

# ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ МЕЖДУ ОДНО- И ТРЕХМЕРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ НА ВЫСОКОЧАСТОТНУЮ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СВЕРХРЕШЕТОК

*В. А. Игнатченко\*, Ю. И. Маньков*

*Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 1 августа 2005 г.

Для описания взаимных корреляций компонент смеси одномерных ( $1D$ ) и трехмерных ( $3D$ ) неоднородностей вводится функция распределения, которая учитывает корреляции между модулями двух случайных переменных при отсутствии корреляций между самими переменными. С использованием этой функции распределения выводится и исследуется корреляционная функция сверхрешетки, содержащей смесь взаимно коррелированных  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. Исследуется влияние таких неоднородностей на высокочастотную восприимчивость на краю первой зоны Бриллюэна сверхрешетки. Показано, что положительные взаимные корреляции приводят к частичному подавлению влияния смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей на волновой спектр: ширина щели на границе зоны Бриллюэна возрастает, а затухание волны уменьшается по сравнению с эффектом, обусловленным смесью  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей при отсутствии взаимных корреляций. Отрицательные взаимные корреляции приводят к обратному эффекту: ширина щели уменьшается, а затухание волн возрастает. Взаимные корреляции приводят также к появлению новых резонансных эффектов: узкого провала или узкого пика в центре запрещенной зоны в зависимости от знака коэффициента корреляций.

PACS: 68.65.-k, 75.30.Ds

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно проводятся исследования спектра волн в частично стохастизованных сверхрешетках. Это обусловлено широким использованием таких материалов в различных устройствах высоких технологий, а также тем фактом, что они являются удобной моделью для развития новых методов теоретической физики для изучения сред без трансляционной симметрии. На сегодняшний день развито несколько теоретических методов для исследования таких сверхрешеток: введение одномерной случайной фазы [1, 2]; моделирование нарушения порядка в последовательности расположения слоев двух различных материалов [3–9]; численное моделирование случайных отклонений границ раздела слоев от их первоначального периодического положения [10–12]; постулирование формы корреля-

ционной функции сверхрешетки с неоднородностями [13, 14]; приложение приближений геометрической оптики [15] и развитие динамической теории композитных упругих сред [16].

Еще один метод исследования влияния неоднородностей сверхрешетки на волновой спектр был предложен в нашей работе [17] и назван нами методом случайной пространственной модуляции (RSM) периода сверхрешетки. Напомним кратко его суть. Как известно, наиболее последовательным описанием спектральных свойств любых неоднородных сред является метод усредненных функций Грина. Единственной характеристикой, описывающей случайную среду, которая входит в выражение для усредненной функции Грина, является корреляционная функция  $K(\mathbf{r})$ , зависящая от расстояния  $\mathbf{r}$  между двумя точками среды:  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Поэтому первая часть задачи сводится к нахождению функции  $K(\mathbf{r})$  для сверхрешетки, содержащей те или иные струк-

\*E-mail: vignat ch@iph.krasn.ru

турные неоднородности, а вторая часть задачи заключается в извлечении стандартными приближенными методами спектральных характеристик из выражения для функции Грина, содержащей эту корреляционную функцию. Для описания неоднородностей структуры синусоидальной сверхрешетки использовалась модель случайной фазы, которая считалась случайной функцией всех трех координат с произвольным радиусом корреляции. Для нахождения корреляционной функции сверхрешетки  $K(\mathbf{r})$  нами был развит метод, который является обобщением хорошо известного метода определения временной корреляционной функции для случайной частотной (фазовой) модуляции радиосигнала [18, 19] на случай пространственной (в общем случае — трехмерной) модуляции периода (фазы) сверхрешетки. Достоинством этого метода является то, что форма корреляционной функции сверхрешетки в нем не постулируется, а выводится из наиболее общих допущений о характере случайной пространственной модуляции периода сверхрешетки. Было показано, что в общем случае эта функция имеет сложный вид, который существенно зависит от размерности неоднородностей, структуры границы между слоями и т. д. Знание корреляционных функций, соответствующих различным типам и размерностям неоднородностей, позволило нам приложить методы исследования усредненных функций Грина для нахождения собственных частот, затухания и других характеристик волн в сверхрешетках [17, 20–26]. Было показано, как полученные различия в форме корреляционной функции для  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей проявляются в спектре волн, распространяющихся в сверхрешетке [21, 22, 26]. Впервые было исследовано влияние на волновой спектр  $3D$ -неоднородностей с анизотропными корреляционными свойствами [25] и смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей [23, 24]. Была показана неаддитивность вкладов компонент смеси различной размерности в результирующую модификацию параметров волнового спектра, обусловленную этими неоднородностями. При исследовании смеси неоднородностей в работах [23, 24] считалось, что взаимные корреляции между неоднородностями различной размерности отсутствуют. Настоящая работа посвящена учету влияния на высокочастотную восприимчивость сверхрешетки взаимных корреляций между  $1D$ -неоднородностями, моделируемыми случайными отклонениями границ между слоями от их периодического расположения, и  $3D$ -неоднородностями, моделируемыми случайными деформации поверхностей этих границ.

Работа имеет следующую структуру. Во втором

разделе работы вводится функция распределения двух случайных величин, описывающая взаимную корреляцию модулей этих величин, и выводится корреляционная функция сверхрешетки, учитывающая взаимную корреляцию  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. В третьем разделе рассчитывается высокочастотная восприимчивость на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки и анализируется зависимость мнимой части восприимчивости от величин среднеквадратичных флуктуаций неоднородностей. В четвертом разделе суммируются и обсуждаются полученные в работе результаты.

## 2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Сверхрешетка характеризуется зависимостью какого-либо материального параметра  $A$  от пространственных координат  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ . Физическая природа параметра  $A(\mathbf{x})$  может быть различной. Этот параметр может являться плотностью материала или силовой константой для упругой системы среды, магнитной анизотропией, намагниченностью или обменом для магнитной системы и так далее. Мы представим  $A(\mathbf{x})$  в форме

$$A(\mathbf{x}) = A + \Delta A \rho(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $A$  — средняя величина параметра,  $\Delta A$  — его среднеквадратичное отклонение,  $\rho(\mathbf{x})$  — центрированная ( $\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$ ) функция. Функция  $\rho(\mathbf{x})$  описывает как периодическую зависимость параметра вдоль оси сверхрешетки  $z$ , так и случайную пространственную модуляцию этого параметра, которая в общем случае может быть функцией всех трех координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

В этой статье мы рассмотрим сверхрешетку, имеющую синусоидальную зависимость материального параметра от координаты  $z$  в исходном состоянии, когда неоднородности отсутствуют. Как и в статьях [23, 24], представим функцию  $\rho(\mathbf{x})$  в форме

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \cos[q(z - u_1(z) - u_3(\mathbf{x})) + \psi], \quad (2)$$

где  $q = 2\pi/l$  — волновое число сверхрешетки,  $l$  — период сверхрешетки.

Функция  $u_1(z)$  описывает  $1D$ -неоднородности фазы функции  $\rho(\mathbf{x})$ . Чувствительность профиля функции  $\rho(\mathbf{x})$  к действию модуляции  $u_1(z)$  различна для различных точек функции  $\rho(\mathbf{x})$ . Наименьшие изменения профиля происходят вблизи минимума или максимума функции  $\cos(qz)$ . В противоположность этому смещение нулевых точек  $\cos(qz)$

под действием  $u_1(z)$  приводит к сильным изменениям профиля. Нулевые точки функции  $\rho(\mathbf{x})$  соответствуют границам слоев сверхрешетки. Поэтому мы принимаем в методе RSM, что функция  $u_1(z)$  моделирует  $1D$ -смещения границ слоев от их исходного периодического расположения.

Функция  $u_3(\mathbf{x})$  введена в выражение (2) для моделирования случайных деформаций поверхностей границ слоев. На первый взгляд может показаться, что эта функция должна зависеть только от двух координат  $x$  и  $y$ . Но функция  $u(x, y)$  описывает в методе RSM  $2D$ -деформации, которые однородны для всех границ слоев сверхрешетки и, тем самым, имеют бесконечный корреляционный радиус вдоль оси  $z$ . В действительности интересен прямо противоположный случай, когда деформации двух ближайших границ слоев либо не коррелированы (корреляционные радиусы вдоль  $z$  много меньше, чем  $l/2$ ), либо скоррелированы только границы нескольких соседних слоев. По этой причине  $u_3(\mathbf{x})$  должна быть случайной функцией всех трех координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

В общем случае эта функция обладает анизотропией корреляционных свойств, поскольку величины корреляционных радиусов в плоскости  $xy$  и вдоль оси  $z$  определяются различными физическими причинами. Но мы ограничимся здесь простейшим случаем и предположим, что  $u_3(\mathbf{x})$  случайная  $3D$ -функция с изотропными корреляционными свойствами. Не зависящая от координат фаза  $\psi$  вводится в выражение (2), чтобы обеспечить выполнение условия эргодичности функции  $\rho(\mathbf{x})$  (см. [17]); она характеризуется однородным распределением на интервале  $(-\pi, \pi)$ . После усреднения произведения функций  $\rho(\mathbf{x})$  и  $\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})$  по фазе  $\psi$  получаем

$$\langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_\psi = \cos(qr_z - \chi_1 - \chi_3), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= q[u_1(z + r_z) - u_1(z)], \\ \chi_3 &= q[u_3(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_3(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы предполагали в статьях [23, 24], что случайные функции  $\chi_1$  и  $\chi_3$  взаимно не коррелированы и каждая из них подчиняется гауссовскому распределению.

Целью настоящей работы является исследование ситуации, когда между  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностями имеются взаимные корреляции. В стандартной теории функция распределения двух случайных центрированных величин  $\chi_1$  и  $\chi_3$ , связанных взаимными корреляциями, представляется в виде (см., например, [27])

$$f(\chi_1, \chi_3) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_3\sqrt{(1-\kappa^2)}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\kappa^2)}\left[\frac{\chi_1^2}{\sigma_1^2} - 2\kappa\frac{\chi_1\chi_3}{\sigma_1\sigma_3} + \frac{\chi_3^2}{\sigma_3^2}\right]\right\}, \quad (5)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  — среднеквадратичные флуктуации величин  $\chi_1$  и  $\chi_3$  соответственно,  $\kappa$  — коэффициент взаимных корреляций этих величин ( $-1 < \kappa < 1$ ). Такая форма функции распределения описывает ситуацию, когда, например, для положительных корреляций ( $\kappa > 0$ ) появление положительной флуктуации величины  $\chi_1$  вызывает рост вероятности положительной флуктуации величины  $\chi_3$  и, соответственно, уменьшение вероятности отрицательной флуктуации  $\chi_3$ . У нас переменные  $\chi_1$  и  $\chi_3$  являются функциями соответственно одной и трех пространственных координат. Применительно к нашей модели функция (5) описывает ситуацию, когда положительное смещение границы между слоями сверхрешетки  $u_1(z)$  в какой-либо точке  $z = z_0$  вызывает асимметричную (т. е. положительные амплитуды в среднем превышают отрицательные) деформацию границы  $u_3(x, y, z_0)$  во всей плоскости  $(x, y)$ , соответствующей точке  $z = z_0$ . Трудно представить себе физический механизм, приводящий к такого рода корреляциям для рассматриваемых  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей.

Нашей целью является исследование влияния на спектр системы корреляций другого типа, которые имеют ясный физический смысл, а именно, когда в случае положительных корреляций рост флуктуаций интенсивности неоднородностей одной размерности приводит к росту флуктуаций интенсивности неоднородностей другой размерности и наоборот, независимо от знака этих флуктуаций. Для нашей модели это означает, что рост в точке  $z = z_0$  величины смещения границы независимо от его знака должен приводить к росту амплитуд деформаций этой границы для всех  $x$  и  $y$  в плоскости  $z = z_0$ , независимо от знака этих амплитуд. Причина появления таких корреляций в самом общем виде может заключаться в разумном допущении, что любая случайная неустойчивость в установке по получению сверхрешеток, вызывающая рост отклонения толщины какого-либо слоя от заданной, может увеличивать и вероятность возрастания деформаций поверхности этого слоя. Для моделирования взаимных корреляций такого рода мы вводим здесь функцию распределения, которая, в отличие от функции (5), описывает корреляцию между модулями  $|\chi_1|$  и  $|\chi_3|$  случайных функций  $\chi_1$  и  $\chi_3$ , оставляя сами эти функции некоррелированными:

$$f(\chi_1, \chi_3) = C \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\chi_1^2}{A^2} - \frac{2\kappa(|\chi_1| - a_1)(|\chi_3| - a_3)}{AB} + \frac{\chi_3^2}{B^2} \right] \right\}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ , и  $C$ , а также математические ожидания модулей  $a_i \equiv \langle |\chi_i| \rangle$  можно найти с помощью условия нормировки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\chi_1, \chi_3) d\chi_1 d\chi_3 &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_i| f(\chi_1, \chi_3) d\chi_1 d\chi_3 &= a_i, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_i^2 f(\chi_1, \chi_3) d\chi_1 d\chi_3 &= Q_i, \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь используем для среднеквадратичных отклонений обозначения  $Q_i^{1/2}$  вместо общепринятого  $\sigma_i$ , чтобы подчеркнуть, что в рассматриваемом в работе случае в качестве квадратов среднеквадратичных отклонений будут фигурировать не константы, а структурные функции  $Q_1 = Q_1(r_z)$  и  $Q_3 = Q_3(\mathbf{r})$ .

Вычислить точно интегралы в формулах (7) для функции вероятности (6), в отличие от функции (5), не представляется возможным. Поэтому мы поступили следующим образом. Интеграл по одной из переменных, например  $\chi_1$ , в каждом из условий (7) может быть найден точно. Используя интегральное представление входящей в оставшийся интеграл по  $\chi_3$  функции ошибок  $\text{erf}(x)$  и меняя порядок интегрирования, можно вычислить интеграл по  $\chi_3$  в бесконечных пределах и свести, таким образом, выражения (7) к интегралам по некоторой переменной в пределах от 0 до 1. Считая коэффициент корреляции  $\kappa$  малым, подинтегральные выражения в нормировочных интегралах, полученных таким образом, разлагались в ряд до первой степени  $\kappa$ , после чего они могли быть проинтегрированы точно. В результате из условий (7) были получены алгебраические уравнения, из которых были найдены константы, входящие в функцию (6), оказавшиеся в этом приближении не зависящими от  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} A &= Q_1^{1/2}, \quad B = Q_3^{1/2}, \\ C &= \frac{1}{2\pi} (Q_1 Q_3)^{-1/2}, \quad a_i = \left( \frac{2Q_i}{\pi} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

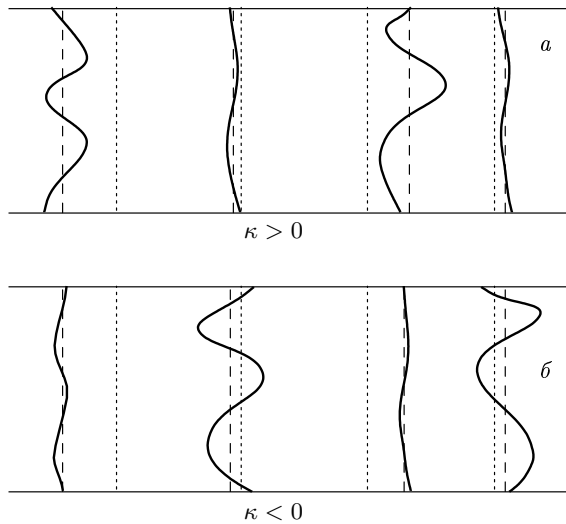
Смешанный центральный момент второго порядка, который для функции (5) имеет вид  $\langle \chi_1 \chi_3 \rangle = \kappa \sigma_1 \sigma_3$ , для функции (6) равен нулю. Однако смешанный

центральный момент модулей  $|\chi_1|$  и  $|\chi_3|$  для функции (6) пропорционален  $\kappa$ ,

$$\begin{aligned} \langle (|\chi_1| - \langle |\chi_1| \rangle)(|\chi_3| - \langle |\chi_3| \rangle) \rangle &= \\ &= \kappa \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right)^2 (Q_1 Q_3)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Следует подчеркнуть, что введенная здесь функция распределения двух переменных  $\chi_1$  и  $\chi_3$  (6), учитывающая корреляцию модулей этих величин, как и стандартная функция (5), учитывающая корреляцию самих величин, не приводит к изменению среднеквадратичных значений этих величин. Включение корреляций означает только появление стохастической синхронизации между  $\chi_1$  и  $\chi_3$  для функции (5) и между  $|\chi_1|$  и  $|\chi_3|$  для функции (6) в конфигурационном пространстве переменных  $\chi_1, \chi_3$ . Так как в нашем случае  $\chi_1$  и  $\chi_3$  являются функциями пространственных координат, это приводит, в свою очередь, к возникновению стохастической пространственной синхронизации между флуктуациями интенсивности 1D- и 3D-неоднородностей. Для случая неоднородностей в сверхрешетке это означает, что, например, при  $\kappa > 0$  сильные 3D-деформации поверхностей между слоями  $u_3(\mathbf{x})$  сосредоточены в местах сильных 1D-отклонений поверхностей  $u_1(z)$  от исходного периодического распределения, а слабые деформации  $u_3(\mathbf{x})$  — в местах слабых отклонений  $u_1(z)$ . При  $\kappa < 0$ , соответственно, сильные 3D-флуктуации  $u_3(\mathbf{x})$  сосредоточены в местах слабых 1D-отклонений поверхностей между слоями  $u_1(z)$ . Такое перераспределение деформационных 3D-флуктуаций в пространстве происходит без изменения величин как  $\langle \chi_3^2 \rangle$ , так и  $\langle \chi_1^2 \rangle$ . Ситуации, соответствующие  $\kappa > 0$  и  $\kappa < 0$ , схематически изображены на рис. 1а и б. Для простоты на этом рисунке показан случай коротких корреляционных радиусов  $r_{\parallel}$  и  $r_0$  1D- и 3D-неоднородностей, соответственно ( $r_{\parallel}, r_0 \ll l/2$ ), когда отклонение соседних границ между слоями (или их деформации) можно считать независимыми друг от друга. В этом случае эффекты положительной (рис. 1а) или отрицательной (рис. 1б) пространственной синхронизации при  $\kappa \neq 0$  проявляются уже на соседних границах.

Для реальных сверхрешеток вероятность появления положительных или отрицательных взаимных корреляций между 1D- и 3D-неоднородностями существенно различна. Если положительные взаимные корреляции между неоднородностями разных размерностей, как уже отмечалось выше, могут довольно естественно возникать в стандартных условиях получения сверхрешеток, то для возникновения



**Рис. 1.** Схематическое изображение положительной (а) и отрицательной (б) пространственной синхронизации 1D- и 3D-неоднородностей в сверхрешетке, обусловленной их взаимными корреляциями. Пунктирные линии соответствуют периодическому расположению границ между слоями для идеальной сверхрешетки, штриховые — случайным 1D-смещениям границ, сплошные — суммарному эффекту 1D-смещений и 3D-деформаций поверхностной границ

отрицательных корреляций требуются весьма специфические условия (например, чтобы увеличение отклонения границы между слоями от равновесного положения приводило к росту поверхностного натяжения, гасящего случайные деформации поверхности границы).

Следует отметить, что постоянные коэффициенты в функции (6) могут быть определены и более простым путем, а именно, формальным разложением корреляционной экспоненты в функции (6) в ряд по  $\kappa$  до первой степени  $\kappa$ :

$$f(\chi_1, \chi_3) \approx C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\chi_1^2}{A^2} + \frac{\chi_3^2}{B^2} \right] \right\} \times \left[ 1 - \kappa \frac{(|\chi_1| - a_1)(|\chi_3| - a_3)}{AB} \right] \quad (10)$$

и вычислением нормировочных интегралов (7) (которые берутся в этом случае точно) с использованием приближенного выражения (10). Несмотря на то, что в этом выражении член в квадратных скобках, пропорциональный  $\kappa$ , в области определения  $\chi_i$  может быть сколь угодно большим, после выполнения интегрирования в выражениях (7) члены, пропорциональные  $\kappa$ , при  $\kappa \ll 1$  удовлетворяют требованиям

теории возмущений. Полученные таким путем алгебраические уравнения приводят к тем же значениям параметров  $A, B, C, a_1$  и  $a_3$ , которые определяются формулами (8).

Корреляционная функция сверхрешетки  $K(\mathbf{r})$  с взаимными корреляциями 1D- и 3D-неоднородностей определяется выражением

$$K(\mathbf{r}) \equiv \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\psi_{\chi_1\chi_3}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_1 d\chi_3 f(\chi_1, \chi_3) \cos(qr_z - \chi_1 - \chi_3), \quad (11)$$

где в качестве функции распределения  $f(\chi_1, \chi_3)$  должна фигурировать введенная нами функция (6). В приближении  $\kappa \ll 1$  коэффициенты в этой функции определяются выражениями (8).

При взятии интегралов в формуле (11) возникают такие же трудности, как и при вычислении нормировочных интегралов в выражениях (7). Как и в том случае, эти трудности могут быть преодолены для малых  $\kappa$  двумя путями: выполнением точного интегрирования по одной переменной, преобразованием интеграла по другой переменной к интегралу в пределах от 0 до 1, разложением полученного выражения по  $\kappa$  до первой степени  $\kappa$  и точного интегрирования полученного приближенного выражения, либо непосредственной подстановкой в формулу (11) приближенного выражения для функции распределения (10), которое позволяет вычислить точно интегралы по обоим переменным  $\chi_1$  и  $\chi_3$ . Оба пути приводят к одному и тому же выражению для корреляционной функции сверхрешетки через структурные функции  $Q_1(r_z), Q_3(r)$ :

$$K(\mathbf{r}) = \cos qr_z \{ K_1(r_z) K_3(r) + K_{13}(\mathbf{r}) \}, \quad (12)$$

где выражение в фигурных скобках представляет собой убывающую часть корреляционной функции, состоящую из суммы произведения убывающих частей корреляционной функции компонент смеси 1D- и 3D-неоднородностей,

$$K_1(r_z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} Q_1(r_z) \right], \quad (13)$$

$$K_3(r) = \exp \left[ -\frac{1}{2} Q_3(r) \right], \quad (14)$$

и функции взаимных корреляций

$$K_{13}(\mathbf{r}) = \frac{2\kappa}{\pi} \left[ 1 - \sqrt{2Q_1(r_z)} D \left( \sqrt{\frac{Q_1(r_z)}{2}} \right) - \exp \left( -\frac{Q_1(r_z)}{2} \right) \right] \left[ 1 - \sqrt{2Q_3(r)} \times \right. \\ \left. \times D \left( \sqrt{\frac{Q_3(r)}{2}} \right) - \exp \left( -\frac{Q_3(r)}{2} \right) \right]. \quad (15)$$

Здесь

$$D(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$$

— интеграл Доссона.

Для нахождения структурных функций  $Q_1(r_z)$  и  $Q_3(r)$  мы должны моделировать корреляционные свойства модулирующих функций  $u_1(z)$  и  $u_3(\mathbf{x})$  или, точнее, корреляционные свойства их градиентов, которые, в отличие от  $u_1(z)$  и  $u_3(\mathbf{x})$ , являются однородными случайными функциями. Обе функции  $Q_1(r_z)$  и  $Q_3(r)$  были найдены в работе [17] (см. также уточнение коэффициентов в этих выражениях в работе [21]) с помощью различных форм модельных корреляционных функций для случайной модуляции. Было показано, что вид функций  $Q_i$  асимптотически (как для малых, так и для больших величин  $r$ ) не зависит от моделирующих корреляционных функций, но сильно зависит от размерности неоднородностей. В случае экспоненциальных моделирующих корреляционных функций для  $u_1(z)$  и  $u_3(\mathbf{x})$  структурные функции были получены в виде

$$Q_1(r_z) = 2\gamma_1^2 [\exp(-k_{\parallel} r_z) + k_{\parallel} r_z - 1], \quad (16)$$

$$Q_3(r) = 6\gamma_3^2 \left[ 1 - \frac{2}{k_0 r} + \left( 1 + \frac{2}{k_0 r} \right) \exp(-k_0 r) \right]. \quad (17)$$

Здесь  $k_{\parallel} = r_{\parallel}^{-1}$  и  $k_0 = r_0^{-1}$  — корреляционные волновые числа соответственно 1D- и 3D-неоднородностей,

$$\gamma_1 = \frac{s_1 q}{k_{\parallel}}, \quad \gamma_3 = \frac{s_3 q}{k_0}, \quad (18)$$

где  $s_1$  и  $s_3$  — среднеквадратичные флуктуации градиентов функций  $u_1(z)$  и  $u_3(\mathbf{x})$ .

Вид корреляционных функций сверхрешетки при  $\kappa = 0$  хорошо исследован как для 1D- и 3D-неоднородностей, так и для их смеси [24]. Ввиду сложности выражений (13) и (14) были предложены аппроксимирующие выражения для них (см. соответственно [17, 22]):

$$K_1(r_z) = \exp(-\gamma_1^2 k_{\parallel} r_z), \quad (19)$$

$$K_3(r) = (1 - L) \exp(-\gamma_3^2 k_0 r) + L, \quad (20)$$

где  $L = \exp(-3\gamma_3^2)$  — асимптота  $K_3(r)$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Из этих выражений хорошо видно принципиальное различие в форме корреляционных функций для 1D- и 3D-неоднородностей, заключающееся в том, что убывающая часть корреляционной функции для 1D-неоднородностей экспоненциально стремится к нулю при  $r_z \rightarrow \infty$ , а убывающая часть корреляционных функций для 3D-неоднородностей при  $r \rightarrow \infty$  стремится к отличной от нуля асимптоте  $L$ . По этой причине в 3D-случае, помимо областей объема с конечным корреляционным радиусом  $r_0$ , существуют области с бесконечным корреляционным радиусом. Это приводит к резкому различию в характере спектра и затухания волн в среде с 1D- или 3D-неоднородностями. Для смеси некоррелированных 1D- и 3D-неоднородностей убывающая часть корреляционной функции равна произведению  $K_1(r_z)K_3(r)$  убывающих частей корреляционных функций компонент смеси; поэтому она имеет асимптотику, соответствующую 1D-неоднородностям, т.е. экспоненциально стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Зависимость функции взаимных корреляций  $K_{13}$  от  $r_z$  при  $r_x = r_y = 0$  показана на рис. 2 для нескольких значений  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_3^2$ , удовлетворяющих условию  $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 0.6$ . Функция  $K_{13}(r_z)$  обращается

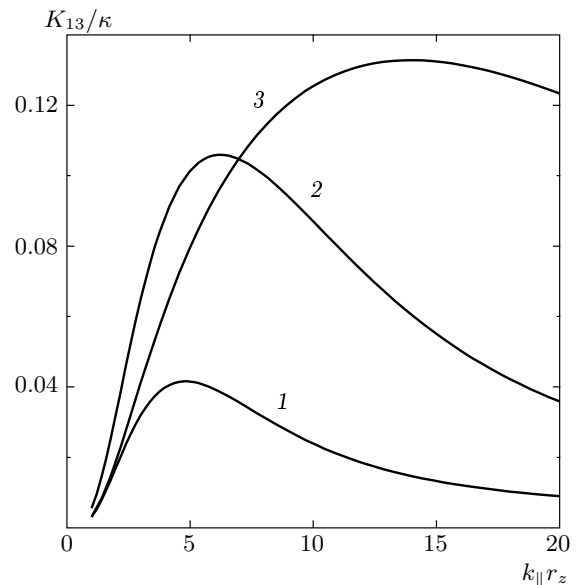


Рис. 2. Зависимость функции взаимных корреляций  $K_{13}$  от  $r_z$  при  $r_x = r_y = 0$  и  $k_0 = k_{\parallel}$  для  $\gamma_1^2 = 0.5, \gamma_3^2 = 0.1$  (кривая 1),  $\gamma_1^2 = 0.3, \gamma_3^2 = 0.3$  (кривая 2) и  $\gamma_1^2 = 0.1, \gamma_3^2 = 0.5$  (кривая 3)

в нуль при  $r_z = 0$ , достигает максимума при некотором значении  $r_z$ , зависящем от  $\gamma_i^2$ , и убывает как  $r_z^{-1}$  при  $r_z \rightarrow \infty$ . В зависимости от знака  $\kappa$  функция  $K_{13}$  либо добавляется к убывающей части корреляционной функции смеси неоднородностей, либо вычитается из нее (в последнем случае убывающая часть  $K(\mathbf{r})$  становится отрицательной в области больших  $r_z$ ). В любом случае при учете взаимных корреляций между 1D- и 3D-неоднородностями убывание корреляций в сверхрешетке подчиняется степенному закону, в то время как при отсутствии таких корреляций ( $\kappa = 0$ ), когда имеется смесь независимых 1D- и 3D-неоднородностей, убывание корреляций в сверхрешетке является экспоненциальным. Таким образом, убывающая часть корреляционной функции сверхрешетки (12) при  $\kappa > 0$  занимает промежуточное положение между убывающей частью корреляционной функции сверхрешетки с 3D-неоднородностями  $K_3(r)$ , стремящейся при  $r \rightarrow \infty$  к константе  $L$ , и корреляционной функции сверхрешетки с 1D-неоднородностями  $K_1(r_z)$  или со смесью некоррелированных 1D- и 3D-неоднородностей  $K_1(r_z)K_3(\mathbf{r})$ , которые при  $r \rightarrow \infty$  убывают по экспоненциальному закону.

Ввиду сложности выражения (15) мы аппроксимируем здесь функцию взаимных корреляций более простой формулой

$$K_{13}(\mathbf{r}) = \frac{2\kappa}{\pi} \frac{\gamma_1^2 \gamma_3^2 N(1-L)k_{\parallel} k_0 |r_z| r}{N + 2\gamma_1^4 \gamma_3^2 (1-L)k_{\parallel}^2 k_0 r_z^2 r}, \quad (21)$$

где

$$N = L + 2\sqrt{3}\gamma_3 D(\sqrt{3}\gamma_3) - 1. \quad (22)$$

Здесь  $L$  — та же асимптота  $K_3(r)$ , что и в формуле (20),  $D(x)$  — интеграл Доссона. Асимптотики приближенного выражения (21) и точного выражения (15) совпадают между собой как для малых, так и для больших  $r_z$ :

$$K_{13}(\mathbf{r}) \approx \frac{2\kappa}{\pi} \times \begin{cases} \gamma_1^2 \gamma_3^2 (1-L)k_{\parallel} k_0 |r_z| r, & k_{\parallel} |r_z| \ll 1, \\ (N/2)\gamma_1^2 k_{\parallel} |r_z|, & k_{\parallel} |r_z| \gg 1. \end{cases} \quad (23)$$

### 3. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СВЕРХРЕШЕТКИ

Рассмотрим, например, спиновые волны в сверхрешетке с неоднородным параметром одноосной маг-

нитной анизотропии  $\beta(\mathbf{x})$  (направление оси анизотропии предполагается однородным). Тогда параметры  $A$  и  $\Delta A$  в выражении (1) представляют собой соответственно среднее значение анизотропии  $\beta$  и ее среднеквадратичное отклонение  $\Delta\beta$ .

Рассмотрим ситуацию, когда направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ , постоянной составляющей намагниченности  $\mathbf{M}_0$  и оси магнитной анизотропии совпадают с направлением оси сверхрешетки  $z$ . Проводя обычную линейризацию уравнения Ландау — Лифшица для намагниченности ( $M_x, M_y \ll M_0$ ,  $M_z \approx M_0$ ) и вводя циркулярные проекции для резонансных составляющих намагниченности и внешнего переменного магнитного поля, получаем уравнение для спиновых волн в виде

$$\nabla^2 m + \left[ \nu - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \rho(\mathbf{x}) \right] m = -\frac{h}{\alpha}. \quad (24)$$

Здесь  $m = M_x + iM_y$ ,  $h = H_x + iH_y$ ,  $\nu = (\omega - \omega_0)/\alpha g M_0$ ,  $\Lambda = \sqrt{2}\Delta\beta/\alpha$ ,  $\omega$  — частота,  $\omega_0 = g[H_0 + (\beta - 4\pi)M_0]$  — частота однородного ферромагнитного резонанса,  $g$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — постоянная обмена.

Высокочастотная спин-волновая восприимчивость  $\chi(\nu, k)$  пропорциональна усредненной функции Грина  $G(\nu, k)$  уравнения (24)

$$\chi(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\langle m(\nu, \mathbf{k}) \rangle}{h_0} = a(k)G(\nu, \mathbf{k}), \quad (25)$$

где  $h_0$  — амплитуда высокочастотного поля. Вид коэффициента пропорциональности  $a(k)$  для случая спин-волнового резонанса в тонкой магнитной пленке детально проанализирован в работе [20]. Усредненная функция Грина для уравнения (24) имеет вид

$$G(\nu, \mathbf{k}) = \frac{1}{\nu - k^2 - M(\nu, \mathbf{k})}, \quad (26)$$

где  $M(\nu, \mathbf{k})$  — классический аналог массового оператора, который в приближении Буре [28] может быть представлен в виде [21]

$$M(\nu, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda^2}{8\pi} \int \frac{K(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\nu}|\mathbf{r}|)] d\mathbf{r}. \quad (27)$$

Здесь корреляционная функция  $K(\mathbf{r})$  для синусоидальной сверхрешетки определяется выражением (12).

Левая часть волнового уравнения (24), а следовательно, и выражения для усредненной функции Грина (26) и массового оператора (27) остаются справедливыми и для волн другой физической природы при соответствующих переобозначениях входящих в эти выражения параметров. Так, для упругих волн в скалярном приближении в сверхрешетке с неоднородной плотностью среды  $p(\mathbf{x})$  ( $A = p$ ,  $\Delta A = \Delta p$ ) получим  $\nu = (\omega/v)^2$ ,  $\Lambda = \sqrt{2}\Delta p\omega^2/pv^2$ , где  $v$  — скорость упругих волн, а для электромагнитных волн в таком же приближении в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{x})$  ( $A = \varepsilon$ ,  $\Delta A = \Delta\varepsilon$ ) имеем  $\nu = \varepsilon(\omega/c)^2$ ,  $\Lambda = \sqrt{2}\Delta\varepsilon\omega^2/\varepsilon c^2$ , где  $c$  — скорость света. Таким образом, все полученные ниже результаты для спиновых волн легко могут быть обобщены на случай волн другой физической природы.

Хорошо известно, что спектр волн в сверхрешетке  $\nu = \nu(k)$  имеет зонную структуру. При значениях  $k = nq/2$ , соответствующих краям  $n$ -х зон Бриллюэна в схеме расширенных зон, в спектре образуются щели (запрещенные зоны). Мы ограничимся здесь исследованием магнитной восприимчивости на краю первой зоны Бриллюэна:  $k = k_r \equiv q/2$ . При отсутствии неоднородностей и в пренебрежении собственным затуханием волн ширина щели в спектре при  $k = k_r$  (соответствующая расстоянию между уровнями расщепленного спектра  $\nu_+(k_r)$  и  $\nu_-(k_r)$ ) равна  $\Lambda$ . При этом на зависимости  $G''(\nu)$  при  $k = k_r$  будут наблюдаться два  $\delta$ -образных пика на расстоянии  $\Lambda$  друг от друга. С ростом среднеквадратичных флуктуаций неоднородностей  $\gamma_i$  расстояние между уровнями спектра  $\Delta\nu = \nu'_+ - \nu'_-$ , где  $\nu'_\pm = \text{Re}\nu_\pm(k_r)$ , уменьшается и при некотором критическом значении  $\gamma_i$  происходит закрытие щели в спектре. Одновременно с ростом  $\gamma_i$  возрастает затухание  $\nu''(k)$ , которое как функция  $k$  имеет максимум при  $k = k_r$ . Пики на зависимости  $G''(\nu)$  с ростом  $\gamma_i$  уменьшаются и сближаются, а их полуширины  $\Gamma$  увеличиваются, пока при некотором  $\gamma_i$  эти пики не сольются в один пик. Качественно картина изменения расстояния между максимумами пиков  $\Delta\nu_m$  соответствует изменению разности между собственными частотами  $\nu'_+ - \nu'_-$ , но точного количественного соответствия между этими величинами при  $\gamma_i \neq 0$  нет.

Интегрирование в выражении (27) выполнялось с использованием приближенных формул (19)–(21). На границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки в двухволновом приближении при условии  $\Lambda, k_\parallel^2, k_0^2 \ll (q/2)^2$  было получено следующее выражение для функции Грина:

$$G(\nu) = \frac{1}{\Lambda} \left\{ X - \frac{1}{4} \times \left[ \frac{1-L}{X - i\eta_1\gamma_1^2 - i\eta_3\gamma_3^2} + \frac{L}{X - i\eta_1\gamma_1^2} \right] - \frac{i\kappa N\eta_1}{12\pi\eta_3^2\gamma_1^2} \times [e^\nu E_1(\nu) + e^{u_-} E_1(u_-) + e^{u_+} E_1(u_+)] \right\}^{-1}, \quad (28)$$

где

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— интегральная показательная функция,  $X = (\nu - k_r^2)/\Lambda$  — безразмерная отстройка частоты от значения  $\nu = k_r^2$ ;  $\eta_1 = k_\parallel q/\Lambda$  и  $\eta_3 = k_0 q/\Lambda$  — безразмерные корреляционные волновые числа соответственно  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей,

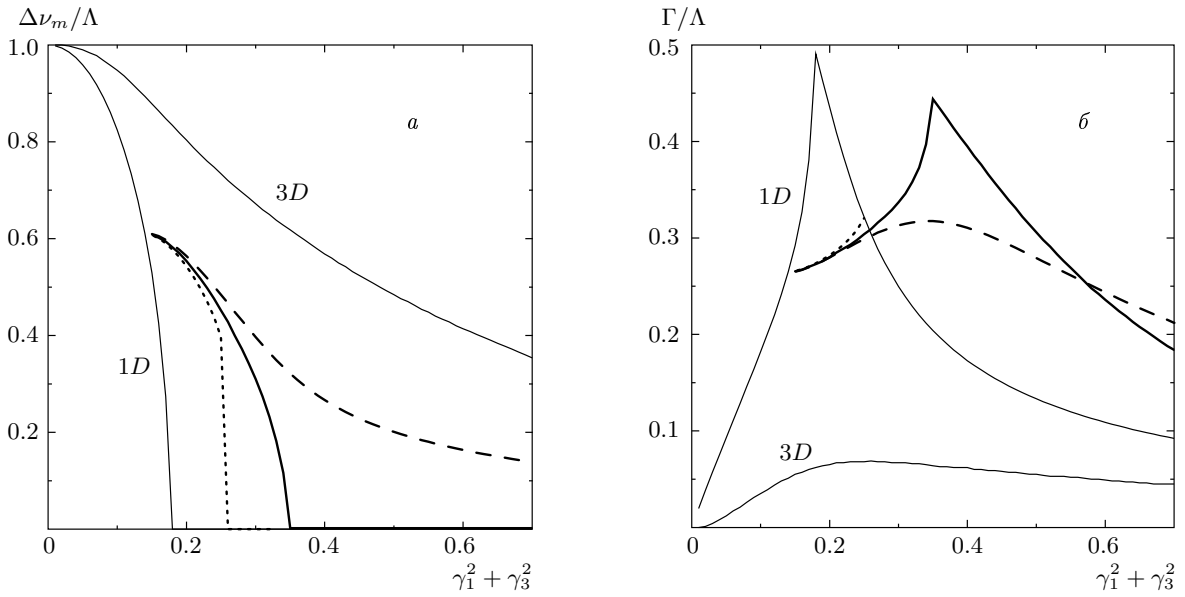
$$\nu = iX \left[ \frac{N}{2\gamma_1^4\eta_3^3\gamma_3^2(1-L)} \right]^{1/3}, \quad (29)$$

$$u_\pm = -\frac{1}{2}iX(1 \pm i\sqrt{3}) \left[ \frac{N}{2\gamma_1^4\eta_3^3\gamma_3^2(1-L)} \right]^{1/3}.$$

При  $\kappa = 0$  формула (28) сводится к исследованному ранее выражению для смеси некоррелированных между собой  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей [23, 24], а при  $\gamma_3 = 0$  или  $\gamma_1 = 0$  — к выражениям соответственно для  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей [26]. (Заметим, что в выражении для  $G(\nu)$ , соответствующем  $1D$ -неоднородностям, в русской версии статьи [26] допущена опечатка.)

На рис. 3а и б показано, к каким изменениям в зависимостях  $\Delta\nu_m$  и  $\Gamma$  от  $\gamma_i^2$  приводит учет взаимных корреляций. Так как с ростом  $\gamma_i$  форма пиков на зависимости  $G''(\nu)$  становится асимметричной, на этих графиках приводится значение  $\Gamma$ , соответствующее правой полуширине правого пика (и, соответственно, левой полуширине левого пика). Тонкими сплошными линиями на этих рисунках показаны зависимости  $\Delta\nu_m$  и  $\Gamma$  для  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей, толстые сплошные линии описывают эти зависимости для смеси некоррелированных ( $\kappa = 0$ ) между собой  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей и соответствуют ситуации, аналогичной рассмотренной в работе [24]: при  $\gamma_1^2 = 0.14$  дальнейший рост  $1D$ -неоднородностей прекращается и начинается рост среднеквадратичной флуктуации  $3D$ -неоднородностей  $\gamma_3$ . Штриховые и пунктирные кривые на этих рисунках описывают такие же зависимости для смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей при наличии соответственно положительных или отрицательных взаимных корреляций.



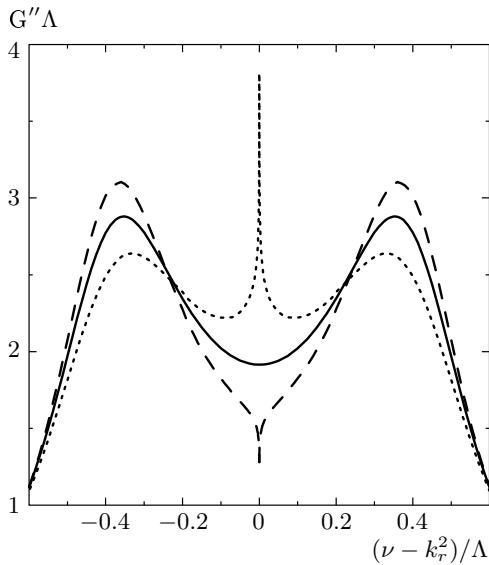


**Рис. 3.** Расстояние между пиками мнимой части функции Грина (а) и полуширина этих пиков (б) как функции суммы  $\gamma_1^2 + \gamma_3^2$  для ситуаций  $\gamma_1^2 \neq 0, \gamma_3^2 = 0$  (кривые 1D),  $\gamma_1^2 = 0, \gamma_3^2 \neq 0$  (кривые 3D) и кривые для смеси 1D- и 3D-неоднородностей ( $\gamma_1^2 = 0.14$  и  $\gamma_3^2 \neq 0$ ) при различных значениях  $\kappa$ :  $\kappa = 0$  (сплошные кривые),  $\kappa = 0.6$  (штриховые кривые) и  $\kappa = -0.6$  (пунктир)

Как видно на рис. 3а, положительные корреляции приводят к тому, что кривая зависимости  $\Delta\nu_m$  от  $\gamma_3^2$  становится более плавной, чем для смеси некоррелированных 1D- и 3D-неоднородностей, и располагается между зависимостями  $\Delta\nu_m$  от  $\gamma_3^2$  для смеси без корреляций и для 3D-неоднородностей. Отрицательные корреляции приводят к более крутому спаду функции  $\Delta\nu_m(\gamma_3^2)$ , чем при  $\kappa = 0$  и, следовательно, к закрытию щели при меньших значениях  $\gamma_3^2$ . С этими результатами согласуется поведение кривых  $\Gamma(\gamma_3^2)$  для смеси неоднородностей (рис. 3б): при  $\kappa > 0$  полуширина линии уменьшается, а при  $\kappa < 0$  возрастает по сравнению с кривой  $\Gamma(\gamma_3^2)$  для некоррелированной смеси 1D- и 3D-неоднородностей. Таким образом, положительные взаимные корреляции, при которых происходит стохастическая пространственная синхронизация флуктуаций интенсивности 1D- и 3D-неоднородностей (рис. 1а), приводит к частичному подавлению влияния смеси 1D- и 3D-неоднородностей на волновой спектр: ширина щели на границе зоны Бриллюэна возрастает, а затухание волны уменьшается по сравнению с эффектом, обусловленным смесью 1D- и 3D-неоднородностей при  $\kappa = 0$ . Отрицательные взаимные корреляции, при которых флуктуации интенсивности 1D- и 3D-неоднородностей стремятся располагаться в

разных точках пространства (рис. 1б), приводят к обратному эффекту: ширина щели уменьшается, а затухание возрастает по сравнению со случаем  $\kappa = 0$ .

Кривая  $\Gamma(\gamma_3^2)$  при  $\kappa < 0$  на рис. 3б проведена только до значения  $\gamma_1^2 + \gamma_3^2$ , соответствующего закрытию щели на рис. 3а, так как дальнейшее описание невозможно в терминах только одной полуширины линии. Это обусловлено своеобразным резонансным эффектом, возникающим в центре запрещенной зоны. Этот эффект был обнаружен нами при исследовании формы мнимой части функции Грина  $G''(\nu)$ , соответствующей выражению (28), полученному при использовании приближенных выражений (20) и (21) для  $K_3(r)$  и  $K_{13}(\mathbf{r})$ . Ввиду качественной новизны эффекта был проведен более строгий расчет функции  $G''(\nu)$ , чтобы убедиться, что обнаруженный эффект не является результатом использованных приближений. Для этого в выражение (27) для массового оператора подставлялась корреляционная функция, содержащая выражения (14) и (15) для  $K_3(r)$  и  $K_{13}(\mathbf{r})$ , в которых фигурировала точная структурная функция  $Q_3(r)$ , определяемая формулой (17). После выполнения интегрирования по угловым переменным интеграл в выражении (27) находился численно. В результате были получены графики зависимости  $G''(\nu)$ , которые приведены на рис. 4; они мало отличаются от зависимостей  $G''(\nu)$ ,



**Рис. 4.** Вид мнимой части функции Грина  $G''(\nu)$  для смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей при  $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = 0.1$ ,  $\eta_1 = \eta_3 = 4$  для  $\kappa = 0$  (сплошная кривая),  $\kappa = 0.6$  (штриховая кривая) и  $\kappa = -0.6$  (пунктир)

соответствующих приближенной формуле (28). На рис. 4 показана форма кривой  $G''(\nu)$  при  $\kappa = 0$  (сплошная кривая),  $\kappa = 0.6$  (штриховая кривая) и  $\kappa = -0.6$  (пунктир). Видно, что при  $\kappa = 0$  имеется обычная кривая с двумя максимумами на частотах  $\nu_m^+$  и  $\nu_m^-$ , примерно соответствующих собственным частотам  $\nu^+$  и  $\nu^-$  для данных значений параметров смеси неоднородностей  $\eta_1, \gamma_1$  и  $\eta_3, \gamma_3$ . Включение положительных корреляций приводит, помимо плавных модификации кривой  $G''(\nu)$  — роста пиков и уменьшению их ширины, — еще и к возникновению резонансной особенности на этой кривой. В центре запрещенной зоны, в окрестности точки  $\nu = k_r^2$ , возникает узкий провал, узкая щель, которая сужается, но не исчезает при дальнейшем возрастании  $\gamma_3$ . При изменении знака  $\kappa$  этот провал также меняет знак и превращается в узкий пик.

Физический механизм возникновения этих новых резонансных эффектов, на наш взгляд, заключается в следующем. Рассмотрим сначала функцию Грина  $3D$ -неоднородностей (выражение (28) при  $\gamma_1 = 0, \kappa = 0$ ). При  $X = 0$  второй член в квадратных скобках расходится и в нуль обращается как действительная, так и мнимая части  $G$ . Таким образом, в отличие от случая  $1D$ -неоднородностей, для которых рост  $\gamma_1$  приводит к закрытию щели, для  $3D$ -неоднородностей узкая щель  $\Delta\omega$  должна наблюдаться при любых  $\gamma_3$ , уменьшаясь с ростом этого параметра:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \approx L^{1/2} \equiv \exp\left(-\frac{3\gamma_3^2}{2}\right), \quad (30)$$

где  $\Delta\omega_0$  — ширина щели для идеальной сверхрешетки.

Эффект узкой щели обусловлен особенностью формы корреляционной функции для  $3D$ -неоднородностей, а именно, существованием корреляционных объемов как с конечным, так и с бесконечным радиусом корреляций, соотношение между которыми определяется асимптотой  $L$ . С ростом  $\gamma_3$  объем с бесконечным корреляционным радиусом уменьшается пропорционально  $L$ , а обусловленная этим объемом узкая щель в волновом спектре сверхрешетки уменьшается пропорционально  $L^{1/2}$ . Реально эффект узкой щели может наблюдаться, пока  $\Delta\omega$  превышает величину затухания, обусловленного любыми другими процессами рассеяния волн, кроме рассеяния их на  $3D$ -неоднородностях структуры сверхрешетки. Эффект узкой щели отсутствует как для  $1D$ -неоднородностей, так и для смеси некоррелированных  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей, так как в обоих случаях убывающая часть корреляционной функции с ростом  $r_z$  уменьшается экспоненциально до нуля, т. е. отсутствует корреляционный объем с бесконечным радиусом корреляции.

Включение положительных корреляций в смеси неоднородностей не приводит к появлению объема с корреляциями бесконечного радиуса. Но оно приводит к появлению корреляционного объема с длинными, слабо убывающими ( $\propto r^{-1}$ ) корреляциями. Это и вызывает частичное восстановление узкой щели в волновом спектре сверхрешетки со смесью  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей при  $\kappa > 0$  (штриховая кривая на рис. 4). При  $\kappa < 0$  этот эффект частично восстановленной узкой щели меняет знак и приводит к эффекту узкого пика (пунктирная кривая на рис. 4). Этот резонанс выглядит весьма эффектно, однако возможность возникновения отрицательных взаимных корреляций, в отличие от положительных, требует выполнения весьма специфических условий (см. разд. 2 данной работы).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена учету влияния на высокочастотную восприимчивость сверхрешетки (функцию

Грина) взаимных корреляций между  $1D$ -неоднородностями, моделирующими случайные отклонения границ между слоями от их периодического расположения, и  $3D$ -неоднородностями, моделирующими случайные деформации поверхностей этих границ. Целью работы являются учет такого типа корреляций, когда для случая положительного коэффициента корреляции рост флуктуаций интенсивности неоднородностей одной размерности приводит к росту флуктуаций интенсивности неоднородностей другой размерности и наоборот, независимо от знака этих флуктуаций. Причина появления таких корреляций может заключаться, в самом общем виде, в допущении, что любая случайная неустойчивость в установке для получения сверхрешеток, вызывающая рост отклонения толщины какого-либо слоя от заданной, может увеличивать и вероятность возрастания деформаций поверхности этого слоя. Для моделирования взаимных корреляций такого типа в смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей вводим функцию распределения, которая описывает корреляцию между модулями  $|\chi_1|$  и  $|\chi_3|$  случайных функций  $\chi_1$  и  $\chi_3$ , оставляя сами эти функции некоррелированными. Введенная функция распределения приводит к появлению стохастической синхронизации между  $|\chi_1|$  и  $|\chi_3|$  в конфигурационном пространстве переменных  $\chi_1$  и  $\chi_3$ . Так как  $\chi_1$  и  $\chi_3$  являются функциями пространственных координат, это приводит, в свою очередь, к возникновению стохастической пространственной синхронизации между флуктуациями интенсивности  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. В принципе, эта синхронизация может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от знака коэффициента взаимных корреляций  $\kappa$ . Но для реальных сверхрешеток вероятность появления положительных или отрицательных взаимных корреляций между  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностями существенно различна. Положительные взаимные корреляции могут довольно естественно возникать в стандартных условиях получения сверхрешеток — например, благодаря случайной неустойчивости в системе, приводящей как к синхронному отклонению в положении границы между слоями, так и к деформации поверхности этой границы. Для возникновения же отрицательных взаимных корреляций требуются весьма специфические условия (например, чтобы увеличение отклонения границы между слоями от равновесного положения приводило к росту поверхностного натяжения, гасящего случайные деформации поверхности этой границы). С помощью введенной функции распределения

выведена корреляционная функция сверхрешетки, содержащая смесь взаимно коррелированных  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. Как было показано ранее [24], влияние неоднородностей на волновой спектр существенно зависит от характера асимптотического поведения корреляционной функции сверхрешетки при  $r \rightarrow \infty$ . Спадающая часть корреляционной функции для  $1D$ -неоднородностей экспоненциально стремится к нулю при  $r_z \rightarrow \infty$ , а убывающая часть корреляционной функции для  $3D$ -неоднородностей при  $r \rightarrow \infty$  стремится к отличной от нуля асимптоте  $L = \exp(-3\gamma_3^2)$ . Поэтому в  $3D$ -случае помимо областей с конечным корреляционным радиусом  $k_0^{-1}$  существуют области с бесконечным корреляционным радиусом. Это приводит к резкому уменьшению затухания волн и увеличению эффективной ширины щели на границе зоны Бриллюэна для  $3D$ -случая по сравнению с  $1D$ -случаем. Для смеси некоррелированных  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей убывающая часть корреляционной функции имеет асимптотику, соответствующую  $1D$ -неоднородностям, т.е. экспоненциально стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . В данной работе показано, что убывающая часть корреляционной функции для смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей с отличным от нуля коэффициентом взаимных корреляций стремится к нулю по степенному закону,  $r^{-1}$ , при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, эта функция по своим асимптотическим свойствам занимает промежуточное положение между корреляционной функцией сверхрешетки с  $3D$ -неоднородностями и корреляционной функцией сверхрешетки с  $1D$ -неоднородностями или смесью некоррелированных  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей. В следующей части работы исследовано расстояние между двумя пиками на мнимой части функции Грина на границе первой зоны Бриллюэна сверхрешетки  $\Delta\nu_m$  и полуширины этих пиков  $\Gamma$  для смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей как при  $\kappa > 0$ , так и при  $\kappa < 0$ . Расстояние между пиками  $\Delta\nu_m$  описывает приближенно ширину первой запрещенной зоны в спектре сверхрешетки, а  $\Gamma$  — затухание волн в ней, обусловленное неоднородностями (собственное затухание для простоты полагаем равным нулю). Оказалось, что положительные взаимные корреляции, при которых происходит стохастическая пространственная синхронизация флуктуаций интенсивности  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей, приводят к частичному подавлению влияния смеси  $1D$ - и  $3D$ -неоднородностей на волновой спектр: ширина щели на границе зоны Бриллюэна возрастает, а затухание уменьшается по сравнению с эффектами,

обусловленными смесью 1D- и 3D-неоднородностей при  $\kappa = 0$ . Отрицательные взаимные корреляции, при которых флуктуации интенсивности 1D- и 3D-неоднородностей стремятся располагаться в разных точках пространства, приводят к обратному эффекту: ширина щели уменьшается, а затухание возрастает по сравнению со случаем  $\kappa = 0$ . В работе показано, что помимо существенного изменения функциональных зависимостей  $\Delta\nu_m$  и  $\Gamma$  от  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_3^2$ , включение взаимных корреляций между 1D- и 3D-неоднородностями приводит к возникновению новой резонансной особенности на мнимой части функции Грина  $G''(\nu)$ . При  $\kappa > 0$  в центре запрещенной зоны в окрестности точки  $\nu = k_r^2$  на функции  $G''(\nu)$  возникает узкий провал, узкая щель, которая сужается, но не исчезает при дальнейшем возрастании  $\gamma_3$ . При изменении знака  $\kappa$  этот провал также меняет знак и превращается в узкий пик. Физический механизм возникновения этих новых резонансных эффектов заключается в следующем. Из полученных аналитических выражений для  $G''(\nu)$  следует, что для 3D-неоднородностей также должен наблюдаться эффект узкой щели. Он обусловлен особенностью корреляционной функции для 3D-неоднородностей, а именно, существованием корреляционных объемов как с конечными, так и с бесконечными радиусами корреляций, соотношение между которыми определяется асимптотой  $L$ . С ростом  $\gamma_3$  объем с бесконечными корреляциями уменьшается пропорционально  $L$ , а обусловленная этим объемом узкая щель в волновом спектре уменьшается пропорционально  $L^{1/2}$ . Если мы добавим 1D-неоднородности к 3D-неоднородностям, объем с бесконечными корреляциями, а вместе с ним и эффект узкой щели исчезнут, так как корреляционная функция смеси неоднородностей экспоненциально уменьшается при  $r \rightarrow \infty$ . Включение положительных взаимных корреляций в смеси неоднородностей не приведет к появлению объема с корреляциями бесконечного радиуса. Но оно приводит к появлению корреляционного объема с длинными убывающими пропорционально  $r^{-1}$  корреляциями. Это и вызывает частичное восстановление узкой щели в спектре смеси 1D- и 3D-неоднородностей при  $\kappa > 0$ . При  $\kappa < 0$  эффект узкой щели меняет знак и приводит к эффекту узкого пика.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-16174) и Красноярского краевого фонда науки (грант № 12F0013С).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Shellan, P. Agmon, and P. Yariv. *J. Opt. Soc. Amer.* **68**, 18 (1978).
2. Ю. Я. Платонов, Н. И. Полушкин, Н. Н. Салащенко, А. А. Фраерман, *ЖТФ* **57**, 2192 (1987).
3. J. M. Luck, *Phys. Rev. B* **39**, 5834 (1989).
4. S. Tamura and F. Nori, *Phys. Rev. B* **41**, 7941 (1990).
5. N. Nishiguchi, S. Tamura, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **48**, 2515 (1993).
6. G. Pang and F. Pu, *Phys. Rev. B* **38**, 12649 (1988).
7. J. Yang and G. Pang, *J. Magn. Magn. Mat.* **87**, 157 (1990).
8. D. H. A. L. Anselmo, M. G. Cottam, and E. L. Albuquerque, *J. Appl. Phys.* **87**, 5774 (1999).
9. L. I. Deych, D. Zaslavsky, and A. A. Lisyansky, *Phys. Rev. E* **56**, 4780 (1997).
10. B. A. Van Tiggelen and A. Tip, *J. de Phys. I* **1**, 1145 (1991).
11. A. R. McGurn, K. T. Christensen, F. M. Mueller, and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **47**, 13120 (1993).
12. M. M. Sigalas, C. M. Soukoulis, C.-T. Chan, and D. Turner, *Phys. Rev. B* **53**, 8340 (1996).
13. V. A. Ignatchenko, R. S. Iskhakov, and Yu. I. Mankov, *J. Magn. Magn. Mat.* **140–144**, 1947 (1995).
14. А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор, *ЖЭТФ* **107**, 111 (1995).
15. А. В. Белинский, *УФН* **165**, 691 (1995).
16. B. Kaelin and L. R. Johnson, *J. Appl. Phys.* **84**, Part I, 5451; Part II, 5458 (1998).
17. V. A. Ignatchenko and Yu. I. Mankov, *Phys. Rev. B* **56**, 194 (1997).
18. А. Н. Малахов, *ЖЭТФ* **30**, 884 (1956).
19. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
20. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, А. В. Поздняков, *ЖЭТФ* **116**, 1335 (1999).
21. V. A. Ignatchenko, A. A. Maradudin, and A. V. Pozdnyakov, *Phys. Met. Metallogr.* **91**, S69 (2001).
22. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **65**, 024207 (2002).

23. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 335 (2003).
24. V. A. Ignatchenko, Yu. I. Mankov, and A. A. Maradudin, *Phys. Rev. B* **68**, 024209 (2003).
25. V. A. Ignatchenko, A. A. Maradudin, and A. V. Pozdnyakov, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 1082 (2003).
26. В. А. Игнатченко, Ю. И. Маньков, *ФТТ* **47**, 565 (2005).
27. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва (1968), с. 520.
28. R. C. Bourret, *Nuovo Cimento* **26**, 1 (1962); *Canad. J. Phys.* **40**, 782 (1962).