

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-РАЗМЕРНОГО СКЕЙЛИНГА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ АНДЕРСОНА. ВОЗМОЖНОСТЬ ПОЛОСЫ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРИ $d > 2$

*И. М. Суслов\**

*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 декабря 2005 г.

Предложена аналитическая реализация конечно-размерного скейлинга, основанного на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем. Сопоставление полученных аналитических результатов с результатами численного моделирования указывает на расщепление точки перехода Андерсона в полосу критических состояний. Этот вывод имеет независимые подтверждения в численных экспериментах [18, 20, 22]. Возможность возврата к общепринятой физической картине существует, но требует радикально новой интерпретации первичных численных данных.

PACS: 03.65.-w, 05.50.+q, 11.10.Ni, 71.23.An

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе автора [1] проведен анализ распространенного варианта конечно-размерного скейлинга, основанного на использовании минимального показателя Ляпунова для вспомогательных квазиодномерных систем [2–5]. Показано, что в двумерном ( $2D$ ) случае минимальный показатель Ляпунова не удовлетворяет однопараметрическому скейлингу, что означает несправедливость обычной интерпретации первичных численных данных. В частности, вопреки утверждению авторов работ [3–5], в  $2D$ -системах возможен переход типа Костерлица–Таулеса между экспоненциальной и степенной локализацией [2].

Используемый подход основан на исследовании вторых моментов решения задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера, и в этом отношении он близок к подходу недавних работ [6, 7]. Однако формальные пересечения с этими работами ограничиваются исходной системой уравнений (5), тогда как обоснование метода и интерпретация результатов существенно различны; фактически мы

не согласны с большинством утверждений, сделанных в этих работах (см. обсуждение в разд. 5). Ниже предлагаются результаты исследований для размерностей  $d > 2$ .

Кроме явной демонстрации существования перехода Андерсона при  $d > 2$  (что имеет известный формальный интерес, хотя и не содержит физической новизны), используемый подход приводит к выводу о возможности «расщепления» перехода Андерсона. При изменении амплитуды  $W$  беспорядка существуют две критические точки,  $W_c$  и  $W_{c0}$ : при  $W > W_{c0}$  — экспоненциальная локализация, при  $W < W_c$  — металлическая фаза, тогда как в интервале  $W_c < W < W_{c0}$  — полоса критических состояний, характеризующихся степенной огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне.

Такая картина имеет прямые подтверждения в численных экспериментах, но противоречит существующим теоретическим представлениям. Возврат к общепринятой физической картине возможен, но требуется радикально новая интерпретация первичных численных данных: нужно признать, что общепринятые значения точки перехода Андерсона являются сильно завышенными и реально переход происходит при значительно более слабом беспорядке.

\*E-mail: suslov@kapitza.ras.ru

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Обсуждаемый алгоритм основан на рассмотрении вспомогательных квазиодномерных систем: так, вместо бесконечной 3D-системы рассматривается система с размерами  $L \times L \times L_z$ , где  $L_z \rightarrow \infty$ . Решение задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера с начальными условиями, заданными на левом конце, допускает разбиение [1]

$$\psi_n(r_\perp) = A_1(n, r_\perp) e^{\gamma_1 n} + A_2(n, r_\perp) e^{\gamma_2 n} + \dots + A_m(n, r_\perp) e^{\gamma_m n}, \quad (1)$$

где  $\gamma_s$  — показатели Ляпунова ( $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_m > 0$ ),  $n$  — дискретная координата вдоль продольной оси (в единицах постоянной решетки),  $r_\perp$  — поперечная координата,  $A_s(n, r_\perp)$  — ограниченные функции. Показатели Ляпунова  $\gamma_s$  существуют в силу теоремы Оселедца [8] и могут быть найдены численно методом трансфер-матрицы [2]. Минимальный показатель Ляпунова  $\gamma_{min} \equiv \gamma_m$  можно использовать для оценки корреляционного радиуса  $\xi_{1D}$  квазиодномерной системы ( $\xi_{1D} \sim 1/\gamma_{min}$ ), что позволяет ввести скейлинговый параметр  $g = \xi_{1D}/L$ , возрастающий как функция  $L$  в фазе с дальним порядком и убывающий в фазе с короткодействием [1, 2].

Среднее значение  $\langle \psi_n(r_\perp) \rangle$  внутри разрешенной зоны не имеет систематического роста [1], а для вторых моментов справедливо разбиение, аналогичное (1),

$$\langle \psi_n^2(r_\perp) \rangle = B_1(r_\perp) e^{\beta_1 n} + B_2(r_\perp) e^{\beta_2 n} + \dots + B_m(r_\perp) e^{\beta_m n}, \quad (2)$$

с тем же числом положительных показателей  $\beta_s$ . Как подробно обсуждалось ранее [1], показатели  $\beta_s$  дают строгую верхнюю оценку для  $\gamma_s$  ( $\beta_s \geq 2\gamma_s$ ), тогда как в типичной физической ситуации справедлива оценка  $\beta_s \sim \gamma_s$ . Последнее следует из соотношения  $b_s \lesssim a_s$  для параметров  $a_s$  и  $b_s$ , входящих в логарифмически нормальное распределение [1], которое подтверждается доступными аналитическими результатами для слабого [9] и сильного [10] беспорядка и разнообразным численным счетом [11]. Поэтому исследование разбиения (2) позволяет получить качественную информацию о спектре показателей  $\gamma_s$  и строгие ограничения на их поведение.

Рассмотрим  $d$ -мерную модель Андерсона, описываемую дискретным уравнением Шредингера

$$\psi_{n+1, \mathbf{m}} + \psi_{n-1, \mathbf{m}} + \sum_i \psi_{n, \mathbf{m} + \mathbf{e}_i} + V_{n, \mathbf{m}} \psi_{n, \mathbf{m}} = E \psi_{n, \mathbf{m}}, \quad (3)$$

где мы выделили продольную координату  $n$ ;  $\mathbf{m}$  — векторный номер узла в поперечном направлении,  $\mathbf{e}_i$  — единичные векторы, направленные из узла  $\mathbf{m}$  к ближайшим соседям в плоскости  $n = \text{const}$ . Введя набор парных корреляторов

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle \psi_{n, \mathbf{m}} \psi_{n, \mathbf{m}'} \rangle, \\ y_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle \psi_{n, \mathbf{m}} \psi_{n-1, \mathbf{m}'} \rangle, \\ z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) &\equiv \langle \psi_{n-1, \mathbf{m}} \psi_{n, \mathbf{m}'} \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

нетрудно получить для них замкнутую систему разностных уравнений, которая при  $E = 0$  имеет вид (подробнее см. [1])

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n+1) &= W^2 \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) + \\ &+ \sum_{i, j} x_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{m}' + \mathbf{e}_j}(n) + x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n-1) + \\ &+ \sum_i y_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{m}'}(n) + \sum_j z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' + \mathbf{e}_j}(n), \end{aligned} \quad (5)$$

$$y_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n+1) = - \sum_i x_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{m}'}(n) - z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n),$$

$$z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n+1) = - \sum_j x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' + \mathbf{e}_j}(n) - y_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n).$$

Величины  $V_{n, \mathbf{m}}$  считаются статистически независимыми, причем

$$\langle V_{n, \mathbf{m}} \rangle = 0, \quad \langle V_{n, \mathbf{m}} V_{n', \mathbf{m}'} \rangle = W^2 \delta_{nn'} \delta_{\mathbf{m}\mathbf{m}'}. \quad (6)$$

Зависимость решения от  $n$  является экспоненциальной,

$$\begin{aligned} x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) &= x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} e^{\beta n}, \quad y_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) = y_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} e^{\beta n}, \\ z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n) &= z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} e^{\beta n}, \end{aligned} \quad (7)$$

и после формальной замены переменных

$$x_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'} \equiv \tilde{x}_{\mathbf{m}, \mathbf{m}' - \mathbf{m}} \equiv \tilde{x}_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} \quad \text{и т. д.} \quad (8)$$

получим, опуская тильды,

$$\begin{aligned} (e^\beta - e^{-\beta}) x_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} &= W^2 \delta_{\mathbf{l}, \mathbf{0}} x_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} + \\ &+ \sum_{i, j} x_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{l} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i} + \\ &+ \sum_i y_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{l} - \mathbf{e}_i} + \sum_j z_{\mathbf{m}, \mathbf{l} + \mathbf{e}_j}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$e^\beta y_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} = - \sum_i x_{\mathbf{m} + \mathbf{e}_i, \mathbf{l} - \mathbf{e}_i} - z_{\mathbf{m}, \mathbf{l}},$$

$$e^\beta z_{\mathbf{m}, \mathbf{l}} = - \sum_j x_{\mathbf{m}, \mathbf{l} + \mathbf{e}_j} - y_{\mathbf{m}, \mathbf{l}}.$$

Коэффициенты не зависят от  $\mathbf{m}$ , и потому зависимость решения от  $\mathbf{m}$  экспоненциальна,

$$x_{\mathbf{m},\mathbf{l}} = x_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{m}} \quad \text{и т. д.}, \quad (10)$$

где разрешенные значения импульса  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{d-1})$  определяются периодическими граничными условиями в поперечном направлении,  $\psi_{n,\mathbf{m}+L\mathbf{e}_i} = \psi_{n,\mathbf{m}}$ , и для каждого  $p_i$  равны  $2\pi s/L$ ,  $s = 0, 1, \dots, L-1$ . Используя (10) и исключая  $y_{\mathbf{m},\mathbf{l}}$  и  $z_{\mathbf{m},\mathbf{l}}$  из первого уравнения (9), приходим к уравнению

$$\sum_{i,j} x_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j} \left[ 2 \operatorname{ch} \beta e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i} - e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j)} - 1 \right] + 2W^2 \operatorname{sh} \beta \delta_{\mathbf{m},\mathbf{0}} x_{\mathbf{m}} = 4 \operatorname{sh}^2 \beta x_{\mathbf{m}}, \quad (11)$$

описывающему точечный дефект в  $(d-1)$ -мерном блоке размера  $L^{d-1}$  с периодическими граничными условиями  $x_{\mathbf{m}+L\mathbf{e}_i} = x_{\mathbf{m}}$ . Уравнение (11) можно переписать в виде

$$\sum_{\mathbf{m}'} J_{\mathbf{m}'} x_{\mathbf{m}+\mathbf{m}'} + V \delta_{\mathbf{m},\mathbf{0}} x_{\mathbf{m}} = E x_{\mathbf{m}} \quad (12)$$

и решить стандартным образом [12, 13]. Вводя функцию Грина  $G_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}$  и спектр  $\epsilon(\mathbf{k})$  невозмущенной системы ( $V = 0$ ),

$$\sum_{\mathbf{m}'} (E \delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}'} - J_{\mathbf{m}'-\mathbf{m}}) G_{\mathbf{m}',\mathbf{m}''} = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}''}, \quad (13)$$

$$G_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}(E) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{m}')}}{E - \epsilon(\mathbf{k})}, \quad (14)$$

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{m}} J_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}}$$

( $N$  — полное число атомов), из уравнения (12) получим  $x_{\mathbf{m}} = G_{\mathbf{m},\mathbf{0}} V x_0$ , после чего уравнение самосогласования  $1 = V G_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$  определяет связанные состояния; для (11) это уравнение имеет вид

$$1 = W^2 I(\beta, \mathbf{p}), \quad (15)$$

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{2 \operatorname{sh} \beta}{L^{d-1}} \sum_{\mathbf{k}} \left[ 4 \operatorname{sh}^2 \beta + \epsilon_0^2(\mathbf{k}) + \epsilon_0^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - 2 \operatorname{ch} \beta \epsilon_0(\mathbf{k}) \epsilon_0(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right]^{-1}, \quad (16)$$

где  $\epsilon_0(\mathbf{k})$  — обычный спектр сильной связи со взаимодействием ближайших соседей,

$$\epsilon_0(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{d-1} 2 \cos k_i. \quad (17)$$

Суммирование в (16) проводится по разрешенным значениям импульса  $\mathbf{k}$ , которые имеют вид  $2\pi s/L$ ,  $s = 0, 1, \dots, L-1$  для каждой компоненты. Уравнение (15) определяет значение  $\beta$  для каждого из  $L^{d-1}$  разрешенных значений  $\mathbf{p}$ , поэтому число положительных показателей  $\beta_s$  совпадает с числом положительных  $\gamma_s$  для той же задачи.

При  $d = 2$  выражение для  $I(\beta, \mathbf{p})$  принимает вид

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{\operatorname{sh} \beta}{2(\operatorname{ch} \beta - \cos p)} \times \frac{1}{L} \sum_k \frac{1}{\operatorname{ch} \beta - \cos(2k - p)} = \frac{\operatorname{cth}(\beta L/2)}{2(\operatorname{ch} \beta - \cos p)}$$

в соответствии с результатами работы [1]; последнее равенство получается при нечетных  $L$  с использованием формулы суммирования Пуассона.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Зависимости  $I(\beta, \mathbf{p})$  от  $\beta$  при фиксированных значениях  $\mathbf{p}$  показаны на рис. 1. Опишем основные этапы исследования уравнений (15), (16), приводящие к этой картине.

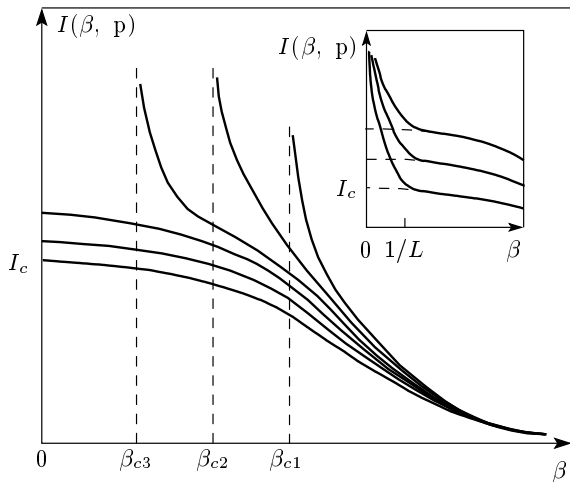
*Большие значения  $\beta$ .* В локализованной фазе нижняя граница  $\beta_s$  спектра не доходит до нуля; в пределе  $L \rightarrow \infty$  и при постоянном  $\beta$  в уравнении (16) можно перейти от суммирования к интегрированию по первой зоне Бриллюэна,

$$I(\beta, \mathbf{p}) = 2 \operatorname{sh} \beta \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[ 4 \operatorname{sh}^2 \beta + \epsilon_0^2(\mathbf{k}) + \epsilon_0^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - 2 \operatorname{ch} \beta \epsilon_0(\mathbf{k}) \epsilon_0(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right]^{-1}. \quad (18)$$

Для больших  $\beta$ , используя явный вид спектра  $\epsilon_0(\mathbf{k})$ , нетрудно получить

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \beta} + \frac{\epsilon_0(\mathbf{p})}{4 \operatorname{sh}^2 \beta} + \dots \quad (19)$$

При  $\beta \rightarrow \infty$  весь пучок кривых для разных  $\mathbf{p}$  сжимается в одну кривую (рис. 1); при уменьшении  $\beta$  он



**Рис. 1.** Зависимости  $I(\beta, \mathbf{p})$  от  $\beta$  при различных  $\mathbf{p}$  в континуальном приближении (на вставке — то же с учетом дискретности суммы в (16))

расширяется. Верхняя граница пучка соответствует  $\mathbf{p} = 0$ , нижняя —  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$ , где  $\mathbf{G}$  — вектор обратной решетки вида

$$\mathbf{G} = (2\pi, 2\pi, \dots, 2\pi). \quad (20)$$

*Верхняя часть пучка.* Сделаем сдвиг  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{p}/2$  в интеграле (18). Тогда поведение кривых на рис. 1 в верхней части пучка определяется областью малых  $\mathbf{k}$ , в которой интеграл имеет вид

$$I(\beta, \mathbf{p}) = 2 \operatorname{sh} \beta \int \frac{d^{d-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\Delta + \sum_{i,j} a_{ij} k_i k_j}, \quad (21)$$

где

$$\Delta = 4 \operatorname{sh}^2 \beta + [2 - 2 \operatorname{ch} \beta] \epsilon_0^2(\mathbf{p}/2),$$

$$a_{ij} = (4 \operatorname{ch} \beta - 4) \epsilon_0 \left( \frac{\mathbf{p}}{2} \right) \cos(p_i/2) \delta_{ij} + 8 \operatorname{ch} \beta \sin \left( \frac{p_i}{2} \right) \sin \left( \frac{p_j}{2} \right). \quad (22)$$

Для вектора  $\mathbf{p}$  внутри первой зоны Бриллюэна ( $|p_i| < \pi$ ) квадратичная форма является положительно определенной. Величина  $\Delta$  положительна при больших  $\beta$ , а при  $\beta \rightarrow 0$  имеет вид

$$\Delta = \beta^2 [4 - \epsilon_0^2(\mathbf{p}/2)]. \quad (23)$$

При условии  $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| \leq 2$  (которое всегда выполняется при  $d = 2$ ) величина  $\Delta$  остается неотрицательной

для всех  $\beta$ . Если же  $\mathbf{p}$  таково, что  $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| > 2$ , то существует критическое значение  $\beta_c$ , при котором  $\Delta$  меняет знак.

При  $\beta \sim 1$  все собственные значения матрицы  $a_{ij}$  в (21) порядка единицы и интеграл имеет при малых  $\Delta$  сингулярность  $\Delta^{(d-3)/2}$  (с логарифмическим ветвлением при нечетных  $d$ ), которая делает его комплексным при  $\Delta < 0$ ; поэтому при  $\Delta < 0$  уравнение (15) не имеет решений, а соответствующая кривая исчезает с рис. 1. При  $d \leq 3$  интеграл (21) расходится при  $\Delta \rightarrow 0$  и соответствующая кривая уходит на бесконечность; при  $d > 3$  интеграл (21) конечен, но уход кривых на бесконечность сохраняется ввиду расходимости дискретной суммы в (16) из-за члена с  $\mathbf{k} = 0$ . При малых  $\beta$  квадратичная форма в (21) сводится к величине  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2$ , где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости с компонентами  $v_i = -2 \sin(p_i/2)$  и интеграл (21) расходится как  $\Delta^{-1/2}$  для произвольной размерности  $d$ .

Из сказанного ясно, что кривые в верхней части пучка на рис. 1, соответствующие достаточно малым  $\mathbf{p}$  (для которых  $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| > 2$ ), одна за другой уходят на бесконечность в точках  $\beta_{c1}, \beta_{c2}, \beta_{c3}, \dots$ , тогда как до  $\beta = 0$  доходят лишь кривые, соответствующие условию  $|\epsilon_0(\mathbf{p}/2)| < 2$ .

*Нижняя часть пучка.* При больших  $\beta$  нижняя кривая пучка соответствует значению  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  (см. (20)), для которого уравнение (18) принимает вид

$$I \left( \beta, \frac{\mathbf{G}}{2} \right) = 2 \operatorname{sh} \beta \int \frac{N(\epsilon) d\epsilon}{4 \operatorname{sh}^2 \beta + (2 + 2 \operatorname{ch} \beta) \epsilon^2}, \quad (24)$$

где  $N(\epsilon)$  — плотность состояний, соответствующая спектру  $\epsilon_0(\mathbf{k})$ . При малых  $\beta$  имеем

$$I \left( \beta, \frac{\mathbf{G}}{2} \right) = \frac{\beta}{2} \int \frac{N(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \approx \frac{\pi}{2} N(0). \quad (25)$$

Для  $d \geq 4$  кривая с  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  остается самой нижней<sup>1)</sup> при всех  $\beta$ . Для  $d = 3$  это не так: двумерный спектр  $\epsilon_0(\mathbf{k})$  сильной связи приводит к ван-хововской особенности  $N(\epsilon) \propto \ln(1/|\epsilon|)$  в центре зоны, и  $I(\beta, \mathbf{G}/2)$  расходится как  $\ln(1/\beta)$  при  $\beta \rightarrow 0$ ; поэтому кривая с  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  заведомо не остается самой нижней<sup>2)</sup> при малых  $\beta$ .

*Малые значения  $\beta$ .* В общем случае интеграл (18) конечен в пределе  $\beta \rightarrow 0$  и при малых  $\beta$  имеет вид

<sup>1)</sup> Проверено численно для  $d = 4, 5, 6$ .

<sup>2)</sup> По-видимому, это обстоятельство не учитывалось в работах [6, 7], что привело их авторов к выводу о нулевом значении критического беспорядка для  $E = 0$  и  $d = 3$  (см. разд. 5).

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \begin{cases} I(0, \mathbf{p}) - A(\mathbf{p})\beta^2, & d = 3, \\ I(0, \mathbf{p}) - A(\mathbf{p})\beta, & d \geq 4, \end{cases} \quad (26)$$

т. е. типичные кривые имеют линейную или параболическую форму. Для доказательства подставим в (18) явный вид спектра  $\epsilon_0(\mathbf{k})$  и, полагая  $p_i = \pi + 2q_i$ , получим при малых  $\beta$

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{\beta}{2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \{ (2a_i \cos k_i)^2 + \beta^2 [1 + (a_i \cos k_i)^2 - (b_i \sin k_i)^2] \}^{-1}, \quad (27)$$

где  $a_i = \cos q_i$ ,  $b_i = \sin q_i$  и по повторяющимся индексам проводится суммирование. Рассмотрим интеграл по одной из компонент вектора  $\mathbf{k}$ , например  $k_x$ . Согласно соотношению (27), он имеет структуру

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \{ (\cos k_x - \alpha)^2 + \beta^2 (A \cos^2 k_x + B \cos k_x + C \sin k_x + D) \}^{-1} \quad (28)$$

и может быть вычислен методом контурного интегрирования. Полагая  $z = \exp(ik_x)$ , сведем его к виду

$$\beta \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \left\{ \left( \frac{z + z^{-1}}{2} - \alpha \right)^2 + \beta^2 \left[ A \frac{(z + z^{-1})^2}{4} + \dots \right] \right\}^{-1} = \int_{|z|=1} \frac{z dz}{P_4(z)}, \quad (29)$$

где  $P_4(z)$  — полином четвертой степени по  $z$ , два корня которого ( $z_1, z_2$ ) лежат внутри круга  $|z| < 1$ , а два корня ( $z_3, z_4$ ) — вне его. При  $\beta \rightarrow 0$  корни попарно сливаются, а при малых  $\beta$  могут быть параметризованы в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - a\beta + b\beta^2, & z_2 &= z_0^* - a_1\beta + b_1\beta^2, \\ z_3 &= z_0 + a\beta + b\beta^2, & z_4 &= z_0^* + a_1\beta + b_1\beta^2 \end{aligned} \quad (30)$$

в предположении, что  $|\alpha| < 1$ . Подстановка (30) в выражение (29) показывает, что результат конечен при  $\beta \rightarrow 0$ , а поправка  $O(\beta)$  первого порядка сокращается; правило интегрирования (28) записывается в виде

$$\begin{aligned} &\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{(\cos k_x - \alpha)^2 + \beta^2 f^2(\cos k_x, \sin k_x)} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[ \frac{1}{f(\alpha, \sqrt{1-\alpha^2})} + \frac{1}{f(\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2})} \right] + \\ &\quad + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (31)$$

При  $|\alpha| > 1$  первый член в фигурных скобках в (28) не обращается в нуль и подынтегральное выражение может быть непосредственно разложено по  $\beta$ :

$$\begin{aligned} &\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{(\cos k_x - \alpha)^2 + \beta^2 f^2(\cos k_x, \sin k_x)} = \\ &= \beta \frac{2\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} + O(\beta^3). \end{aligned} \quad (32)$$

При  $d = 3$  условие  $|\alpha| < 1$  всегда можно обеспечить, проводя сначала интегрирование по  $k_x$  или  $k_y$ ; поэтому справедлив результат (31), структура которого не меняется при интегрировании по оставшейся переменной и соответствует (26). Нетрудно явно найти значение  $\mathbf{p}$ , для которого интеграл  $I(\beta, \mathbf{p})$  минимален при  $\beta \rightarrow 0$ . Для  $\mathbf{p} = (\pi, \pi - 2q)$  после интегрирования по  $k_x$ , согласно (31), получается интеграл

$$\begin{aligned} I(0, \mathbf{p}) &= \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{\sqrt{1 - \cos^2 q \cos^2 k_y} \sqrt{1 - \sin^2 q \sin^2 k_y}}, \end{aligned} \quad (33)$$

для которого нетрудно установить симметрию относительно замены  $q$  на  $\pi/2 - q$ . Интеграл расходится при  $q \rightarrow 0$  и  $q \rightarrow \pi/2$ , тогда как при  $q = \pi/4$  он имеет минимум ( $d = 3$ ):

$$I_c = \min_{\mathbf{p}} I(0, \mathbf{p}) = \frac{2}{3\pi} K\left(\frac{1}{3}\right) = 0.3432\dots, \quad (34)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл. Рассматривая значения  $\mathbf{p} = (\pi - q_x, \pi/2 - q_y)$  с малыми  $q_x$  и  $q_y$ , нетрудно убедиться, что (34) реализует локальный минимум по обоим переменным,  $q_x$  и  $q_y$ . Численным исследованием можно проверить, что этот минимум является глобальным.

При  $d \geq 4$  параметр  $\alpha$  в выражении (28) может быть по модулю как больше, так и меньше единицы в зависимости от значений остальных переменных интегрирования; результат определяется суперпозицией выражений (31) и (32), и линейный член

по  $\beta$  оказывается конечным в соответствии с (26). Это нетрудно продемонстрировать явно, преобразуя уравнение (27) по схеме

$$\begin{aligned}
 I(\beta, \mathbf{p}) &= \frac{\beta}{2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(2a_i \cos k_i)^2 + \beta^2} = \\
 &= \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \delta\left(\epsilon - \sum_{i=1}^{d-1} 2a_i \cos k_i\right) = \\
 &= \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\epsilon^2 + \beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \times \\
 &\quad \times \exp\left(it\epsilon - it \sum_{i=1}^{d-1} 2a_i \cos k_i\right) = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} dt e^{-\beta t/2} \prod_i J_0(2a_i t), \quad (35)
 \end{aligned}$$

где  $J_0(t)$  — функция Бесселя. В выражении (27) мы опустили суммы в квадратных скобках: первая из них ограничена сверху величиной порядка  $\beta$ , вторая несущественна при малых значениях  $q_i$ , представляющих основной интерес. Нетрудно проверить, что  $I(0, \mathbf{p})$  имеет локальный минимум при  $\mathbf{q} = 0$  (т. е. при  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  в соответствии со сказанным выше), значение в котором

$$I_c = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} dt [J_0(t)]^{d-1} = \begin{cases} 0.2241 \dots, & d = 4, \\ 0.2256 \dots, & d = 5, \\ 0.1884 \dots, & d = 6. \end{cases} \quad (36)$$

Разложение (35) по  $\beta$  показывает конечность линейной поправки к  $I_c$  в согласии с формулой (26)<sup>3)</sup>.

Область малых  $\beta$  при конечных значениях  $L$ . Выше мы рассматривали конечные  $\beta$  при  $L \rightarrow \infty$ , когда сумму в выражении (16) можно заменить интегралом (фактически это возможно при  $\beta \gg 1/L$ ). Ситуация меняется, если величина  $L$  конечна, а  $\beta$  произвольно мала; выражение (16) при этом сводится к виду

$$\begin{aligned}
 I(\beta, \mathbf{p}) &= \frac{2\beta}{L^{d-1}} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ [\epsilon_0(\mathbf{k}) - \epsilon_0(\mathbf{k} - \mathbf{p})]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \beta^2 [4 - \epsilon_0(\mathbf{k})\epsilon_0(\mathbf{k} - \mathbf{p})] \right\}^{-1}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

При нечетных  $L$  для каждого разрешенного значения  $\mathbf{p}$  можно найти такое  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^*$ , что раз-

<sup>3)</sup> При  $a_i = 1$  имеется логарифмическая расходимость при  $d = 5$ , так что  $I(\beta, \mathbf{G}/2) - I(0, \mathbf{G}/2) \propto \beta \ln \beta$ .

Значения критического беспорядка для различных размерностей  $d$  в случае прямоугольного распределения  $V_{n,m}$

$d$	$W_c$	$W_{c0}$
3	5.91	16.5
4	7.32	34
5	7.29	—
6	7.98	—

ность  $\epsilon_0(\mathbf{k}) - \epsilon_0(\mathbf{k} - \mathbf{p})$  строго равна нулю<sup>4)</sup>: это  $\mathbf{k}^* = (\mathbf{p} + \mathbf{g})/2$ , где  $\mathbf{g}$  — один из векторов обратной решетки (учитываем, что  $\epsilon_0(\mathbf{k}) = \epsilon_0(-\mathbf{k})$ ,  $\epsilon_0(\mathbf{k} + \mathbf{g}) = \epsilon_0(\mathbf{k})$ ). При  $\beta \rightarrow 0$  с этим значением  $\mathbf{k}$  связан сингулярный вклад, который естественно выделить из суммы (37):

$$I(\beta, \mathbf{p}) = \frac{2}{\beta L^{d-1}} \frac{1}{4 - \epsilon_0^2(\mathbf{k}^*)} + I_{reg}(\beta, \mathbf{p}), \quad (38)$$

где  $\epsilon^2(\mathbf{k}^*) \leq \epsilon^2(\mathbf{p}/2)$  для значений  $\mathbf{p}$ , лежащих внутри первой зоны Бриллюэна. Поэтому кривые, имевшие в континуальном приближении конечный предел при  $\beta \rightarrow 0$  (для них  $4 - \epsilon_0^2(\mathbf{p}/2) > 0$ ), в действительности загибаются вверх (поскольку  $4 - \epsilon^2(\mathbf{k}^*) > 0$ ) и уходят на бесконечность (см. вставку на рис. 1).

#### 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ И ОБЩИЙ АНАЛИЗ СИТУАЦИИ

Сшивка выражений (26) и (38) при  $\beta \sim 1/L$  показывает, что величина  $I_{reg}(\beta, \mathbf{p})$  близка к величине  $I(0, \mathbf{p})$ , полученной в континуальном приближении. Для минимального показателя  $\beta_{min}$ , входящего в выражение (2), результаты (24), (26) и (38) определяют его зависимость от  $W$  всюду за исключением узкой окрестности точки  $W_c = 1/\sqrt{I_c}$ , которая уменьшается при увеличении  $L$ . Легко видеть, что  $\beta_{min} \rightarrow \text{const}$  для  $W > W_c$  и  $\beta_{min} \propto 1/L^{d-1}$  для  $W < W_c$  в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Считая минимальные показатели  $\beta_{min}$  и  $\gamma_{min}$  величинами одного порядка,

<sup>4)</sup> При четных  $L$  это возможно не для всех разрешенных значений  $\mathbf{p}$ . В результате число положительных показателей  $\beta_s$ , вообще говоря, не совпадает с числом положительных  $\gamma_s$ , и имеются трудности в сопоставлении разбиений (1) и (2). Поэтому четные значения  $L$  мы не используем.

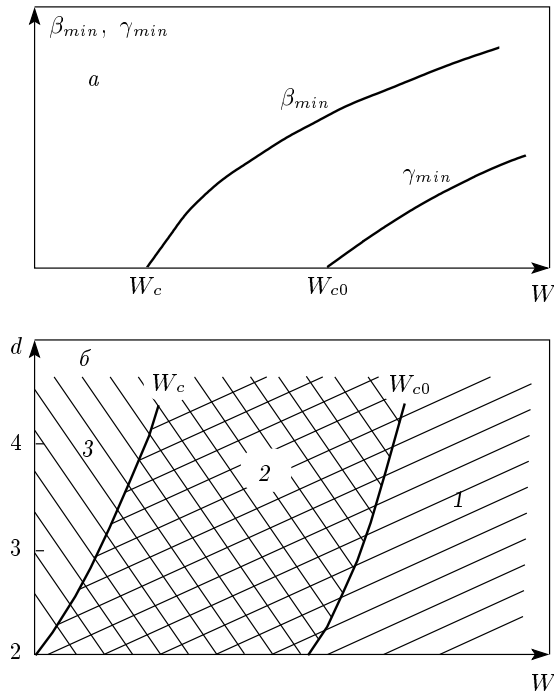


Рис. 2. а) Зависимости  $\beta_{min}$  и  $\gamma_{min}$  от  $W$  при  $L = \infty$ . б) Зависимости  $W_c$  и  $W_{c0}$  от размерности пространства  $d$  в предположении их непрерывности. Области 1, 2, 3 соответствуют экспоненциальной локализации, степенной локализации и металлической фазе

можно оценить корреляционный радиус  $\xi_{1D}$  квазиодномерной системы как  $1/\beta_{min}$  и ввести скейлинговый параметр  $g = \xi_{1D}/L$ . Тогда

$$g \propto \begin{cases} L^{d-2}, & W < W_c, \\ 1/L, & W > W_c, \end{cases} \quad (39)$$

что указывает на существование металлической фазы при  $W < W_c$  и экспоненциальной локализации при  $W > W_c$  (см. обсуждение в работе [1]).

Однако при  $d > 2$  имеются указания на нарушение предположенного соотношения  $\beta_{min} \sim \gamma_{min}$ : согласно численным результатам [2–4, 14, 15], обращение  $\gamma_{min}$  в нуль (при  $L = \infty$ ) происходит в точке  $W_{c0}$ , отличной от  $W_c$  (рис. 2а), которая и принимается в настоящее время за точку перехода Андерсона<sup>5)</sup>. В таблице приведены значения  $W_c = 1/\sqrt{T_c}$ , следующие из формул (34), (35), и значения  $W_{c0}$ , полученные в работах [2–4, 14, 15]: они

<sup>5)</sup> Численные результаты для  $d = 5, 6$  докладывались на конференции [16], но остались неопубликованными.

приводятся для величины  $\tilde{W} = W\sqrt{12}$  в соответствии с тем, что обычно для  $V_{n,m}$  принимается прямоугольное распределение ширины  $\tilde{W}$ , для которого  $\langle V_{n,m}^2 \rangle = \tilde{W}^2/12$ . Обсудим возможные интерпретации возникающей ситуации.

#### 4.1. Возможность полосы критических состояний

Не вызывает сомнения, что область  $W < W_c$  соответствует металлической фазе, а область  $W > W_{c0}$  — экспоненциальной локализации. Интерпретация области  $W_c < W < W_{c0}$  неоднозначна<sup>6)</sup>. Рассмотрим для простоты чисто одномерную систему, для которой типичное значение решения задачи Коши и его первые два момента имеют поведение

$$\psi_n \sim e^{\gamma n}, \quad \langle \psi_n \rangle \sim 1, \quad \langle \psi_n^2 \rangle \sim e^{\beta n}. \quad (40)$$

Если  $\beta > 0$ , а  $\gamma = 0$ , то  $\psi_n$  не имеет систематического роста, но содержит редкие выбросы все возрастающей амплитуды (рис. 3а). Построение собственной функции одномерной системы путем сшивки двух решений типа (40), распространяющихся с двух противоположных концов системы, приводит к выводу о существовании как делокализованной компоненты, так и локализованной структуры, состоящей из отдельных всплесков (рис. 3б). Простейшая интерпретация состоит в том, что собственная функция является гибридным состоянием, т. е. суперпозицией локализованной и делокализованной функций [1].

Возможна, однако, и другая интерпретация. Обращение  $\gamma$  в нуль означает лишь отсутствие экспоненциального роста и не исключает для типичного значения  $\psi_n$  возможности более медленного (степенного) роста. Что касается огибающей локализованной компоненты, то ее форма зависит от статистики всплесков и может быть как экспоненциальной, так и степенной. Действительно, пусть всплески происходят в точках  $x_n$ , имеют ширину  $\Delta_n$  и случайную высоту порядка  $h_n$ ; тогда гистограмма распределения  $P(\psi_n)$  состоит из прямоугольников шириной  $h_n$  и высотой  $\Delta_n/x_n$ . Для того чтобы величина  $\psi_n$  не имела систематического роста, ее распределение  $P(\psi_n)$  должно быть нормируемым, так что величина  $\epsilon_n = h_n \Delta_n/x_n$  убывает быстрее, чем  $1/n$ . Дис-

<sup>6)</sup> Из анализа, проведенного в работе [1], ясно, что в точках  $W_{c0}$  и  $W_c$  происходит обращение в нуль соответственно параметров  $a$  и  $b$ , входящих в логарифмически нормальное распределение. Поэтому обе эти точки имеют реальный физический смысл.

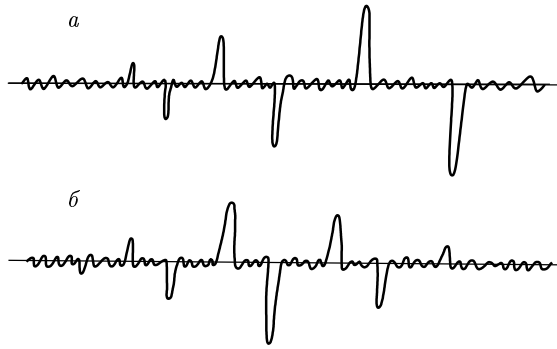


Рис. 3. Решение задачи Коши (а) и построенная по Мотту собственная функция 1D-системы (б) в ситуации  $\gamma = 0, \beta > 0$

персия  $h_n^3 \Delta_n / x_n \sim \epsilon_n h_n^2$  растет как  $e^{\beta n}$  и степенная огибающая  $h_n \propto x_n^\alpha$  возможна при

$$x_n \sim (e^{\beta n} / \epsilon_n)^{1/2\alpha}, \quad h_n \sim (e^{\beta n} / \epsilon_n)^{1/2}, \quad (41)$$

$$\Delta_n \sim \epsilon_n (e^{\beta n} / \epsilon_n)^{(1-\alpha)/2\alpha}.$$

Таким образом, ситуация  $\gamma = 0, \beta > 0$  может соответствовать собственным функциям со степенным поведением огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне; такие свойства широко обсуждаются для состояний, соответствующих критической точке [17]. Следовательно, обращение в нуль величин  $\beta_{min}$  и  $\gamma_{min}$  в разных точках (см. рис. 2а) может соответствовать существованию при  $W_c < W < W_{c0}$  целой полосы критических состояний. Такая картина хорошо сшивается с ситуацией при  $d = 2$ , обсуждавшейся ранее [1]: в пределе  $d \rightarrow 2$  точка  $W_c$  обращается в нуль в соответствии с отсутствием при  $d = 2$  металлической фазы, тогда как точка  $W_{c0}$  остается конечной в соответствии с существованием перехода типа Костерлица–Таулеса между экспоненциальной и степенной локализацией (см. рис. 2б)<sup>7)</sup>.

Перейдем к сопоставлению с численными результатами. Несмотря на большое число публикаций и претензии отдельных авторов на высокую точность определения точки перехода, имеется очень мало работ, в которых переход Андерсона отслеживается непосредственно по изменению характера волновых функций. Фактически начиная с 1981 г. почти все

<sup>7)</sup> Отметим, что степенная локализация по-разному проявляется в конечно-размерном скейлинге при  $d = 2$  и  $d > 2$ : в первом случае как  $\beta_{min} \sim \gamma_{min} \sim 1/L$ , во втором — как  $\beta_{min} \sim 1, \gamma_{min} \rightarrow 0$  при  $L \rightarrow \infty$ .

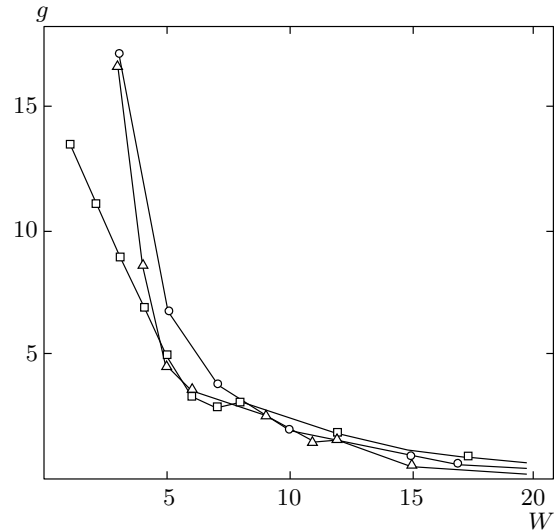


Рис. 4. Параметр  $g$ , характеризующий влияние граничных условий, в зависимости от  $W$  для различных  $L$  [18]:  $L = 2$  ( $\square$ );  $L = 4$  ( $\circ$ );  $L = 6$  ( $\triangle$ )

работы используют однопараметрический скейлинг и основаны на изучении величин, имеющих довольно косвенное отношение к переходу Андерсона.

Существование полосы необычных состояний при  $5 < W < 15$  (ср. с таблицей) для 3D-решетки типа алмаза отмечалось еще в ранней работе Эдвардса и Таулеса [18]. Скейлинговый параметр  $g$ , характеризующий реакцию на граничные условия (в современной литературе — параметр Таулеса или безразмерный кондактанс [19]), практически не зависел для этих состояний от размера системы в отличие от ожидаемого роста в металлической фазе и убывания в локализованной (рис. 4). В дальнейшем Ласт и Таулес [20] интерпретировали эти состояния в терминах степенной локализации.

Существование полосы критических состояний подтверждается и исследованием «отношения участия» (participation ratio)

$$P = \frac{\left( \sum_n |\psi_n|^2 \right)^2}{\sum_n |\psi_n|^4}. \quad (42)$$

Для конечной системы в форме куба со стороной  $L$  величина  $P$  ведет себя как  $L^d$  для состояний блоховского типа и как  $L^0$  для локализованных состояний. В критической точке ожидается поведение  $L^{d^*}$  в соответствии с существованием фрактальной размерности  $d^*$  [21]; такое же поведение должно быть в



локализованной и металлической фазах на масштабе  $L \lesssim \xi$ , когда система неотличима от критической. Ожидаемое поведение величины  $P$  в двойном логарифмическом масштабе представлено на рис. 5а.

Реально обнаруженное поведение [22] находится в резком противоречии с рис. 5а: для всех  $W$  наблюдается степенное поведение  $P \propto L^\alpha$  с показателем  $\alpha$ , зависящим от степени беспорядка (рис. 5б). Однако такое поведение прекрасно объясняется существованием полосы критических состояний. Согласно таблице, три верхние кривые на рис. 5б с  $W = 2.7, 3.9, 5.5$  соответствуют области  $W < W_c$ , и их наклон в пределах точности не отличается от зависимости  $P \propto L^d$  с евклидовой размерностью  $d$ . Остальные кривые для  $W = 7.8, 10.9, 12.3, 13.9, 15.6, 17.5, 19.6$  соответствуют области  $W_c < W < W_{c0}$  (использовалось гауссово распределение, для которого  $W_{c0} = 21$ ), и их поведение отвечает зависимости  $P \propto L^{d^*}$ , в которой фрактальная размерность  $d^*$  внутри полосы критических состояний зависит от степени беспорядка.

#### 4.2. Возможности возврата к общепринятой картине

Если представленная выше картина правильна, то теория локализации попадает в тяжелое положение: возможность полосы критических состояний не предсказывается ни одним из существующих вариантов теории. Единственное оптимистическое соображение состоит в следующем. Показатель  $\beta_{min}$  (и, следовательно, точка  $W_c$ ) определяется лишь первыми двумя моментами распределения  $V_{nm}$  (см. (6)), тогда как показатель  $\gamma_{min}$  чувствителен ко всей функции распределения  $P(V)$ : например, значения  $W_{c0}$  различны для прямоугольного и гауссова распределений. Можно надеяться, что подбором функции  $P(V)$  значение  $W_{c0}$  можно понизить так, что она совпадет с  $W_c$  (возможность  $W_{c0} < W_c$  исключается неравенством  $\beta_{min} \geq 2\gamma_{min}$  [1]). Тогда существующие теории (например, [21, 23, 24]) описывают ситуацию  $W_{c0} = W_c$  и дают некоторое нулевое приближение к общему случаю<sup>8)</sup>: ближайшей задачей теории следует считать выяснение механизма расщепления изолированной точки перехода в полосу критических состояний. Заметим, что такая возмож-

ность хорошо согласуется с ситуацией при  $d = 2$  (см. рис. 2б), где существование или отсутствие перехода типа Костерлица–Таулеса зависит от конкретной модели [1].

В действительности возможности возврата к общепринятой картине являются более широкими, но требуют радикально новой интерпретации численных результатов. Заметим, что численный счет не демонстрирует непосредственно исчезновения  $\gamma_{min}$  при  $W < W_{c0}$  в пределе  $L \rightarrow \infty$ ; этот вывод делается на основе интерпретации результатов в рамках однопараметрического скейлинга (в предположении, что параметр  $g = 1/\gamma_{min}L$  является функцией лишь отношения  $L/\xi$ ). Согласно работе [1], минимальный показатель Ляпунова является плохой скейлинговой переменной и не удовлетворяет однопараметрическому скейлингу: тем самым смысл точки  $W_{c0}$  становится довольно сомнительным. Реальная ситуация несколько сложнее, так как выделенность точки  $W_{c0}$  проявляется при исследовании не только показателей Ляпунова, но и многих других величин [25]. Однако и этому можно найти объяснение.

Естественным скейлинговым параметром в теории локализации является параметр Таулеса  $g$  [19], для которого постулируется уравнение Гелл-Манна–Лоу

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g). \quad (43)$$

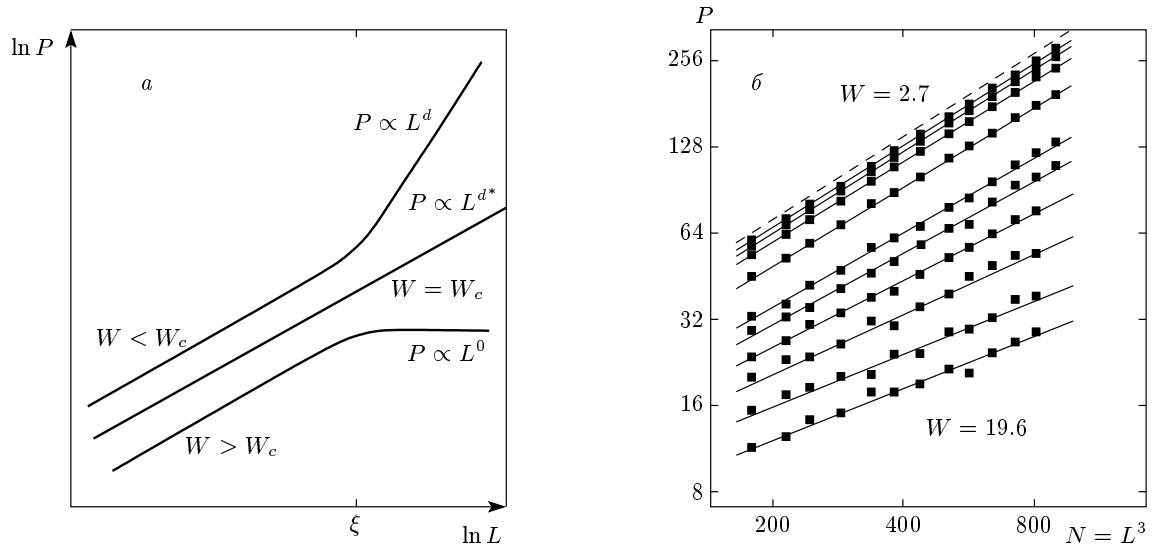
При наличии неподвижной точки  $g^*$  (такой, что  $\beta(g^*) = 0$ ) типичные зависимости  $g(L)$  имеют вид, показанный на рис. 6а: параметр Таулеса является постоянным в точке перехода (кривая 1) и стремится к нулю или к бесконечности соответственно в локализованной и металлической фазах (кривые 2, 3). При увеличении размерности  $d$  пространства уравнение (43) нарушается, из-за того что один из существенных параметров (назовем его  $h$ ) становится существенным при достижении верхней критической размерности  $d_{c2}$  [26]. Поэтому в окрестности размерности  $d_{c2}$  следует использовать уравнение двухпараметрического скейлинга

$$\frac{d \ln g}{d \ln L} = \beta(g, h), \quad \frac{d \ln h}{d \ln L} = \gamma(g, h), \quad (44)$$

которые, согласно работе [26], можно свести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d \ln g}{d \ln L} &= (d - 2) + \tilde{\beta} \left( \frac{g}{h} \right), \\ \frac{d \ln h}{d \ln L} &= (d - d_{c2}) + \frac{b}{h}, \end{aligned} \quad (45)$$

<sup>8)</sup> Точка перехода не вычисляется сколько-нибудь надежно ни в одной из имеющихся теорий; она либо вводится феноменологически, либо оценивается с использованием грубых аппроксимаций.



**Рис. 5.** а) Ожидаемое поведение отношения участия  $P$  в зависимости от размера системы для различных  $W$ . б) Численные результаты работы [22]: кривые сверху вниз соответствуют значениям  $W = 2.7, 3.9, 5.5, 7.8, 10.9, 12.3, 13.9, 15.6, 17.5, 19.6$  для трехмерной модели Андерсона с гауссовым беспорядком. Штриховая кривая соответствует закону  $P \propto L^d$

где  $d_{c2} = 4$  [27],  $b > 0$ . Исследование уравнений (45) показывает, что при  $d \geq 4$  параметр Таулеса  $g$  не является постоянным в точке перехода, а растет как  $L^{d-4}$  при  $d > 4$  или логарифмически при  $d = 4$  (рис. 6б, кривая 1); в металлической фазе рост более сильный, как  $L^{d-2}$  (кривая 2), тогда как в локализованной фазе вблизи перехода наблюдается возвратное поведение (кривая 3). В глубине локализованной фазы параметр  $g$  монотонно убывает (кривая 5), что по непрерывности означает существование кривой 4, которая соответствует приближенному постоянству  $g$  в области малых  $L$ . Значение  $g_{c0}$ , соответствующее начальной части кривой 4, будет приниматься за критическую точку при формальной обработке в рамках однопараметрического скейлинга.

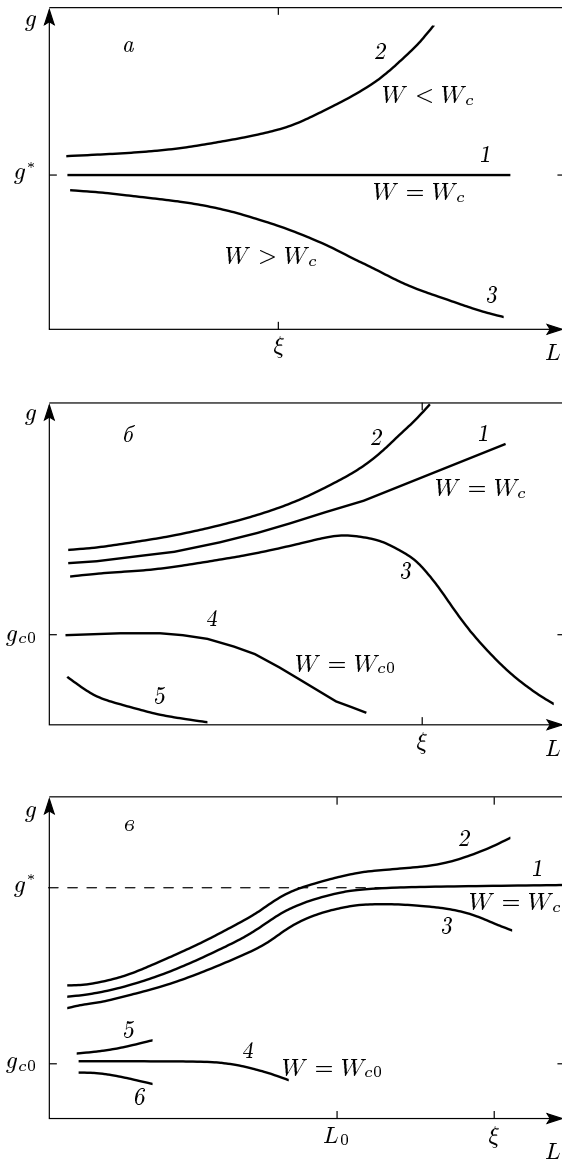
Ситуация для  $d = 4 - \epsilon$  характеризуется наличием большого масштаба

$$L_0 \propto \exp\left(\frac{\text{const}}{\epsilon}\right) \quad (46)$$

(рис. 6а), как и в обычной теории критических явлений [28]. При  $L \gg L_0$  справедлив однопараметрический скейлинг в окрестности  $g \approx g^*$  (ср. кривые 1, 2, 3 на рис. 6а и рис. 6б), тогда как при  $L \ll L_0$  возникает фиктивный однопараметрический скейлинг в окрестности  $g_{c0}$  (кривые 4, 5, 6). Точки  $g^*$  и  $g_{c0}$  являются соответственно корнями

уравнений  $\beta(g, h^*) = 0$  и  $\beta(g, h_0) = 0$ , где  $h^* = b/\epsilon$  — предельное значение параметра  $h$  при  $L \rightarrow \infty$  (существующее согласно второму уравнению (45)),  $h_0$  — его начальное значение, которое остается приблизительно постоянным при  $L \ll L_0$ . Существование большого масштаба  $L_0$  возможно и при  $d = 3$ , если значение константы в (46) составляет несколько единиц.

Из сказанного ясно, что формальная обработка зависимости  $g(L)$  при малых  $L$  в рамках однопараметрического скейлинга неизбежно приводит при  $d \geq 4$  и  $d = 4 - \epsilon$  (а возможно, и при  $d = 3$ ) к выявлению фиктивной критической точки  $g_{c0}$ , которая будет проявляться во всех физических величинах; фактически же точка  $g_{c0}$  (которой соответствует амплитуда беспорядка  $W_{c0}$ ) лежит в глубине локализованной фазы. Интервал  $W_c < W < W_{c0}$  соответствует возвратному поведению параметра Таулеса: это отражается на поведении собственных функций, но не меняет их экспоненциальной локализации. С этой точки зрения, отличие  $W_{c0}$  от  $W_c$  в таблице является артефактом, связанным с недостаточно большим размером системы при  $d = 3$  и принципиальной неприменимостью однопараметрического скейлинга при  $d \geq 4$ . Соответственно и результаты, представленные на рис. 4 и рис. 5б, не имеют глубокого смысла и отражают переходное поведение, связанное с релаксацией параметра  $h$  к его предельному значению  $h^*$ .



**Рис. 6.** Зависимость параметра Таулеса  $g$  от размера системы  $L$  при  $d = 3$  (а),  $d > 4$  (б),  $d = 4 - \epsilon$  (в)

Заметим, что неправильное определение точки перехода ( $g_{c0}$  вместо  $g^*$ ) приведет к неправильной оценке критического индекса  $\nu$  корреляционного радиуса, который (при  $d < 4$ ) будет определяться производной  $\beta'_g(g_{c0}, h_0)$ , а не  $\beta'_g(g^*, h^*)$ , как положено. Возможно, это разрешает противоречия между аналитическими результатами и численным счетом, обсуждавшиеся автором ранее [1, 29].

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследован спектр показателей  $\beta_s$ , описывающих рост вторых моментов решения задачи Коши для квазиодномерного уравнения Шредингера. Показано, что минимальный показатель  $\beta_{min}$  обращается в нуль (для  $L = \infty$ ) в точке  $W_c$ , отличной от той, которая принимается за точку перехода Андерсона  $W_{c0}$  на основании численного счета. Если не подвергать результаты численного счета сомнению, то обе точки имеют реальный физический смысл и соответствуют обращению в нуль параметров  $a$  и  $b$ , входящих в логарифмически нормальное распределение [1] для последнего члена в (1). Область  $W_c < W < W_{c0}$  естественно интерпретировать как полосу критических состояний со степенным поведением огибающей и сильными флуктуациями на локальном уровне. Эта возможность имеет прямые подтверждения в численных экспериментах, но не объясняется существующими теориями. В частности, она не описывается теорией однопараметрического скейлинга [19], что делает внутренне противоречивой интерпретацию численных экспериментов, в которых определяется положение точки  $W_{c0}$ .

Для прояснения ситуации желательно продолжить результаты, представленные на рис. 5б, в область больших  $L$ : это технически возможно, так как в настоящее время такие расчеты проводятся для систем в 5–10 раз большего размера, но, к сожалению, только для величины беспорядка, соответствующего точке  $W_{c0}$  [30]. Такие исследования либо оставят неизменной качественную картину, представленную на рис. 5б (что будет серьезным аргументом в пользу полосы критических состояний), либо эта картина начнет изменяться в сторону рис. 5а, что с неизбежностью приведет к выявлению большого масштаба  $L_0$ , обсуждавшегося в разд. 4. В любом случае новая интерпретация основного массива численных экспериментов окажется неизбежной.

В заключение обсудим соответствие работы [1] и настоящей работы с недавними публикациями [6, 7]. Исходная система уравнений (5) эквивалентна представленной в работах [6, 7], где, однако, не используется переменная  $z_{\mathbf{m}, \mathbf{m}'}(n)$ , а ее роль играет  $y_{\mathbf{m}', \mathbf{m}}(n)$ . В результате система уравнений не имеет законченной разностной формы и не может быть решена естественным образом с нахождением всего спектра показателей  $\beta_s$ . Поэтому в работах [6, 7] используется  $Z$ -преобразование, позволяющее найти решение лишь в термодинамическом пределе  $L \rightarrow \infty$  и с при-

менением малообоснованной процедуры усреднения по трансляциям в поперечном направлении. В общем случае трансляционная инвариантность решения по  $\mathbf{m}$  не имеет места (см. (10)) и указанная процедура, по-видимому, устраняет все  $\beta_s$ , кроме тех, которые соответствуют условиям  $\mathbf{p} = 0$  и  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  (если эффективно в результаты работ [6, 7] входят квадраты переменных  $x_{\mathbf{m},\mathbf{m}'}$ ). По-видимому, в этом состоит происхождение нулевого критического беспорядка для  $d = 3$ . Для  $d = 2$  и  $d \geq 4$  условие  $\mathbf{p} = \mathbf{G}/2$  соответствует минимальному показателю  $\beta_{min}$ , что позволило авторам работ [6, 7] правильно определить критические значения  $\sigma'_0$ , соответствующие нашим  $W_c$ . Что касается второй особой точки  $\sigma_0$  для высших размерностей, то на уровне спектра  $\beta_s$  мы не видим для нее никаких оснований: по-видимому, используемая в работах [6, 7] функция фильтра  $H(z)$  имеет не только полюсы, соответствующие собственным значениям трансфер-матрицы, но и другие сингулярности, не имеющие физического смысла. Соответственно, мы не видим оснований для выделенности размерности  $d = 6$ , которая никак не проявляется в точном теоретико-полевом подходе [27].

Изложение в работах [6, 7] ведется на радиотехническом языке (с использованием представлений о сигналах, фильтрах и пр.) и не имеет прямой связи с переходом Андерсона. Преждевременный переход к термодинамическому пределу не позволяет использовать для интерпретации результатов идеологию конечно-размерного скейлинга: в частности, переход в  $2D$ -случае интерпретируется как переход первого рода (что противоречит всей имеющейся информации), а не как переход типа Костерлица–Таулеса. Аналогично, соображения о возможности неэкспоненциальной локализации, на первый взгляд, близки к нашим, но фактически не имеют ничего общего. Далее, в отличие от [6, 7], мы не придаем показателям  $\beta_s$  того же статуса, как стандартным показателям Ляпунова  $\gamma_s$ : последние являются самоусредняющимися величинами и заведомо имеют более фундаментальный характер. Фактически для всех ответственных утверждений используются лишь неравенство  $\beta_s \geq 2\gamma_s$  и связь  $\beta_s$  с параметрами логарифмически нормального распределения [1]; оценка  $\beta_s \sim \gamma_s$  используется с большой осторожностью и лишь в тех случаях, когда оно не противоречит численному счету. Наконец, мы не считаем заведомо правильными общепринятые представления о связи минимального показателя  $\gamma_{min}$  с переходом Андерсона: на наш взгляд, в общем случае корреляционный радиус  $\xi_{1D}$

определяется эффективным показателем  $\gamma_{eff}$  [1], что может существенно повлиять как на положение точки перехода, так и на критическое поведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17519).

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Сулов, ЖЭТФ **128**, 768 (2005).
2. J. L. Pichard and G. Sarma, J. Phys. C **14**, L127, L617 (1981).
3. A. MacKinnon and B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
4. A. MacKinnon and B. Kramer, Z. Phys. **53**, 1 (1983); A. MacKinnon, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 2511 (1994).
5. M. Schreiber and M. Ottomeier, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 1959 (1992).
6. V. N. Kuzovkov, W. von Niessen, V. Kashcheyevs, and O. Hein, J. Phys.: Condens. Matter **14**, 13777 (2002).
7. V. N. Kuzovkov and W. von Niessen, Eur. Phys. J. B **42**, 529 (2004).
8. В. И. Оселедец, Труды моск. мат. общества **19**, 197 (1968).
9. M. Janssen, Phys. Rep. **295**, 1 (1998); J. L. Pichard and M. Sanquer, Physica A **167**, 66 (1990); A. M. S. Macedo and J. T. Chalker, Phys. Rev. B **46**, 14985 (1992); M. Caselle, Phys. Rev. Lett. **74**, 2776 (1995); C. W. J. Beenakker and B. Rejaei, Phys. Rev. Lett. **71**, 36891 (1993); Phys. Rev. B **49**, 7499 (1994).
10. E. Abrahams and M. S. Stephen, J. Phys. C **13**, L377 (1980).
11. P. Markos and B. Kramer, Phil. Mag. **68**, 357 (1993); P. Markos, J. Phys.: Condens. Matter **7**, 8361 (1995); K. Slevin, Y. Asada, and L. I. Deych, E-print archives, cond-mat/0404530.
12. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).

13. Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Мир, Москва (1971), гл. IV.
14. I. Kh. Zharekeshev and B. Kramer, *Ann. der Phys.* **7**, 442 (1998).
15. P. Markos and M. Heneke, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, L765 (1994).
16. I. Kh. Zharekeshev, Invited talk on «Localization 1999», Hamburg (1999).
17. H. Aoki, *J. Phys. C* **16**, L205 (1983); *Phys. Rev. B* **33**, 7310 (1986); C. Castellani and L. Peliti, *Phys. Rev. A* **19**, L429 (1986); M. Janssen, *Int. J. Mod. Phys.* **8**, 943 (1994).
18. J. T. Edwards and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **5**, 807 (1972); D. J. Thouless, *Phys. Rep.* **13**, 92 (1974).
19. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
20. B. J. Last and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **7**, 699 (1974).
21. C. M. Soukoulis and E. N. Economou, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 565 (1984).
22. M. Schreiber, *J. Phys. C* **18**, 2490 (1985); *Physica A* **167**, 188 (1990).
23. D. Vollhardt and P. Wölfle, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 699 (1982); D. Vollhardt and P. Wölfle, in *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, ed. by V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, v. 32, North-Holland, Amsterdam (1992).
24. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **108**, 1686 (1995).
25. G. Schubert, A. Weisse, G. Wellein, and H. Feshke, E-print archives, cond-mat/0309015.
26. И. М. Суслов, *ЖЭТФ* **113**, 1460 (1998).
27. И. М. Суслов, *УФН* **168**, 503 (1998).
28. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980), гл. 7, разд. 5.
29. I. M. Suslov, E-print archives, cond-mat/0105325, cond-mat/0106357.
30. M. Schreiber and H. Grussbach, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 607 (1991); A. Mildenerger, F. Evers, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **66**, 033109 (2002).