

# ФОРМИРОВАНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ВИХРЯ ПРИ ВНЕДРЕНИИ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ В ЖИДКОСТЬ

Г. В. Беляков<sup>a</sup>, А. Н. Филиппов<sup>b\*</sup>

<sup>a</sup> Институт динамики геосфер Российской академии наук  
117979, Москва, Россия

<sup>b</sup> Московский государственный университет пищевых производств  
125080, Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 апреля 2005 г.

В приближении невязкой и несжимаемой жидкости определена предельная форма поверхности кавитационного вихря. Предельная поверхность кавитационного вихря представляет собой оваллоид вращения с отношением осей 5 : 3. Показано, что существует предельное кавитационное число, меньше которого кавитационный кольцевой вихрь невозможен. Эксперименты, проведенные при разных давлениях в жидкости и при разных начальных скоростях струи подтверждают существование предельного кавитационного числа, величина которого близка к 3. При кавитационных числах, меньших предельного, кольцевой кавитационный вихрь не образуется. При существенно меньших кавитационных числах ( $k \leq 0.1$ ) формируется вытянутая несимметричная кавитационная каверна с воспроизводящейся центральной струей. Длина воспроизводящейся струи может в несколько раз превышать длину начальной струи. Структура такого течения была названа несимметричным кавитационным вихрем, хотя движение такой структуры не удалось получить близким к стационарному.

PACS: 47.32.Cc, 47.55.Vx, 47.27.Wg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Из анализа вихревых течений [1] следует, что в неограниченной и покоящейся, несжимаемой и невязкой жидкости кольцевой вихрь движется с постоянной скоростью, не теряя на своем пути захваченную в атмосферу вихря массу жидкости. Величина самоиндуцированной поступательной скорости вихря и внутренняя структура течения зависят от распределения завихренности в объеме вихря. Ограниченное в объеме вихревое течение, в частности, образуется при выталкивании из отверстия или сопла конечной порции жидкости. При очень малых скоростях выталкивания возникает структура течения сферического вихря Хилла. С увеличением скорости образуются различные структуры вихревых колец, предельным видом которых является структура вихревой нити, движущейся с бесконечно большой поступательной скоростью [2]. Однако, как указано в работе [3], при начальных скоростях вытал-

кивания около 10 м/с вследствие сильного вращения жидкости возникает кавитационное кольцо. В той же работе говорится, что это кольцо возникает в момент образования вихря при срыве пограничного слоя с края сопла. Здесь, в частности, следует заметить, что в структуре течений вихря Хилла недопустимо образование поверхности кавитационной каверны, внутри которой постоянно давление, а значит, и скорость жидкости, движущейся вдоль кавитационной поверхности. Известно только, что существование кавитационной поверхности возможно в линейных цилиндрических вихрях, когда поверхность каверны представляет поверхность круглого цилиндра. Далее в работе [3] отмечается, что если начальную скорость струи увеличить до значений, больших 20 м/с, то кавитационная каверна становится столь большой, что возникает неустойчивость и вихрь разрушается.

В работе [4] исследовалось формирование вихря при начальных скоростях выстреливания струи, больших 50 м/с, и при атмосферном давлении в жидкости. В момент выстрела струи в плоскости,

\*E-mail: a.filippov@mgupp.ru

перпендикулярной направлению движения струи, начиная от края сопла, возникала каверна в виде узкого кольцевого разрыва жидкости. Поперечный диаметр каверны значительно превосходил диаметр струи. В течение времени выхода струи из сопла поверхность каверны преобразовывалась в почти цилиндрическую поверхность, растущую в направлении движения струи. После отстрела струи, в результате смыкания тыльной поверхности каверны под действием внешнего давления, внутри каверны вдоль ее оси симметрии возникала собственная центральная струя. Возникшая струя, пройдя сквозь каверну и внедряясь в жидкость, продолжала формировать каверну в виде конуса с выпуклой боковой поверхностью. Выпуклое дно каверны, производящее струю, двигалось вперед в ту же сторону, что и струя. Таким образом, в жидкости возникало движение самовоспроизводящейся струи.

Со временем возникшая струя утончалась, и, как только конусная поверхность теряла выпуклость, каверна распадалась. Особенностью геометрии каверны являлась несимметричность ее овальной тыльной и сильно вытянутой носовой частей. Если начальное давление в жидкости увеличивалось, то при тех же самых параметрах выстреливаемой струи образовывалась симметричная каверна в виде овалоида, движущегося сплюснутой поверхностью вперед с почти постоянной скоростью. Из анализа указанных работ [3, 4] было предположено, что структура течений с кавитационными кавернами должна зависеть как от скорости начальной струи, инициирующей последующее течение, так и от давления в жидкости. Естественно принять, что безразмерным параметром, определяющим облик кавитационного течения, является кавитационное число

$$k = \frac{\Delta p}{\rho v^2 / 2},$$

где  $\Delta p$  — разность между внешним давлением (атмосферным и гидростатическим) и внутренним давлением в полости (упругость пара),  $\rho$  — плотность жидкости,  $v$  — скорость вихря.

## 2. ТЕОРИЯ

Исследуем форму и параметры движения осесимметричной каверны со струей, движущейся вдоль оси симметрии. В дальнейшем система каверна — центральная струя будет называться кавитационным вихрем. На рис. 1 представлена схема кавитационного вихря, движущегося с постоянной скоростью

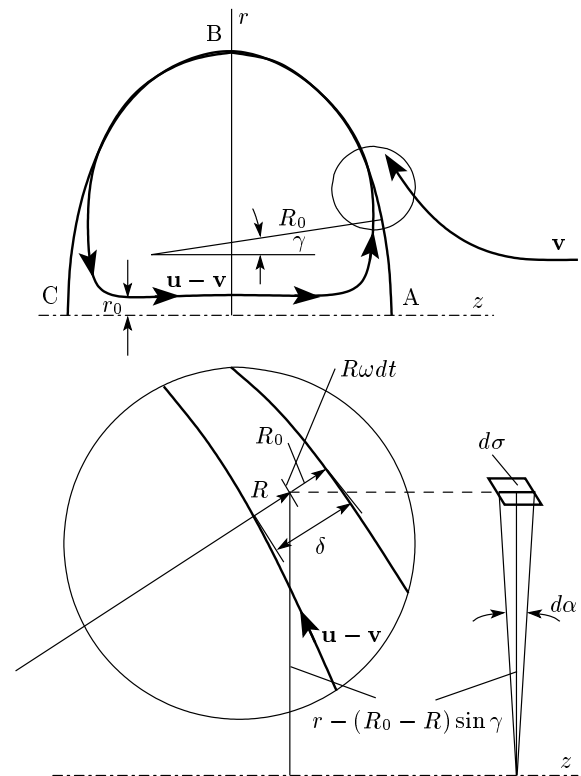


Рис. 1. Схематическое представление кавитационного вихря

стью  $v$  относительно невязкой, несжимаемой и покоящейся вдали от него жидкости под давлением  $P_\infty$ . Внутри пустой осесимметричной каверны с постоянной скоростью  $u > v$  в направлении вектора скорости вихря (вдоль оси  $z$ ) движется центральная струя радиуса  $r_0$ . В точке А струя, проникая в жидкость, разворачивается и растекается вдоль внешней поверхности каверны слоем переменной толщины  $\delta$ . Внешняя поверхность каверны граничит с одной стороны с внешним потенциальным потоком, обтекающим вихрь, а с другой — со слоем растекающейся струи, прилипающей одной своей поверхностью к обтекающему потоку. Внутренняя поверхность каверны является границей между слоем растекающейся струи и «пустым» объемом каверны. В системе координат, связанной с вихрем, скорость жидкости на свободной линии тока вдоль внутренней поверхности каверны постоянна и равна  $u - v$ . Под действием давления жидкости набегающего внешнего потока скорость роста поперечного размера каверны постепенно уменьшается и в точке В на вершине каверны ее размер достигает максимального значения. Затем каверна сжимается, а растекающаяся вдоль ее внешней поверхности жидкость собирается вблизи точки С и

формирует центральную струю.

Из условий постоянства скорости вдоль свободных линий тока по внутренней поверхности каверны и отсутствия проскальзывания течения в слое растекшейся струи следует, что локальная угловая скорость для элемента струи толщиной  $\delta$  равна

$$\omega = \frac{u - v}{R_0 - \delta}. \quad (1)$$

Здесь  $R_0$  — радиус кривизны внешней поверхности каверны в плоскости, проходящей через ось  $z$  симметрии каверны, в которой толщина слоя растекшейся струи равна  $\delta$ . Для осесимметричных движений жидкости, стационарных в системе координат, движущейся вместе с вихрем, отношение  $\omega/r$  постоянно вдоль линии тока [3]. Поэтому из выражения (1) сразу следует, что вдоль граничных линий тока, образующих внешнюю поверхность каверны, выполняется условие

$$R_0 r \left(1 - \frac{\delta}{R_0}\right) = c = \text{const}. \quad (2)$$

Величину  $\delta/R_0$  можно найти из равенства потоков массы в центральной струе и в струе, растекшейся вдоль внешней поверхности вихря (рис. 1),

$$\begin{aligned} \pi r_0^2 \rho (u - v) &= \\ &= \int_{R_0 - \delta}^{R_0} 2\pi \rho [r - (R_0 - R) \sin \gamma] \omega R dR, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r$  — ордината внешней поверхности вихря. Уравнение (3) после интегрирования принимает вид:

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \frac{R_0^2}{\Delta} \times \\ &\times \left[ \left( \frac{r}{R_0} - \sin \gamma \right) (1 - \Delta^2) + \frac{2}{3} \sin \gamma (1 - \Delta^3) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta = 1 - \delta/R_0$ . Если ограничиться членами первого порядка малости по параметру  $\delta/R_0$ , то из уравнения (4) следует, что

$$\frac{\delta}{R_0} \approx \frac{r_0^2}{2rR_0 + r_0^2}. \quad (5)$$

После подстановки значения  $\delta/R_0$  из (5) в уравнение (2) уравнение внешней поверхности вихря в цилиндрических координатах записывается в виде

$$R_0 r = \frac{(1 + z'^2)^{3/2}}{|z''|} r = c. \quad (6)$$

Интегрируя (6) два раза, получаем следующее уравнение внешней поверхности вихря:

$$z(r) = \pm \int_{\sqrt{2c}}^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{4c^2 - r^4}}. \quad (7)$$

Из формулы (7) следует, что

$$b \equiv r_{max} = \sqrt{2c},$$

$$a \equiv z_{max} = \int_0^{r_{max}} \frac{r^2 dr}{\sqrt{r_{max}^4 - r^4}}.$$

Радиусы кривизны в точках ( $r = b, z = 0$ ) и ( $r = 0, z = \pm a$ ) можно найти сразу после подстановки найденного значения постоянной  $c = b^2/2$  в уравнение (6). Они равны, соответственно,  $b/2$  и  $\infty$ . Форма внешней поверхности кавитационного вихря в осевом сечении близка к частной форме эллипсообразного овала Кассини [5], общее уравнение которого в плоскости  $rz$  записывается как

$$(r^2 + z^2)^2 - 2l^2(r^2 - z^2) = m^4 - l^4.$$

В частном случае, когда  $m = l\sqrt{2}$ , отношение полуосей овала равно  $\sqrt{3}$ , а радиусы кривизны в соответствующих точках А, С и В, Д совпадают с радиусами кривизны кавитационного вихря, где точка Д симметрична точке В относительно оси  $z$  (см. рис. 1).

Численный анализ безразмерной формы уравнения (7) дает для кавитационного вихря приближенное значение отношения полуосей овалоида:

$$\frac{r_{max}}{z_{max}} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^4}}} \approx \frac{5}{3}. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) следует, что при увеличении радиуса выстреливаемой струи форма вихря изменяется подобно. Движение вихря не искажает течение обтекающей его жидкости, если вдоль граничной поверхности вихря скорости внутреннего и внешнего течений жидкости совпадают. Склеивая вдоль граничной поверхности внутреннее вихревое течение с внешним потенциальным течением, можно определить связь внутренних и внешних параметров течения.

Обтекание найденной граничной поверхности вихря неизвестно, однако эта поверхность (нулевая поверхность тока) близка к вписанному в нее сфероиду

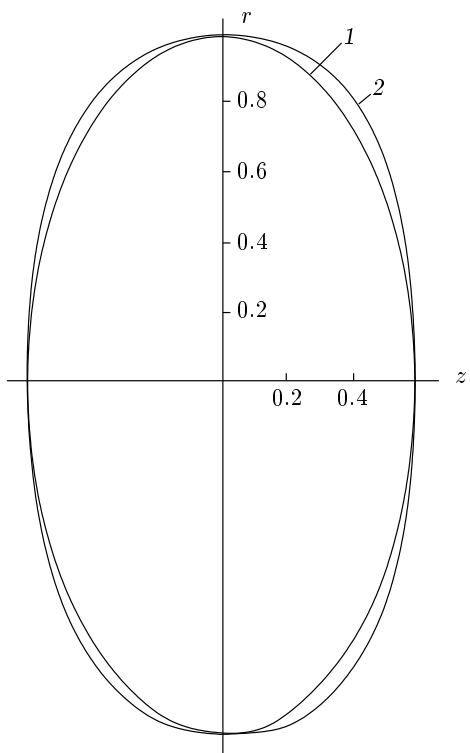


Рис. 2. 1 — Эллипсоид вращения — сфероид, 2 — оваллоид вращения — поверхность кавитационного вихря

с тем же отношением полуосей (рис. 2). Потенциал поперечного обтекания сфероида [6] равен

$$\varphi = vz \left( 1 + \frac{\frac{1}{\mu} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}}{\operatorname{arcsin} e - e\sqrt{1 - e^2}} \right),$$

где

$$\mu^2 = \frac{\lambda^2 + a^2}{b^2 - a^2},$$

эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}},$$

а  $\lambda$  — положительный корень уравнения

$$\frac{r^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{a^2 + \lambda} = 1.$$

Склеивание скоростей внутреннего и внешнего течений вдоль общей нулевой поверхности тока ( $\lambda = 0$ ) удобно проводить в точке В, где максимальная внешняя скорость обтекания поверхности вихря потенци-

альным потоком приравняется к скорости обтекания сфероида:

$$v_0|_B = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow 0}} = v \left( 1 + \frac{\frac{1}{\mu} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu}}{\operatorname{arcsin} e - e\sqrt{1 - e^2}} \right) \equiv vq. \quad (9)$$

Условие склеивания скоростей в точке В запишется в виде

$$vq = \omega R_0|_B. \quad (10)$$

Помимо равенства скоростей на поверхности раздела вихревого и потенциального течений имеет место равенство давлений по обе стороны этой поверхности.

Сила  $df$ , действующая вдоль направления радиуса кривизны от элемента (массы) растекшейся струи  $dm$ , находящегося на расстоянии  $R$  от мгновенного центра вращения (рис. 1), равна

$$df = \frac{\omega^2 R^2 dm}{R} = \omega^2 R \rho d\sigma dR,$$

где  $d\sigma dR$  — объем элемента массы,

$$d\sigma = R\omega dt [r - (R_0 - R) \sin \gamma] d\alpha$$

— элемент поверхности, перпендикулярный радиусу  $R$ ,  $\omega dt$  — локальный угол поворота слоя струи.

Суммарная сила, приложенная к единице поверхности раздела со стороны слоя толщиной  $\delta$ , равна

$$P = \frac{f}{d\sigma_0} = \rho \frac{\omega^2}{R_0 - r} \times \int_{R_0 - \delta}^{R_0} [r - (R_0 - R) \sin \gamma] R^2 dR = \rho \omega^2 \frac{R_0^3}{4r} \times \left[ \frac{4}{3}(1 - \Delta^3) \left( \frac{r}{R_0} - \sin \gamma \right) + \sin \gamma (1 - \Delta^4) \right]. \quad (11)$$

Здесь  $d\sigma_0 = R_0 \omega dt r d\alpha$  — элемент площади, находящейся на поверхности вихря. Оставляя в выражении (11) только члены не старше первого порядка по  $\delta/R_0$ , получаем давление на внешней поверхности каверны со стороны слоя:

$$P = \rho \omega^2 R_0 \delta. \quad (12)$$

Давление на поверхности вихря со стороны обтекающего его потенциального потока находится из

интеграла Бернулли, записанного вдоль нулевой линии тока:

$$P_\infty + \frac{\rho v^2}{2} = P + \rho \frac{(qv)^2}{2}.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$P = \frac{\rho v^2}{2}(k + 1 - q^2),$$

где  $k = 2P_\infty/\rho v^2$  — число кавитации, отнесенное к скорости движения вихря. Сравнение давлений по обе стороны поверхности вихря в точке В с учетом условия сращивания скоростей (10) приводит к соотношению

$$k = q^2 \left( 1 + 2 \frac{\delta}{R_0} \right) - 1.$$

Подставляя в последнее уравнение значение  $\delta/R_0$  на вершине вихря (5), получаем число кавитации в виде

$$k = q^2 \left( 1 + \frac{2}{b^2/r_0^2 + 1} \right) - 1.$$

Для тонких струй, когда  $b^2/r_0^2 \gg 1$ , имеем  $k_{min} = q^2 - 1$ . Величину  $q$  можно оценить по найденному отношению (8) полуосей овалоида.

При значениях  $e = 4/5$  и  $\mu = 0.75$  коэффициент увеличения скорости набегающего потока в точке В принимает значение 1.91. Таким образом, из приведенного выше исследования вытекает, что симметричные кавитационные вихри возможны, если соответствующие им кавитационные числа больше некоторого предельного значения, которое по нашим оценкам приблизительно равно  $k_{min} \approx 2.65$ .

В принятом приближении  $(\delta/R_0)^2 \ll 1$  произведение радиусов кривизны поверхности кавитационного вихря, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях  $((r_0, z)$  и  $z = \text{const}$ ), является постоянной величиной. На основании найденного геометрического свойства внешней поверхности вихря, используя (1), (5) и (12), легко убедиться в том, что скорость и давление жидкости вдоль внешней границы вихря не меняются.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТ

С целью визуализации структуры кавитационных вихрей проведены эксперименты по следующей схеме. Из сопла диаметром 1 см со скоростью от нескольких десятков сантиметров до нескольких метров в секунду выстреливалась струя в рабочий объем с жидкостью (рис. 3). Рабочий объем представлял собой вертикально поставленный металлический цилиндр с внутренним диаметром 11 см и

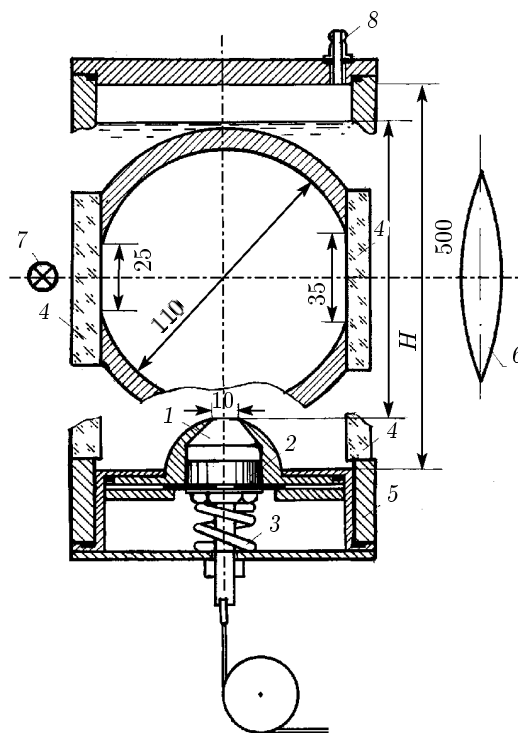


Рис. 3. Схема экспериментальной установки: 1 — сопло, 2 — поршень, 3 — пружина, 4 — окна, 5 — металлический цилиндр, 6 — кинокамера (АКС-4), 7 — осветитель, 8 — патрубок

высотой 80 см. Сопло располагалось в нижнем торце цилиндра. На боковой поверхности цилиндра напротив друг друга находились два довольно узких стеклянных окна высотой около 50 см. Одно из них, освещенное рассеянным светом, было шириной 2.5 см. Другое окно, через которое проводилась киносъемка, имело ширину 3.5 см. Киносъемка проводилась камерой с частотой съемки 100 кадров в секунду. Верхний торец цилиндра был закрыт крышкой с патрубком, соединенным с форвакуумным насосом и манометрами, измеряющими давление газа над поверхностью жидкости.

В экспериментах давление газа над поверхностью жидкости менялось в пределах от давления упругости пара до 1 атм. Давление жидкости в рабочем объеме на расстоянии  $x$  от сопла складывалось из давления газа  $P$  над поверхностью жидкости и гидростатического давления  $P_g = \rho g(H - x)$ , где  $H$  — глубина жидкости над соплом. С целью улучшения гладкости возникающей в опытах кавитационной поверхности в рабочую жидкость (воду) для увеличения ее вязкости добавлялся глицерин. Опыты проводились либо при постоянном давлении в жидко-

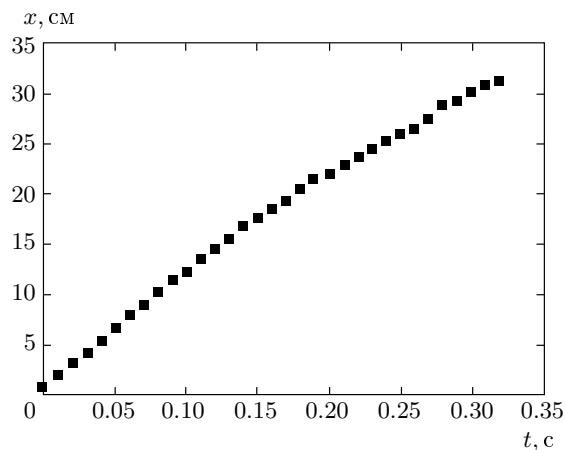


Рис. 4. Зависимость координаты  $x$  передней части вихря от времени  $t$

сти (на уровне сопла), либо при постоянной скорости выстреливаемой струи. Соответственно, в том или другом случае менялись или скорость струи, или давление газа над поверхностью жидкости. Эти эксперименты проводились в жидкости плотностью  $1.087 \text{ г/см}^3$ , представляющей собой смесь воды с глицерином с вязкостью, в три раза большей вязкости воды. Поверхность жидкости находилась на расстоянии  $33.5 \text{ см}$  от среза сопла. В обоих случаях, как при постоянном давлении в жидкости, так и при постоянной скорости выстреливания струи существовали, соответственно, или предельная скорость выстреливания, или давление, при которых кольцевой кавитационный вихрь не возникал, а свободная поверхность жидкости над соплом оставалась спокойной. В противоположных случаях, при выходе кольцевого вихря на поверхность жидкости, с поверхности вылетала струйка. Таким образом, было найдено критическое (или предельное) кавитационное число

$$k = \frac{P + \rho g H - P_n}{\rho v^2 / 2} \approx 3.$$

На рис. 4 приведен график движения кольцевого кавитационного вихря при кавитационных числах, близких к предельным. В этом опыте давление газа над поверхностью жидкости было равно упругости пара и составляло  $P = P_n = 0.016 \text{ атм}$ , а гидростатическое давление над уровнем сопла —  $0.036 \text{ атм}$ . Кавитационная каверна вихря по форме была близка к поверхности полого тора с отношением  $b/r_0$  около двух. Продольный размер пустой трубки тора в процессе движения вихря практически не менялся и был чуть менее одного см. Только при подходе

вихря к свободной поверхности тор немного «разбухал», увеличивая свои поперечный и продольный размеры.

При кавитационных числах, значительно меньших предельного кавитационного числа ( $k \leq \leq 0.1-0.2$ ), в жидкости возникал несимметричный кавитационный вихрь с центральной самовоспроизводящейся струей.

На рис. 5 приведены последовательные кадры (с интервалом  $0.01 \text{ с}$ ) возникновения и движения несимметричного вихря в водном растворе глицерина с плотностью  $\rho = 1.17 \text{ г/см}^3$  и вязкостью, в 20 раз большей вязкости воды.

Высота столба жидкости над соплом  $H = = 12.5 \text{ см}$ . Начальная струя, выстреливаемая из сопла, имела длину  $2-2.5 \text{ см}$  и скорость  $4.5 \text{ м/с}$ .

Давление паров над поверхностью жидкости  $P_n = 0.0134 \text{ атм}$ . Гидростатическое давление на уровне сопла  $P_g = 0.0143 \text{ атм}$ . На фоне заднего окна, освещенного рассеянным светом, видно формирование кавитационной полости в виде темной непрозрачной цилиндрической бутылки. Со второго кадра на фоне уменьшенного изображения заднего светящегося окна (кавитационная каверна работает как линза) просматривается струя, движущаяся от дна каверны вдоль ее оси симметрии. В верхней головной части каверны струя, проникая в жидкость, непрерывно формирует движущуюся вверх поверхность каверны. По мере движения объем полости увеличивается, а вытесненная жидкость приводит к подъему ее первоначального уровня в рабочем цилиндре. Образовавшийся до начала эксперимента пузырек растворенного в жидкости воздуха, прилипший к правой стороне сферической внешней поверхности соплового блока (в правой нижней части кадра), может служить для последующей интерпретации картины течения качественным сравнительным отметчиком величины давления в жидкости. После прорыва струей свободной поверхности жидкости (7-й кадр) присоединенное к поверхности каверны движение жидкости вверх практически прекращается, каверна уменьшается, давление в жидкости увеличивается. К 10-му кадру каверна схлопывается, распадаясь на две вихревые структуры: верхнюю — нерегулярную и хаотичную — и нижнюю — регулярный симметричный кавитационный кольцевой вихрь с большим множеством поперечных перетяжек вдоль каверны. К этому моменту давление в жидкости максимально. Затем давление уменьшается, в результате чего диаметр кавитационной трубки увеличивается и исчезают перетяжки вдоль кольцевой полости кавитационного ви-

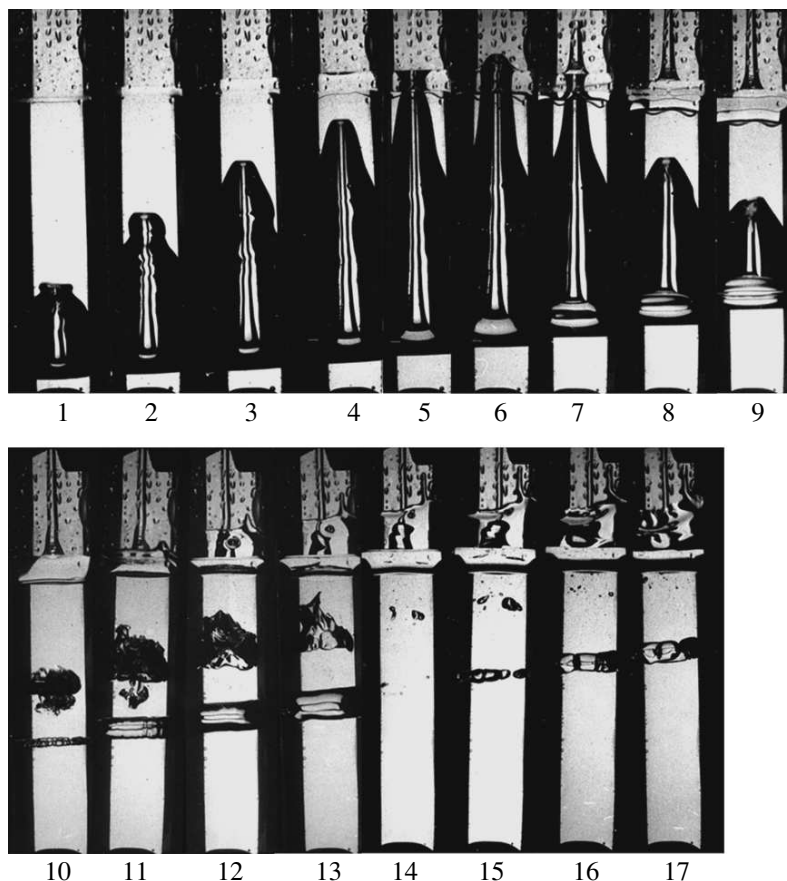


Рис. 5. Этапы возникновения и зарождения вихря. Цифрами указаны номера кадров (интервал между кадрами 0.01 с)

хря (11-й кадр). Через кольцевую полость (трубку) просматривается уменьшенное изображение заднего полукольца кавитационной трубки в виде двух горизонтальных линий. К 14-му кадру верхнее хаотичное кавитационное образование схлопывается, приводя к резкому увеличению давления в жидкости. Следствием почти скачкообразного повышения давления в жидкости является исчезновение (схлопывание) кавитационной полости вихря. Затем давление в жидкости уменьшается, и в окрестности бывшей кольцевой каверны кавитационного вихря возникает новая кольцевая каверна с несколькими поперечными перетяжками. Если оценить в этом опыте кавитационное число кольцевого вихря, то оно близко к 4.5.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований показано, что симметричные (кольцевые) кавитационные

(полюе) вихри возникают при значении кавитационного числа  $k \geq 3$ . При кавитационных числах, на порядок меньших, возникает несимметричный полюй вихрь, который самопроизвольно распадается. При его распаде возникает кольцевой полюй вихрь. Если в процессе движения кольцевого полого вихря быстро увеличить давление в объеме жидкости, то на поверхности полости вихря появятся перетяжки, количество которых зависит от того, на сколько было увеличено давление. Появление многочисленных перетяжек связано с изменением поперечного размера полой трубки, от которого зависит давление поверхностного натяжения. Вполне вероятно, что на устойчивость кавитационной поверхности трубки влияет отношение центробежных сил к силам поверхностного натяжения, действующих на поверхности полости, т. е.

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2 R_0\delta}{T/R_{00}},$$

где  $R_{00}$  — поперечный внутренний радиус кривизны полой трубки. Для кавитационного числа  $k = 3$ , величина

$$\delta = \frac{R_0}{2q^2}(k + 1 - q^2) \approx 5 \cdot 10^{-2} R_0.$$

Поэтому отношение сил  $\lambda$  можно приближенно представить в виде

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \frac{\rho v^2}{T} R_{00}.$$

Отсюда следует, что устойчивость кавитационной поверхности полых кольцевых вихрей наблюдается при достаточно больших размерах полости вихрей.

Авторы признательны Ю. Д. Шмыглевскому за проявленное внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 97-01-00127).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОГИЗ, Москва–Ленинград (1947).
2. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Мир, Москва (1973).
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, Москва (1973).
4. М. А. Садовский, В. Н. Родионов, Г. В. Беляков, *ДАН* **325**, 42 (1992).
5. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1965).
6. Н. Е. Кочин, К. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ОГИЗ, Москва–Ленинград (1948).