

О СТРУКТУРЕ ЗАРЯЖЕННОГО СЛОЯ НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ С ЗАРЯЖЕННЫМ ТЕЛОМ

Б. А. Альтеркоп

*Тель-Авивский университет
Тель-Авив, Израиль*

*И. Д. Дубинова, А. Е. Дубинов**

*Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Российского Федерального ядерного центра
607188, Саров, Россия*

Поступила в редакцию 26 апреля 2005 г.

На основе гидродинамической модели плазмы, учитывающей инерцию и температуры компонент плазмы, аналитически и численно решена задача о структуре заряженного слоя на границе плазмы с заряженным телом. Сформулирован критерий существования стационарного заряженного слоя на границе плазма — заряженное тело для обоих знаков заряда и с учетом инерции и температур заряженных компонент плазмы. Определены минимальные и максимальные величины электрического потенциала и концентраций заряженных компонент плазмы в слое. Показано, что профиль заряда в слое может формировать структуру двойного слоя, в котором подслой, обедненный ионами, примыкает к плазме, а подслои, обедненные электронами, — к заряженному телу. При этом монотонность электрического потенциала в слое сохраняется.

PACS: 52.40.Kh, 52.30.Ex, 52.40.Hf

1. ВВЕДЕНИЕ

Заряженное тело, погруженное в плазму, создает возмущения, которые формируют пограничный слой между телом и невозмущенной плазмой. Структура пограничного слоя между плазмой и заряженным телом имеет фундаментальное значение для физики плазмы и для различных приложений, поскольку она определяет работу зондов, антенн и взаимодействие плазмы со стенками ограничивающей ее камеры. Электрическое поле тела по-разному влияет на частицы с зарядом разного знака, что приводит к формированию заряженного слоя (sheath) у поверхности тела, экранирующего его заряд. Возмущения от электрического поля и изменения числа частиц на поверхности тела проникают также в область плазмы, примыкающую к заряженному слою, где квазинейтральность сохраняется, и называемую предслоем (presheath). Таким образом, пограничный

слой состоит из двух зон: заряженного слоя у поверхности тела и квазинейтральной области между заряженным слоем и невозмущенной плазмой.

Свойства пограничного слоя существенно зависят как от потенциала (заряда) и свойств тела, так и от параметров плазмы. В частности, свойства квазинейтральной зоны зависят от состава плазмы, плотности, температуры и скорости ее компонент, столкновений и генерации частиц, внешнего магнитного поля. Учет всех этих факторов сильно усложняет решение задачи как аналитическими, так и численными методами. Поэтому для анализа особенностей структуры пограничного слоя используются относительно простые модели. Обзоры таких моделей можно найти в [1–3]. В основе большинства моделей лежит следующее обстоятельство. Возмущения в двух зонах пограничного слоя характеризуются соответствующими пространственными масштабами: дебаевской длиной λ_D для заряженного слоя и характерной длиной L для квазинейтрального предслоя, в качестве которой может быть наименьшее из размеров плазмы, длин свободного пробега между упруги-

*E-mail: dubinov@rol.ru, dubinov@ntc.nniief.ru

ми или неупругими столкновениями, радиуса циклотронного вращения ионов и т. п. Когда масштаб L сравним с размером квазинейтральной области, то из-за условия квазинейтральности должно быть $L \gg \lambda_D$. Разновеликость масштабов позволяет разделить задачу на две части и рассматривать отдельно квазинейтральный предслой и заряженный слой [1].

При раздельном рассмотрении частей пограничного слоя возникает нетривиальная задача соединения полученных решений. Наиболее остро эта задача проявляется в асимптотическом пределе $\varepsilon = \lambda_D/L \rightarrow 0$, в рамках которого были решены многие задачи, имеющие важное научное и прикладное значение [1, 4–9]. В этом случае заряженный слой отделяется от квазинейтрального предслоя резкой границей, определяемой выполнением критерия Бома, и адекватное описание предслоя и слоя достигается изменением масштаба (L или λ_D) при переходе через границу между ними. При этом соответствующие решения не могут быть «склеены» непрерывным образом [1]. Поэтому в последнее время рассматривались модели квазинейтрального столкновительного предслоя при малых, но конечных ε [2, 3, 10, 11]. Было показано, что в этом случае граница между квазинейтральным предслоем и заряженным слоем расширяется с характерным масштабом толщины $l \sim \varepsilon^a L = \varepsilon^{a-1} \lambda_D$. Здесь $\varepsilon = \lambda_D/L \ll 1$, L — длина свободного пробега между упругими или ионизационными столкновениями и $a < 1$ (в частности, при гидродинамическом описании плазмы $a = 0.8$ [11]). Следовательно, $L > l > \lambda_D$. Поэтому в области границы учитывались одновременно как столкновения, так и нарушение квазинейтральности, что позволило плавно соединить решения для квазинейтрального предслоя и заряженного слоя. Когда предслой характеризуется возмущениями ионизационного равновесия, структура границы существенно зависит от параметра α — отношения ионизационной длины пробега к длине пробега при упругих столкновениях ион-атом [12]. В частности, на краю границы, примыкающему к заряженному слою, граничное условие в виде критерия Бома сохраняет свою силу, только если $\alpha \geq 1$. В то же время упругие и ионизационные столкновения в предслое не модифицируют критерий Бома [2] и сохраняют устойчивость ионных колебаний плазмы [13]. Таким образом, учет толщины границы позволяет плавно объединить (склеить) решения для квазинейтрального предслоя и заряженного слоя. Структура границы имеет принципиальное

значение для теории [11, 14, 15], вместе с тем отмечалось, что толщина границы достаточно мала и во многих приложениях может не учитываться [11].

Свойства заряженного слоя, представляющего собой обязательную составляющую плазменной границы вблизи электрода, зонда или иного заряженного тела, существенно зависят от потенциала тела.

Потенциал изолированного тела является обычно отрицательным по отношению к плазме, что приводит к выравниванию электронного и ионного токов и формированию положительного заряда в слое. Подобный заряженный слой формируется и при подаче внешнего отрицательного потенциала на тело или электрод, но в этом случае ионный ток эмитируется из плазмы на поверхность тела.

Положительный потенциал подается на ограничивающие плазму стенки, на ускоряющие и фокусирующие элементы электронных приборов, на аноды газоразрядных систем, на стенки плазмоведущих систем в установках вакуумно-дуговых технологий обработки материалов [16–18]. Кроме того, космический корабль приобретает положительный потенциал при инъекции электронных пучков в ионосферных и космических экспериментах [19, 20]. Плазменные слои вблизи отрицательно заряженных тел изучены весьма основательно [4–9], в то время как свойства слоя вблизи положительно заряженных тел менее известны. Ряд интересных эффектов обнаружен в экспериментах при контакте плазмы с положительно заряженным телом. Так, экспериментально установлено, что при подаче на стенки плазмоведущих систем положительного смещения увеличивается выход плазмы в 3–5 раз [16–18]. При положительном потенциале электрода, погруженного в плазму, в [21] обнаружена неустойчивость резонансов системы плазма — слой. Механизм неустойчивости связан с резонансным возбуждением электронных ленгмюровских колебаний благодаря инерции электронов и конечности их времени пролета через слой.

Условия стационарного существования заряженного слоя вблизи стенок обеих полярностей рассмотрены в [22] для нескольких специальных случаев, где, в частности, было проанализировано образование разрывов, подобных ударным волнам. В данной работе аналитически и численно решена задача о структуре заряженного слоя в двухкомпонентной плазме, граничащей с заряженным телом произвольной полярности. Учитывается инерция и температура обеих компонент и используется метод псевдопотенциала. Последнее существенно при анализе заряженного слоя в электроотрицательных разрядах [23], пылевой плазме [24], электрон-позитронной

плазме и в плазме с пучком быстрых электронов. Поскольку рассмотрение квазинейтрального предлоя выходит за рамки данной работы, задача решается в асимптотическом пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, предполагающем резкую границу между заряженным слоем и плазмой.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Воспользуемся моделью из работы [22], основанной на следующих допущениях:

- 1) плазма полностью ионизована и находится в термодинамическом равновесии;
- 2) уравнения состояния каждой компоненты $p_{\pm} = n_{\pm} k T_{\pm}$, где p — давление, n — концентрация, T — температура; k — постоянная Больцмана; индекс \pm указывает знак заряда частиц;
- 3) тело поглощает и нейтрализует заряженные частицы, а эмиссия отсутствует;
- 4) система стационарна и электрический потенциал тела φ_w может быть как положительным, так и отрицательным.

Справедливость указанных допущений обсуждалась ранее в [1, 6, 22]. В рамках этой модели запишем следующие уравнения: уравнение Пуассона для электрического потенциала $\varphi(x)$:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{q_-}{\varepsilon_0} (n_- - Z n_+), \quad (1)$$

где $Z = -q_+/q_- > 0$ и ε_0 — диэлектрическая постоянная, уравнение непрерывности

$$n_{\pm} v_{\pm} = n_{\pm 0} v_{\pm 0} \quad (2)$$

и уравнение сохранения энергии

$$\frac{m_{\pm} v_{\pm}^2}{2} + q_{\pm} \varphi + k T_{\pm} \ln \frac{n_{\pm}}{n_{\pm 0}} = \frac{m_{\pm} v_{\pm 0}^2}{2}. \quad (3)$$

Будем считать, что квазинейтральная плазма занимает область $x \leq 0$, граница между плазмой и заряженным слоем локализована в точке $x = 0$, а поверхность тела находится где-то при $x > 0$. Тогда граничные условия при $x = 0$, включая условие квазинейтральности плазмы, следующие:

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = -E_0, \quad v_{\pm}(0) = v_{\pm 0}, \quad (4)$$

$$n_{\pm}(0) = n_{\pm 0}, \quad n_{-0} = Z n_{+0}.$$

Используя вытекающее из (2) и (3) уравнение

$$\frac{dn_{\pm}}{d\varphi} = \frac{q_{\pm} n_{\pm}}{m_{\pm} v_{\pm}^2 - k T_{\pm}}, \quad (5)$$

можно легко понять, что концентрации и скорости компонент плазмы могут быть монотонными от φ до появления сингулярности, когда

$$v_{\pm}^2 = \frac{k T_{\pm}}{m_{\pm}}, \quad n_{\pm} = n_{\pm 0} \sqrt{\frac{m_{\pm} v_{\pm 0}^2}{k T_{\pm}}}, \quad (6)$$

а также

$$\varphi = \varphi_c = \frac{1}{2q_{\pm}} \left(m_{\pm} v_{\pm 0}^2 - k T_{\pm} - k T_{\pm} \ln \frac{m_{\pm} v_{\pm 0}^2}{k T_{\pm}} \right). \quad (7)$$

Из (3) следует, что электрическое поле формирует потенциальный барьер и ограничивает проникновение частиц в слой, если $q_{\pm} \varphi > 0$. К примеру, рассмотрим случай, когда

$$m_- v_{-0}^2 < k T_-, \quad m_+ v_{+0}^2 > k T_+. \quad (8)$$

Из (5) следует, что концентрация n_- растет, скорость v_- уменьшается монотонно, когда потенциал φ положителен и растет ($\varphi_w > 0, q_- \varphi < 0$), но, когда φ отрицателен и убывает ($\varphi_w < 0, q_- \varphi > 0$), монотонное уменьшение концентрации n_- и рост скорости v_- ограничены величинами (6)

$$v_-^2 = \frac{k T_-}{m_-}, \quad n_- = n_{-0} \sqrt{\frac{m_- v_{-0}^2}{k T_-}}, \quad (9)$$

которые приводят к

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_{min} = \\ = \frac{1}{2q_-} \left(m_- v_{-0}^2 - k T_- - k T_- \ln \frac{m_- v_{-0}^2}{k T_-} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подобные ограничения имеют место и для концентрации n_+ и скорости v_+ при положительном потенциале тела ($\varphi_w > 0, q_+ \varphi > 0$):

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_{max} = \\ = \frac{1}{2q_+} \left(m_+ v_{+0}^2 - k T_+ - k T_+ \ln \frac{m_+ v_{+0}^2}{k T_+} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_+^2 = \frac{k T_+}{m_+}, \quad n_+ = n_{+0} \sqrt{\frac{m_+ v_{+0}^2}{k T_+}}. \quad (12)$$

Таким образом, концентрации и скорости компонент плазмы изменяются монотонно с φ , когда φ изменяется в пределах, определяемых (10) и (11).

Из граничного условия (4) следует, что $\varphi(0) = 0$, и поэтому вблизи границы плазма — заряженное тело отрицательный (или положительный) потенциал уменьшается (увеличивается), т. е. потенциал имеет максимум (или минимум) при $x = 0$. Следовательно,

в соответствии с (1) для знака пространственного заряда слоя вблизи границы имеем

$$\text{sign}(n_- - Zn_+) = \text{sign } \varphi, \quad (13)$$

или после разложения n_{\pm} по степеням φ вблизи $x = 0$

$$\text{sign } \varphi \text{ sign} \left(\frac{dn_-}{d\varphi} - \frac{Zdn_+}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = \text{sign } \varphi. \quad (14)$$

Из (14) следует, что на границе плазма — заряженное тело следующее условие удовлетворяется для обоих знаков заряда слоя:

$$\left(\frac{dn_-}{d\varphi} - \frac{Zdn_+}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} \geq 0. \quad (15)$$

Пользуясь (4) и (5), условие (15) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{m_- v_{-0}^2 - kT_-} + \frac{Z}{m_+ v_{+0}^2 - kT_+} \leq 0. \quad (16)$$

Легко видеть, что условие (16) заведомо удовлетворяется, если обе компоненты плазмы имеют дозвуковые скорости, и также может быть удовлетворено, если только одна из компонент имеет дозвуковую скорость на границе плазма — заряженный слой. В последнем случае это условие имеет следующий вид:

$$G = \frac{Zm_- v_{-0}^2 + m_+ v_{+0}^2}{ZkT_- + kT_+} \geq 1. \quad (17)$$

Условие (17) принимает форму известного критерия Бома, если пренебречь кинетической энергией одной из компонент. Причем, в этом случае критерий Бома сохраняется даже для распределений частиц этой компоненты, отличающихся от сдвинутого на среднюю скорость максвелловского распределения, неявно предполагаемого в гидродинамической модели. Для этого помимо пренебрежения кинетической энергией компоненты необходимо ввести ее эффективную температуру в соответствии с формулой [25]

$$\frac{1}{kT_{eff}} = \frac{1}{qn} \frac{dn}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}. \quad (18)$$

В других случаях, когда плазма имеет иной состав, например, электрон-позитронная плазма, плазма с электронным пучком или отрицательными ионами, пылевая плазма, должна быть учтена кинетическая энергия каждой заряженной компоненты и введение T_{eff} теряет смысл. В таких случаях условие (17) имеет смысл гидродинамического критерия Бома.

Условия (15)–(17) необходимы для образования стационарного слоя, но они не гарантируют монотонности потенциала. Из (13) следует, что знак правой части уравнения Пуассона (1) меняется с отрицательного при $\varphi < 0$ (положительно заряженный слой) на положительный при $\varphi > 0$ (отрицательно заряженный слой). Отрицательный знак заряда слоя может измениться на положительный еще раз, если потенциал стенки равен или больше, чем φ_{max} . В этом случае n_- конечна, но $dn_+/d\varphi \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \varphi_{max}$ и здесь n_+ может превышать n_- . В итоге монотонный пространственный ход электрического потенциала здесь может нарушаться. Если знак заряда слоя изменяется, то знак плотности пространственного заряда (правая часть уравнения Пуассона (1)) проходит через нуль, где выполняется условие квазинейтральности $q_- n_- = q_+ n_+$. Воспользовавшись этим условием и (3) для вычисления электрического потенциала и концентраций в точке, где пространственный заряд равен нулю, получим

$$G \left(\frac{1}{N^2} - 1 \right) + \ln N^2 = 0, \quad (19)$$

$$\Phi = \left(\frac{1}{G} - \frac{kT_+}{m_+ v_{+0}^2} \right) \ln N, \quad (20)$$

где обозначено

$$\Phi = \frac{q_+ \varphi}{m_+ v_{+0}^2}, \quad N = \frac{n_{\pm}}{n_{\pm 0}} \quad (21)$$

и в соответствии с (17) $G \geq 1$ для обеих полярностей слоя. Условия, когда уравнения (19) и (20) не имеют действительных решений, кроме тривиального $N = 1$, определяют монотонное пространственное распределение электрического потенциала в заряженном слое. Элементарный графический анализ уравнения (19) показывает, что оно имеет два корня, один из которых $N_1 = 1$ и соответствует границе слоя, а второй — N_2 — точке внутри слоя, причем $N_2 \geq 1$ при $G \geq 1$ и $N_2 \leq 1$ при $G \leq 1$. Используя данные неравенства и (17), рассмотрим уравнение (20) для потенциала.

Пусть сначала потенциал заряженного тела φ_w положителен и, следовательно, $\varphi_w \geq \varphi \geq 0$. Поскольку $N_2 \geq 1$ и $\ln N_2 \geq 0$ при $G \geq 1$ и $\varphi \geq 0$, из (20) следует, что задача имеет решение, если $G \leq m_+ v_{+0}^2 / kT_+$ или

$$\frac{T_-}{T_+} \geq \frac{m_- v_{-0}^2}{m_+ v_{+0}^2}. \quad (22)$$

Аналогично, если потенциал заряженного тела φ_w отрицателен, $0 \geq \varphi \geq \varphi_w$, то должно выполняться

неравенство, обратное (22). В газоразрядной плазме обычно реализуется неравенство (22).

Таким образом, если в газоразрядной плазме выполняется критерий (17), т.е. $G \geq 1$, то при положительном потенциале заряженного тела знак заряда в слое может измениться с отрицательного на положительный, что означает формирование двойного слоя, в котором подслои, обедненные ионами, прилегают к плазме, а подслои, обедненные электронами, — к заряженному телу. При этом электрический потенциал, монотонный в слое при отрицательном потенциале тела, может быть немонотонным при положительном потенциале тела.

3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ

Оказывается, можно получить точное решение уравнений модели и на его основе продемонстрировать справедливость приведенного выше качественного анализа свойств заряженного слоя. При этом очень полезной оказывается W -функция Ламберта, определяемая как решение уравнения $W(x) \exp W(x) = x$ [26, 27]. Функция $W(x)$ имеет две ветви — основную (верхнюю) ветвь $W_0(x)$ и отрицательную (нижнюю) ветвь $W_{-1}(x)$, разделяемые точкой с координатами $(-1/e, -1)$.

Из уравнения Пуассона (1) и сохранения энергии (3) можно получить следующую задачу (см. [22]):

$$\frac{d^2 \Phi}{ds^2} = N_- - N_+, \quad (23)$$

$$g \left(\frac{1}{N_-^2} - 1 \right) + \tau_- \ln N_- = \Phi, \quad (24)$$

$$\frac{1}{N_+^2} + \tau_+ \ln N_+ = 1 - \Phi, \quad (25)$$

в которой введены следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} N_- &= \frac{n_-}{n_{-0}}, \quad N_+ = \frac{n_+}{n_{+0}} = \frac{Zn_+}{n_{-0}}, \\ s &= \frac{x}{L}, \quad L^2 = \frac{\varepsilon_0 m_+ v_{+0}^2}{2q_+^2 n_{+0}}, \\ g &= \frac{Zm_- v_{-0}^2}{m_+ v_{+0}^2}, \quad \tau_- = \frac{2ZkT_-}{m_+ v_{+0}^2}, \\ \tau_+ &= \frac{2kT_+}{m_+ v_{+0}^2}, \quad E(0) = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2n_{+0} m_+ v_{+0}^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что нормировочный множитель длины L выбран так, что выполняется

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{\varepsilon_0 m_+ v_{+0}^2}{2q_+^2 n_{+0}} = \\ &= \frac{m_+ v_{+0}^2}{2kT_+} \frac{\varepsilon_0 kT_+}{q_+^2 n_{+0}} = \frac{\lambda_{D+}^2}{\tau_+} = \frac{\lambda_{D-}^2}{\tau_-}, \end{aligned} \quad (27)$$

и, например, при $\tau_{\pm} = 1$ он совпадает с соответствующим дебаевским радиусом.

Уравнения (24) и (25) легко решаются относительно безразмерных концентраций с помощью W -функции Ламберта. Они имеют по два корня:

$$\begin{aligned} N_- &= \exp \left\{ \frac{g + \Phi}{\tau_-} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} W_{0,-1} \left[-\frac{2g}{\tau_-} \exp \left(-2\frac{g + \Phi}{\tau_-} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} N_+ &= \exp \left\{ \frac{1 - \Phi}{\tau_+} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} W_{0,-1} \left[-\frac{2g}{\tau_+} \exp \left(-2\frac{1 - \Phi}{\tau_+} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

В (28), (29) $W_0(x)$ и $W_{-1}(x)$ — соответственно основная и отрицательная действительные ветви W -функции Ламберта [26, 27]. Путем простой подстановки легко убедиться, что обе пары корней (28) и (29) действительно являются корнями соответственно уравнений (24) и (25). Однако в каждой паре только по одному удовлетворяют условию квазинейтральности плазмы на границе слоя (см. (4)):

$$(N_+ - N_-)|_{\Phi=0} = 0. \quad (30)$$

Оказалось, что условию (30) удовлетворяет пара решений

$$\begin{aligned} N_- &= \exp \left\{ \frac{g + \Phi}{\tau_-} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} W_0 \left[-\frac{2g}{\tau_-} \exp \left(-2\frac{g + \Phi}{\tau_-} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} N_+ &= \exp \left\{ \frac{1 - \Phi}{\tau_+} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} W_{-1} \left[-\frac{2}{\tau_+} \exp \left(-2\frac{1 - \Phi}{\tau_+} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Так как основная ветвь W -функции Ламберта $W_0(x)$ определена при $-\exp(-1) \leq x < +\infty$, а отрицательная ветвь $W_{-1}(x)$ — при $-\exp(-1) \leq x < 0$, то существует отрезок $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$, в котором может изменяться безразмерный потенциал так, чтобы решения

(31) и (32) оставались действительными. Легко видеть, что Φ_{min} определяется аргументом W_0 в (31) (электронный предел), а Φ_{max} — аргументом W_{-1} в (32) (ионный предел):

$$\Phi_- \equiv \Phi_{min} = -g - \frac{\tau_-}{2} \ln \frac{\tau_-}{2g} + \frac{\tau_-}{2}, \quad (33)$$

$$\Phi_+ \equiv \Phi_{max} = 1 + \frac{\tau_+}{2} \ln \frac{\tau_+}{2} - \frac{\tau_+}{2}. \quad (34)$$

Эти значения совпадают со значениями (11) и (12), полученными из качественного анализа. С помощью функции Ламберта легко получить также аналитическое решение задачи (19), (20). Подставляя

$$N^2 = \exp(w + G), \quad (35)$$

получим

$$\Phi = \left(\frac{1}{G} - \frac{kT_+}{m_+ v_{+0}^2} \right) (w + G), \quad (36)$$

а уравнение для w примет вид

$$w \exp w = -G \exp(-G). \quad (37)$$

Уравнение (37) при $G > 0$ имеет два действительных отрицательных корня:

$$w_{1,2} = w_{0,-1} [-G \exp(-G)] = \begin{cases} \begin{cases} -G \\ W_{-1} [-G \exp(-G)] \end{cases} & \text{при } G < 1, \\ \begin{cases} W_0 [-G \exp(-G)] \\ -G \end{cases} & \text{при } G > 1, \end{cases} \quad (38)$$

которые совпадают друг с другом только при $G = 1$. Графики корней уравнения (37) в зависимости от параметра G показаны на рис. 1.

Рассмотрим решение уравнения Пуассона (23). Подставляя (31) и (32) в (23), получим дифференциальное уравнение относительно $\Phi(s)$:

$$\frac{d^2 \Phi}{ds^2} = f(\Phi) = \exp \left\{ \frac{g + \Phi}{\tau_-} + \frac{1}{2} W_0 \left[-\frac{2g}{\tau_-} \exp \left(-2 \frac{g + \Phi}{\tau_-} \right) \right] \right\} - \exp \left\{ \frac{1 - \Phi}{\tau_+} + \frac{1}{2} W_{-1} \left[-\frac{2g}{\tau_+} \exp \left(-2 \frac{1 - \Phi}{\tau_+} \right) \right] \right\}. \quad (39)$$

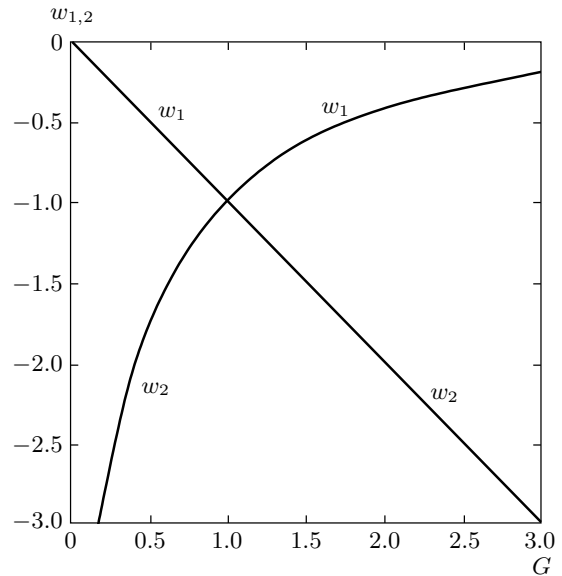


Рис. 1. Корни уравнения (37) в зависимости от параметра G

Его решение легко можно записать в квадратурах

$$\int_{\varphi=\Phi} \left[2 \exp \frac{g}{\tau_-} \int_{\psi=\varphi} \exp \left\{ \frac{1}{2} W_0 \left[-\frac{2g}{\tau_-} \times \exp \left(-2 \frac{g + \psi}{\tau_-} \right) \right] \right\} \exp \frac{\psi}{\tau_-} d\psi - 2 \exp \frac{1}{\tau_+} \int_{\psi=\varphi} \exp \left\{ \frac{1}{2} W_{-1} \left[-\frac{2g}{\tau_+} \exp \left(-2 \frac{1 - \psi}{\tau_+} \right) \right] \right\} \times \exp \left(-\frac{\psi}{\tau_+} \right) d\psi + C_1 \right]^{-1/2} d\varphi = s + C_2, \quad (40)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Внешний вид решения (40) достаточно громоздок и не нагляден, поэтому для анализа свойств решения уравнения (39) воспользуемся методом псевдопотенциала (метода механической аналогии), примененного в [28] при анализе нелинейных волн в плазме. Согласно этому методу будем рассматривать (39) как уравнение движения псевдочастицы в потенциальном поле $F(\Phi)$, при этом функция $f(\Phi) = -dF/d\Phi$ играет роль силы, потенциал Φ — роль координаты псевдочастицы, а координата s — роль времени.

Уравнение Пуассона (39) после однократного интегрирования принимает вид уравнения сохранения

энергии псевдочастицы

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + 2U(\Phi) = E^2(0),$$

$$U(\Phi) = \frac{q_-}{\varepsilon_0} \int_0^\Phi (n_- - Zn_+) d\varphi = F(\Phi) - F(0). \tag{41}$$

Из (41) следует, что уравнение Пуассона имеет действительное решение при $2U(\Phi) \leq E^2(0)$. В соответствии с (13) знак правой части уравнения Пуассона меняется с отрицательного при $\Phi < 0$ (положительно заряженный слой) на положительный при $\Phi > 0$ (отрицательно заряженный слой). Это означает, в частности, что потенциальная энергия псевдочастицы $U(\Phi)$ имеет максимум при $\Phi = 0$: $U_{max} = U(0) = 0$. Если отрицательный знак заряда слоя изменяется на положительный внутри слоя, то в месте, где $f(\Phi) = 0$, функция $U(\Phi)$ имеет минимум и затем возрастает. Если при этом в какой-либо области будет $2U(\Phi) \geq E^2(0)$, то псевдочастица будет отражаться в точке, где $2U(\Phi) = E^2(0)$ и двигаться назад, что соответствует немонотонности распределения потенциала $\Phi(s)$ в слое.

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СТРУКТУРЫ СЛОЯ

Для численных расчетов были приняты значения параметров, характерные для плазмы вакуумного дугового разряда: $kT_- \approx 5$ эВ, $kT_+ \approx 1$, $Z = 2$, $m_+ v_{+0}^2 \approx 20$ эВ. На рис. 2а, б показаны рассчитанные по (27) и (28) зависимости концентраций от потенциала Φ , а на рис. 3а, б представлены типичные профили силы $f(\Phi)$ и псевдопотенциала $F(\Phi)$, полученные простым интегрированием $-f(\Phi)$ от Φ_{min} . Варьирование параметров задачи в разумных пределах показало, что профили псевдосилы и псевдопотенциала слабо зависят от параметров, меняются лишь положения концов отрезка $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$ в соответствии с (33) и (34). Графики зависимости $\Phi_{max}(\tau_+)$ и $\Phi_{min}(\tau_-)$ показаны на рис. 4. Принятые в расчетах значения параметров плазмы соответствуют условиям (8), (17) и (22). Плотности частиц растут с ростом потенциала Φ в соответствии с проведенным выше анализом. Их минимальные и максимальные значения совпадают с (6) и (9). Пространственный заряд слоя меняет знак при $\Phi > 0$, формируя структуру типа двойного слоя. «Потенциальная энергия» U (или F) имеет здесь минимум, после которого растет, не достигая однако нулевого значения.

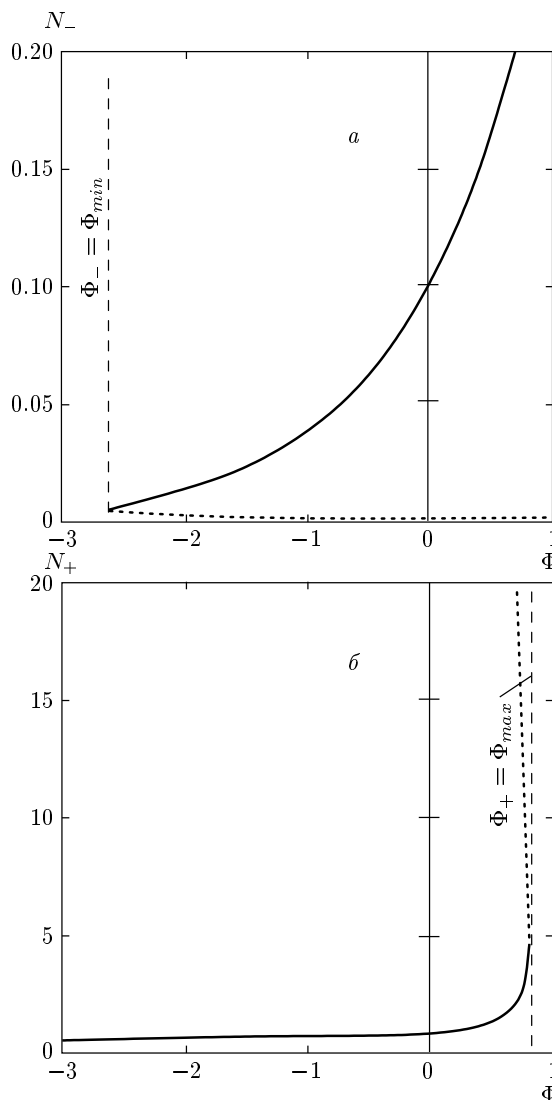


Рис. 2. Графики зависимостей безразмерных концентраций отрицательных N_- частиц (а) и положительных частиц N_+ (б) от Φ при $g = 10^{-3}$, $\tau_- = 1$, $\tau_+ = 0.1$; ветви решений, неудовлетворяющих условию квазинейтральности, показаны штриховой линией

Пространственное распределение безразмерного потенциала $\Phi(s)$ и концентраций заряженных частиц $N_{\pm}(s)$ в слое рассчитывались путем численного решения уравнения (39) методом Рунге–Кутты. При этом брались следующие начальные условия задачи Коши: $\Phi(0) = 0$ и $d\Phi(0)/ds = -E(0)$ (электрическое поле $E(0)$, как и в [6], считалось свободным параметром).

На рис. 5 представлены указанные профили для $E(0)$ различных знаков. При этом, если $E(0) > 0$,

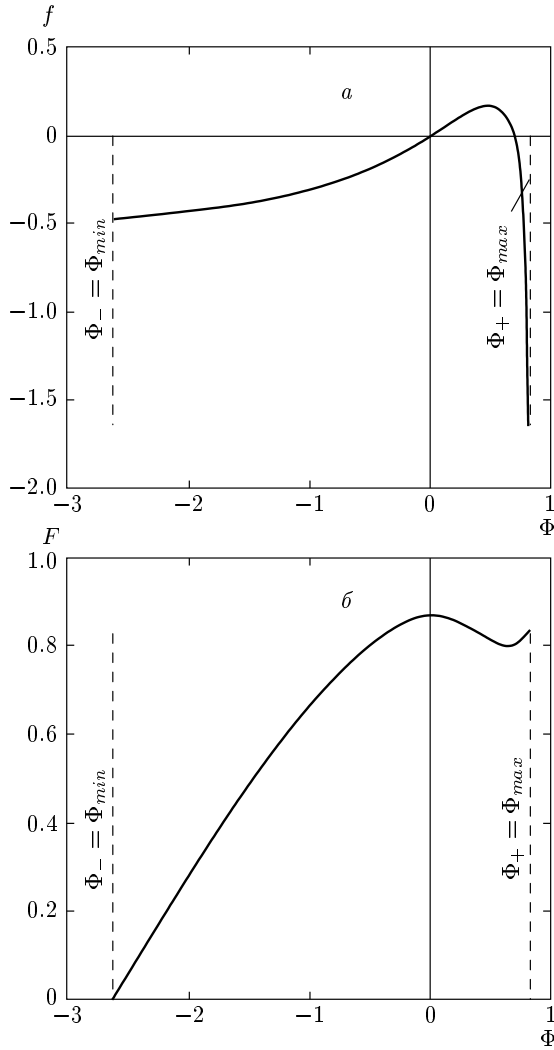


Рис. 3. Графики зависимостей безразмерных псевдосилы (а) и псевдопотенциала (б) от Φ при $g = 10^{-3}$, $\tau_- = 1$, $\tau_+ = 0.1$

потенциал и концентрации обеих компонент плазмы являются убывающими функциями s , и концентрации равны друг другу лишь при $s = 0$ (рис. 3а). Кривая $\Phi(s)$ заканчивается в точке $s = s_m$, где потенциал достигнет значения $\Phi_- \equiv \Phi_{min}$, соответствующего значению (10) и (33). Концентрации частиц $N_{\pm}(s)$ достигают при этом минимальных значений $N_{\pm}(\Phi_{min}) = N_{\pm}(\Phi(s_m))$.

Более интересное поведение профилей реализуется при $E(0) < 0$, когда потенциал и концентрации возрастают: сначала в слое преобладает отрицательный пространственный заряд до некоторой точки $s = s_c$, а затем — преобладает положительный заряд. Кривая $\Phi(s)$ заканчивается в точке $s = s_M > s_c$, где потенциал достигнет значения

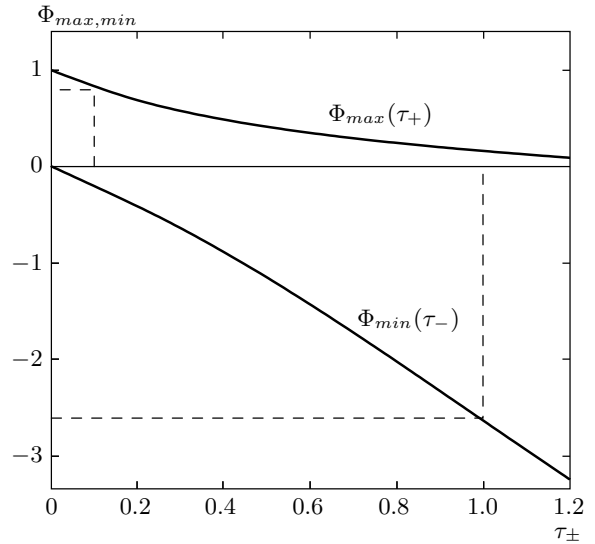


Рис. 4. Графики зависимости $\Phi_{max}(\tau_+)$ и $\Phi_{min}(\tau_-)$. Принятые для расчетов значения τ_{\pm} показаны штриховыми линиями

$\Phi_+ \equiv \Phi_{max}$, соответствующего значению (11) и (34). Концентрации частиц $N_{\pm}(s)$ достигают при этом максимальных значений $N_{\pm}(\Phi_{max}) = N_{\pm}(\Phi(s_M))$.

На рис. 6 показаны рассчитанные зависимости положений точки изменения знака пространственного заряда $s = s_c$ и конечной точки $s = s_{m,M}$ от $E(0)$. Видно, что при $E(0) \rightarrow 0$ слой расширяется ($s_{m,M}$ растут), и точка перемены знака s_c приближается к стенке. Легко убедиться, что такая зависимость от $E(0)$ обусловлена поведением псевдопотенциала $U(\Phi)$ при $\Phi \rightarrow 0$, т. е. в начале слоя. Действительно, из (41) мы получаем решение в виде

$$s = \int_0^{\Phi} \frac{d\phi}{\sqrt{E^2(0) - 2U(\phi)}}. \quad (42)$$

Разделим область интегрирования на две части: часть вблизи края слоя ($s \leq s^*$) и остальная часть, и рассмотрим решения вблизи края. Учитывая, что потенциал здесь мал, $\Phi \leq \Phi^* = \Phi(s^*)$, разложим $U(\Phi)$ в ряд по степеням Φ :

$$s = \int_0^{\Phi \leq \Phi^*} \frac{d\phi}{\sqrt{E^2(0) + f'(0)\phi^2}} = \frac{a}{E(0)} \ln \left| \frac{\Phi}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Phi}{a}\right)^2} \right|, \quad (43)$$

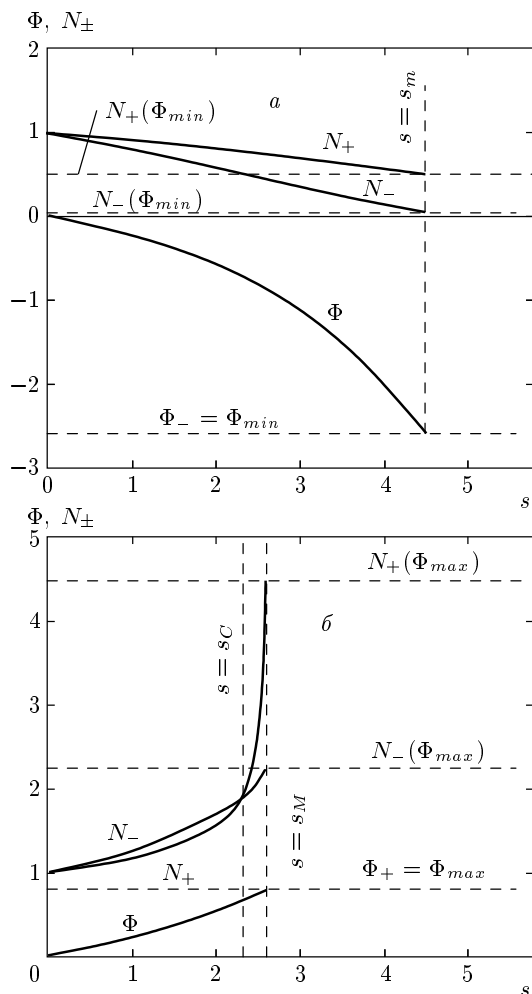


Рис. 5. Профили безразмерных концентраций $N_{\pm}(s)$ и потенциала $\Phi(s)$ при $E_0 > 0$ (а), при $E_0 < 0$ (б) ($g = 10^{-3}$, $\tau_- = 1$, $\tau_+ = 0.1$)

где по определению $f(0) = -U'(0)$ и

$$a = \sqrt{E^2(0)/f'(0)}. \tag{44}$$

Видно, что решение расходится в области вблизи края слоя, если $a \propto E(0) \rightarrow 0$.

Рассчитанные значения некоторых характерных величин представлены в таблице.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

1. Сформулирован критерий существования стационарного заряженного слоя на границе плазма — заряженное тело с учетом инерции и температур заряженных компонент плазмы.

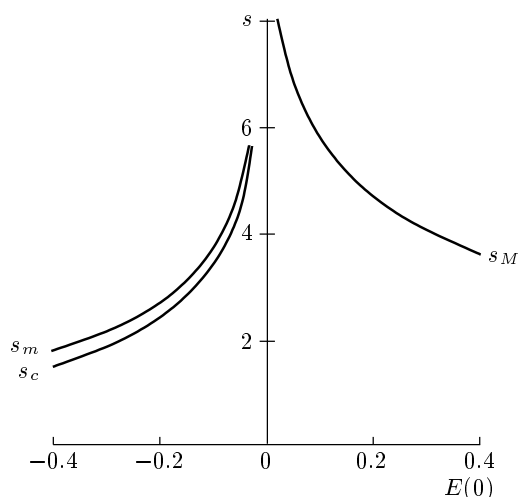


Рис. 6. Зависимости положений точки перемены знака пространственного заряда $s_c(E(0))$ и точек максимального (s_M) и минимального (s_m) значений потенциала от электрического поля на краю слоя при $g = 10^{-3}$, $\tau_- = 1$, $\tau_+ = 0.1$

Результаты расчетов

$E(0)$	$\Phi_{max,min}$	$\Phi_{+,max,min}$	$\Phi_{-,max,min}$	$s_{M,m}$	s_c
0.2	0.80	4.47	2.23	2.62	2.33
-0.2	-2.61	0.52	0.045	4.62	—

2. Определены минимальные и максимальные величины электрического потенциала и концентраций заряженных компонент плазмы.

3. Показано, что профиль заряда в слое может формировать структуру двойного слоя, в котором подслой, обедненный ионами, примыкает к плазме, а подслой, обедненный электронами, — к заряженному телу. При этом монотонность электрического потенциала в слое сохраняется.

Авторы благодарны проф. К.-У. Риману (Рурский университет, Германия) за полезную консультацию. Работа одного из нас (А. Е. Д.) выполнялась в рамках проекта NWO (грант № 047.016.020).

ЛИТЕРАТУРА

1. К.-У. Riemann, J. Phys. D: Appl. Phys. **24**, 493 (1991).
2. R. N. Franklin, J. Phys. D: Appl. Phys. **36**, R309 (2003).

3. R. N. Franklin, J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 1342 (2004).
4. И. П. Стаханов, В. Е. Черковец, *Физика термоэмиссионного преобразователя*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
5. В. А. Рожанский, Л. Д. Цендин, *Столкновительный перенос в частично-ионизованной плазме*, Энергоатомиздат, Москва (1988).
6. Ф. Ф. Чен, *Введение в физику плазмы*, Мир, Москва (1987).
7. M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Material Processing*, Wiley, New York (1994).
8. A. Kono, J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 1945 (2004).
9. R. H. Cohen and D. D. Ryutov, Contrib. Plasma Phys. **44**, 111 (2004).
10. K.-U. Riemann, J. Phys. D: Appl. Phys. **36**, 2811 (2003).
11. K.-U. Riemann, Phys. Plasmas. **4**, 4158 (1997).
12. N. A. Almeida, M. S. Benilov, R. N. Franklin, and G. V. Naidis, J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 3107 (2004).
13. R. N. Franklin and M. Slemrod, J. Phys. D: Appl. Phys. **36**, 1947 (2003).
14. V. Godyak and N. Sternberg, Phys. Plasmas. **9**, 4427 (2002).
15. K.-U. Riemann, Phys. Plasmas. **10**, 3432 (2003).
16. A. Anders, S. Anders, and I. G. Brown, J. Appl. Phys. **75**, 4900 (1994).
17. T. Zhang, Y. C. Zhang, P. K. Chu, and I. G. Brown, Appl. Phys. Lett. **80**, 365 (2002).
18. B. P. Cluggish, IEEE Trans. Plasma Sci. **26**, 1645 (1998).
19. Р. З. Сагдеев, И. А. Жулин, Вестн. АН СССР **84** (1975).
20. *Искусственные пучки частиц в космической плазме*, Мир, Москва (1985).
21. R. L. Stenzel, Phys. Rev. Lett. **60**, 704 (1988).
22. B. A. Alterkop, J. Appl. Phys. **95**, 1650 (2004).
23. I. G. Kouznetsov, A. J. Lichtenberg, and M. A. Lieberman, J. Appl. Phys. **86**, 4142 (1999).
24. Z.-X. Wang, J.-Y. Liu, Y. Liu, and X. Wang, Phys. Plasmas. **11**, 5723 (2004).
25. S. B. Song, C. S. Chang, and Duk-In Choi, Phys. Rev. E **55**, 1213 (1997).
26. S. R. Valluri, D. J. Jeffrey, and R. M. Corless, Canadian J. Phys. **78**, 823 (2000).
27. А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков, *W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства*, СарФТИ, Саров (2004).
28. Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы*, Атомиздат, Москва (1964), вып. 4, с. 20.