

# ФЕЙНМАНОВСКИЙ МЕТОД РАСПУТЫВАНИЯ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

*В. С. Попов\**

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
117218, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 июня 2005 г.

Фейнмановский метод распутывания некоммутирующих операторов применяется к задаче о квантовом осцилляторе с переменной частотой, что математически эквивалентно задаче о вращении псевдоспина в квазиунитарной группе  $SU(1, 1)$ . Состояния осциллятора образуют базис для неприводимых унитарных представлений этой группы. Дополняя метод Фейнмана теоретико-групповыми соображениями, мы получили простые аналитические формулы для матричных элементов и вероятностей перехода между начальными и конечными состояниями осциллятора. Рассмотрено также применение метода Фейнмана к гамильтониану атома или иона в лазерном поле и к модельному гамильтониану, обладающему группой скрытой симметрии атома водорода.

PACS: 03.65.-w, 31.15.Hz, 03.65.Fd

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод распутывания<sup>1)</sup> некоммутирующих операторов, предложенный Фейнманом (ФМР), был применен им к задаче об осцилляторе с постоянной частотой, находящемся под действием внешней силы  $f(t)$  произвольного вида, и к некоторым вопросам квантовой электродинамики [1]. Выражение для вероятности перехода между состояниями осциллятора с определенным числом квантов  $m$  и  $n$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $+\infty$ , полученное в работе [1], было существенно упрощено Швингером [2]. В дальнейшем [3] ФМР применялся к расчету изменения поляризации частицы с произвольным спином  $s$  во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}(t)$  общего вида. Однако ФМР не получил до сего времени заметного распространения.

Здесь мы рассмотрим применение ФМР к квантовому осциллятору с переменной частотой  $\omega(t)$ ,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)q^2, \quad \hbar = m = 1, \quad (1.1)$$

и представим оператор эволюции  $\hat{S}(t, t_0)$  в «распутанном» виде. Будет исследован теоретико-групповой аспект этой задачи и установлена ее связь с унитарными неприводимыми представлениями группы  $SU(1, 1)$ , что позволит получить без громоздких вычислений явные аналитические формулы для вероятностей переходов  $w_{mn}$  (которые выражаются через  $D$ -функции, или функции Вигнера, для этой группы). Обсуждается важный для приложений случай медленного изменения частоты осциллятора (адиабатическое приближение). Мы покажем, как применяется ФМР к задаче об атоме или ионе в переменном электрическом поле  $\mathcal{E}(t)$ , а также для распутывания модельного гамильтониана, обладающего группой скрытой симметрии атома водорода. В Приложениях А–С получены в явном виде функции Вигнера для интересующих нас представлений, рассмотрено уравнение Риккати, возникающее в подходе ФМР, и его точные решения, а также приведены некоторые подробности вычислений.

Излагаемые ниже результаты частично анонсированы в работе [4].

\*E-mail: markina@itep.ru

<sup>1)</sup> Или выпутывания (disentangling [1]).

**2. ФЕЙНМАНОВСКИЙ МЕТОД  
РАСПУТЫВАНИЯ И ТЕОРИЯ ГРУПП**

Гамильтониан гармонического осциллятора содержит некоммутирующие операторы:  $[p, q] = -i$ . Зависимость частоты  $\omega(t)$  от времени может быть произвольной, но предполагается выполнение граничных условий

$$\omega(t) \rightarrow \begin{cases} \omega_-, & t \rightarrow -\infty, \\ \omega_+, & t \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.1)$$

позволяющих ввести начальные  $|m, \omega_-\rangle$  и конечные  $|n, \omega_+\rangle$  состояния осциллятора с определенным числом квантов. Обозначая

$$\hat{A} = \frac{1}{2}q^2, \quad \hat{B} = \frac{1}{2}p^2, \quad \hat{C} = \frac{1}{4}(pq + qp), \quad (2.2)$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega^2(t)\hat{A} + \hat{B}, \\ [\hat{A}, \hat{B}] &= 2i\hat{C}, \quad [\hat{A}, \hat{C}] = i\hat{A}, \quad [\hat{B}, \hat{C}] = -i\hat{B}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

т. е., как и в случае, исследованном в работе [1], операторная алгебра замыкается. Однако непосредственное применение ФМР к оператору эволюции

$$\hat{S}(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{2}p^2 + \omega^2(t')q^2 \right) dt' \right\} \quad (2.4)$$

не приводит к успеху, поскольку выпутываемый оператор вновь возникает в экспоненте на следующем шаге процесса. Эта трудность преодолевается с помощью приема, указанного в работе [3]. Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega(t)q^2 \equiv \chi\hat{A} + (\omega^2 - \chi)\hat{A} + \hat{B}, \quad (2.5)$$

не фиксируя заранее функцию  $\chi(t)$ , и применим к первому слагаемому доказанную Фейнманом [1] теорему о выпутывании экспоненциального множителя:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= \exp(-a(t)\hat{A}) \times \\ &\times T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \{ (\omega^2 - \chi)\hat{A}' + \hat{B}' \} dt' \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= i \int_{t_0}^t \chi(t') dt', \\ \hat{O}' &\equiv \exp(a\hat{A})\hat{O} \exp(-a\hat{A}), \end{aligned} \quad (2.6')$$

причем  $t'$  в уравнениях (2.4) и (2.6) является упорядочивающим параметром в смысле работы [1], а обозначение  $\hat{O}'$  также следует работе [1]. Дифференцируя (2.6') по  $a$  и учитывая соотношения коммутации (2.3), находим

$$\begin{aligned} \hat{A}' &= \hat{A}, \quad \hat{C}' = \hat{C} + ia\hat{A}, \\ \hat{B}' &= \hat{B} + 2ia\hat{C} - a^2\hat{A}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условие полного выпутывания оператора  $\hat{A}$  из  $T$ -экспоненты дает для  $a(t)$  уравнение Риккати:

$$\dot{a} = i[\omega^2(t) - a^2], \quad (2.8)$$

после чего выпутываем оператор  $\hat{C}$ . В итоге получаем  $\hat{S}(t, t_0)$  в искомом виде:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= \exp \left( -\frac{a}{2}q^2 \right) \exp \left\{ \frac{c}{2}(pq + qp) \right\} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{b}{2}p^2 \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где все операторы распутаны, а функции  $b(t)$  и  $c(t)$  выражаются через  $a(t)$  с помощью квадратур:

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, \\ b(t) &= i \exp \left[ -i \int_{t_0}^t c(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.8')$$

При вычислении амплитуды перехода между начальными  $|m, \omega_-\rangle$  и конечными  $|n, \omega_+\rangle$  состояниями осциллятора,

$$A_{mn} = \langle n, \omega_+ | \hat{S}(\infty, -\infty) | m, \omega_- \rangle, \quad (2.10)$$

волновую функцию начального состояния удобно взять в  $p$ -представлении, а конечного — в  $q$ -представлении и учесть, что оператор  $\hat{C}$  имеет непрерывный спектр собственных значений,  $-\infty < \lambda < \infty$ :

$$\begin{aligned} \langle x | \lambda \rangle &= \pi^{-1/2} x^{-1/2+2i\lambda}, \quad \langle p | \lambda \rangle = \pi^{-1/2} p^{-1/2-2i\lambda}, \\ \langle \lambda | \lambda' \rangle &= \delta(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

Тем самым задача в принципе решена, однако возникающие интегралы являются чрезвычайно громоздкими (в случае произвольных  $m$  и  $n$ ), и непосредственное вычисление их в аналитическом виде представляет трудности. Как и ранее [3], для получения вероятностей  $w_{mn}$  в компактном виде следует дополнить ФМР теоретико-групповыми соображениями.

С этой целью перейдем от операторов (2.2) к их линейным комбинациям

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \frac{1}{4}(pq + qp), & \hat{J}_2 &= \frac{1}{4}(q^2 - p^2), \\ \hat{J}_0 &= \frac{1}{4}(p^2 + q^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

удовлетворяющим коммутационным соотношениям для генераторов группы  $SU(1, 1)$ :

$$\begin{aligned} [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= -2\hat{J}_0, & [\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] &= \pm\hat{J}_\pm, \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_a] &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2 = \pm i(q \mp ip)^2/4$  и  $\hat{J}^2$  — квадрат «углового момента» (оператор Казимира), который в данном случае<sup>2)</sup> сводится к  $c$ -числу:

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_0^2 - \hat{J}_1^2 - \hat{J}_2^2 = -3/16 = j(j + 1). \quad (2.13)$$

Это означает, что на волновых функциях осциллятора реализуются неприводимые представления группы  $SU(1, 1)$  с «весами»  $j = -1/4$  и  $-3/4$ . Эти представления соответствуют четным и нечетным уровням, которые в процессе эволюции не перемешиваются между собой, что объясняется четностью потенциала  $V(q) = \omega^2 q^2/2$ . Из соотношений (2.11) вытекает, что спектр оператора  $\hat{J}_0$  состоит из собственных значений  $\lambda_n = (2n + 1)/4$  с целыми неотрицательными  $n$ , поэтому для четных состояний,  $n = 2k$ , имеем

$$\lambda_n = k + 1/4 = -j + k, \quad j = -1/4,$$

а для нечетных  $n = 2k + 1$  —

$$\lambda_n = -j + k, \quad j = -3/4$$

(в обоих случаях  $k = 0, 1, 2, \dots$ , причем  $k = 0$  соответствует нижнему вектору представления). Эти два представления — унитарные (поскольку для оператора эволюции в квантовой механике выполняется соотношение унитарности,  $S^+S = 1$ ) и бесконечномерные<sup>3)</sup>. Как известно, все конечномерные представления группы  $SU(1, 1)$  неунитарны (см., например, (A.2) в Приложении А).

Таким образом, задача об осцилляторе — это не что иное, как задача о «вращении» псевдоспина  $\mathbf{J}$  в группе  $SU(1, 1)$ :

$$\hat{S}(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \omega^a(t') \hat{J}_a dt' \right\},$$

<sup>2)</sup> Т. е. для операторов вида (2.11).

<sup>3)</sup> Что естественно [5], поскольку  $SU(1, 1)$  — некомпактная группа. Подобная ситуация более знакома физикам по однородной (или собственной) группе Лоренца [6–8]. Подробное изложение математической теории представлений группы Лоренца содержится в [9].

где  $\omega^+ = -\omega^- = i(1 - \omega^2)/2$ ,  $\omega^0 = 1 + \omega^2$ . По аналогии с  $D$ -функциями Вигнера [10, 11] матричные элементы конечного поворота запишем в виде

$$D_{\mu\nu}^{(j)}(g) = \exp(-i\mu\psi) f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta) \exp(-i\nu\varphi), \quad 0 \leq \beta < \infty,$$

где  $g = g(\psi, \beta, \varphi) \in SU(1, 1)$ ,  $\psi$  и  $\varphi$  — углы Эйлера для евклидовых поворотов вокруг оси  $x_0$ ,  $0 \leq \psi, \varphi < 2\pi$ , а  $f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta)$  и параметр  $\beta$  отвечают комплексному вращению (точнее, гиперболическому повороту) в плоскости  $(x_1, x_2)$ . При этом  $\mu$  и  $\nu$  — собственные значения оператора  $\hat{J}_0$ , и  $\mu = -j$  для нижнего вектора неприводимого представления. Как видно из соотношений (2.12),  $\hat{J}_+$  ( $\hat{J}_-$ ) является повышающим (понижающим) оператором, изменяющим собственное значение  $\hat{J}_0$  на  $+1$  ( $-1$ ). При этом операторы  $\hat{J}_\pm$  меняют квантовое число уровня на 2, т. е.  $|n\rangle \rightarrow |n \pm 2\rangle$ .

Вероятности переходов между состояниями осциллятора равны

$$w_{mn} = |A_{mn}|^2 = \left| f_{k-j, l-j}^{(j)}(\beta) \right|^2, \quad (2.14)$$

$$k, l = 0, 1, 2, \dots,$$

где для четных состояний

$$j = -1/4, \quad k = m/2, \quad l = n/2, \quad (2.14')$$

для нечетных состояний

$$j = -3/4, \quad k = (m - 1)/2, \quad l = (n - 1)/2 \quad (2.14'')$$

и в обоих случаях

$$k - j = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right), \quad l - j = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Эти формулы раскрывают теоретико-групповое содержание рассмотренной задачи.

Явный вид функций  $f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta)$  был получен аналитическим продолжением функций Вигнера<sup>4)</sup>  $d_{\mu\nu}^{(j)}(\vartheta)$  для унитарной группы  $SU(2)$  на квазиунитарную группу  $SU(1, 1)$ , при котором угол  $\vartheta \rightarrow i\beta$ , а вес

<sup>4)</sup> Эти функции детально изучены [10, 11] и табулированы [11] для всех  $j \leq 5$ , однако из этих таблиц нельзя непосредственно извлечь функции  $f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta)$ , выражения для которых получены в Приложении А. Входящий в (2.14) параметр  $\beta$  (или  $\rho$ , см.(2.15)) характеризует степень возбуждения осциллятора и обсуждается в Приложении В, где рассмотрены также некоторые точные решения.

$j = 1/2, 1, 3/2, \dots$  представления заменяется найденными выше значениями  $j$ , что дает

$$\begin{aligned} \left| f_{k-j, l-j}^{(j)}(\beta) \right|^2 &= \\ &= \frac{k!}{(k-l)!^2 l!} \frac{\Gamma(k-2j)}{\Gamma(l-2j)} \rho^{k-l} (1-\rho)^{-2j} \times \\ &\times \left[ F \left( -l, 2j+1-l; k-l+1; -\frac{\rho}{1-\rho} \right) \right]^2, \\ \rho &= \text{th}^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $F(\dots) \equiv {}_2F_1(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса и  $k \geq l$  (в случае  $k < l$  формула аналогична). В частности, при  $l = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \left| f_{k-j, -j}^{(j)}(\beta) \right|^2 &= \left| f_{j, j-k}^{(j)}(\beta) \right|^2 = \\ &= \frac{\Gamma(k-2j)}{k! \Gamma(-2j)} \rho^k (1-\rho)^{-2j}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

и в этом случае легко проверяется выполнение условия унитарности

$$\sum_{\mu} \left| d_{\mu, -j}^{(j)}(\beta) \right|^2 = 1.$$

После некоторых преобразований (подробности см. в Приложении А) получаем вероятности перехода  $|m, \omega_{-}\rangle \rightarrow |n, \omega_{+}\rangle$  в окончательном виде:

$$\begin{aligned} w_{mn} &= \frac{K!}{(K-L)!^2 L!} \frac{\Gamma(K-2j)}{\Gamma(L-2j)} \rho^{K-L} (1-\rho)^{-2j} \times \\ &\times F^2(-L, K-2j; K-L+1; \rho), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $K = \max(k, l)$ ,  $L = \min(k, l)$  и  $K-L = |m-n|/2$ . Поскольку  $L \geq 0$  — целое, гипергеометрический ряд обрывается, превращаясь в полином. Вероятности перехода (2.17) удовлетворяют (при произвольном виде функции  $\omega(t)$ ) соотношениям взаимности

$$w_{mn}(\rho) = w_{nm}(\rho), \quad (2.18)$$

которые являются специфическими для гармонического осциллятора.

### 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Сравним полученные формулы с результатами независимых вычислений.

а) Из соотношения (2.16) при  $j = -1/4$  и  $-3/4$  находим вероятности переходов с двух нижних уровней осциллятора:

$$\begin{aligned} w_{0,2l} &= \frac{\Gamma(l+1/2)}{l! \Gamma(1/2)} \rho^l \sqrt{1-\rho}, \\ w_{1,2l+1} &= \frac{\Gamma(l+3/2)}{l! \Gamma(3/2)} \rho^l (1-\rho)^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

что согласуется с результатами работ [12–14], а для переходов со второго уровня имеем

$$\begin{aligned} w_{2,2l} &= \frac{l \Gamma(l+1/2)}{(l-1)! \Gamma(3/2)} \left( 1 - \frac{2l+1}{2l} \rho \right)^2 \times \\ &\times \rho^{l-1} \sqrt{1-\rho}, \quad l \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

и  $w_{20} = \rho \sqrt{1-\rho}/2$  при  $l = 0$ . Для переходов со следующего уровня,  $m = 3$ , формулы аналогичны.

б) В случае диагональных ( $m = n$ ) переходов получаем

$$w_{nn}(\rho) = \sqrt{1-\rho} [p_n(\rho)]^2, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} p_n(\rho) &= {}_2F_1 \left( -\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, 1; \rho \right) \equiv \\ &\equiv \sqrt{1-\rho} {}_2F_1 \left( \frac{1-n}{2}, \frac{n}{2} + 1; 1; \rho \right). \end{aligned}$$

Как показано в Приложении А, эти формулы можно записать в едином виде

$$w_{nn} = \sqrt{1-\rho} {}_3F_2(-n, n+1, 1/2; 1, 1; \rho) \quad (3.4)$$

через обобщенный гипергеометрический ряд [15]

$$\begin{aligned} {}_3F_2(-n, n+1, 1/2; 1, 1; x) &= \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^4} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} (-x)^k, \end{aligned}$$

что удобно при малых  $\rho$ , т. е. для слабовозбужденного осциллятора:

$$\begin{aligned} w_{nn}(\rho) &= 1 - \frac{1}{2} N \rho + \frac{1}{32} (3N^2 - 4N - 3) \rho^2 - \\ &- \frac{1}{576} (5N^3 - 28N^2 + 11N + 48) \rho^3 + \frac{1}{73728} \times \\ &\times (35N^4 - 520N^3 + 1706N^2 + \\ &+ 840N - 4941) \rho^4 - \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $N = n^2 + n + 1$  (подробности вычислений см. в Приложении С). Малым параметром этого разложения является  $n^2 \rho$ , причем коэффициент при  $\rho^k$  является полиномом от  $N$  со старшим членом, равным  $(-1)^k [(2k-1)! / 2^k (k!)^3] N^k$ .

Для любых квантовых чисел  $m$  и  $n$

$$w_{mn}(\rho) \propto \rho^{|m-n|/2}, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

В адиабатическом случае параметр  $\rho \ll 1$ , переходы между состояниями с  $|m-n| \gg 1$  возможны лишь в высоком порядке теории возмущений и потому сильно подавлены. Дальнейшее обсуждение адиабатического случая см. в разд. 4, где дано уточнение формулы (3.6).

в) В другом предельном случае, когда  $\rho \rightarrow 1$ , вероятность того, что осциллятор при  $t \rightarrow +\infty$  останется в начальном состоянии, весьма мала:

$$w_{nn} \approx \begin{cases} c_n(1-\rho)^{1/2}, & n - \text{четное,} \\ c'_n(1-\rho)^{3/2}, & n - \text{нечетное,} \end{cases} \quad (3.7)$$

где, например,

$$c_n = \left[ \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^2,$$

так что  $c_0 = 1$ ,  $c_2 = 1/4$  и  $c_n \sim 1/n$  при  $n \gg 1$ .

Таким образом, на нетривиальных примерах подтверждается справедливость уравнений (2.15)–(2.17), полученных нами в известной степени эвристически (с помощью аналитического продолжения функций Вигнера с группы  $SU(2)$  на группу  $SU(1,1)$ ). Связь с выражениями для вероятностей  $w_{mn}$ , полученными в работе [13], обсуждается в Приложении А. Отметим, что выражения (2.17) и (3.4) для  $w_{mn}$  не встречаются в известной нам литературе и удобны для расчетов. В частности, из них легко следуют адиабатические разложения (3.5) и (4.1).

г) В случае  $D$ -мерного осциллятора<sup>5)</sup>,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \{ p_i^2 + \omega_i^2(t) q_i^2 \}, \quad [p_j, q_k] = -i\delta_{jk}, \quad (3.8)$$

ФМР приводит к произведению  $D$  сомножителей вида (2.9), которые при различных  $i$  коммутируют друг с другом, поэтому вероятность перехода  $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$  равна

$$w_{00}^{(D)} = \sqrt{(1-\rho_1)(1-\rho_2)\dots(1-\rho_D)}.$$

В частности, для изотропного осциллятора

$$w_{00}^{(D)} = (1-\rho)^{D/2} = (\text{ch } \beta/2)^{-D}, \quad (3.9)$$

<sup>5)</sup> См. также работы [16, 17], последняя из которых содержит дополнительные ссылки.

и сравнение с выражением (А.5) показывает, что в этом случае вес унитарного представления равен

$$j = -D/4, \quad (3.10)$$

а вероятность переходов  $|0\rangle \rightarrow |2l\rangle$  есть

$$w_{0,2l}^{(D)} = \frac{\Gamma(l+D/2)}{l!\Gamma(D/2)} \rho^l (1-\rho)^{D/2}. \quad (3.11)$$

При этом, очевидно,  $\sum_l w_{0,2l}^{(D)} = 1$  для любой размерности  $D$  (соотношение унитарности). Параметр  $\rho$  определяет относительную вероятность перехода на уровень, ближайший к основному:  $w_2/w_0 = D\rho/2$ .

При  $D = 2$  имеем  $j = -1/2$  и выражение (3.11) совпадает с распределением по числу пар  $n$  заряженных скалярных (бесспиновых) бозонов, рожденных из вакуума пространственно-однородным переменным электрическим полем  $\mathcal{E}(t)$  в состоянии с определенным импульсом  $\mathbf{p}$ :

$$W_n(\mathbf{p}) = |f_{1/2, n+1/2}^{(-1/2)}(\beta)|^2 = (1-\rho)\rho^n, \quad (3.12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где параметр  $\rho$  зависит как от  $\mathcal{E}(t)$ , так и от  $\mathbf{p}$ . Такое распределение было получено в конкретных расчетах [18, 19], в том числе в случае импульсного поля вида  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0/\text{ch}^2 \omega t$ , для которого уравнения Клейна–Гордона и Дирака допускают точное решение.

В задаче о рождении пар из вакуума генераторы группы  $\hat{J}_a$  могут быть выражены через операторы рождения и уничтожения частиц-античастиц (так,  $\hat{J}_+ = a^\dagger b^\dagger$  и  $\hat{J}_- = ba$  для спинов  $s = 0$  и  $s = 1/2$ ), что дает простой способ [19] вычисления вероятностей (3.12). Теоретико-групповые аспекты этой задачи для частиц с произвольным спином  $s$  были рассмотрены в работе [20]. Следует отметить, что здесь  $\rho \sim \exp(-\pi \mathcal{E}_{cr}/\mathcal{E}_0)$ , где  $\mathcal{E}_{cr} = m^2 c^3 / e\hbar$  — «критическое», или швингеровское, поле, характерное для квантовой электродинамики [21–23]. Численно  $\mathcal{E}_{cr} = 1.32 \cdot 10^{16}$  В/см для  $e^\pm$  и возрастает пропорционально  $m^2$  для других заряженных частиц, достигая в случае  $\pi$ -мезонов значений порядка  $10^{21}$  В/см (поэтому реальный интерес представляет только случай  $s = 1/2$ ).

В последние годы вопрос о возможности наблюдения рождения электрон-позитронных пар при фокусировке лазерного импульса в вакууме (эффект Швингера) подробно обсуждается в литературе, см., например, работы [24–26] и указанные там дальнейшие ссылки.

#### 4. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Если частота осциллятора меняется медленно и является аналитической функцией  $t$ , особые точки которой расположены на конечном расстоянии от вещественной оси, то справедливо адиабатическое приближение Ландау – Дыхне [27–30]. При этом параметр  $\rho$  (или коэффициент отражения  $\rho = |R|^2$ ) экспоненциально мал, см., например, Приложение В. Из выражения (2.17) при  $\rho \rightarrow 0$  получаем

$$w_{mn} = \frac{n_{>}!}{(2q q!)^2 n_{<}!} \rho^q \times \left( 1 - \frac{mn + (m+n)/2 + 1}{2(q+1)} \rho + \dots \right), \quad (4.1)$$

$$q = |m - n|/2.$$

Это разложение справедливо для произвольных квантовых чисел  $m$  и  $n$ . Вероятности переходов быстро убывают с ростом  $|m - n|$ . В частности, для переходов на ближайшие уровни с точностью до членов порядка  $\rho^2$  включительно находим

$$w_{n,n\pm 2} = d_{\pm} \rho - d_{\pm}^2 \rho^2 + \dots, \quad (4.2)$$

$$w_{n,n\pm 4} = h_{\pm} \rho^2 + \dots, \quad \rho \ll 1,$$

где

$$d_{+} = \frac{1}{4}(n^2 + 3n + 2), \quad d_{-} = \frac{1}{4}(n^2 - n), \quad (4.2')$$

$$d_{+} + d_{-} = \frac{1}{2}N,$$

$$h_{\pm} = \frac{1}{4}d_{\pm} \left[ d_{\pm} + 2 \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \right],$$

а соответствующее разложение для «диагональных» вероятностей  $w_{nn}$  приведено выше в (3.5). Остальные вероятности  $w_{mn}$  с  $|m - n| \geq 6$  порядка  $\rho^3$  и менее:

$$w_{n,n+2k} = \frac{(n+2k)!}{2^{2k} k!^2 n!} \rho^k + \dots, \quad (4.3)$$

$$w_{n,n-2k} = \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{2^{2k} k!^2} \rho^k + \dots,$$

$$k \geq 1,$$

причем

$$\frac{w_{n,n-2k}}{w_{n,n+2k}} = 1 - \frac{4k^2}{n} + O(n^{-2}), \quad \rho \ll 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначая

$$W_n^{(+)} = \sum_{n' > n} w_{nn'}, \quad W_n^{(-)} = \sum_{n' < n} w_{nn'}, \quad (4.4)$$

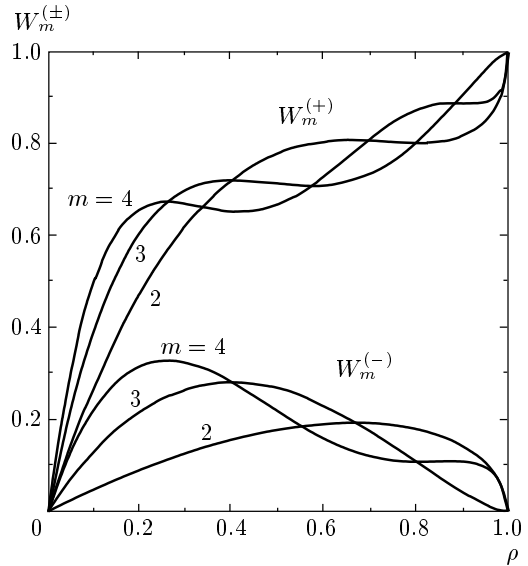


Рис. 1. Вероятности переходов вверх в спектре осциллятора,  $W_m^{(+)}$ , и вниз,  $W_m^{(-)}$ , с  $m$ -го уровня осциллятора. У кривых указаны значения  $m$

с учетом (4.2) находим

$$W_n^{(+)} - W_n^{(-)} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \left[ \rho - \frac{1}{4}(n^2 + n - 1)\rho^2 + \dots \right]. \quad (4.5)$$

Таким образом, при малых  $\rho$  переходы вверх (с любого уровня) преобладают над переходами вниз при произвольном законе изменения частоты осциллятора  $\omega(t)$ . Как показывает численный расчет (рис. 1), то же верно и при значениях  $\rho \sim 1$ . Для сравнения на рис. 2 приведены вероятности  $w_{nn}(\rho)$  диагональных переходов. Как правило, зависимость  $w_{mn}(\rho)$  не является монотонной (за исключением нижних уровней,  $m = 0$  и  $1$ ). Нетрудно проверить, что разложения (3.5) и (4.2) в сумме дают единицу (с точностью до членов порядка  $\rho^3$ , которые не выписаны в (4.2)). Таким образом, во втором порядке по параметру  $\rho$  условие унитарности выполняется.

Сравним полученные нами выражения с результатами Дыхне. В работе [28] приведены амплитуды  $a_{mn}$  перехода, относящиеся к случаю высоковозбужденных ( $n \gg 1$ ) состояний осциллятора (см. формулы (3.26) в [28]):

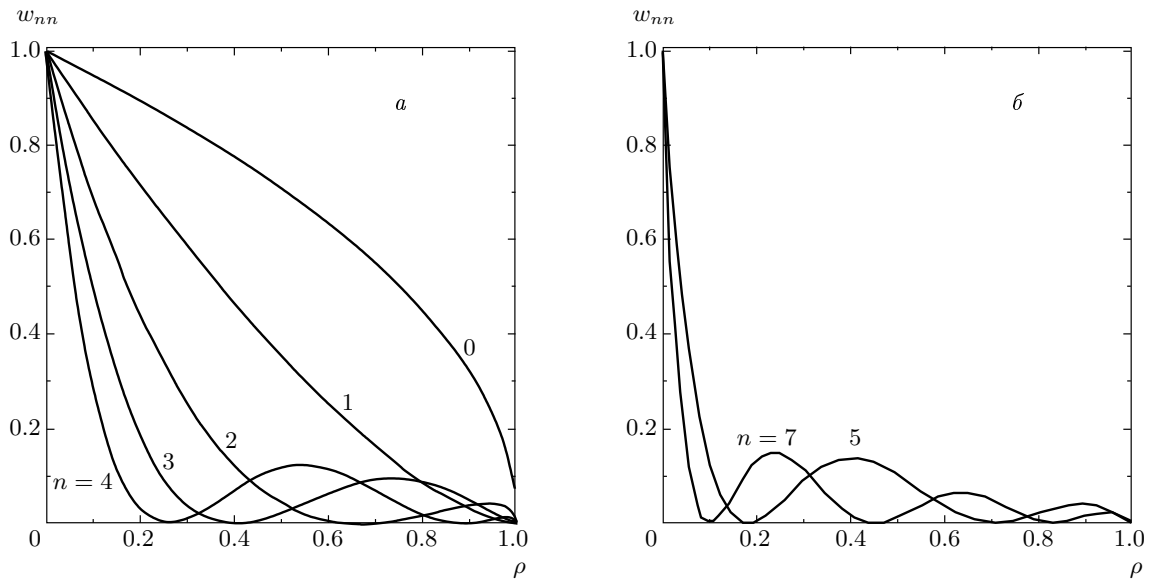


Рис. 2. Вероятности  $w_{nn}$  «диагональных» переходов в зависимости от  $\rho$  при  $0 \leq n \leq 4$  (а) и 5, 7 (б)

$$\begin{aligned} a_{nn} &= 1 + i \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{Im } R, \\ a_{n+2,n} &= \frac{1}{2} \left( n - \frac{1}{2} \right) R, \\ a_{n-2,n} &= -\frac{1}{2} \left( n + \frac{3}{2} \right) R^*, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $R$  — амплитуда отраженной волны (для уравнения Шредингера, т. е. при замене  $t \rightarrow x$ ). Сравнение с выражением (4.2) показывает, что для недиагональных ( $m \neq n$ ) переходов эти формулы согласуются с нашими, если исправить неточность в (4.6): следует заменить  $a_{n+2,n}$  на  $a_{n,n-2}$  и  $a_{n-2,n}$  на  $a_{n,n+2}$  (при этом в коэффициентах при  $\rho$  для  $w_{mn} = |a_{mn}|^2$  нужно отбросить слагаемые порядка единицы по сравнению с  $n^2$  и  $n$ ).

Заметим, что соотношение унитарности однозначно восстанавливает и следующий член в разложении амплитуды  $a_{nn}$  при  $n \gg 1$ :

$$\begin{aligned} a_{nn} &= 1 + i \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{Im } R - \\ &- \frac{1}{4} (n^2 + n) [|R|^2 + 2(\text{Im } R)^2] + \dots = \\ &= \sqrt{w_{nn}} \exp \left[ i \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{Im } R + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Значения  $a_{nn}$  зависят не только от  $\rho = |R|^2$ , но и от фазы амплитуды отражения  $R = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi)$ , которая меняется при сдвиге потенциала (или частоты

$\omega(t)$ ) как целого — см., например, (В.4), в то время как вероятности  $w_{nn}$  от фазы  $\varphi$  не зависят.

### 5. АТОМ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь применение ФМР к задаче об атоме в лазерном поле. В дипольном приближении ( $a_B = \hbar^2/mc^2 \ll \lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны) гамильтониан электрона есть

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - e\boldsymbol{\mathcal{E}}(t)\mathbf{r} + U(r), \quad (5.1)$$

где  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = -c^{-1} \dot{\mathbf{A}}(t)$  — поле плоской световой волны, а  $U(r)$  — потенциал, обязанный атомному остову. Гамильтониан (5.1), использованный, например, в работах [31, 32], содержит некоммутирующие операторы. Полагая

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2, \quad \hat{B} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{r}, \quad \hat{C} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{p}, \quad (5.2)$$

имеем

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{C}, \quad [\hat{A}, \hat{C}] = 0, \quad [\hat{B}, \hat{C}] = i\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 \hat{I}, \quad (5.3)$$

где  $\hat{I}$  — единичный оператор. Тем самым алгебра операторов замыкается<sup>6)</sup> и можно использовать

<sup>6)</sup> В отличие от (2.3) и (2.12), эта алгебра, по-видимому, вырожденная. Однако нетрудно проверить, что она удовлетворяет условиям [5], необходимым для алгебры Ли.

ФМР. Получаем

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right\} = \\ &= \exp \left( -\frac{ie}{c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r} \right) \times \\ &\times T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t [\hat{A}' + U(r)] dt' \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}' &= \frac{1}{2} e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{p}^2 e^{-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2, \\ \mathbf{a} &= \frac{e}{c} \mathbf{A}(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если потенциал  $U(r)$  короткодействующий<sup>7)</sup>, то оператор эволюции может быть распутан до конца:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, t_0) &= \exp \left[ -\frac{ie}{c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{t_0}^t \left[ \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t') \right]^2 dt' \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В теоретических расчетах, начиная с известной работы Келдыша [34], используется волковская волновая функция  $\psi_{\mathbf{p}} = \hat{S} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$  электрона во внешнем поле (в нерелятивистском приближении):

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mathbf{P}^2(t') dt' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}(t)$ . С использованием функции (5.7) получены многочисленные результаты в теории ионизации и возбуждения атомов и ионов интенсивным лазерным излучением, обсуждать которые здесь было бы неуместно (см., например, обзоры [35, 36]). Нашей целью было проиллюстрировать применение ФМР к распутыванию входящих в (5.1) операторов.

## 6. МОДЕЛЬ С ГРУППОЙ СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ

Модельный гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \omega_1(t) \cdot \mathbf{L} + \omega_2(t) \cdot \mathbf{A}, \quad (6.1)$$

где  $\hbar = m = e = 1$ ,

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}) + \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (6.2)$$

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — орбитальный момент и  $\mathbf{A}$  — вектор Лапласа–Рунге–Ленца [37, 38], можно рассматривать как проекцию гамильтониана атома водорода во внешних полях  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  на подпространство состояний с фиксированной энергией (в этой связи см. замечание в конце данного раздела). Как известно, в атоме водорода имеется так называемое «случайное» вырождение уровней с данным  $n = (-2E)^{-1/2}$ , которое объясняется группой скрытой симметрии гамильтониана: группа  $SO(4)$  для состояний дискретного спектра и группа Лоренца  $SO(3,1)$  для непрерывного спектра [39–43]. В первом случае, полагая  $\mathbf{N} = (-2H_0)^{-1/2} \mathbf{A} = n\mathbf{A}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — главное квантовое число, получаем<sup>8)</sup>

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = [\mathbf{N}, \mathbf{N}] = i\mathbf{L}, \quad [\mathbf{L}, \mathbf{N}] = i\mathbf{N}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{L}^2 + \mathbf{N}^2 = n^2 - 1, \quad (6.4)$$

что совпадает с соотношениями коммутации для генераторов группы  $SO(4)$ . При этом собственное значение  $\mathbf{N}^2$  меняется от  $n^2 - 1$  для  $s$ -состояний до  $\mathbf{N}^2 = n - 1$  при  $l = n - 1$  (круговые орбиты электрона.). Вводя операторы  $\mathbf{I}_{1,2} = (\mathbf{L} \pm \mathbf{N})/2$ , находим

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_1] &= i\mathbf{I}_1, \quad [\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2] = i\mathbf{I}_2, \quad [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2] = 0, \\ \mathbf{I}_1^2 &= \mathbf{I}_2^2 = (n^2 - 1)/4, \quad [\hat{H}_0, \mathbf{I}_1] = [\hat{H}_0, \mathbf{I}_2] = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Переход от (6.3) к операторам  $\mathbf{I}_{1,2}$  отвечает разложению  $SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$ . Обозначая

$$\Omega_{1,2}(t) = \int_0^t \left[ \omega_1(t') \pm \frac{1}{n} \omega_2(t') \right] dt' \quad (6.6)$$

и учитывая, что  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2$  коммутируют между собой, получаем

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, 0) &= T \exp \left\{ -i \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right\} = \\ &= \exp(-iE_n t) \exp(-i\Omega_1 \cdot \mathbf{I}_1) \exp(-i\Omega_2 \cdot \mathbf{I}_2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Аналогичным образом в случае непрерывного спектра, когда энергия  $E = k^2/2 > 0$ , имеем

$$\mathbf{N}' = (2H_0)^{-1/2} \mathbf{A} = \frac{1}{k} \mathbf{A}, \quad \mathbf{N}'^2 = l(l+1) + 1 + k^{-2}$$

<sup>7)</sup> Что является хорошим приближением в случае ионизации отрицательных ионов ( $\text{H}^-$ ,  $\text{Na}^-$  и др.), см., например, [33].

<sup>8)</sup> Принятое здесь обозначение  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = i\mathbf{C}$  означает, что  $[A_j, B_k] = ie_{jkm} C_m$ . При этом соотношение  $[\mathbf{I}, \mathbf{I}] = i\mathbf{I}$  отвечает генераторам группы  $SU(2)$ .



и вместо (6.3) получаем соотношения

$$[\mathbf{L}, \mathbf{L}] = -[\mathbf{N}', \mathbf{N}'] = i\mathbf{L}, \quad [\mathbf{L}, \mathbf{N}'] = i\mathbf{N}',$$

соответствующие генераторам группы Лоренца. В этом случае  $\mathbf{J}_{1,2} = (\mathbf{L} \pm i\mathbf{N}')/2$ , причем  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и в (6.5). Оператор эволюции принимает вид

$$\hat{S}(t, 0) = \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right) \exp(-i\boldsymbol{\Omega}'_1 \cdot \mathbf{J}_1) \times \exp(-i\boldsymbol{\Omega}'_2 \cdot \mathbf{J}_2), \quad (6.8)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}'_{1,2}(t) = \int_0^t [\boldsymbol{\omega}_1(t') \mp ik\boldsymbol{\omega}_2(t')] dt'. \quad (6.9)$$

В силу того, что операторы  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2$ , или  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  коммутируют между собой, получение этих формул не требует привлечения ФМР. Дальнейшее распутывание операторов ( $I_+$ ,  $I_0$ ,  $I_-$  и т. д.) проводится с помощью ФМР так же, как и в задаче о вращении спина в переменном магнитном поле [3]. В итоге оператор эволюции для гамильтониана (6.1) может быть представлен в полностью распутанном виде, чем и завершается применение ФМР. Хотя оператор эволюции (6.8) унитарен, сомножители  $\exp(-i\boldsymbol{\Omega}'_1 \cdot \mathbf{J}_1)$  и  $\exp(-i\boldsymbol{\Omega}'_2 \cdot \mathbf{J}_2)$  по отдельности не являются унитарными, поскольку  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  — неэрмитовы операторы:  $\mathbf{J}_1^+ = \mathbf{J}_2$ ,  $\mathbf{J}_2^+ = \mathbf{J}_1$ .

Нетрудно было бы выписать матричные элементы переходов между состояниями атома водорода с фиксированной энергией  $E$  и различными орбитальными моментами. В случае  $E < 0$  — это функции Вигнера для представления  $\mathcal{D}(j_1, j_2)$  группы  $SO(4)$  с весами  $j_1 = j_2 = (n - 1)/2$ , а в случае непрерывного спектра они относятся к бесконечномерному<sup>9)</sup> унитарному представлению  $\mathcal{D}(0, \rho)$  группы Лоренца основной серии [6–9]. При этом инвариант  $\rho = 2/k$ , где

$$\hat{F} = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \mathbf{L}^2 - \mathbf{N}'^2 = -\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right) \quad (6.10)$$

— собственное значение скаляра  $\hat{F}$ , а  $M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$  — оператор 4-момента. Отметим, что

<sup>9)</sup> Это видно уже из того, что для состояний с энергией  $E > 0$  орбитальный момент  $l$  неограничен, в то время как  $0 \leq l \leq n - 1$  при  $E_n = -1/2n^2 < 0$ .

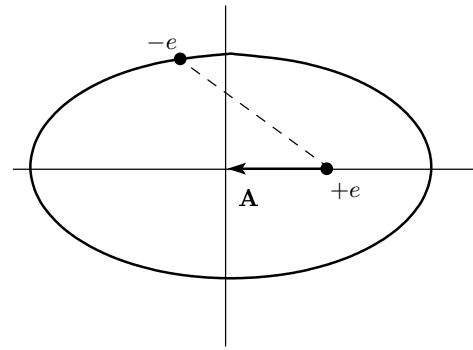


Рис. 3. Расположение вектора  $\mathbf{A}$  при кеплеровском движении

(6.10) получается из (6.4) при замене:  $n \rightarrow i\rho/2$ . Второй инвариант группы Лоренца (псевдоскаляр)

$$\hat{G} = \frac{i}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}M^{\rho\sigma}$$

отличен от нуля только при наличии у частицы спина, но в (6.1) спином электрона пренебрегается.

Последнее замечание сделаем о физическом смысле слагаемого  $\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{A}$  в гамильтониане (6.1). В классической механике для движения в кулоновском потенциале  $U(r) = -\alpha/r$  имеем  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{p} + \alpha\mathbf{r}/r$  и, умножая скалярно на  $\mathbf{r}$ , находим отсюда уравнение орбиты:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \quad p = \frac{L^2}{\alpha}, \quad e = \frac{A}{\alpha} \quad (m = 1). \quad (6.11)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  направлен по большой оси эллипса и пропорционален его эксцентриситету  $e$  (рис. 3). Средний по периоду дипольный момент частицы с зарядом  $-1$ , совершающей кеплеровское движение, равен  $\langle \mathbf{d} \rangle = 3ea/2$ , где  $a = \alpha/2|E|$  — большая полуось орбиты. Отсюда в квазиклассическом приближении

$$\mathbf{A} = \frac{4}{3}|E_n|\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{2}{3n^2}\langle \mathbf{d} \rangle_{nn}. \quad (6.12)$$

Таким образом, для вырожденных (по орбитальному моменту  $l$ ) состояний с фиксированной энергией  $E$  член  $\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{A}$  соответствует диагональному матричному элементу от оператора дипольного взаимодействия  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t)\mathbf{d} \propto (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{r})$ , однако недиагональные элементы типа  $\langle \mathbf{r} \rangle_{nn'}$  при этом не учитываются. Степень обоснованности такого приближения требует дополнительного рассмотрения.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, ФМР позволяет в ряде случаев распутать входящие в гамильтониан операторы

и найти точное решение квантовомеханической задачи. Однако этот метод не универсален в отличие, например, от фейнмановской диаграммной техники в теории возмущений. Этим, по-видимому, объясняется малая популярность ФМР среди физиков. Если, однако, ФМР удастся применить, то он дает решение задачи при произвольном законе изменения внешних параметров (сила  $f(t)$ , частота осциллятора  $\omega(t)$ , и т. д.)

В задаче об осцилляторе, рассмотренной Фейнманом [1], имеются только два оператора,  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$ , коммутатор которых является  $c$ -числом:  $[a, a^\dagger] = 1$ . Поэтому применение ФМР сразу приводит к желаемому результату. Ранее [3] и в данной работе рассмотрены случаи, когда входящие в гамильтониан операторы порождают некоторую алгебру Ли, содержащую три образующих. Полное распутывание операторов проводится в рамках ФМР с помощью указанного в работе [3] приема, суть которого ясна из уравнений (2.5), (2.6). Запись вероятностей перехода в компактной аналитической форме оказалась возможной после выяснения теоретико-групповой структуры оператора эволюции  $\hat{S}$ . При этом вероятности  $w_{mn}$  переходов выражаются через матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы  $SU(1, 1)$ , которые по необходимости являются бесконечномерными. Уравнения Риккати, возникающие при использовании ФМР (см. работу [3] или уравнение (2.8) данной статьи), определяют параметры, от которых зависят амплитуды  $A_{mn}$  переходов и вероятности  $w_{mn} = |A_{mn}|^2$ .

Было бы интересно выяснить, возможно ли применение ФМР в тех случаях, когда гамильтониан включает  $n > 3$  некоммутирующих операторов, и какую роль при этом играет теория групп.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить за обсуждение данной работы К. Г. Борескова, О. В. Канчели, В. Д. Мура, Ю. А. Симонова, а также участников Конференции по теоретической физике TD-70 (Москва, ФИАН, апрель 2005). Я благодарен С. Г. Позднякову, выполнившему численные расчеты, и М. Н. Маркиной за помощь при подготовке рукописи к печати.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-02-17157).

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

Здесь мы обсудим связь между неприводимыми представлениями групп  $SU(2)$  и  $SU(1, 1)$  и получим

формулы (2.15)–(2.17).

Спинорное представление группы  $SU(2)$  имеет вид

$$g = \exp\left(-i\frac{\psi}{2}\sigma_z\right) \exp\left(-i\frac{\vartheta}{2}\sigma_x\right) \times \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\sigma_z\right), \quad g^+g = 1, \quad (A.1)$$

где  $\psi, \vartheta$  и  $\varphi$  — углы Эйлера,  $0 \leq \vartheta < \pi$ . Для перехода к  $SU(1, 1)$  сделаем замену  $\vartheta \rightarrow i\beta$ , при которой

$$\exp\left(-i\frac{\vartheta}{2}\sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -i\sin(\vartheta/2) \\ -i\sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{ch}(\beta/2) & \text{sh}(\beta/2) \\ \text{sh}(\beta/2) & \text{ch}(\beta/2) \end{pmatrix}. \quad (A.2)$$

Это представление — конечномерное и неунитарное:  $\tilde{g}g = 1$ , где

$$\tilde{g} = \sigma_z g^+ \sigma_z, \quad \hat{J}_1 = \frac{i}{2}\sigma_x, \quad \hat{J}_2 = \frac{i}{2}\sigma_y, \\ \hat{J}_0 = \frac{1}{2}\sigma_z, \quad \mathbf{J}^2 = 3/4.$$

Наше предположение состоит в том, что матричные элементы унитарных ( $j = -1/4, -3/4$ ) представлений можно получить при аналитическом продолжении функций Вигнера [10, 11] группы  $SU(2)$  с помощью подстановки

$$\vartheta \rightarrow i\beta, \quad 0 \leq \beta < \infty; \\ j = -1/4 \text{ или } j = -3/4. \quad (A.3)$$

Приведем аргументы в пользу данного предположения.

а) Как известно, в группе  $SU(2)$

$$d_{jj}^{(j)}(\vartheta) = d_{-j,-j}^{(j)}(\vartheta) = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2j}, \quad (A.4) \\ j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Используя подстановку (A.3), находим

$$f_{-j,-j}^{(j)}(\beta) = \left(\text{ch}\frac{\beta}{2}\right)^{2j} = (1 - \rho)^{-j}, \quad (A.5)$$

откуда при  $j = -1/4$  и  $-3/4$  имеем

$$w_{00} = \left[f_{1/4,1/4}^{(-1/4)}(\beta)\right]^2 = \sqrt{1 - \rho}, \quad (A.6) \\ w_{11} = (1 - \rho)^{3/2}, \quad \rho = \text{th}^2\frac{\beta}{2},$$

что совпадает с результатами, полученными в работах [12–14].

б) Более общий случай: переходы с двух нижних уровней осциллятора,  $m = 0 \rightarrow n = 2l$  или  $m = 1 \rightarrow n = 2l + 1$ . В этом случае<sup>10)</sup>

$$d_{-j,l-j}^{(j)}(\vartheta) = C \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)^l \left( \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^{2j}, \quad (\text{A.7})$$

$$C = \sqrt{\frac{(2j)!}{l! (2j-l)!}} = i^{\pm l} \sqrt{\frac{\Gamma(l-2j)}{l! \Gamma(-2j)}},$$

откуда следуют формулы (3.1), полученные независимым путем в работах [12, 13]. Тем самым возможность аналитического продолжения подтверждается.

в) В общем случае функции Вигнера группы  $SU(2)$  могут быть выражены через гипергеометрическую функцию  ${}_2F_1$ , см. [11]. Используя формулы (16), (17) из разд. 4.5 в [11] при  $\mu = l - j$ ,  $\nu = k - j$ , выполняя подстановку (A.3) и преобразуя факториалы согласно соотношению

$$\frac{(2j-l)!}{(2j-k)!} = \frac{\Gamma(2j+1-l)}{\Gamma(2j+1-k)} = (-1)^{k-l} \frac{\Gamma(k-2j)}{\Gamma(l-2j)},$$

приходим к выражению (2.15), если  $k \geq l$ . Наконец, используя преобразование гипергеометрической функции  ${}_2F_1(\dots; z)$  от аргумента  $z$  к аргументу  $z/(z-1)$ , см. 2.9.3 в [15], получаем окончательную формулу (2.17).

Заметим, что  $D_{\mu\nu}^{(j)}(e) = \delta_{\mu\nu}$ , если  $e$  — единица группы. Поэтому диагональные элементы матрицы  $f_{\mu\mu}^{(j)}(\beta)$  определяются однозначно:

$$f_{k-j,k-j}^{(j)}(\beta) = \left( \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right)^{2j} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left( -k, k-2j; 1; \operatorname{th}^2 \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= (1-\rho)^{-j} \sum_{s=0}^k \frac{k! \Gamma(k+s-2j)}{s!^2 (k-s)! \Gamma(k-2j)} (-\rho)^s, \quad (\text{A.8})$$

где  $j = -1/4$  или  $j = -3/4$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В остальных случаях ( $\mu \neq \nu$ ) остаются неопределенными фазовые множители, которые для вероятностей перехода несущественны.

<sup>10)</sup> См., например, [11, 44]; здесь опущен несущественный для нас фазовый множитель. Отметим, что в работе [44] группа  $SU(1, 1)$  обозначается как  $QU(2)$ .

Для получения формулы (3.4) используем тождество<sup>11)</sup>

$$[{}_2F_1(a, b; a+b+1/2; z)]^2 =$$

$$= {}_3F_2(2a, 2b, a+b; a+b+1/2, 2(a+b); z),$$

где  $a = -n/2$ ,  $b = (n+1)/2$ . Тем же способом в случае  $j = -1/4$  нетрудно преобразовать формулу (2.17) к следующему виду:

$$w_{mn} = \frac{K!}{(K-L)!^2} \frac{\Gamma(K+1/2)}{L! \Gamma(L+1/2)} \rho^{K-L} (1-\rho)^{1/2} \times$$

$$\times {}_3F_2(-2L, 2K+1, K-L+1/2;$$

$$K-L+1, 2(K-L)+1; \rho), \quad (\text{A.9})$$

что при  $m = n$  и  $K = L = n/2$  переходит в (3.4).

г) Ранее [13] для вероятностей перехода  $w_{mn}$  было получено выражение

$$w_{mn} = \frac{n_{<}!}{n_{>}!} \sqrt{1-\rho} \left| P_{(m+n)/2}^{m-n/2}(\sqrt{1-\rho}) \right|^2, \quad (\text{A.10})$$

которое, на первый взгляд, существенно отличается от (2.17) и (A.9). Совпадение этих выражений означает существование определенных соотношений между специальными функциями; например, при  $m = n$

$${}_2F_1(-n/2, (1-n)/2; 1; \sin^2 \theta) \equiv$$

$$\equiv (\cos \theta)^n P_n(1/\cos \theta). \quad (\text{A.11})$$

В справедливости этого равенства для небольших  $n$  нетрудно убедиться непосредственной проверкой, однако нам не удалось найти его в справочниках [11, 45]. В случае произвольных  $m, n$  аналогичное тождество содержит присоединенные функции Лежандра.

д) Как видно из (A.2), подстановка  $\vartheta \rightarrow i\beta$  далеко не всегда сохраняет унитарность представления. Необходимыми, хотя и недостаточными, являются условия

$$\sum_{\mu} \left| f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta) \right|^2 = \sum_{\nu} \left| f_{\mu\nu}^{(j)}(\beta) \right|^2 = 1, \quad (\text{A.12})$$

которое выполняются для (3.1) и (3.11), т.е. при  $m = 0$  и  $m = 1$ . Однако эти случаи являются наиболее простыми и, возможно, нетипичными (поскольку переходы происходят только вверх). Мы проверили выполнение условий (A.12) для переходов со

<sup>11)</sup> См. 4.3.1 в справочнике [15]. Это — единственный случай, когда квадрат гипергеометрической функции Гаусса выражается в виде функции  ${}_3F_2$  от того же аргумента.

второго и третьего уровней осциллятора. В первом случае ( $m = 2$ ) условие унитарности принимает вид

$$\sqrt{1-\rho} \left\{ \frac{1}{2}\rho + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+3/2)}{(k+1)\Gamma(3/2)} \times \right. \\ \left. \times \left[ k+1 - \left( k + \frac{3}{2} \right) \rho \right]^2 \rho^k \right\} \equiv 1, \\ 0 \leq \rho < 1, \quad (\text{A.13})$$

и аналогично для  $m = 3$ . Выполнение этих соотношений было проверено численно с точностью не менее  $10^{-12}$  для значений  $\rho$  от 0.01 до 0.99.

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Согласно работам [13, 37], имеем  $\rho = |C_2/C_1|^2$ , где  $C_{1,2}$  — константы, определяемые из классического уравнения движения  $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$  с граничными условиями

$$x(t) = \begin{cases} \exp(i\omega_- t), & t \rightarrow -\infty, \\ C_1 \exp(i\omega_+ t) + C_2 \exp(-i\omega_+ t), & t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Параметр  $\rho$  совпадает с коэффициентом отражения от барьера, если заменить  $t$  на  $q$  и  $x(t)$  на  $\psi(q)$ . Полагая  $a(t) = -i\dot{x}(t)/x(t)$ , нетрудно видеть, что уравнение (2.8) удовлетворяется, причем  $a(-\infty) = \omega_-$  и

$$\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\omega_+ - a(t)}{\omega_+ + a(t)} \right|^2. \quad (\text{B.2})$$

Таким образом,  $\rho$  можно вычислить с помощью уравнения Риккати, полученного на основе ФМР. Приведем несколько примеров.

Пусть

$$\omega(t) = \omega_- \theta(t_0 - t) + \omega_+ \theta(t - t_0),$$

что отвечает мгновенному скачку частоты осциллятора от  $\omega_-$  к  $\omega_+$ . Уравнение Риккати легко интегрируется:  $a(t) = \omega_-$  при  $t < t_0$ ,

$$a(t) = \omega_+ \times \frac{(\omega_+ + \omega_-) \exp(i\omega_+ \tau) - (\omega_+ - \omega_-) \exp(-i\omega_+ \tau)}{(\omega_+ + \omega_-) \exp(i\omega_+ \tau) + (\omega_+ - \omega_-) \exp(-i\omega_+ \tau)}, \\ t \geq t_0, \quad (\text{B.3})$$

где  $\tau = t - t_0$ . Отсюда

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \exp(2i\omega_+ t_0) \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-}, \\ \rho = |R|^2 = \left[ \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ + \omega_-} \right]^2, \\ \beta = \ln \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}} = \ln \frac{\omega_>}{\omega_<}. \quad (\text{B.4})$$

Небольшое усложнение предыдущего примера,

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_-, & t < 0, \\ \omega_0, & 0 < t < T, \\ \omega_+, & t > T \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

дает

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\sigma_1\sigma_2 \cos(2\omega_0 T)}{1 + \rho_1\rho_2 + 2\sigma_1\sigma_2 \cos(2\omega_0 T)}, \quad (\text{B.6})$$

где  $\rho_i = \sigma_i^2$ ,  $\sigma_1 = (\omega_0 - \omega_-)/(\omega_0 + \omega_-)$  и  $\sigma_2 = (\omega_+ - \omega_0)/(\omega_+ + \omega_0)$ . Отсюда, между прочим, видно, что параметр возбуждения  $\rho$  может обратиться в нуль, т.е. осциллятор при  $t \rightarrow +\infty$  может оказаться в исходном состоянии:  $w_{mn} = \delta_{mn}$ . В данном случае это происходит, если  $\omega_+ = \omega_-$  и  $\omega_0 T = n\pi$ , или при  $\omega_0 = \sqrt{\omega_+ \omega_-}$  и  $\omega_0 T = (n + 1/2)\pi$ . См. также ниже формулу (B.11) при  $\omega_0 = (2n + 1)\omega$ .

Точное решение возможно также для

$$\omega^2(t) = \frac{1}{2} \times \left[ \omega_+^2 + \omega_-^2 + (\omega_+^2 - \omega_-^2) \text{th} \omega t + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2 \text{ch}^2 \omega t} \right], \quad (\text{B.7})$$

что в квантовой механике соответствует потенциалу Экарта [46]. В этом случае уравнение Шредингера решается в гипергеометрических функциях [46, 47], причем

$$\rho = (\text{sh}^2 \eta + \text{cos}^2 \delta) / (\text{sh}^2 \zeta + \text{cos}^2 \delta), \quad (\text{B.8})$$

где

$$\zeta = \frac{\pi(\omega_+ + \omega_-)}{2\omega}, \quad \eta = \frac{\pi(\omega_+ - \omega_-)}{2\omega}, \quad \delta = \frac{\pi\omega_0}{2\omega}.$$

Если  $\omega \ll \omega_{\pm}$  (адиабатика), то коэффициент отражения экспоненциально мал:

$$\rho \approx \exp(-2\pi\omega_</\omega), \quad \omega_< = \min(\omega_+, \omega_-), \quad (\text{B.9})$$

причем в соответствии с работами [48, 49] предэкспоненциальный множитель равен единице.

Значение  $\rho$  определяется [27] ближайшей к вещественной оси «точкой поворота»  $t = t_0$ , в которой  $\omega(t_0) = 0$ . Предэкспонента в (В.9) равна единице, если такая точка — единственная; например, в случае  $\omega_0 = \omega$

$$\omega t_0^{(n)} = \ln \frac{\omega_-}{\omega_+} + i \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (\text{В.10})$$

и ближайшей точке отвечает  $n = 0$ .

Особым случаем является  $\omega_+ = \omega_-$ ; при этом

$$\rho = \frac{\cos^2 \delta}{\text{sh}^2 \zeta + \cos^2 \delta}, \quad \zeta = \frac{\pi \omega_{\pm}}{\omega} \quad (\text{В.11})$$

и вместо (В.9) имеем асимптотику

$$\rho \approx 4 \cos^2 \delta \exp(-2\pi \omega_{\pm}/\omega), \quad \omega \ll \omega_{\pm}. \quad (\text{В.12})$$

В этом случае в комплексной плоскости имеются 2 точки  $t_i$  (равноудаленные от вещественной оси), в которых частота  $\omega(t)$  обращается в нуль:

$$\omega t_{1,2} = i \frac{\pi}{2} \pm \text{Arsh} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{2\omega_{\pm}}. \quad (\text{В.13})$$

Интерференция вкладов от них в амплитуду перехода дает предэкспоненту, отличную от единицы. Отметим еще, что при  $\omega_0 = (2k + 1)\omega$  имеем  $\delta = (k + 1/2)\pi$  и потому  $\rho \equiv 0$  (безотражательный потенциал [27]).

### ПРИЛОЖЕНИЕ С

Гипергеометрический ряд в (3.4) можно записать в виде

$${}_3F_2 \left( -n, n + 1, \frac{1}{2}; 1, 1; x \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k - 1)!!}{2^k (k!)^3} b_k (-x)^k, \quad (\text{С.1})$$

где

$$\begin{aligned} (-1)!! &= 1, & b_0 &= 1, & b_1 &= n^2 + n = N - 1, \\ b_2 &= N^2 - 4N + 3, \end{aligned}$$

а при  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} b_k(N) &= \prod_{s=0}^{k-1} [N - (s^2 + s + 1)], \\ N &= n^2 + n + 1, \\ b_k &= N^k - \frac{1}{3}(k^3 + 2k)N^{k-1} + \dots + \\ &+ (-1)^k 1 \cdot 3 \dots (k^2 - k + 1), \end{aligned} \quad (\text{С.2})$$

причем  $b_k = 0$  при  $k = n + 1, n + 2, \dots$ . Перемножая ряд (С.1) с известным рядом для  $w_{00}(\rho)$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \rho} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - 1/2)}{k! \Gamma(-1/2)} \rho^k = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 3)!!}{2^k k!} \rho^k, \end{aligned} \quad (\text{С.3})$$

легко находим коэффициенты разложения (3.5). Отсюда видно, что коэффициент при  $\rho^k$  в (3.5) является полиномом  $k$ -й степени относительно  $N$ .

*Примечание при корректуре (12 сентября 2005 г.)*

1. Недавно М. А. Трусов показал (аналитически, а не численно), что функции (2.17) строго удовлетворяют условию унитарности. Это служит обоснованием приема (аналитическое продолжение функций Вигнера на некомпактную группу), использованного нами в дополнении к ФМР.

2. Как заметил К. Г. Боресков, соотношение (А.11) фактически содержится в совокупности формул (15.4.10), (15.4.11) и (8.2.1) справочника [50] при надлежащем выборе параметров.

Я благодарен К. Г. Борескову и М. А. Трусову за интерес к работе и полезные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. R. P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 728 (1953).
3. В. С. Попов, ЖЭТФ **35**, 985 (1958).
4. V. S. Popov, Phys. Lett. **342 A**, 281 (2005).
5. К. Фрондел, в сб. *Теория групп и элементарные частицы*, Мир, Москва (1967), с. 324.
6. И. С. Шапиро, ДАН СССР **106**, 647 (1956).
7. Чжоу-Гуан-чжао, Л. Г. Заставенко, ЖЭТФ **35**, 1417 (1958).
8. В. С. Попов, ЖЭТФ **37**, 1116 (1959).
9. М. А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца*, Физматлит, Москва (1958).
10. E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York (1959).

11. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
12. К. Husimi, *Progr. Theor. Phys.* **9**, 381 (1953).
13. В. С. Попов, А. М. Переломов, *ЖЭТФ* **56**, 1375 (1969).
14. Н. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
15. Н. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New-York (1953).
16. I. A. Malkin, V. I. Man'ko, and D. A. Trifonov, *Phys. Rev.* **D2**, 1371 (1970).
17. В. В. Додонов, И. А. Малкин, В. И. Манько, *ТМФ* **24**, 164 (1975); В. В. Додонов, В. И. Манько, *Труды ФИАН* **183**, 71 (1987).
18. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, *ЯФ* **11**, 1072 (1970).
19. В. С. Попов, *ЖЭТФ* **62**, 1248 (1972).
20. А. М. Perelomov, *Phys. Lett.* **39A**, 165 (1972).
21. F. Sauter, *Z. Phys.* **69**, 742 (1931).
22. W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
23. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
24. A. Ringwald, *Phys. Lett.* **510B**, 107 (2001).
25. В. С. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 151 (2001); V. S. Popov, *Phys. Lett.* **298A**, 83 (2002).
26. N. B. Narozhny, S. S. Bulanov, V. D. Mur, and V. S. Popov, *Phys. Lett.* **330A**, 1 (2004).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974), § 53.
28. А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **38**, 570 (1960).
29. Е. Е. Никитин, Л. П. Питаевский, *УФН* **163**, 101 (1993).
30. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Атом в сильном световом поле*, Энергоатомиздат, Москва (1984), гл. 4.
31. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, *ЖЭТФ* **50**, 1993; **51**, 309 (1966).
32. G. F. Gribakin and M. Yu. Kuchiev, *Phys. Rev. A* **55**, 3760 (1997).
33. V. D. Mur, S. V. Popruzhenko, S. G. Pozdnyakov, and V. S. Popov, *Phys. Lett.* **316A**, 226 (2003).
34. Л. В. Келдыш, *ЖЭТФ* **47**, 1945 (1964).
35. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
36. В. С. Попов, *УФН* **174**, 921 (2004).
37. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
38. P. de Laplace, *Traite de mecanique celeste*, Bachelier, Paris (1829), t. 1, ch. 3.
39. V. A. Fock, *Z. Phys.* **98**, 145 (1935).
40. V. Bargmann, *Z. Phys.* **99**, 576 (1935).
41. M. Bander and C. Itzykson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 330 (1966).
42. А. М. Переломов, В. С. Попов, *ЖЭТФ* **50**, 179 (1966); *ДАН СССР* **181**, 320 (1968).
43. В. С. Попов, в сб. *Физика высоких энергий и теория элементарных частиц*, Наукова Думка, Киев (1967), с. 702.
44. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, Москва (1965).
45. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
46. C. Eckart, *Phys. Rev.* **35**, 1303 (1930).
47. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953), Vol. 2, sec. 12.3.
48. В. Л. Покровский, С. К. Саввиных, Ф. Р. Улинич, *ЖЭТФ* **34**, 1272 (1958).
49. В. Л. Покровский, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **40**, 1713 (1961).
50. М. А. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).