

О РОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

С. С. Буланов^{a}, Н. Б. Нарожный^{b**}, В. Д. Мур^b, В. С. Попов^a*

^a *Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова
117218, Москва, Россия*

^b *Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 13 июля 2005 г.

Рассмотрен процесс рождения e^+e^- -пар из вакуума одиночным фокусированным лазерным импульсом, а также двумя сталкивающимися противоположно направленными фокусированными импульсами. Для описания фокусированного лазерного импульса используется реалистическая трехмерная модель, основанная на точном решении уравнений Максвелла. Используемая модель воспроизводит, в частности, важное свойство фокусированных пучков, а именно, существование двух типов волн с поперечным либо электрическим, либо магнитным вектором (соответственно e - и h -поляризованные волны). Изучена зависимость числа родившихся пар от интенсивности излучения и от параметра фокусировки. Показано, что число пар, рождающихся в поле одиночного e -поляризованного импульса, на много порядков больше, чем в случае h -поляризованного импульса. Число пар, образованных одиночным импульсом, зависит от интенсивности импульса столь резко, что при приближении к характерному для квантовой электродинамики значению интенсивности $I_S = 4.65 \cdot 10^{29}$ Вт/см² суммарная энергия пар, рожденных e -поляризованным импульсом, сравнивается с энергией самого импульса. Это накладывает естественное физическое ограничение на максимально достижимую интенсивность лазерного импульса. Для случая двух сталкивающихся циркулярно-поляризованных импульсов показано, что рождение пар становится экспериментально наблюдаемым процессом при интенсивности каждого из пучков $I \sim 10^{26}$ Вт/см², что на один–два порядка меньше, чем в случае одиночного импульса

PACS: 12.20.Ds

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект рождения электрон-позитронных пар из вакуума под действием электрического поля впервые обсуждался, по-видимому, в работах Заутера [1] в связи с так называемым парадоксом Клейна (см., например, [2]). Вероятность перехода вакуум–вакуум, которая в присутствии постоянного однородного электромагнитного поля отлична от единицы за счет эффекта рождения e^+e^- -пар, в главном приближении была найдена Гейзенбергом и Эйлером [3], точные формулы в случаях вакуума заряженных частиц со спином 0 и 1/2 получены Швингером [4], а в случае векторных бозонов — Ваяшиным и Терентьевым [5]. Вероятность рождения

e^+e^- -пар из вакуума становится заметно отличной от нуля при напряженности постоянного электрического поля, близкой к характерному для квантовой электродинамики (КЭД) значению

$$E_S = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 1.32 \cdot 10^{16} \text{ В/см}$$

(см. [1–4]), при котором электрическое поле на комптоновской длине

$$l_C = \frac{\hbar}{mc} = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$$

совершает над электроном работу mc^2 . Постоянное поле такой напряженности вряд ли может быть получено в лабораторных условиях. Поэтому многие авторы сосредоточились на теоретическом исследовании процесса рождения пар под действием переменных во времени электрических полей [6–15], хотя

*E-mail: bulanov@itep.ru

**E-mail: narozhny@theor.mephi.ru

и в этом случае надежды на достижение напряженностей порядка E_S до последнего времени казались весьма призрачными.

В настоящее время переменные электромагнитные поля высокой интенсивности могут быть получены только с помощью лазеров. Считается [6, 9], что процесс рождения пар под действием поля одиночного лазерного импульса или даже поля двух встречных импульсов может быть обнаружен при интенсивностях излучения

$$I \sim I_S = (c/4\pi)E_S^2 = 4.65 \cdot 10^{29} \text{ Вт/см}^2.$$

Однако рекордные значения интенсивности лазеров составляют величину порядка 10^{22} Вт/см^2 и еще очень далеки от характерной интенсивности I_S . Тем не менее достигнутые напряженности лазерных полей позволяют провести экспериментальную проверку некоторых нелинейных эффектов КЭД в сильных полях уже сейчас, так как они обеспечивают напряженность поля порядка E_S в собственной системе отсчета ультрарелятивистской частицы, сталкивающейся с лазерным импульсом. Такие эксперименты были осуществлены на стэнфордском линейном ускорителе SLAC, где впервые исследованы нелинейные процессы КЭД, возникающие при взаимодействии высокоэнергетичных электронов и фотонов с лазерными импульсами большой интенсивности. В частности, были проведены эксперименты по нелинейному комптоновскому рассеянию электронов с энергией 46.6 ГэВ на лазерном импульсе с интенсивностью 10^{18} Вт/см^2 [16], и рождению e^+e^- -пар фотонами с энергией до 29.2 ГэВ, сталкивающимися с лазерным импульсом такой же интенсивности [17].

В последнее время появились публикации, порождающие определенный оптимизм также в отношении экспериментального наблюдения эффектов, связанных с поляризацией вакуума сильным внешним полем, в частности, эффекта рождения пар в вакууме. Таджима и Муру [18] предложили способ генерации лазерных импульсов сверхвысокой интенсивности 10^{26} – 10^{28} Вт/см^2 с перспективой его осуществления в ближайшем десятилетии. Еще одна возможность получения электромагнитных полей сверхвысокой интенсивности указана в работе [19]. В предложенной там схеме напряженность порядка E_S достигается при нелинейном взаимодействии электромагнитной и ленгмюровской волн в плазме. При этом происходит сжатие импульса, увеличение его частоты и фокусирование опрокидывающейся ленгмюровской волной. В связи с этим задача о рождении пар фокусированным лазерным импульсом ста-

новится актуальной и с экспериментальной точки зрения.

Большинство авторов, изучавших эффекты КЭД в сильных лазерных полях, моделировали поле лазерного импульса плоской монохроматической волной. Особенностью такой модели является существование точных решений уравнения Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны — известных волковских решений [20], см. также § 40 в книге [21]. Использование этих решений, имеющих простую квазиклассическую форму, позволяет сравнительно легко получать аналитические формулы для вероятностей квантовых процессов в поле плоской волны [22]. Модель плоской волны может использоваться и для описания процессов в фокусированном лазерном импульсе. Если длина и время формирования процесса малы по сравнению с характерными пространственной и временной неоднородностями лазерного импульса, то локальная вероятность процесса может быть вычислена в рамках модели плоской волны, а полная вероятность может быть получена интегрированием локальной вероятности по объему и длительности импульса. Эта методика была использована авторами экспериментов [16, 17] для сравнения их результатов с теорией.

Однако существуют процессы, для описания которых модель плоской волны использовать невозможно. В частности, плоская электромагнитная волна произвольной интенсивности и спектрального состава не рождает e^+e^- -пар из вакуума [4], поскольку оба инварианта электромагнитного поля плоской волны

$$\mathcal{F} = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)/2, \quad \mathcal{G} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})$$

равны нулю. Поэтому в настоящей работе для описания электромагнитного поля фокусированной волны использована реалистическая трехмерная модель, предложенная в работе [23]. Эта модель основана на точном решении уравнений Максвелла и была успешно применена [24] для количественного объяснения эффекта анизотропии углового распределения электронов, ускоренных интенсивным лазерным импульсом, который наблюдался в эксперименте [25]. Сразу же отметим, что использование суперпозиции двух фокусированных импульсов позволяет обнаружить рождение e^+e^- -пар при интенсивностях, значительно меньших, чем в случае одиночного импульса [26, 27].

Для расчета числа пар, рожденных как одиночным, так и двумя сталкивающимися фокусированными импульсами, используется то обстоятельство, что длина формирования процесса рождения пары

определяется комптоновской длиной, которая много меньше длины волны лазерного излучения: $l_C \ll \lambda$. В произвольной точке поля, которая характеризуется локальными значениями полевых инвариантов \mathcal{F} и \mathcal{G} , число пар рожденных в единице объема в единицу времени можно вычислить в соответствии с формулой¹⁾ для постоянного электромагнитного поля, а полное число рожденных частиц получить как интеграл по объему V и длительности импульса τ

$$N = \frac{e^2 E_S^2}{4\pi^2 \hbar^2 c} \int_V dV \int_0^\tau dt \epsilon \eta \operatorname{cth} \frac{\pi \eta}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\pi}{\epsilon}\right). \quad (1.1)$$

Здесь

$$\epsilon = \mathcal{E}/E_S, \quad \eta = \mathcal{H}/E_S$$

— приведенные поля, а \mathcal{E} и \mathcal{H} — инварианты, имеющие смысл напряженностей электрического и магнитного поля в той системе отсчета, где они параллельны:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} + \mathcal{F}}, \\ \mathcal{H} &= \sqrt{(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{1/2} - \mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Работа организована следующим образом. В разд. 2 описана модель электромагнитного поля фокусированного импульса, используемая в дальнейших вычислениях. В разд. 3 проведено качественное обсуждение процесса рождения пар как одиночным, так и двумя сталкивающимися фокусированными импульсами. В частности, объясняется причина существования естественного физического предела для максимально достижимой интенсивности лазерного излучения, которая связана с эффектом истощения энергии электромагнитного импульса за счет рождения e^+e^- -пар. Результаты численных расчетов для зависимостей числа родившихся пар от интенсивности излучения и параметра фокусировки приводятся в разд. 4. В разд. 5 обсуждается вопрос о применимости приближения пространственно однородного поля [7–15] для описания эффекта рождения пар двумя сталкивающимися импульсами. В разделе 6 представлены заключительные замечания. В Приложении обсуждается применение метода мнимого времени для вычисления вероятности рождения пар.

¹⁾ Точное выражение для среднего числа пар, рожденных однородным электрическим полем, было получено в работе [28], а в случае постоянного однородного электромагнитного поля общего вида — в работе [29, стр. 152].

2. МОДЕЛЬ ПОЛЯ ФОКУСИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА

В работе [23] показано, что существует точное решение уравнений Максвелла в пустоте, которое имеет вид

$$\mathbf{E}^e = iE_0 e^{-i\varphi} \{(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)F_1 - e^{\pm 2i\phi}(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)F_2\}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e &= \pm E_0 e^{-i\varphi} \left\{ \left(1 - i\Delta^2 \frac{\partial}{\partial \chi}\right) \times \right. \\ &\times [(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)F_1 + e^{\pm 2i\phi}(\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y)F_2] + \\ &\left. + 2i\Delta e^{\pm i\phi} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь x , y , и z — пространственные координаты,

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega(t - z/c), \quad \xi = \rho/R, \quad \chi = z/L, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \exp(i\phi) = (x + iy)/\rho, \\ \Delta &\equiv c/\omega R = \lambda/2\pi R, \quad L \equiv R/\Delta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

функция $F_1(\xi, \chi; \Delta)$ удовлетворяет уравнению

$$2i \frac{\partial F_1}{\partial \chi} + \Delta^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (2.4)$$

а функция $F_2(\xi, \chi; \Delta)$ равна

$$F_2 = F_1 - \frac{2}{\xi^2} \int_0^\xi d\xi' \xi' F_1(\xi'). \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть, что поля (2.1), (2.2) описывают монохроматическую волну частоты ω , распространяющуюся вдоль оси z с амплитудой, зависящей от поперечных координат x и y . Если потребовать, чтобы функция F_1 достаточно быстро стремилась к нулю при ξ , $|\chi| \rightarrow \infty$ и удовлетворяла условию

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F_1(0, 0; \Delta) = 1, \quad (2.6)$$

то, как это следует из (2.5), функция F_2 тоже будет стремиться к нулю при ξ , $|\chi| \rightarrow \infty$ и удовлетворять условию

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} F_2(0, \chi; \Delta) = 0.$$

В этом случае [23] поля (2.1), (2.2) будут описывать фокусированный световой пучок, причем параметр R можно интерпретировать как радиус фокального пятна, а $L = kR^2$ — как дифракционную (или рэлеевскую) длину. Даже если лазерный импульс сфокусирован до дифракционного предела, так что радиус

фокального пятна порядка длины волны ($R \sim \lambda$), то и в этом случае параметр $\Delta \sim 10^{-1}$. Далее мы везде предполагаем условие $\Delta \ll 1$ выполненным.

В силу малости параметра Δ и принятых свойств функций F_1 и F_2 электромагнитное поле (2.1), (2.2) в пространственной области $\xi \ll 1$, $|\chi| \ll 1$, близко к полю циркулярно-поляризованной плоской волны. Мы идентифицируем его как поле циркулярно-поляризованного фокусированного светового пучка. При этом знак «+» в формулах (2.1), (2.2) соответствует правой, а знак «-» левой поляризации. В отличие от случая плоской волны, только вектор \mathbf{E} в решении (2.1), (2.2) является поперечным. Такой пучок мы назовем e -поляризованным. В работе [23] показано, что существует решение уравнений Максвелла, которое в указанном выше смысле тоже можно считать циркулярно-поляризованным фокусированным пучком, но с поперечным только магнитным вектором \mathbf{H} . Поля в такой волне, которую мы будем называть h -поляризованной, даются выражениями [23]

$$\mathbf{E}^h = \pm i \mathbf{H}^e, \quad \mathbf{H}^h = \mp i \mathbf{E}^e. \quad (2.7)$$

Для произвольной линейной комбинации e - и h -поляризованных пучков оба поля \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют отличную от нуля продольную составляющую. Обсуждение других типов поляризации фокусированных лазерных лучей см. в работе [23].

Используемая модель допускает различные полевые конфигурации, которые определяются функциями F_1 и F_2 . Одно из решений уравнений (2.4), (2.5), удовлетворяющее условию (2.6), при $\Delta \ll 1$ может быть записано в следующем виде:

$$F_1 = (1+2i\chi)^{-2} \left(1 - \frac{\xi^2}{1+2i\chi} \right) \times \exp \left(-\frac{\xi^2}{1+2i\chi} \right), \quad (2.8)$$

$$F_2 = -\xi^2 (1+2i\chi)^{-3} \exp \left(-\frac{\xi^2}{1+2i\chi} \right).$$

Волны такого типа обычно называют гауссовыми пучками. В дальнейшем мы будем использовать для функций F_1 и F_2 выражения (2.8).

Для того чтобы описать лазерный импульс конечной длительности τ , необходимо ввести временную огибающую $g(\varphi/\omega\tau)$ и сделать в (2.1), (2.2) следующие замены [23]:

$$\exp(-i\varphi) \rightarrow if'(\varphi), \quad \exp(-i\varphi)\Delta \rightarrow f(\varphi)\Delta, \quad (2.9)$$

где

$$f(\varphi) = g(\varphi/\omega\tau) \exp(-i\varphi), \quad g(0) = 1.$$

Предполагается, что функция $g(\varphi/\omega\tau)$ экспоненциально убывает по направлению к периферии импульса при $|\varphi| \gg \omega\tau$. В этом случае электрическое и магнитное поля представляют собой приближенное решение уравнений Максвелла с точностью до второго порядка малости по параметрам Δ и $\Delta' = 1/\omega\tau$, $\Delta' \lesssim \Delta \ll 1$.

Рассмотрим поведение электрического и магнитного полей фокусированного импульса. Для этого приведем выражения для полей в фокальной плоскости

$$\mathbf{E}^e(\chi = 0) = iE_0 e^{-i\varphi} e^{-\xi^2} \times \{ (1 - \xi^2) (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) + \xi^2 e^{\pm 2i\phi} (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) \}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}^e(\chi = 0) = \pm E_0 e^{-i\varphi} e^{-\xi^2} \times \left\{ (1 - \xi^2) \left[1 - \frac{2\Delta^2(2 - 4\xi^2 + \xi^4)}{(1 - \xi^2)} \right] (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) - \xi^2 [1 - 2\Delta^2(3 - \xi^2)] e^{\pm 2i\phi} (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) - 4i\Delta\xi(2 - \xi^2) e^{\pm i\phi} \mathbf{e}_z \right\} \quad (2.11)$$

и на оси гауссова импульса

$$\mathbf{E}^e(\xi = 0) = \frac{iE_0 e^{-i\varphi}}{(1 + 2i\chi)^2} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H}^e(\xi = 0) = \pm \frac{E_0 e^{-i\varphi}}{(1 + 2i\chi)^2} \times \left[1 - \frac{4\Delta^2}{1 + 2i\chi} \right] (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y). \quad (2.13)$$

Из выражений (2.10) и (2.11) видно, что амплитуда электрического и магнитного полей пропорциональна $\exp(-\xi^2)$, что оправдывает идентификацию параметра R как радиуса фокального пятна.

Используя формулы (2.1), (2.2) и (2.7), можно вычислить инварианты электромагнитного поля \mathcal{F} и \mathcal{G} . Мы приведем здесь выражения только для инвариантов в e -поляризованном импульсе. В низшем порядке по Δ они имеют вид

$$\mathcal{F}^e = \frac{1}{2} \{ (\text{Re } \mathbf{E}^e)^2 - (\text{Re } \mathbf{H}^e)^2 \} = 2\Delta^2 E_0^2 g^2 \left(\frac{\varphi}{\omega\tau} \right) \times \left\{ \text{Im} \left[F_1 \frac{\partial F_1^*}{\partial \chi} + F_2 \frac{\partial F_2^*}{\partial \chi} \right] - \left| \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right|^2 + \text{Re} \left[e^{-2i(\varphi \mp \phi)} \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right)^2 + i \frac{\partial}{\partial \chi} (F_1 F_2) \right) \right] \right\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{G}^e = \text{Re } \mathbf{E}^e \text{ Re } \mathbf{H}^e = \pm 2\Delta^2 E_0^2 g^2 \left(\frac{\varphi}{\omega\tau} \right) \times \\ \times \left\{ \text{Re} \left(F_2 \frac{\partial F_2^*}{\partial \xi} - F_1 \frac{\partial F_1^*}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - \text{Re} \left[\left(F_2 \frac{\partial F_1^*}{\partial \xi} - F_1 \frac{\partial F_2^*}{\partial \xi} \right) e^{-2i\varphi \pm 2i\phi} \right] \right\}.$$

При $\Delta = 0$, т. е. в случае поля плоской волны, \mathcal{F}^e и \mathcal{G}^e обращаются в нуль. Инварианты \mathcal{E} и \mathcal{H} могут быть вычислены подстановкой выражений (2.14) в формулы (1.2). В случае h -поляризованной волны инварианты могут быть получены из формул (2.14) умножением их на (-1) , а также заменой знака в выражении для \mathcal{F}^e перед $(\partial F_1 / \partial \xi)^2$.

Для получения выражений, описывающих электрическое и магнитное поля импульса, движущегося в направлении отрицательных значений z , необходимо в выражениях (2.1) и (2.2) сделать замену

$$z \rightarrow -z, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}.$$

Для функций F_1 и F_2 это означает замену на комплексно-сопряженные функции F_1^* и F_2^* . Электромагнитное поле, возникающее при суперпозиции полей двух противоположно направленных e -поляризованных импульсов, описывается выражениями

$$\mathbf{E}^e = 2iE_0 e^{-i\omega t} \left[\text{Re}(F_1 e^{i\omega z/c}) (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) - \right. \\ \left. - \text{Re}(F_2 e^{\pm 2i\phi} e^{i\omega z/c}) (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) \right], \quad (2.15)$$

$$\mathbf{H}^e = \pm 2iE_0 e^{-i\omega t} \left[\text{Im}(F_1 e^{i\omega z/c}) (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) + \right. \\ \left. + \text{Im}(F_2 e^{\pm 2i\phi} e^{i\omega z/c}) (\mathbf{e}_x \mp i\mathbf{e}_y) + \right. \\ \left. + 2\Delta \text{Re} \left(e^{\pm i\phi} e^{i\omega z/c} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (2.16)$$

Формулы для инвариантов электромагнитного поля \mathcal{F}^e и \mathcal{G}^e в случае суперпозиции двух встречных импульсов имеют следующий вид:

$$\mathcal{F}^e = 2E_0^2 g^2 \left(\frac{\varphi}{\omega\tau} \right) \times \\ \times \left\{ \text{Re} \left[(F_1 + F_2 e^{\pm 2i\phi})^2 e^{-2i\omega z/c} \right] + \right. \\ \left. + \text{Re} \left[F_1 F_2 e^{\pm 2i\phi} e^{-2i\omega z/c} \right] \cos 2\omega t - \right. \\ \left. - 2\Delta \text{Re} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \xi} e^{\pm i\phi} e^{-i\omega z/c} \right)^2 \right] \sin^2 \omega t \right\}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{G}^e = \pm 2E_0^2 g^2 \left(\frac{\varphi}{\omega\tau} \right) \times \\ \times \left\{ \text{Im} \left[(F_1 - F_2 e^{\pm 2i\phi})^2 e^{-2i\omega z/c} \right] + \right. \\ \left. + 2 \text{Im} \left[F_1 F_2 e^{\mp 2i\phi} \cos 2\omega t \right] \right\}.$$

В отличие от случая одиночного фокусированного импульса, инварианты \mathcal{F} и \mathcal{G} уже не пропорциональны параметру фокусировки и не стремятся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$.

3. КАЧЕСТВЕННОЕ ОБСУЖДЕНИЕ

Используя описанную выше модель, можно оценить число пар, рождающихся под действием фокусированного лазерного импульса. Поскольку пары преимущественно образуются в фокальной области, положим пространственный объем импульса равным $\pi R^2 c\tau$ и оценим число пар как

$$N \approx \frac{(c\tau)^2 R^2}{4\pi l_C^4} \bar{\epsilon} \bar{\eta} \text{cth} \frac{\pi \bar{\eta}}{\bar{\epsilon}} \exp \left(-\frac{\pi}{\bar{\epsilon}} \right), \quad (3.1)$$

где $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\eta}$ — усредненные по времени безразмерные инварианты поля ϵ и η в фокусе (ср. с (1.1)).

С помощью равенств (2.14) и (2.8) легко находим, что в фокусе ($\xi = \chi = 0$) инварианты \mathcal{F} и \mathcal{G} в низшем по Δ приближении равны

$$\mathcal{F}^e(0, 0) = 8\Delta^2 E_0^2 g^2 \left(\frac{t}{\tau} \right), \quad \mathcal{G}^e(0, 0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{F}^h(0, 0) = -8\Delta^2 E_0^2 g^2 \left(\frac{t}{\tau} \right), \quad \mathcal{G}^h(0, 0) = 0.$$

Из формул (1.2) следует, что в фокусе e -поляризованного импульса

$$\epsilon = 4\Delta g \left(\frac{t}{\tau} \right) \frac{E_0}{E_S}, \quad \eta = 0, \quad (3.3)$$

в то время как для h -поляризованного импульса

$$\epsilon = 0, \quad \eta = 4\Delta g \left(\frac{t}{\tau} \right) \frac{E_0}{E_S}. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.1) следует, что число пар, рожденных одиночным e -поляризованным импульсом, равно

$$N_e = \frac{(c\tau)^2 R^2}{4\pi^2 l_C^4} \bar{\epsilon}^2 \exp\left(-\frac{\pi}{\bar{\epsilon}}\right), \quad (3.5)$$

в то время как

$$N_h = 0.$$

Ниже будет показано, что h -поляризованный импульс также рождает пары, однако их число на несколько порядков меньше, чем в случае e -поляризованного импульса той же интенсивности, см. табл. 1.

С практической точки зрения удобно выражать число рожденных пар непосредственно через интенсивность I лазерного импульса. Для этого найдем формулу, связывающую $\bar{\epsilon}$ с I . С этой целью усредним вектор Пойнтинга по быстрым осцилляциям электромагнитного поля

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 g^2 \left(\frac{\varphi}{\omega\tau}\right) \{|F_1|^2 + |F_2|^2\} \mathbf{e}_z. \quad (3.6)$$

Используя выражения (2.8), получим для потока энергии через фокальную плоскость

$$\Phi = \int \langle S_z \rangle|_{z=0} dx dy = \frac{c}{8} (gRE_0)^2. \quad (3.7)$$

Полная энергия, которую несет электромагнитный импульс, равна

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \Phi = G \frac{c}{4} E_0^2 R^2 \tau, \quad (3.8)$$

$$G = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du g^2(u),$$

где τ — длительность импульса. По определению интенсивность I равна

$$I = \frac{W}{\pi R^2 \tau} = G \frac{c}{4\pi} E_0^2. \quad (3.9)$$

Множитель G в правой части последнего равенства возникает в силу того, что среднее значение электрического поля в импульсе меньше, чем его пиковое значение E_0 . В дальнейшем используется гауссова временная огибающая

$$g|_{z=0} = \exp(-4t^2/\tau^2),$$

для которой

$$G = (\pi/32)^{1/2} \approx 0.31.$$

Согласно выражениям (3.3) и (3.9), для усредненного по времени инварианта $\bar{\epsilon}$ получим

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon dt = \frac{2\sqrt{\pi}\Delta E_0}{E_S} =$$

$$= 4(2\pi)^{1/4} \left(\frac{I}{I_S}\right)^{1/2} \Delta. \quad (3.10)$$

Теперь можно оценить пороговые значения пикового поля E_{th} и интенсивности I_{th} лазерного импульса, при которых рождается только одна пара. Для порогового значения приведенного инварианта $\bar{\epsilon}_{th}$ из выражения (3.5) получаем оценку

$$\bar{\epsilon}_{th} \approx \frac{\pi}{\Lambda} \left(1 - \frac{2}{\Lambda} \ln \frac{\pi}{\Lambda}\right), \quad (3.11)$$

$$\Lambda = 2 \ln \left(\frac{c\tau\lambda}{4\pi^2 l_C^2 \Delta}\right) \gg 1.$$

Определяя E_{th} и I_{th} из формулы (3.10), для лазерного импульса с $\lambda = 1$ мкм и $\tau = 10^{-14}$ с при $\Delta = 0.1$ получаем $\Lambda = 58.5$, $\bar{\epsilon}_{th} = 5.90 \cdot 10^{-2}$, $E_{th} = 0.167E_S$ и $I_{th} = 4.04 \cdot 10^{27}$ Вт/см², а при $\Delta = 0.05$ получаем $\Lambda = 59.9$, $\bar{\epsilon}_{th} = 5.76 \cdot 10^{-2}$, $E_{th} = 0.325E_S$ и $I_{th} = 1.54 \cdot 10^{28}$ Вт/см², что согласуется с точным расчетом (ср. с табл. 1).

Таким образом, эффект рождения электрон-позитронных пар становится наблюдаемым при значениях интенсивности, существенно меньших I_S . При этом не только среднее электрическое поле в импульсе, но и его пиковое значение оказываются меньше E_S . Это объясняется очень большим значением предэкспоненциального множителя в формуле (3.5), т.е. большим значением отношения характерных размеров ($R, c\tau$) той части 4-объема лазерного импульса, в которой эффективно рождаются пары, к комптоновской длине l_C . Величина этого фактора настолько велика, что он компенсирует малость швингеровской экспоненты при $E_0 < E_S$. Однако при $E_0 > E_{th}$ число рожденных пар начинает расти с ростом интенсивности очень резко. Действительно, перепишем формулу (3.5) в виде

$$N_e = \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_{th}}\right)^2 \exp\left[\frac{\pi}{\bar{\epsilon}_{th}} \left(1 - \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\bar{\epsilon}}\right)\right] =$$

$$= \frac{I}{I_{th}} \exp\left\{\frac{\pi}{\bar{\epsilon}_{th}} \left[1 - \left(\frac{I_{th}}{I}\right)^{1/2}\right]\right\}. \quad (3.12)$$

При $\lambda = 1$ мкм и $\tau = 10^{-14}$ с отношение $\pi/\bar{\epsilon}_{th} \approx 50$ в достаточно широком интервале Δ . С увеличением интенсивности всего на 25 % по сравнению с I_{th} , что,

Таблица 1. Среднее число пар, рожденных одиночным импульсом из вакуума

$I \cdot 10^{-28}$, Вт/см ²	$\frac{E_0}{E_S}$	N_e		N_h	
		$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.05$	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.05$
0.3	0.138	2.84(-5)	—	3.95(-15)	—
0.4	0.160	9.31(-2)	—	1.48(-10)	—
0.5	0.179	24.3	—	2.04(-7)	—
0.6	0.196	1.52(3)	8.77(-16)	4.38(-5)	—
0.7	0.211	3.84(4)	4.28(-13)	2.90(-3)	—
0.8	0.226	5.26(5)	6.38(-11)	8.65(-2)	—
0.9	0.240	4.65(6)	4.07(-9)	1.46	—
1.0	0.252	2.96(7)	1.38(-7)	16.0	—
1.5	0.309	1.70(10)	2.29(-2)	5.43(4)	8.37(-11)
2.0	0.357	7.99(11)	31.7	8.55(6)	8.67(-7)
2.5	0.399	1.15(13)	4.59(3)	2.65(8)	4.98(-4)
3.0	0.438	8.39(13)	1.85(5)	3.43(9)	5.56(-2)
4.0	0.505	1.43(15)	3.49(7)	1.31(11)	43.7
5.0	0.565	1.03(16)	1.30(9)	1.64(12)	4.31(3)

Примечание. Число пар $N_{e,h}$ для различных значений интенсивности лазерного излучения и параметра Δ соответственно для e - и h -поляризованных волн, $\lambda = 1$ мкм, $\tau = 10^{-14}$ с. Использовано обозначение $a \cdot 10^b = a(b)$. Прочерки означают, что $N < 10^{-15}$.

согласно (3.10), соответствует увеличению $\bar{\epsilon}$ приблизительно на 10% по сравнению с $\bar{\epsilon}_{th}$, число пар увеличивается на два порядка, а при $I = 2I_{th}$ — уже на семь порядков. Столь резкий рост числа рожденных пар с ростом интенсивности импульса означает, что при некоторой интенсивности возникает необходимость учитывать обратное влияние рожденных частиц на электромагнитное поле импульса, которое тогда уже нельзя считать заданным внешним полем.

Найдем условие применимости приближения заданного внешнего поля. Для этого определим долю δ энергии лазерного импульса, идущую на образование электрон-позитронных пар. Поскольку при $E_0 \lesssim E_S$ частицы рождаются в состояниях с малыми импульсами (см., например, [9, 10, 22]), их полная энергия равна

$$W_p \approx 2mc^2 N_e.$$

Согласно формулам (3.5), (3.8) и (3.10), получаем

$$\delta = \frac{W_p}{W} = \frac{32\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \alpha \Delta^2 \frac{\tau}{\tau_C} \exp\left(-\frac{\pi}{\bar{\epsilon}}\right), \quad (3.13)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad \tau_C = \frac{l_C}{c}.$$

Поле лазерного импульса можно считать заданным внешним полем, если $\delta \ll 1$. Для амплитудного значения поля это условие можно записать в виде

$$E_0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2\Delta} \left[\ln\left(8\alpha\Delta^2 \frac{\tau}{\tau_C}\right) \right]^{-1} E_S. \quad (3.14)$$

При $\tau = 10^{-14}$ с и $\Delta = 0.1$ множитель при E_S в правой части неравенства (3.14) приближенно равен единице. Это означает, что невозможно создать e -поляризованный импульс с такими параметрами и пиковой напряженностью поля, равной E_S . Причина этого состоит в том, что при $E_0 \approx E_S$ энергия

рожденных пар сравнивается с энергией импульса W , вследствие чего происходит «истощение» лазерного импульса. Разумеется при таких интенсивностях формула (1.1), а также следующие из нее оценки перестают быть справедливыми.

Отметим, что предельно допустимое поле, при котором наш метод расчета остается справедливым, зависит от δ логарифмически. Если считать δ меньше 10^{-3} , то при $\tau = 10^{-14}$ с и $\Delta = 0.1$ из выражения (3.13) получаем ограничение $E_0 < 0.6 E_S$. С уменьшением параметра фокусировки Δ ограничение на E_0 смягчается и в пределе $\Delta \rightarrow 0$ пропадает в полном соответствии с тем, что плоская волна вообще не рождает пар.

Случай встречных импульсов отличается от случая одиночного импульса тем, что эффективное поле, входящее в выражение (3.5) для числа родившихся пар,

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\pi} \frac{E_0}{E_S}, \quad (3.15)$$

не зависит от Δ . Пороговое значение эффективного поля по-прежнему дается формулой (3.11). Однако с учетом (3.15) для порогового значения пиковой напряженности электрического поля при $\tau = 10^{-14}$ с и $\Delta = 0.1$ имеем $E_{th} = 0.033 E_S$. Как и следовало ожидать, в случае сталкивающихся импульсов пары начинают рождаться при меньших напряженностях, чем в случае одиночного импульса. Что касается ограничения на максимально достижимую пиковую напряженность поля, то в случае сталкивающихся импульсов оно выглядит следующим образом:

$$E_0 < \sqrt{\pi} \left[\ln \left(\alpha \Delta^2 \frac{\tau}{\tau_C} \right) \right]^{-1} E_S. \quad (3.16)$$

Соответственно при тех же параметрах импульса максимально достижимое поле будет равно $0.2 E_S$.

Наконец, рассмотрим случай постоянного однородного электрического поля \mathcal{E} [1–4]. В объеме V за время T образуется

$$N_{st} = \frac{VT}{4\pi^3 l_C^3 \tau_C} \epsilon^2 \exp \left(-\frac{\pi}{\epsilon} \right) \quad (3.17)$$

электрон-позитронных пар. Энергия, ушедшая на их образование, сравнивается с энергией поля $V\mathcal{E}^2/8\pi$ при

$$\epsilon_{st} \approx \frac{\pi}{\ln(T/\tau_0)}, \quad (3.18)$$

$$\tau_0 = \alpha^{-1} \tau_C = 1.77 \cdot 10^{-19} \text{ с.}$$

При $\epsilon < \epsilon_{st}$ обратным влиянием пар на внешнее поле можно пренебречь. Зависимость ϵ_{st} от времени

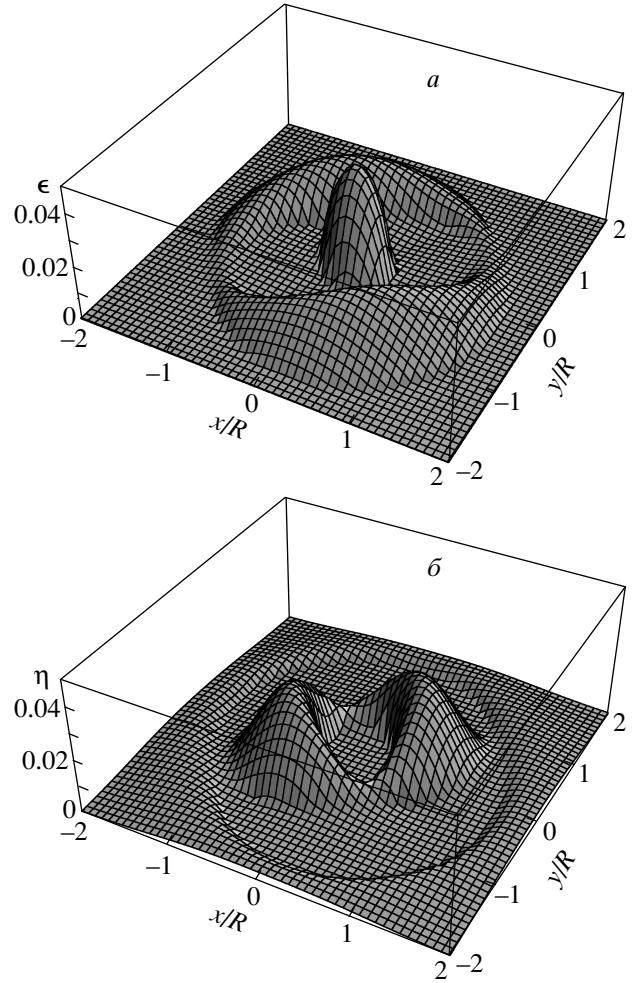


Рис. 1. Зависимости приведенных полей ϵ (а) и η (б) от пространственных координат x и y в момент времени $t = 0$. Пиковое поле $E_0 = 0.1 E_S$, $z = 0$, $\Delta = 0.1$

существования поля логарифмически слабая. Численные значения ϵ_{st} следующие: $\epsilon_{st} = 0.11, 0.20$ и 0.29 соответственно при $T = 10^{-6}, 10^{-12}$ и 10^{-14} с.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Представим результаты расчета числа пар (1.1), родившихся под действием электромагнитных полей.

Начнем со случая одиночного импульса. На рис. 1 показаны зависимости инвариантов ϵ и η от пространственных координат x и y в плоскости $z = 0$ в момент времени $t = 0$ для случая e -поляризованной волны. Электрическое поле ϵ достигает максимума в фокусе ($x = y = 0$), в то вре-

мя как максимумы поля η расположены симметрично относительно точки ($x = y = 0$) на расстоянии $\xi \approx 0.6$. С течением времени ϵ и η вращаются вокруг оси z с угловой скоростью ω . Кроме того, величина инвариантов медленно меняется за счет огибающей $g(\varphi/\omega\tau)$.

На рис. 2 представлены зависимости инвариантов ϵ и η от пространственной координаты χ . Видно, что в фокусе ϵ достигает максимума, а $\eta \approx 0$. Формы зависимостей ϵ и η от пространственных координат, а также от времени оправдывают метод оценки числа родившихся пар, использованный выше. Этот метод основывался на предположении, что пары рождаются в основном вблизи фокуса, где значения ϵ и η не зависят от времени, если не принимать во внимание медленно меняющийся множитель $g(\varphi/\omega\tau)$.

В h -поляризованной волне зависимости инвариантов ϵ и η от пространственных координат аналогичны приведенным на рис. 1, 2, если там поменять местами ϵ и η . Вид этих зависимостей объясняет, почему приближение (3.1) с учетом (3.4) дает нуль для числа пар, рожденных в h -поляризованной волне. Действительно, оценка основывалась на значениях инвариантов в фокусе, а инвариант ϵ в фокусе h -поляризованной волны равен нулю. Однако он не равен нулю на периферии фокальной плоскости, где его значения подавлены экспонентой в функциях F_1 и F_2 , см. выражение (2.8). Поэтому, хотя число пар, рожденных h -поляризованным импульсом, не равно нулю, оно на несколько порядков меньше, чем число пар, родившихся под действием e -поляризованного импульса такой же интенсивности и с таким же параметром фокусировки Δ .

На рис. 3а представлены зависимости числа пар от отношения I/I_{th} при различных значениях параметра Δ . Значение I_{th} соответствует интенсивности излучения, необходимой для рождения одной пары. Видно, что все три кривые практически совпадают. Это согласуется с формулой (3.12) и слабой логарифмической зависимостью ϵ_{th} от Δ . Согласно формуле (3.11), при изменении параметра Δ от 0.05 до 0.1 величина ϵ_{th} меняется меньше чем на 3%.

Рисунок 3б иллюстрирует зависимость числа родившихся пар от параметра Δ . С уменьшением Δ число пар быстро стремится к нулю. Это согласуется с тем, что чем меньше Δ , тем лучше фокусированный лазерный импульс может быть описан монохроматической плоской волной, которая не рождает пар вообще.

На рис. 4 показаны зависимости числа родившихся пар от интенсивности лазерного излучения для e - и h -поляризованных волн, а также их рав-

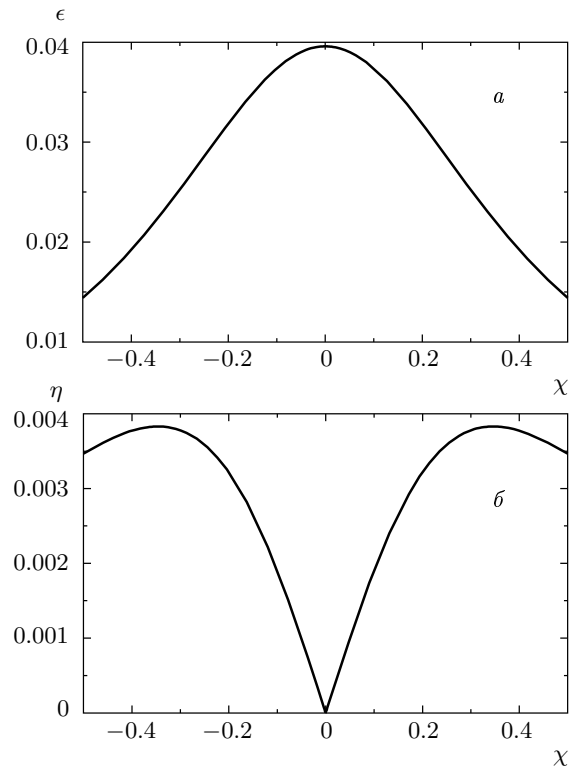


Рис. 2. Зависимости ϵ (а) и η (б) от пространственной координаты $\chi = z\Delta/R$ в момент времени $t = 0$ при тех же значениях параметров, что и на рис. 1

ной смеси. Так как в случае h -поляризованной волны пары рождаются на периферии импульса, где амплитуда поля экспоненциально подавлена, число пар на несколько порядков меньше, чем в случае e -поляризованной волны. Нижняя линия на рис. 4 отвечает равной смеси e - и h -поляризованных волн. Видно, что в этом случае число родившихся пар на несколько порядков меньше, чем даже в случае h -поляризованной волны. Это связано с существенно нелинейной зависимостью инвариантов \mathcal{E} и \mathcal{H} от напряженностей полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . Таким образом, e -поляризованная волна является оптимальной конфигурацией фокусированного лазерного импульса для наблюдения эффекта рождения пар одиночным лазерным импульсом.

Результаты численных расчетов для числа пар N , родившихся под действием e - и h -поляризованных волн при различных значениях интенсивности I и параметра фокусировки Δ , приведены в табл. 1. При этом мы ограничились такими значениями интенсивности, которые не превышают максимально допустимого значения пикового поля для

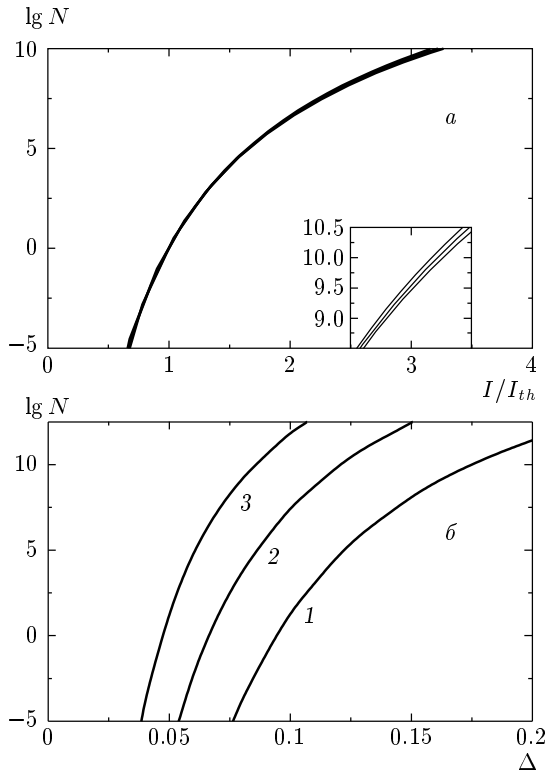


Рис. 3. *a* — Зависимость логарифма числа родившихся пар от отношения I/I_{th} для $\lambda = 1$ мкм, $\tau = 10^{-14}$ с при значениях параметра фокусировки $\Delta = 0.1, 0.075, 0.05$ (кривые сверху вниз, см. вставку). *б* — Зависимости логарифма числа родившихся пар от параметра Δ для интенсивностей: $I = 0.5 \cdot 10^{28}$ (1), $1 \cdot 10^{28}$ (2), $2 \cdot 10^{28}$ (3) Вт/см²

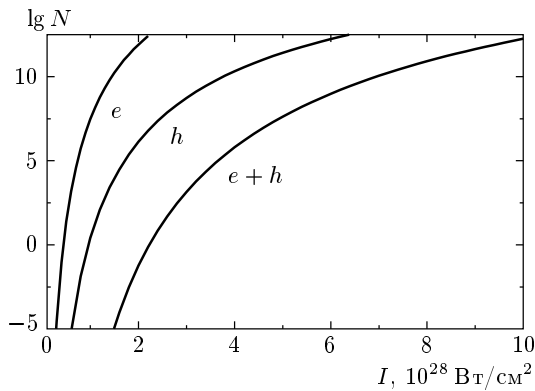


Рис. 4. Зависимости логарифма числа родившихся пар от интенсивности лазерного импульса для e -поляризованной (e) и h -поляризованной (h) волн, а также для равной смеси e - и h -поляризованных волн ($e + h$); $\lambda = 1$ мкм, $\tau = 10^{-14}$ с

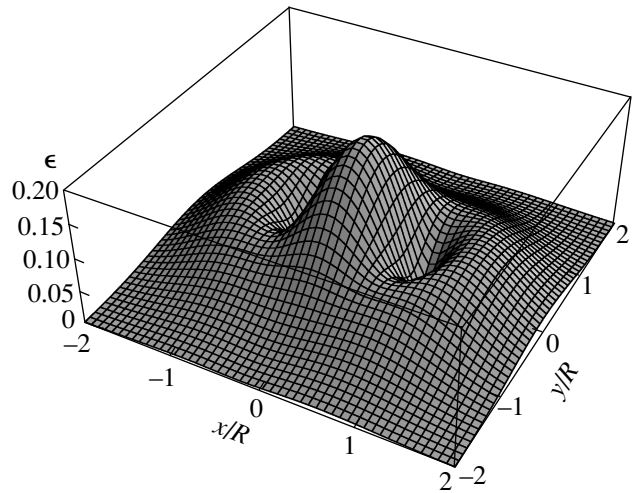


Рис. 5. Зависимость приведенного поля $\epsilon = E/E_S$ для встречных пучков от пространственных координат x и y в момент времени $t = 0$. Пиковое поле $E_0 = 0.1E_S$, $z = 0$, $\Delta = 0.1$

e -поляризованной волны при $\Delta = 0.1$ и $\delta = 10^{-3}$ (см. предыдущий раздел).

Приведем теперь результаты расчетов для случая суперпозиции двух противоположно направленных импульсов. На рис. 5 показан вид инварианта ϵ для встречных циркулярно e -поляризованных импульсов в плоскости $z = 0$ при $t = 0$.

Зависимости числа родившихся пар от интенсивности встречных импульсов при различных значениях Δ показаны на рис. 6а. Число пар слабо зависит от Δ и растет с его уменьшением. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, в отличие от случая одиночного импульса, в поле сталкивающихся импульсов инвариант $\bar{\epsilon}$ в первом приближении не зависит от параметра Δ , ср. формулы (3.10) и (3.15). Во-вторых, 4-объем, в котором эффективно происходит образование пар,

$$\pi R^2 (c\tau)^2 = \frac{\lambda^2 (c\tau)^2}{4\pi^2 \Delta^2},$$

растет с уменьшением Δ . Следовательно, растет с уменьшением Δ и число рожденных пар (см. рис. 6б).

Значения числа пар N , образующихся в поле суперпозиции двух противоположно направленных импульсов, как в случае двух e -поляризованных, так и двух h -поляризованных импульсов, при различных значениях параметра Δ представлены в табл. 2. Число пар слабо зависит от параметра Δ , а также от типа поляризации встречных импульсов, что существенно отличается от случая одиночного импульса.

Таблица 2. Среднее число пар, рожденных встречными импульсами

$I \cdot 10^{-26}$, Вт/см ²	$\frac{E_0}{E_S}$	N_e		N_h	
		$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.05$	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.05$
1.0	2.53(-2)	4.48(-12)	6.0(-9)	7.13(-13)	2.16(-9)
1.5	3.09(-2)	9.24(-6)	3.01(-3)	2.44(-6)	1.19(-3)
2.0	3.57(-2)	5.12(-2)	7.23	1.82(-2)	3.03
2.5	3.99(-2)	14.0	1.16(3)	6.01	5.01(2)
3.0	4.38(-2)	9.71(2)	5.38(4)	4.80(2)	2.38(4)
4.0	5.05(-2)	4.19(5)	1.31(7)	2.51(5)	5.97(6)
5.0	5.65(-2)	2.57(7)	5.49(8)	1.75(7)	2.54(8)
6.0	6.19(-2)	5.73(8)	9.23(9)	4.28(8)	4.30(9)
7.0	6.68(-2)	6.37(9)	8.23(10)	5.11(9)	3.86(10)
8.0	7.15(-2)	4.58(10)	4.97(11)	3.89(10)	2.34(11)
9.0	7.58(-2)	2.34(11)	2.20(12)	2.09(11)	1.04(12)
10.0	7.99(-2)	9.52(11)	7.90(12)	8.79(11)	3.74(12)

Примечание. Число пар $N_{e,h}$ для различных значений интенсивности лазерного излучения и параметра Δ соответственно для e - и h -поляризованных волн в случае двух встречных импульсов. Параметры каждого из импульсов и обозначения такие же, как и в табл. 1.

Из табл. 2 видно, что рождение пар становится детектируемым процессом при интенсивностях излучения 10^{26} Вт/см², что на два порядка меньше, чем в случае одиночного фокусированного импульса.

Поскольку в случае встречных импульсов степень фокусировки мало влияет на процесс рождения электрон-позитронных пар, можно провести сравнение полученных результатов с результатами задачи о рождении пар однородным электрическим полем [7–10].

5. РОЖДЕНИЕ ПАР ОДНОРОДНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

В работах [7–15] был рассмотрен процесс рождения e^+e^- -пар из вакуума под действием переменного однородного в пространстве электрического поля²⁾:

²⁾ Подобная конфигурация полей может быть реализована в пучности стоячей световой волны, возникающей при суперпозиции двух когерентных лазерных пучков.

$$\mathbf{E}(t') = \{\mathcal{E}_0\varphi(t), 0, 0\}, \quad \mathbf{H}(t') = 0, \quad t = \omega t', \quad (5.1)$$

где $\varphi(t)$ определяет форму импульса. Мнимая часть функции действия S , определяющая вероятность туннелирования электрона через щель $2mc^2$ между нижним («море Дирака») и верхним континуумом, набирается только на подбарьерном участке траектории, см. Приложение. Поэтому для справедливости приближения однородного поля достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$b(\mathcal{E}_0, \omega) \ll \lambda, \quad (5.2)$$

где b — ширина барьера, а $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны, что позволяет использовать формулу (1.1) и пренебречь градиентом внешнего поля. Здесь мы используем обозначения: t' — время, $t = \omega t'$ — безразмерное время, $\tau = -it$ — мнимое время в подбарьерном движении, \mathcal{E}_0 и ω — амплитуда и характерная частота электрического поля. Удобно считать, что

$$|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1,$$

т. е. $t = 0$ — момент времени, когда электрическое поле достигает максимума, а электрон и позитрон

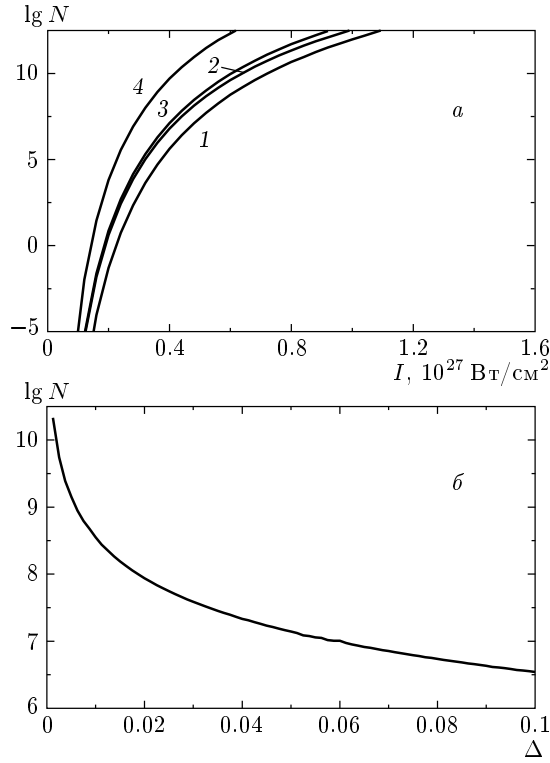


Рис. 6. *a* — Зависимости числа e^+e^- -пар от интенсивности встречных импульсов I (*a*) для $\Delta = 0.1$ (1), 0.075 (2), 0.05 (3) и 0.01 (4) и от параметра Δ (*б*) при $I = 4 \cdot 10^{26}$ Вт/см². Длительность импульса $\tau = 10^{-14}$ с

выходят из-под барьера [8, 9]. В низкочастотном поле

$$b = 2mc^2 / e\mathcal{E}_0$$

и

$$b/\lambda = \gamma/\pi \ll 1,$$

т. е. условие (5.2) выполняется. В общем случае имеем

$$b(\mathcal{E}_0, \omega) = \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}_0} L(\gamma), \quad \gamma = \frac{mc\omega}{e\mathcal{E}_0} = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{E_S}{\mathcal{E}_0}, \quad (5.3)$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \chi(\gamma u) u (1 - u^2)^{-1/2} du, \quad L(0) = 1, \quad (5.4)$$

где $\gamma = \omega/\omega_t$ — параметр адиабатичности³⁾, аналогичный известному параметру Келдыша в теории многофотонной ионизации атомов [29], а

³⁾ В литературе часто используется обратная величина $1/\gamma$, обозначаемая как ξ , η или a .

$\omega_t = e\mathcal{E}_0/mc$ — характерная частота туннелирования электрона в постоянном электрическом поле. Заметим, что $\hbar\omega \ll mc^2$, и если $\mathcal{E}_0 \ll E_S$, то γ может, вообще говоря, принимать любые значения (однако для инфракрасных и оптических лазеров параметры таковы, что в области, отвечающей возможности наблюдения эффекта Швингера, всегда $\gamma \ll 1$ [15]). Функция $L(\gamma)$ показывает, как сокращается барьер с ростом γ . При этом проникаемость барьера, т. е. вероятность туннелирования, резко возрастает (при фиксированной амплитуде \mathcal{E}_0).

В выражение (5.4) входит функция $\chi(u)$, которая определяется формой импульса $\varphi(t)$. Рецепт вычисления $\chi(u)$ указан в работе [15], см. также Приложение. В простых моделях такой расчет проводится аналитически. Для любой формы импульса, в том числе взятой непосредственно из экспериментальных данных, функция $\chi(u)$ может быть найдена численно, после чего задача сводится к квадратурам.

Обсудим условие применимости приближения однородного поля. Строго говоря, поле электромагнитного импульса определяется функцией $\varphi(t'/T - x/\lambda)$, где T — характерная длительность импульса, а $\lambda = cT$ (для периодического поля $T = 2\pi/\omega$). Если нас интересует полное число образовавшихся пар, а не их импульсный спектр, то достаточно, чтобы поле было однородным на подбарьерном участке траектории. Это приводит к условию

$$\frac{b}{\lambda} = \frac{1}{\pi} \gamma L(\gamma) \ll 1, \quad (5.5)$$

при выполнении которого получаем

$$\varphi\left(\frac{t'}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \approx \varphi\left(\frac{t'}{T}\right),$$

что соответствует приближению (5.1). При этом могут встретиться разные случаи. Так, для монохроматического поля $\varphi(t) = \cos t$ можно найти в явном виде экстремальную⁴⁾ траекторию, связывающую нижний и верхний континуумы:

$$x(\tau) = \frac{2c}{\omega} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma^2 - \text{sh}^2 \tau}{1 + \gamma^2}}, \quad (5.6)$$

$$0 < \tau < \tau_0 = \text{arcsch} \gamma.$$

При этом $x(\tau_0) = 0$, а при $\tau = 0$ электрон с нулевой

⁴⁾ То есть подбарьерную траекторию, минимизирующую $\text{Im} S$ и определяющую наиболее вероятный путь туннелирования частицы.

скоростью выходит из-под барьера, ширина которого равна

$$b = x(0) = \frac{2c}{\omega} \operatorname{arctg} \gamma = \frac{2mc^2}{e\mathcal{E}_0} \frac{\operatorname{arctg} \gamma}{\gamma}. \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что ширина барьера уменьшается с ростом γ , а его проницаемость растет (динамический эффект Швингера [15]) и

$$b/\lambda = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \gamma = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \gamma - \frac{1}{3\pi} \gamma^3, & \gamma \ll 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\gamma}, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Для других примеров $b/\lambda \rightarrow 0$ не только при малых, но и при больших γ , см. формулы (А.6) и (А.9) в Приложении.

Сравним результаты вычисления числа рождаемых пар в рамках различных моделей внешнего поля. Предположим, что магнитное поле равно нулю в области фокусировки. Тогда, согласно (1.1),

$$N = \frac{1}{4\pi^3 l_C^3 \tau_C} \int_V dV \int_0^\tau d\tau \epsilon^2 \exp \left[-\frac{\pi}{\epsilon} \right]. \quad (5.9)$$

На рис. 7а показаны зависимости числа пар от интенсивности, полученные по формулам (1.1) и (5.9), а также для случая однородного электрического поля [7–15] (см. ниже формулу (5.10)). При этом предполагалось, что электрическое поле во всем объеме фокусировки имеет напряженность равную $2E_0 \equiv \mathcal{E}_0$, что соответствует пиковой напряженности поля, возникающего при суперпозиции двух встречных пучков. Приближение однородного электрического поля дает верхнюю границу числа e^+e^- -пар N . Учет пространственной неоднородности, т.е. структуры поля в области фокуса, ведет к уменьшению N , а магнитное поле приводит к его дальнейшему уменьшению, поскольку оно закручивает подбарьерную траекторию и приводит к увеличению мнимой части функции действия. Таким образом, при рассмотрении эффекта рождения пар под действием электромагнитного поля, возникающего при суперпозиции двух противоположно направленных лазерных импульсов, важно учитывать как пространственную структуру поля, так и влияние магнитного поля.

Для лазеров оптического и инфракрасного диапазонов $\hbar\omega/mc^2 \leq 10^{-5}$, поэтому процесс рождения электрон-позитронных пар может происходить

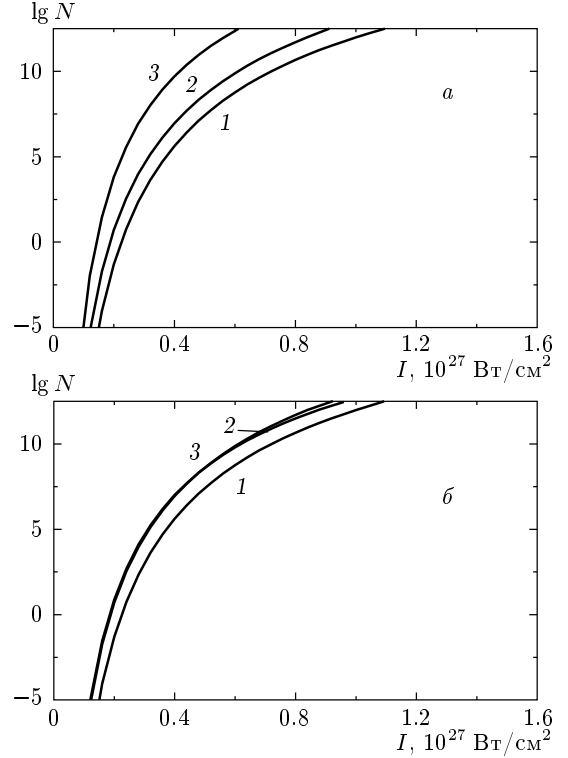


Рис. 7. Зависимости числа пар как функции I для $\Delta = 0.1$. а — Кривые 1, 2 и 3 соответствуют формулам (1.1), (5.9) и приближению однородного поля. б — То же, что и в случае а, но кривая 3 модифицирована множителем $(\epsilon/\pi)^{3/2}$, что соответствует учету гауссова профиля импульса

лишь в адиабатической области, $\gamma \ll 1$. В этом случае число образовавшихся пар равно

$$N = w\tau V_{eff},$$

$$w = \frac{\epsilon_0^{5/2}}{2^{3/2} \pi^4 l_C^3 \tau_C} \exp \left\{ -\frac{\pi}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{8} \gamma^2 \right) \right\}, \quad (5.10)$$

$$\epsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{E_S},$$

где V_{eff} — эффективный пространственный объем, в котором образуются пары. Ранее принималось, что $V_{eff} \approx \lambda^3$ (дифракционный предел для фокусировки лазерного излучения). При этом, однако, не было замечено, что в случае $\epsilon \ll 1$ из-за резкой зависимости полной вероятности w от напряженности поля эффективный объем существенно уменьшается. Действительно, вблизи максимума электрического поля

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{L_\perp^2} - \frac{z^2}{L_\parallel^2} \right),$$

где $L_{\perp}, L_{\parallel} \sim \lambda$, поэтому

$$\exp\left(-\frac{\pi}{\epsilon_0}\right) \approx \exp\left\{-\frac{\pi}{\epsilon}\left(1 + \frac{\rho^2 + z^2}{\lambda^2}\right)\right\}, \quad (5.11)$$

$$V_{eff} \sim \lambda^3 \left(\frac{\epsilon_0}{\pi}\right)^{3/2} \ll \lambda^3.$$

Окончательно получаем

$$N \approx \frac{1}{8\pi^4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_C}\right)^3 \frac{\tau}{\tau_C} \epsilon_0^4 \exp\left(-\frac{\pi}{\epsilon_0}\right). \quad (5.12)$$

Кривая 3 на рис. 7б, построенная по этой формуле, практически совпадает с результатами численного расчета, в котором пренебрегалось магнитным полем волны (кривая 2, построенная по формуле (5.9)). Это указывает на то, что приближение однородного электрического поля имеет хорошую точность, но пренебрегать влиянием магнитного поля нельзя (ср. кривые 1 и 2 на рис. 7).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Эффект рождения пар лазерным импульсом в вакууме существенно зависит от геометрии электромагнитного поля в фокусе, для описания которого в настоящей статье мы использовали модель, развитую в работе [23]. Это модель основана на точном решении уравнений Максвелла и отражает некоторые свойства лазерного импульса, общие для любой фокусированной волны в вакууме. Поэтому многие наши результаты остаются справедливыми для фокусированного лазерного импульса произвольной структуры. Выделим те из них, которые представляются нам наиболее важными. Переход к другой модели поля может несколько изменить количественные показатели, но не качественную картину явления.

Вероятность рождения пар одиночным лазерным импульсом оказывается существенно различной для различных типов поляризации. Это объясняется разным знаком инварианта \mathcal{F} в фокальной области для e - и h -поляризованных волн, см. выражения (3.2). В нашей модели пары наиболее эффективно рождаются e -поляризованным импульсом. При этом для одиночного импульса число пар существенно зависит от параметра фокусировки Δ , резко уменьшаясь при $\Delta \rightarrow 0$, а в случае двух сталкивающихся импульсов такая зависимость не наблюдается.

Процесс рождения пар становится заметным при интенсивностях, существенно меньших

$$I_S = (c/4\pi)E_S^2,$$

что объясняется очень большой величиной характерного объема лазерного импульса, в котором эффективно рождаются пары, по сравнению с комптоновским объемом l_C^3 . В использованной модели одиночный циркулярно e -поляризованный импульс с длиной волны $\lambda = 1$ мкм, длительностью $\tau = 10$ фмс и параметром фокусировки $\Delta = 0.1$ рождает одну пару при интенсивности, на два порядка меньшей I_S .

Вследствие экспоненциальной зависимости вероятности рождения пар от пиковой напряженности E_0 электрического поля в импульсе число пар очень резко растет с ее увеличением, что приводит к существованию естественного физического предела для максимально достижимых значений интенсивности фокусированного лазерного импульса. В рамках использованной модели для импульса с указанными выше параметрами предельная интенсивность составляет величину порядка $0.3 I_S$.

Эффективность процесса в поле двух сталкивающихся импульсов значительно выше, чем в поле одиночного импульса. В рассматриваемой модели, чтобы обеспечить одно и тоже число рожденных пар, интенсивность одиночного импульса в самом благоприятном случае должна быть на один–два порядка больше, чем для двух встречных. Это приводит, в частности, к тому, что в случае сталкивающихся импульсов обратное влияние эффекта образования пар на порождающее их поле необходимо учитывать при интенсивностях, на один–два порядка меньших предельно достижимой.

Отметим, что мы не принимали во внимание так называемый пондеромоторный эффект (см., например, [23]), хотя рассматривали эффект рождения пар жестко фокусированным импульсом большой интенсивности, для которого величина пондеромоторного потенциала велика по сравнению с кинетической энергией рождающихся частиц. Это оправдывается тем, что характерное время процесса рождения $t_C = l_C/c$ очень мало по сравнению с периодом волны T . В силу этого обстоятельства пондеромоторное ускорение можно рассматривать как вторую стадию процесса. Оно определяет угловое и энергетическое распределения рожденных частиц, но не влияет на полное число рожденных частиц. Добавим, что неравенство

$$t_C = l_C/c \ll T$$

объясняет также, почему рожденные частицы характеризуются «голой» m , а не эффективной m_* массой (см., например, [22]).

Авторы выражают благодарность Ю. А. Си-
монову за обсуждение результатов работы и по-
лезные замечания. Работа выполнена при финан-
совой поддержке РФФИ (гранты №№ 03-02-17348,
04-02-17157), гранта Президента РФ по поддержке
научных школ НШ-5898.2003.2, Федеральной про-
граммы Российского министерства промышленно-
сти науки и технологий (грант № 40.052.1.1.1112) и
Министерства образования (грант № 1618).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним вывод уравнений (5.3) и (5.4) и рассмот-
рим несколько примеров.

Вычисление вероятности рождения электрон-по-
зитронных пар можно выполнить с помощью метода
мнимого времени [8, 30], если внешнее поле является
плавным и удовлетворяет условиям применимости
квазиклассического приближения. Для этого необ-
ходимо, прежде всего, найти экстремальную «клас-
сическую» траекторию, минимизирующую мнимую
часть функции действия, $\text{Im } S$. В случае поля (5.1)
с линейной поляризацией очевидно, что такая тра-
ектория одномерна и направлена вдоль поля \mathbf{E} . Она
определяется из классических уравнений движения,
но с мнимым «временем» $\tau = -i\omega t'$:

$$\frac{dx}{dt'} = p(p^2 + m^2)^{-1/2},$$

$$p(\tau) = i \frac{F}{\omega} \int_0^\tau \varphi(it) dt, \quad 0 < \tau < \tau_0. \quad (\text{A.1})$$

Значение τ_0 определяется из условия $p(\tau_0) = im$,
означающего, что τ_0 является особенностью $S(t)$
в комплексной плоскости. Это дает уравнение для
определения τ_0 :

$$h(\tau_0) = \gamma, \quad \text{где } h(\tau) = \int_0^\tau \varphi(it) dt. \quad (\text{A.2})$$

Выбирая константы интегрирования так, что
 $x(\tau_0) = 0$, находим ширину барьера

$$b = x(0) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\tau_0} \frac{h(\tau)}{\sqrt{\gamma^2 - h^2(\tau)}} d\tau, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (\text{A.3})$$

Переходя к переменной интегрирования

$$u = \gamma^{-1}h(\tau), \quad 0 < u < 1,$$

получаем формулы (5.3) и (5.4).

Входящая в них функция $\chi(u)$ определяется фор-
мой полевого импульса $\varphi(t)$ и может быть вычисле-
на следующим способом:

$$\chi(u) = \frac{d}{du} \{h^{-1}(u)\} = \frac{1}{\varphi(ih^{-1}(u))}, \quad (\text{A.4})$$

где $h^{-1}(u)$ означает функцию, обратную к $h(u)$.

Монохроматическому лазерному свету отвечает
 $\varphi(t) = \cos t$. В этом случае

$$h(\tau) = \text{sh } \tau, \quad \chi(u) = (1 + u^2)^{-1/2}$$

и

$$L(\gamma) = \frac{\text{arctg } \gamma}{\gamma} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}\gamma^2 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \frac{\pi}{2\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} + \dots, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Для солитоноподобного импульса

$$\varphi(t) = 1/\text{ch}^2 t$$

имеем

$$h(\tau) = \text{tg } \tau, \quad \chi(u) = (1 + u^2)^{-1},$$

и

$$L(\gamma) = \frac{\text{arcsch } \gamma}{\gamma\sqrt{1 + \gamma^2}} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{2}{3}\gamma^2 + \dots, & \gamma \ll 1, \\ \frac{\ln 2\gamma}{\gamma^2} \left[1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \dots \right], & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Этот пример особенно прост в аналитическом отно-
шении. Кроме того, он допускает сравнение с точ-
ным решением, полученным в работе Нарожного и
Никишова [10]. Такое сравнение [8, 9] демонстриру-
ет высокую точность метода мнимого времени, ре-
зультаты которого отличаются от соответствующего
точного выражения на экспоненциально малые чле-
ны, если $\gamma \ll \pi K_0$ или $\omega \ll \sqrt{\epsilon_0} mc^2/\hbar$. Поскольку
 $\epsilon \sim 0.01$, а $mc^2/\hbar \sim 10^{21} \text{ с}^{-1}$, это условие выполняет-
ся с запасом.

Наконец, полагая

$$\chi(u) = (1 + u^2)^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad (\text{A.7})$$

находим

$$L(\gamma) = {}_2F_1(\beta, 1; 3/2; -\gamma^2). \quad (\text{A.8})$$

В адиабатической области

$$L(\gamma) = 1 - \frac{2}{3}\beta\gamma^2 + \frac{4}{15}(\beta + \beta^2)\gamma^4 + \dots, \quad \gamma \ll 1, \quad (\text{A.9})$$

а в случае $\gamma \gg 1$

$$L(\gamma) = \frac{1}{2(\beta - 1)\gamma^2} + O(\gamma^{-2\beta}, \gamma^{-4}), \quad \beta > 1. \quad (\text{A.10})$$

Форма импульса, отвечающего (A.7), характеризуется разложениями

$$\varphi(t) = 1 - \beta t^2 + \frac{1}{6}(7\beta^2 - 3\beta)t^4 + \dots, \quad t \rightarrow 0, \quad (\text{A.11})$$

и на бесконечности

$$\varphi(t) \approx \begin{cases} [2(\beta - 1)|t|]^{-\beta/(\beta-1)}, & \beta > 1, \\ 4 \exp(-2|t|), & \beta = 1. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Заметим, что значения показателя $\beta = 1/2, 1,$ и $3/2$ соответствуют полям $\varphi(t) = \cos t, 1/\text{ch}^2 t$ и $(1 + t^2)^{-3/2}$, которые рассматривались в работах [7–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931); **73**, 547 (1931).
2. А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. II, ГИТТЛ, Москва (1956).
3. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
4. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
5. В. С. Ваняшин, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **48**, 565 (1965).
6. Ф. В. Бункин, И. И. Тугов, ДАН СССР **187**, 541 (1969).
7. E. Brezin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).
8. В. С. Попов, Письма ЖЭТФ **13**, 185 (1971); ЖЭТФ **34**, 709 (1972).
9. В. С. Попов, Письма ЖЭТФ **18**, 255 (1973); ЯФ **19**, 584 (1974).
10. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЖЭТФ **38**, 427 (1974).
11. В. М. Мостепаненко, В. М. Фролов, ЯФ **19**, 451 (1974).
12. M. S. Marinov and V. S. Popov, Fortschr. Phys. **25**, 373 (1977).
13. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Энергоатомиздат, Москва (1988).
14. A. Ringwald, Phys. Lett. B **510**, 107 (2001); E-print archives hep-ph/01112254, hep-ph/0304139.
15. В. С. Попов, Письма в ЖЭТФ **74**, 133 (2001); Phys. Lett. A **298**, 83 (2002); ЖЭТФ **121**, 1235 (2002).
16. C. Bula, C. Bamber, D. L. Burke et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3116 (1996).
17. D. L. Burke, S. C. Berridge, C. Bula et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 1626 (1997).
18. Т. Tajima and G. Mourou, Phys. Rev. ST-AB **5**, 031301 (2002).
19. S. V. Bulanov, Т. Zh. Esirkepov, and Т. Tajima, Phys. Rev. Lett. **91**, 085001 (2003).
20. D. M. Volkov, Z. Phys. **94**, 250 (1935).
21. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
22. В. И. Ритус, А. И. Никишов, *Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле*, Труды ФИАН **111**, (1979).
23. Н. Б. Нарожный, М. С. Фофанов, ЖЭТФ **117**, 867 (2000); N. B. Narozhny and M. S. Fofanov, Phys. Lett. A **295**, 87 (2002).
24. N. B. Narozhny and M. S. Fofanov, Phys. Lett. A **295**, 87 (2002).
25. G. Malka, E. Lefebvre, and J. L. Miquel, Phys. Rev. Lett. **78**, 3314 (1997).
26. N. B. Narozhny, S. S. Bulanov, V. D. Mur, and V. S. Popov, Phys. Lett. A **330**, 1 (2004).
27. Н. Б. Нарожный, С. С. Буланов, В. Д. Мур, В. С. Попов, Письма ЖЭТФ **80**, 434 (2004).
28. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ТМФ **26**, 16 (1976).
29. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
30. В. С. Попов, Препринт ИТЭФ 13-04, Москва (2004); ЯФ **68**, 717 (2005).