 для того же самого направления в диагональной плоскости симметрии, так же как и для симметрично-эквивалентного направления  $\mathbf{m}_0 = (-1, 1, 0) / \sqrt{2}$ , при любых сочетаниях модулей имеем

$$n = -1. \quad (81)$$

## 6.2. Специальные типы сингулярностей

Проведенный анализ является исчерпывающим лишь до тех пор, пока тензор  $\hat{Q}_\alpha$  (62) не обращается в нуль. Как мы видели, обычно  $\hat{Q}_\alpha \neq 0$ , однако в некоторых исключительных случаях, благодаря высокой симметрии или из-за обращения в нуль определенных комбинаций компонент материальных тензоров, может случиться, что  $\hat{Q}_\alpha = 0$  вдоль некоторых специальных направлений. В подобных случаях общее рассмотрение становится весьма громоздким, и мы представим здесь только его результаты. При  $\hat{Q}_\alpha(\mathbf{m}_0) = 0$  в распределении векторных полей индукции вокруг  $\mathbf{m}_0$  возникают четыре дополнительные опции, показанные на рис. 7. Первые три из них отвечают изолированным сингулярным точкам с индексами Пуанкаре  $n = 0, \pm 2$  (рис. 7а–в). Четвертый вариант соответствует существованию нулевой линии  $\mathbf{D} = 0$ , проходящей через точку  $\mathbf{m}_0$  (рис. 7г). Именно такая ситуация возникает вдоль экватора  $m_3 = 0$  во всех поперечно-изотропных средах (13)–(15) для поперечных тангенциально поляризованных  $t$ -волн (58), а также в классах симметрии  $6mm$  и  $\infty m$  для поперечных  $t'$ -волн (59), поляризованных вдоль главной оси симметрии. Единственный другой известный пример обращения в нуль матрицы  $\hat{Q}_\alpha$  реализуется вдоль оси симметрии  $\bar{6}$ . В этом случае во всех трех волновых ветвях возникают одинаковые сингулярности  $n = -2$  (рис. 7в).

### 6.2.1. Иллюстрации на примере модельного кристалла класса симметрии $mm2$

Предположим, что в рассматриваемом кристалле один из его пьезомодулей много меньше остальных. А именно, пусть в стандартной кристаллофизической системе координат с осями  $x, y$ , нормальными к плоскостям симметрии, и осью  $z$ , параллельной оси симметрии 2, выполняется неравенство

$$|e_{31}| \ll |e_{15}|, |e_{24}|, |e_{32}|, |e_{33}|. \quad (82)$$

Если в нулевом приближении положить  $e_{31} = 0$ , то, как нетрудно проверить, в квазипродольной невырожденной ветви вдоль направления  $\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0)$

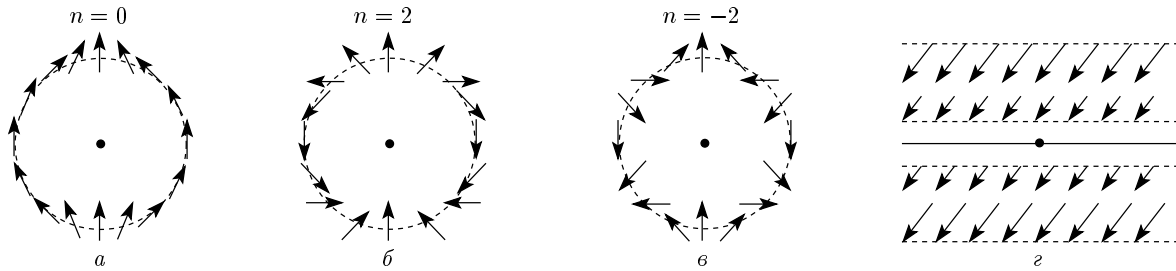


Рис. 7. Четыре возможных типа векторных распределений  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  вокруг точки  $\mathbf{m}_0$ , где  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m}_0) = \hat{Q}_\alpha(\mathbf{m}_0) = 0$

возникает описанная выше специальная ситуация, когда одновременно  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m}_0) = 0$  и  $\hat{Q}_{\alpha 1}(\mathbf{m}_0) = 0$ . При этом распределение векторного поля  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m})$  в плоскости  $yz$  вокруг точки  $\mathbf{m}_0$  описывается выражением

$$\mathbf{D}_l \parallel \{0, g_2 \sin 2\phi, g_1 + \varepsilon_1 e_{32} \gamma_2 - (g_1 - \varepsilon_1 e_{32} \gamma_2) \cos 2\phi\}, \quad (83)$$

где  $\phi$  — полярный угол направления  $\mathbf{m}$ , отсчитываемый от оси  $y$  в плоскости  $yz$ , и введены новые параметры

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_1(\varepsilon_1 e_{33} - \varepsilon_3 e_{15}), \\ g_2 &= (\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_1 e_{24} - \varepsilon_2 e_{15}, \\ \gamma_1 &= \bar{d}_5 / \bar{\Delta}_{15}, \quad \gamma_2 = d_6 / \Delta_{16}, \\ \bar{d}_5 &= c_{13} + \bar{c}_{55}, \quad \bar{\Delta}_{15} = c_{11} - \bar{c}_{55}, \\ \bar{c}_{55} &= c_{55} + e_{15}^2 / \varepsilon_1, \quad d_6 = c_{12} + c_{66}. \end{aligned} \quad (84)$$

Как вытекает из (83), в зависимости от материальных констант поле  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m})$  всегда отвечает одному из векторных распределений, показанных на рис. 7. Соответствующие индексы Пуанкаре точечных сингулярностей (рис. 7а–в) даются выражениями

$$n_l = \begin{cases} 0, & g_1 e_{32} \gamma_2 > 0, \\ 2 \operatorname{sign} [(g_1 - \varepsilon_1 e_{32} \gamma_2) g_2], & g_1 e_{32} \gamma_2 < 0. \end{cases} \quad (85)$$

Критерий существования нулевых линий в поле  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m})$  (рис. 7г) выполняется, когда

$$g_1 e_{32} \gamma_2 = 0 \quad \text{или} \quad g_2 = 0, \quad g_1 e_{32} \gamma_2 < 0. \quad (86)$$

Как следует из (83), при  $g_1 = 0$  нулевая линия индукции проходит через  $\mathbf{m}_0$  вдоль оси  $z$  (рис. 8а). При  $e_{32} \gamma_2 = 0$  аналогичная нулевая линия направлена вдоль оси  $y$  (рис. 8б). Если одновременно  $g_1 = 0$  и  $e_{32} \gamma_2 = 0$ , то указанные линии сосуществуют (рис. 8в). Наконец, при  $g_2 = 0, g_1 e_{32} \gamma_2 < 0$  возникает косое перекрестие нулевых линий (рис. 8г), ориентация которых определяется уравнением

$$\cos 2\phi = \frac{g_1 + \varepsilon_1 e_{32} \gamma_2}{g_1 - \varepsilon_1 e_{32} \gamma_2}. \quad (87)$$

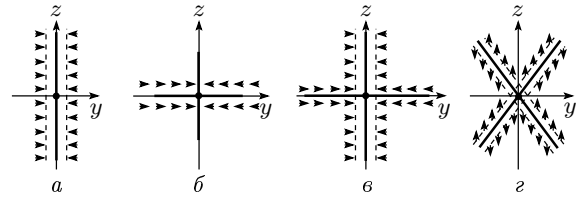


Рис. 8. Четыре типа нулевых линий  $\mathbf{D}_l(\mathbf{m}) = 0$  для модельного ромбического кристалла

### 6.2.2. Поведение точечных сингулярностей при возмущении материальных модулей

Различные типы точечных сингулярностей в векторных полях  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  по-разному ведут себя, смещаясь, расщепляясь или исчезая, при возмущениях материальных констант. Анализ аналогичный проведенному в работе [6] показывает, что сингулярности с индексами  $n = \pm 1$  (см. рис. 5) являются топологически устойчивыми и могут только смещаться при таких возмущениях. Другие типы сингулярных точек (рис. 7а–в) неустойчивы и либо расщепляются в соответствии с законом сохранения топологического заряда, либо исчезают (но только если исходный индекс  $n = 0$ ). Нулевые линии (рис. 7г и 8) также нестабильны и исчезают либо полностью, либо за исключением ряда изолированных нулевых точек.

Проиллюстрируем указанные общие свойства на конкретном примере рассмотренного выше модельного кристалла класса симметрии  $mm2$  с малым модулем  $e_{31}$ . Напомним, что полученные результаты (83)–(87) найдены в нулевом приближении, когда пьезомодуль  $e_{31}$  был положен равным нулю. В следующем порядке по  $e_{31}$  мы действительно получаем расщепление исходной сингулярности вдоль направления  $\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0)$  на две или четыре сингулярных точки:

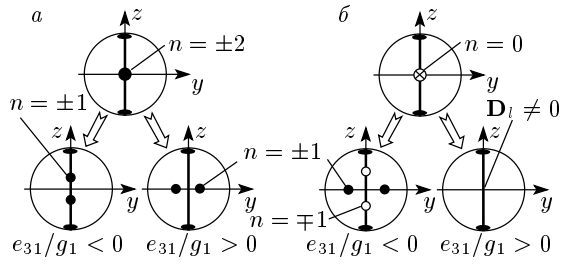


Рис. 9. Расщепление сингулярных точек с индексами  $n = \pm 2, 0$  в модельном кристалле класса симметрии  $mm2$

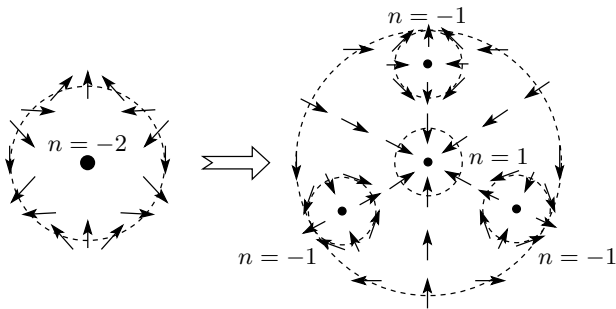


Рис. 10. Трансформация сингулярности  $n = -2$  вдоль оси симметрии  $\bar{b}$  в четверку сингулярных точек  $n = \pm 1$  при фазовом переходе  $\bar{b} \rightarrow 3$

$$\mathbf{m}_0 + \delta \mathbf{m} = \begin{cases} (1, \pm \mu_2, 0), & \mu_2^2 = -e_{31}/e_{32}\gamma_2, \\ (1, 0, \pm \mu_3), & \mu_3^2 = -\varepsilon_1 e_{31}/g_1. \end{cases} \quad (88)$$

Как видно из (88), при  $g_1 e_{32} \gamma_2 < 0$ , когда в нулевом приближении вдоль  $\mathbf{m}_0$  имеет место сингулярность  $n = 2$  или  $n = -2$ , «включение» модуля  $e_{31}$  приводит к симметричному расщеплению этой сингулярности на пару нулевых точек с одинаковыми топологическими зарядами соответственно  $n = 1$  или  $n = -1$  вдоль оси  $y$  или  $z$  в зависимости от знака фактора  $e_{31}/g_1$  (рис. 9a). А при  $g_1 e_{32} \gamma_2 > 0$ , когда исходный топологический заряд  $n$  нулевого приближения равен нулю, возмущенная картина включает либо четыре сингулярности с нулевым суммарным индексом (для  $e_{31}/g_1 < 0$ ), либо ни одной, что соответствует отсутствию в данной окрестности нулевых точек индукции (для  $e_{31}/g_1 > 0$ ) — рис. 9б.

Следует отметить, что рассматриваемые расщепления неустойчивых сингулярностей отнюдь не сводятся к абстрактным математическим играм. Реальные возмущения материальных констант кристаллов часто возникают благодаря различным внешним воздействиям вроде электрических полей, меха-

нических напряжений или температурных вариаций в окрестности фазовых переходов. Например, при фазовом превращении кристалла класса симметрии  $\bar{6}2m$  или  $\bar{6}$  в тригональный кристалл класса симметрии  $32, 3m$  или  $3$  ось симметрии  $\bar{6}$  ( $n = -2$ ) заменяется осью третьего порядка ( $n = 1$ ). При этом в соответствии с законом сохранения индекса и симметрией конечного состояния кристалла в дополнение к центральной сингулярности  $n = 1$  вокруг последней должны возникнуть еще три нулевые точки  $\mathbf{D}_l = 0$  с индексами  $n = -1$  (рис. 10).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, две электрические компоненты, сопутствующие акустическим волнам в пьезоэлектриках, электрическое поле  $\mathbf{E}$  и электрическая индукция  $\mathbf{D}$ , сильно различаются по своим свойствам. Электрическое поле всегда чисто продольно, в то время как электрическая индукция, напротив, всегда чисто поперечна. Направления нулевого электрического поля ( $\mathbf{E} = 0$ ) образуют на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  сплошные линии, а направления нулевой индукции ( $\mathbf{D} = 0$ ), как правило, изолированы и представляют собой сингулярные точки тангенциального векторного поля  $\mathbf{D}(\mathbf{m})$  на той же единичной сфере. При этом оба типа непьезоактивных направлений с необходимостью присутствуют практически в любых, даже триклинных, кристаллах, хотя элементы симметрии, конечно, являются дополнительной причиной их существования.

Топологические сингулярности в векторных полях  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  в окрестности нулевых точек в большинстве кристаллов характеризуются индексами Пуанкаре  $n = \pm 1$ , где знак совпадает со знаком детерминанта матрицы  $\hat{Q}_\alpha$  (62). Однако в отдельных специальных случаях, благодаря симметрии или из-за обращения в нуль определенных комбинаций материальных констант, может случиться, что  $\hat{Q}_\alpha = 0$ . При этом нулевая точка  $\mathbf{m}_0$  может быть либо изолированной (в этом случае  $n = 0, \pm 2$ ), либо принадлежать линии нулей. Подобные специальные ориентации топологически неустойчивы и при всяком изменении анизотропии должны распадаться на устойчивые точки  $n = \pm 1$  или исчезать.

Любопытно, что рассмотренные сингулярности векторного поля индукций  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  в окрестности нулевых точек радикально отличаются от аналогичных сингулярностей поля  $\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{m})$  вокруг

акустических осей. Согласно работе [7], в последнем случае устойчивые сингулярности характеризуются индексами  $n = \pm 1/2$ , а неустойчивые — индексами  $n = 0, \pm 1$ . Единственным исключением является акустическая ось вдоль оси симметрии  $\vec{b}$ : как уже отмечалось, в этом направлении и в вырожденных ветвях  $\mathbf{D}_\alpha = 0$ ,  $\dot{Q}_\alpha = 0$  и  $n = -2$ .

Работа двух авторов (В. И. А. и В. Н. Л.) поддержана РФФИ (грант № 05-02-16666). Работа выполнена в рамках договора о сотрудничестве между Институтом кристаллографии РАН и Технологическим университетом Кельце (Польша). Один из авторов (В. И. А.) был также поддержан Польско-Японским институтом информационных технологий (Варшава), грант № PJ/МКТ/02/2003, а другой (А. Р.) — Польским грантом № 5T07A00322.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Дьелесан, Д. Руайе, *Упругие волны в твердых телах*, Наука, Москва (1982).
2. М. К. Балакирев, И. А. Гилинский, *Волны в пьезоэлектрических кристаллах*, Наука, Новосибирск (1982).
3. В. Е. Лямов, *Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах*, Изд-во МГУ, Москва (1983).
4. Yu. V. Gulyaev, IEEE Trans. Ultrason. Ferroel. Freq. Control **45**, 935 (1998).
5. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, Кристаллография **35**, 1325 (1990).
6. В. И. Альшиц, А. В. Сарычев, А. Л. Шувалов, ЖЭТФ **89**, 922 (1985).
7. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, А. В. Сарычев, А. Л. Шувалов, ЖЭТФ **93**, 723 (1987).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
9. В. Н. Любимов, ДАН СССР **186**, 1055 (1969).
10. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва (1975).
11. Ф. И. Федоров, *Теория упругих волн в кристаллах*, Наука, Москва (1965).
12. В. И. Альшиц, Е. Лоте, Кристаллография **24**, 1122 (1979).
13. P. Holm, Phys. Scripta **44**, 122 (1992).