

# К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

*С. В. Сазонов\**

*Российский государственный университет им. И. Канта  
236041, Калининград, Россия*

Поступила в редакцию 3 февраля 2006 г.

На основе усредненного вариационного принципа исследовано влияние нелинейных поперечных возмущений (включая дифракцию) на распространение квазиодномерных солитонов различных волновых уравнений. Показано, что параметры пространственно-временных солитонов кубического нелинейного уравнения Шредингера и системы Ядзими–Ойкавы, описывающей нелинейное взаимодействие длинных и коротких волн, удовлетворяют сугубо пространственному уравнению Шредингера с нелинейностью пятого порядка для комплексной функции, составленной из амплитуд солитонов и их эйконалов. Найдены трехмерные локализованные решения типа двухкомпонентных «пульс», образованных длинно- и коротковолновой составляющими. Выявлены вихревая и дырочно-вихревая структуры солитонов огибающей и двухкомпонентных солитонов, взаимодействующих в режиме синхронизма длинных и коротких волн. Найдено, что слабонелинейные поперечные возмущения на фоне одномерных солитонных решений при дефокусирующем характере нелинейности описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили. Соответствующие рационально локализованные решения в виде «лампов» можно рассматривать как вторичные солитоны, распространяющиеся вдоль волновых фронтов исходных (первичных) солитонов. Данный вывод справедлив для первичных солитонов широкого класса нелинейных волновых уравнений.

PACS: 42.65.Tg, 42.65.Jx, 43.25.+y

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Последние годы интересы исследователей в теории нелинейных волн все больше смещаются в сторону изучения неодномерных солитоноподобных образований. Это касается как нахождения точных солитонных решений неодномерных волновых уравнений с помощью развитых сравнительно недавно мощных математических методов, так и использования приближенных подходов. В первом случае удается получить точные неодномерные солитонные решения, с высокой степенью надежности гарантирующие их устойчивость. С другой стороны, класс неодномерных волновых уравнений, допускающих точные локализованные решения, достаточно узок, а соответствующие математические методы не обладают достаточной общностью. Приближенные же подходы способны охватить значительно более широкий класс нелинейных волновых уравнений. Уступающая точным методам в строгости анализа, она характеризуется, тем не менее, большей универсаль-

ностью. Будучи примененными к различным нелинейным волновым уравнениям, приближенные методы могут пролить свет на вопрос устойчивости одномерных солитонных решений по отношению к поперечным возмущениям. Данный вопрос представляется важным с точки зрения экспериментальных наблюдений солитонов, а также их искусственной генерации.

В работах [1, 2] для учета поперечных возмущений в приближении «геометрической оптики» для солитонов был предложен метод «усредненного лагранжиана» (УЛ). В работе [3] данный подход обобщен на случай учета волновых эффектов в поперечных возмущениях, т. е. дифракции солитонов на ими же создаваемых неоднородностях.

Суть метода УЛ состоит в следующем. Вначале записывается точное односолитонное решение одномерного волнового уравнения. После этого другие пространственные измерения учитываются с помощью того, что некоторые постоянные параметры одномерного солитона полагаются зависящими от координат. Такое «пробное» решение подставляется в

\*E-mail: barab@newmail.ru

плотность лагранжиана, соответствующего исходному неоднородному уравнению, после чего проводится его усреднение по «быстрой переменной» (например, по времени). Вариация функционала действия, соответствующего данному УЛ, по переменным солитонным параметрам приводит к системе уравнений гидродинамического типа для данных параметров. Следует отметить, что эта система обладает высокой степенью универсальности [1, 2] и отличается для солитонов различных уравнений только конкретными видами уравнений «изоэнтропийного течения» (см. ниже), а также дифракционными членами [3]. Данная универсальность позволяет использовать единый подход для анализа влияния поперечных возмущений на солитоны различных волновых уравнений.

Развитая в работах [1, 2] нелинейная теория поперечных возмущений в приближении «геометрической оптики» с помощью наработанных в гидродинамике недиспергирующей идеальной жидкости изящных математических методов типа «преобразования годографа» позволила получить ряд аналитических решений, описывающих явления самофокусировки и дефокусировки солитонов [4].

С другой стороны, заметим, что с помощью «преобразования годографа» можно учитывать поперечные возмущения только в одном пространственном измерении. Кроме того, на заключительной стадии самофокусировки важны эффекты дифракции, которые не учитывались в работах [1, 2].

При учете дифракционных эффектов уравнения для солитонных параметров совпадают с системой уравнений идеальной диспергирующей жидкости [3]. Данные нелинейные уравнения достаточно сложны для анализа, но содержат в себе значительно больше режимов солитонного распространения, нежели рассмотренные в работах [1, 2], так как учитывают влияние дифракции.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния нелинейных поперечных возмущений на распространение солитонов различных волновых уравнений с учетом эффектов дифракции. Поскольку за основу в методе УЛ берется явный вид одномерных солитонов, ниже солитоны, на распространение которых оказывают влияние поперечные возмущения, мы будем называть квазиодномерными. С формальной точки зрения квазиодномерность означает, что характерный размер солитона в направлении его распространения (продольный размер) значительно меньше соответствующего поперечного размера. В этом случае поперечная динамика солитона развивается гораздо медленнее, чем продольная, т. е. квази-

одномерный солитон формируется на длине распространения (дисперсионной длине), много меньшей дифракционной длины, на которой проявляют себя поперечные эффекты.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 на основе результатов работы [3] приводятся приближенные солитонподобные решения некоторых нелинейных уравнений с поперечным возмущением, динамические параметры которых подчиняются достаточно общей системе гидродинамического типа. Выписаны соответствующие данные для солитонов возмущенных уравнений Кортевега–де Вриза (КдВ) и модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза (МКдВ), уравнения синус-Гордона (СГ), нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с кубической нелинейностью и системы Ядзимы–Ойкавы (ЯО), являющейся пространственно редуцированной версией уравнений Захарова. В разд. 3 показано, что отмеченная выше система гидродинамического типа для возмущенных солитонов кубического НУШ и системы ЯО эквивалента НУШ с нелинейностью пятого порядка для комплекснозначной функции, составленной из амплитуды солитона (или его обратной длительности) и солитонного эйконала. Данное обстоятельство позволило выделить эти солитоны из общего круга солитонов других уравнений и провести отдельное исследование их поперечной структуры и динамики. Четвертый раздел посвящен общему анализу слабонелинейных длинноволновых возмущений солитонных параметров на фоне одномерных солитонных решений. Здесь показывается, что динамика данных возмущений при обязательном условии о дефокусирующем характере нелинейности может быть описана уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП). Соответствующие солитонподобные решения типа «лампов» названы здесь вторичными солитонами, так как способны распространяться только на фоне исходных (первичных) солитонов в направлениях, перпендикулярных распространению последних. Данный вывод касается солитонов всех приведенных уравнений, за исключением солитонов уравнения СГ. В Заключении приведены основные общие выводы работы и намечены возможные дальнейшие перспективы в данной области исследований.

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В работе [3] на основе усредненного лагранжиана для параметров квазиодномерных солитонов бы-

ла получена система уравнений вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp}(\rho \nabla_{\perp} \Phi) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{(\nabla_{\perp} \Phi)^2}{2} + f(\rho) = G(\rho) \left[ \Delta_{\perp} \rho - \gamma \frac{(\nabla_{\perp} \rho)^2}{\rho} \right], \quad (2)$$

где  $z$  — ось декартовой системы координат, вдоль которой распространяется солитон,  $\nabla_{\perp}$  и  $\Delta_{\perp}$  — поперечные градиент и лапласиан,  $\rho$  — динамический параметр, монотонно возрастающий с увеличением амплитуды (или обратной длительности) солитона,  $\Phi$  — солитонный эйконал,  $G(\rho)$  и  $\gamma$  — положительно определенная функция и безразмерный числовой параметр, определяемые уравнением, порождающим солитонное решение. Выражение

$$f(\rho) \equiv \int dP/\rho$$

определяется дисперсионными характеристиками среды, в которой распространяется солитон, и солитонным параметром  $\rho$ .

Правая часть уравнения (2) учитывает влияние дифракции на поперечную динамику солитона [3]. В ее отсутствие поперечные возмущения учитываются в приближении «геометрической» оптики для солитонов [4]. Именно в этом случае система (1), (2) полностью идентична уравнениям, описывающим свободное течение двумерной идеальной жидкости. Тогда  $z$  играет роль времени,  $\rho$  — плотности данной жидкости,  $\Phi$  — потенциала поля скоростей, а внутреннее давление  $P$  связано с  $f(\rho)$  уравнением «изоэнтропийного течения»:

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho \frac{df}{d\rho}.$$

При этом если  $df/d\rho$ ,  $dP/d\rho < (>)0$ , нелинейность носит фокусирующий (дефокусирующий) характер [3, 5, 6].

Поясним сказанное выше на конкретных примерах [3].

1. Возмущенное уравнение КдВ имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a_2 E \frac{\partial E}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = \frac{v_0}{2} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau'. \quad (3)$$

Здесь  $E$  — искомая величина (например, электрическое поле электромагнитного импульса [7]),  $\tau = t - z/v_0$ ,  $t$  — время,  $v_0$  — линейная скорость волны в рассматриваемой среде,  $a_j$  и  $b$  — соответственно коэффициенты нелинейности  $j$ -го порядка и дисперсии.

Уравнению (3) соответствует решение в виде квазиодномерного солитона [1–3]

$$E = \frac{12b}{a_2} \rho^{2/3} \operatorname{sech}^2 \left[ \rho^{1/3} \left( 1 - \frac{\Phi}{v_0} \right) \right], \quad (4)$$

при этом

$$f(\rho) = 4v_0 b \rho^{2/3}, \quad G(\rho) = \left( 1 - \frac{\pi^2}{24} \right) \frac{2v_0^2}{9\rho^{5/3}}, \quad \gamma = \frac{5}{6}. \quad (5)$$

2. Возмущенное уравнение МКдВ имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a_3 E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} = \frac{v_0}{2} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau'. \quad (6)$$

Ему соответствует солитоноподобное решение. Если  $b/a_3 > 0$ , мы имеем «светлый» солитон

$$E = \sqrt{\frac{6b}{a_3}} \rho \operatorname{sech} [\rho(\tau - \Phi)], \quad (7)$$

при этом

$$f(\rho) = \frac{bv_0}{4} \rho^2, \quad G(\rho) = \frac{\pi^2 v_0^2}{48\rho^3}, \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (8)$$

Если  $b/a_3 < 0$ , мы имеем «темный» солитон

$$E = \sqrt{6 \left| \frac{b}{a_3} \right|} \rho \operatorname{th} [\rho(\tau - \Phi)], \quad (9)$$

при этом

$$f(\rho) = -2bv_0 \rho^2, \quad G(\rho) = \frac{\pi^2 v_0^2}{24\rho^3}, \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (10)$$

3. Возмущенное уравнение СГ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \tau} + a \sin \theta = \frac{v_0}{2} \Delta_{\perp} \theta, \quad (11)$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau',$$

$a$  — постоянная, характеризующая нелинейные и дисперсионные свойства среды. Ему соответствует квазиодномерный солитон (кинк)

$$\theta = 4 \arctg \{ \exp [\rho(\tau - \Phi)] \}, \quad (12)$$

при этом

$$f(\rho) = -\frac{av_0}{2\rho^2}, \quad G(\rho) = \frac{\pi^2 v_0^2}{24\rho^3}, \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (13)$$

4. Возмущенное кубическое НУШ для огибающей  $\xi$  импульса имеет вид

$$i \frac{\partial \xi}{\partial z} + \alpha |\xi|^2 \xi + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \frac{v_0}{2\omega} \Delta_{\perp} \xi, \quad (14)$$

где  $\omega$  — несущая частота импульса,  $\alpha$  — коэффициент керровской нелинейности,

$$k_2 \equiv \frac{\partial v_g^{-1}}{\partial \omega}$$

— коэффициент дисперсии групповой скорости (ДГС)  $v_g$ . Этому уравнению соответствует квазиодномерное решение. Если  $k_2/\alpha > 0$ , это решение типа «светлого» солитона огибающей

$$\xi = \sqrt{\frac{k_2}{\alpha}} \rho \exp\left(-i \frac{\omega}{v_0} \Phi\right) \operatorname{sech}(\rho \tau), \quad (15)$$

при этом

$$f(\rho) = \frac{k_2 v_0}{2\omega} \rho^2, \quad (16)$$

$$G(\rho) = \left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right) \frac{2v_0^2}{3\omega^2 \rho}, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Если  $k_2/\alpha < 0$ , мы имеем решение в виде «темного» солитона огибающей

$$\xi = \sqrt{\left|\frac{k_2}{\alpha}\right|} \rho \exp\left(i \frac{\omega}{v_0} \Phi\right) \operatorname{th}(\rho \tau), \quad (17)$$

при этом

$$f(\rho) = -\frac{k_2 v_0}{\omega} \rho^2, \quad G(\rho) = \frac{v_0^2}{3\omega^2 \rho}, \quad \gamma = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

5. Возмущенная система ЯО, описывающая нелинейное взаимодействие огибающей  $\xi$  коротковолнового импульса с длинноволновым полем  $u$  в режиме резонанса Захарова–Бенни (РЗБ) имеет вид

$$i \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \sigma u \xi = \frac{v_0}{2\omega} \Delta_{\perp} \xi, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \delta \frac{\partial |\xi|^2}{\partial \tau} = \frac{v_l}{2} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} u d\tau', \quad (20)$$

где  $\sigma$  и  $\delta$  — постоянные, описывающие данное взаимодействие.

Условие РЗБ заключается в том, что фазовая скорость  $v_l$  длинноволновой компоненты равна групповой скорости

$$v_g = \left(1 - \frac{\omega}{v_0} \frac{dv_0}{d\omega}\right)^{-1}$$

коротковолновой составляющей [8].

Система (19), (20) впервые была получена для взаимодействия ленгмюровской  $\xi$  и ионно-звуковых  $u$  волн в плазме [9] и является квазиоднонаправленным вариантом системы Захарова [10]. Кроме того, данная система описывает солитонный режим генерации видеоимпульса  $u$  необыкновенной волны обыкновенным высокочастотным импульсом  $\xi$  в одноосном кристалле [11–13] и вынужденное саморасcеяние Мандельштама–Бриллюэна оптического импульса  $\xi$  на порождаемом им же импульсе упругой деформации  $u$  в условиях замедленного света [14, 15].

Квазиодномерный двухкомпонентный солитон, соответствующий системе (19), (20), имеет вид [12, 15]

$$\xi = |k_2| \sqrt{\frac{\Omega}{\sigma \delta}} \rho \exp\left\{-i \left[\Omega \tau + \frac{\omega}{v_0} \Phi\right]\right\} \times \operatorname{sech}[\rho(\tau + k_2 \Omega)], \quad (21)$$

$$u = \frac{k_2}{\sigma} \rho^2 \operatorname{sech}^2[\rho(\tau + k_2 \Omega)], \quad (22)$$

где  $\Omega$  — постоянный свободный параметр, характеризующий амплитуду, «красный» частотный сдвиг коротковолновой компоненты солитона вследствие ее рассеяния на длинноволновой составляющей и скорость  $v$  солитона согласно соотношению

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} - k_2 \Omega.$$

При этом [12, 15]

$$f(\rho) = \frac{k_2 v_0}{2\omega} \rho^2, \quad (23)$$

$$G(\rho) = \frac{v_0}{6\omega \rho} \left[\left(\frac{\pi^2}{6} + 2\right) \frac{v_0}{\omega} + \frac{v_l}{2\Omega}\right], \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, на основании перечисленных выше примеров можно сделать вывод, что система (1), (2) обладает достаточной степенью общности, описывая динамику солитонов различных уравнений. Данное обстоятельство позволяет исследовать влияние поперечных возмущений на распространение разных солитонов с единых позиций.

Систему (1), (2) можно переписать в виде одномерного нелинейного уравнения для комплекснозначной функции, связанной с  $\rho$  и  $\Phi$  преобразованием Маделунга [16]

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(-i \frac{\Phi}{2g}\right), \quad (24)$$

где  $g$  — свободный параметр.

Принимая также во внимание равенство

$$\Delta_{\perp}\rho - \gamma \frac{(\nabla_{\perp}\rho)^2}{\rho} = \rho^{\gamma} \frac{\Delta_{\perp}\rho^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

нетрудно заметить, что система (1), (2) эквивалентна уравнению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} - g \Delta_{\perp} \psi + \frac{1}{2g} f(|\psi|^2) \psi = \frac{G(|\psi|^2)}{2g(1-\gamma)} |\psi|^{2\gamma} \psi \Delta_{\perp} |\psi|^{2(1-\gamma)} - g \frac{\psi}{|\psi|} \Delta_{\perp} |\psi|. \quad (25)$$

Уравнение (25) представляет собой обобщенное НУШ, содержащее производные только по пространственным переменным. Таким образом, метод УЛ позволяет свести учет влияния поперечных возмущений на распространение пространственно-временных солитонов к исследованию уравнения (25), описывающего нелинейную динамику некоего пространственного пучка.

### 3. ПОПЕРЕЧНЫЕ СТРУКТУРА И ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛИННЫХ И КОРОТКИХ ВОЛН

В общем случае анализ уравнения (25) или (что эквивалентно) системы (1), (2) ничем не проще исследования исходных нелинейных уравнений, порождающих квазиодномерные солитоны.

В настоящем разделе мы исследуем влияние сильно нелинейных поперечных возмущений на «светлые» (15) и «темные» (17) солитоны НУШ, а также на солитон (21), (22) системы ЯО. Дело в том, что для данных солитонов уравнение (25) существенно упрощается. Действительно, в этих случаях, согласно (16), (18), (23) и (24), имеем

$$G(|\psi|^2) \sim \frac{1}{|\psi|^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

и надлежащим выбором параметра  $g$  можно обратить в нуль правую часть (25). Тогда из (16), (18), (23) и (25) мы приходим к НУШ с нелинейностью пятого порядка:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = g \Delta_{\perp} \psi - \frac{\beta}{g} |\psi|^4 \psi, \quad (26)$$

где для солитона (15)

$$g = \frac{v_0}{\omega} \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{\pi^2}{12} + 1 \right)}, \quad \beta = \frac{k_2 v_0}{4\omega},$$

для солитона (17)

$$g = \frac{v_0}{\sqrt{3}\omega}, \quad \beta = -\frac{k_2 v_0}{2\omega},$$

а для солитонов (21), (22)

$$g = \left\{ \frac{v_0}{6\omega} \left[ \left( \frac{\pi^2}{6} + 2 \right) \frac{v_0}{\omega} + \frac{v_l}{2\Omega} \right] \right\}^{1/2}, \quad \beta = \frac{k_2 v_0}{4\omega}.$$

Заметим, что роль коэффициента нелинейности в уравнении (26) играют параметры дисперсии  $b \sim k_2$  исходных НУШ и системы ЯО, а коэффициент дисперсии  $g$  сопряжен с дифракцией исходных солитонов.

Уравнение (26) значительно проще для анализа, чем уравнение (25), и свойства его решений достаточно детально исследованы как в области нормальной ( $k_2 > 0$ ), так и аномальной ( $k_2 < 0$ ) ДГС [16].

Вначале, следуя [17], используем для общего анализа интегральный метод моментов.

Уравнению (26) соответствует сохраняющийся «гамильтониан»

$$H = \iint \left( g^2 |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \frac{\beta}{3} |\psi|^6 \right) dx dy, \quad (27)$$

где интегрирование ведется по всей поперечной плоскости  $xy$ . Легко видеть также, что из (26) вытекает закон сохранения величины

$$N = \iint |\psi|^2 dx dy.$$

Определим квадрат поперечного радиуса солитона как момент второго порядка [17]:

$$R^2 = \frac{1}{N} \iint r^2 |\psi|^2 dx dy, \quad (28)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — радиальная компонента цилиндрической системы координат.

Отсюда и из (26) получим

$$\frac{dR^2}{dz} = \frac{2}{N} \iint \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} dx dy, \quad (29)$$

где «плотность тока»

$$\mathbf{j} = -ig [\psi(\nabla_{\perp} \psi^*) - \psi^*(\nabla_{\perp} \psi)] = \rho \nabla_{\perp} \Phi.$$

Дифференцируя (29), после несложных преобразований получим

$$\frac{d^2 R^2}{dz^2} = \frac{16}{N} H = \text{const}. \quad (30)$$

Первые и вторые слагаемые в правых частях выражений (26) и (27) соответствуют относительным

вкладам в поперечную динамику дифракции, с одной стороны, и дисперсии и нелинейности — с другой. Доминирование вторых слагаемых соответствуют приближению «геометрической» оптики для солитонов. Именно знак множителя  $\beta$  в этих слагаемых определяет характер нелинейности. Как видно из выражений (27) и (30), дифракция всегда препятствует фокусировке солитона. Если ДГС аномальна (нормальна), «светлые» («темные») солитоны формируются при фокусирующем характере нелинейности. Здесь в обоих случаях  $\beta < 0$ , поэтому в принципе возможна ситуация, когда  $H < 0$ . В случае же  $\beta > 0$ , что характерно для «светлых» солитонов (16) и (21), (22) при  $k_2 > 0$ , а также для «темного» солитона (17) при  $k_2 < 0$ , однозначно имеем  $H > 0$ . При этом солитоны, как видно из выражения (30), распространяются в дефокусирующем режиме.

Будем считать, что в сформировавшемся квазиодномерном солитоне, имеющим при  $z = 0$  поперечный радиус  $R_0$ , волновые фронты являются плоскими, т. е.

$$\nabla_{\perp} \varphi_{z=0} \sim \nabla_{\perp} \Phi_{z=0} = 0.$$

Тогда, как следует из (15), (17), (21), (29) и выражения для  $\mathbf{j}$ , имеем

$$\left. \frac{dR^2}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

Интегрируя в этих условиях выражение (30), получим

$$R = R_0 \sqrt{1 \mp (z/l_{\mp})^2}, \quad (31)$$

где знак « $-$ » соответствует самофокусировке ( $H < 0$ ) на длине

$$l_- = R_0 \sqrt{\frac{N}{8|H|}},$$

а знак « $+$ » соответствует дефокусировке ( $H > 0$ ) с характерной длиной распывания

$$l_+ = R_0 \sqrt{\frac{N}{8H}}.$$

Случай  $H = 0$  соответствует стационарному распространению солитона с фиксированным поперечным размером. Рассмотрим данную ситуацию подробнее. Как видно из выражения (27), в этом случае однозначно  $\beta < 0$ , т. е. нелинейность имеет фокусирующий характер. Полагая в уравнении (26)

$$\psi(\mathbf{r}_{\perp}, z) = F(\mathbf{r}_{\perp}) \exp(-iqz), \quad (32)$$

где  $q$  — некоторая постоянная, приходим к уравнению

$$\Delta_{\perp} F = \frac{q}{g} F - \frac{|\beta|}{g^2} F^5. \quad (33)$$

В условиях планарной дифракции, когда существенна зависимость  $F$  только от одной поперечной координаты ( $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$ ), уравнение (33) допускает решение в аналитической форме. С учетом (24) и (32) запишем

$$\rho = F^2 = \sqrt{\frac{3}{|\beta|}} \frac{g}{2l_{\perp}} \operatorname{sech}\left(\frac{x}{l_{\perp}}\right), \quad \Phi = \frac{g^2 z}{2l_{\perp}^2}, \quad (34)$$

а параметр  $q$  в (32) связан с поперечным размером  $l_{\perp}$  солитона соотношением

$$q = \frac{g}{4l_{\perp}^2}.$$

Данное выражение описывает режим самоканализирования при компенсации самофокусировки дифракцией. Аналогичное решение хорошо известно в случае длинных монохроматических пучков — пространственных солитонов [18].

Представляет интерес радиально-симметричное локализованное решение уравнения (33), которое в этом случае можно записать в виде

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} = U(1 - U^4), \quad (35)$$

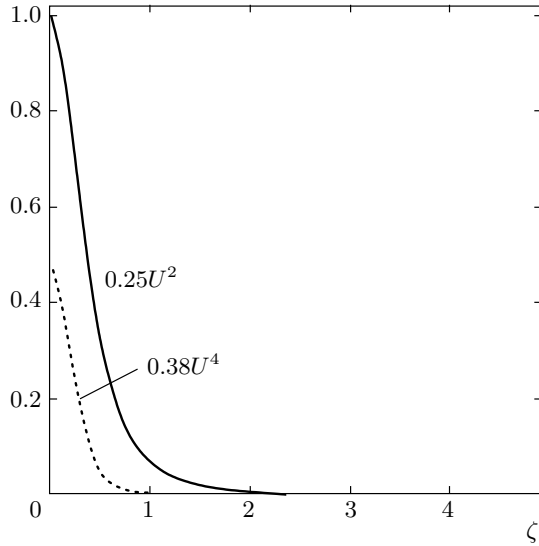
где введены безразмерная амплитуда

$$U = \left(\frac{|\beta|}{gq}\right)^{1/4} F$$

и радиальная координата

$$\zeta = \sqrt{\frac{q}{g}} r.$$

Радиально-симметричное локализованное решение уравнения (35),  $U^2 \sim \rho$ , найденное численно при условии, что на бесконечности поле исчезает вместе со всеми своими производными, изображено сплошной кривой на рис. 1. Подобные решения интенсивно исследовались в оптике и получили название оптических «пуль» [16, 19–22]. В нашем случае можно говорить о солитонных «пулях». Известно, что трехмерные «светлые» «пули» НУШ неустойчивы, т. е. претерпевают коллапс на конечной длине распространения [16, 22–25]. В нашем случае данное решение описывает, кроме того, «темные» «пули» НУШ, а также «светлые» двухкомпонентные (длинно-коротковолновые) «пули» системы ЯО (19), (20). Согласно выражениям (21) и



**Рис. 1.** Радиальный профиль «темной» «пули» НУШ при нормальной ДГС и фокусирующей нелинейности (сплошная кривая); «светлая» двухкомпонентная длинно-коротковолновая «пуля» при аномальной ДГС: сплошная кривая соответствует амплитуде коротковолновой  $0.25U^2 \sim \rho$ , а пунктирная — длинноволновой  $0.38U^4 \sim \rho^2$  составляющих

(22), коротковолновая компонента  $\xi \sim \rho$ , а длинноволновая  $u \sim \rho^2$ . Поперечный профиль последней представлен на рис. 1 пунктирной кривой. Вопрос об устойчивости обнаруженных здесь решений в виде трехмерных «темных» «пуль» НУШ и длинно-коротковолновых «пуль» системы ЯО требует дополнительных исследований, выходящих за рамки настоящей работы. Следует отметить при этом, что ситуация в вопросе устойчивости рассмотренных здесь «темных» «пуль» в среде с нормальной ДГС и фокусирующей нелинейностью на сегодняшний день далека от ясности [16].

Примем за поперечный радиус  $r_b$  «пули» расстояние от ее центра (где  $\rho$  равно своему максимальному значению  $\rho_{max}$ ) до точек окружности, на которых

$$\frac{\rho(r_b)}{\rho_{max}} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\zeta_b = \sqrt{\frac{q}{g}} r_b = 0.35.$$

Отсюда находим связь между параметрами  $q$  и  $r_b$ :

$$q = \frac{0.12g}{r_b^2}.$$

Величине  $\rho_{max}$ , как показал численный эксперимент, соответствует величина

$$U_{max} = U(0) = 2.00.$$

Тогда, переходя к размерным переменным, выражая  $\rho_{max}$  через  $r_b$  и используя выражения (24) и (32), получим

$$\Phi = 0.25 \frac{g^2}{r_b^2} z, \quad \rho_{max} = 1.40 \frac{g}{\sqrt{|\beta|} r_b}. \quad (36)$$

Таким образом, с уменьшением поперечного размера «пули» растет ее амплитуда.

Из уравнения (35) нетрудно определить аналитические зависимости  $U(\zeta)$  вблизи максимума и вдали от него. Очевидно, в окрестности максимума справедливо представление

$$U = U_{max} - p\zeta^2,$$

подставляя которое в уравнение (35), найдем

$$p = U_{max}(U_{max}^4 - 1)/4 = 7.50.$$

В противоположном пределе, при  $\zeta \gg 1$ , можно пренебречь нелинейным слагаемым в скобках в правой части (35). Тогда

$$U \sim K_0(\zeta),$$

где  $K_0(\zeta)$  — функция Макдональда нулевого порядка [26]. Коэффициент пропорциональности можно определить из сопоставления данных численного решения уравнения (35) при  $U^4 \ll 1$  и соответствующих табличных значений  $K_0(\zeta)$ . Тогда, используя асимптотическое представление функции Макдональда [26], можно записать в размерных переменных

$$\rho \approx \begin{cases} \rho_{max} [1 - 0.46(r/r_b)^2], & r \ll r_b, \\ 1.40\rho_{max}(r_b/r) \exp(-0.70r/r_b), & r \gg r_b. \end{cases} \quad (37)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, соответствующую дефокусирующей нелинейности. В этом случае  $\beta > 0$ : для «светлых» солитонов (16) и (21), (22) имеем  $k_2 > 0$ , а для «темного» солитона (17) имеем  $k_2 < 0$ . В результате для случая планарной дифракции получим

$$\rho = \rho_\infty \frac{\text{ch}(x/l_\perp) - 1}{\text{ch}(x/l_\perp) + 2}, \quad \Phi = -\frac{g^2 z}{4l_\perp^2}, \quad (38)$$

где фоновое значение  $\rho$  на бесконечности

$$\rho_\infty = \frac{g}{2\sqrt{\beta} l_\perp}.$$

Данное решение соответствует темной полосе, параллельной оси  $y$  и локализованной вдоль оси  $x$  в пределах величины  $l_{\perp}$ .

Теперь, как и в случае фокусирующей нелинейности, рассмотрим структуру трехмерного решения уравнения (26).

Преобразование Маделунга (24) обладает особенностью при  $\rho = 0$ . Представив зависимость  $\psi$  от компонент цилиндрической системы координат  $z, r, \varphi$  в виде

$$\psi = F(r) \exp [i(qz + m\varphi)], \quad (39)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ , приходим к уравнению

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} - \frac{m^2}{\zeta^2} U = -U(1 - U^4) \quad (40)$$

с краевыми условиями вида

$$U(0) = 0, \quad U(\infty) = 1. \quad (41)$$

Здесь, как и выше, введены безразмерные амплитуда

$$U = \left( \frac{\beta}{gq} \right)^{1/4} F$$

и радиальная координата

$$\zeta = \sqrt{\frac{q}{g}} r.$$

Численное решение краевой задачи (40), (41) при  $m = \pm 1$  представлено на рис. 2 сплошной линией.

Решения подобного типа, обладающие вихревой структурой, хорошо известны в теории нелинейных квазимонохроматических пучков ( $m$  — топологический заряд вихря) [16, 27, 28]. Циркуляции векторов  $\nabla_{\perp} \varphi$  по замкнутым контурам, которые охватывают особые точки, соответствующие  $\rho = 0$ , в плоскостях солитонных волновых фронтов, равны  $2\pi m$ . Примем за радиус  $r_v$  вихря расстояние от его центра, где  $\rho = 0$ , до точек окружности, на которых

$$U^2(r_v) = 1/2.$$

Тогда

$$\zeta = 1.26.$$

Отсюда находим связь между параметрами  $q$  и  $r_v$ :

$$q = \frac{1.59g}{r_v^2}.$$

Сравнивая (39) с (24), запишем для солитонного эйконала и фонового значения  $\rho = \rho_{max}$

$$\Phi = -2g \left( 1.59 \frac{gz}{r_z^2} \pm \varphi \right), \quad \rho_{max} = 1.26 \frac{g}{\sqrt{\beta} r_v}. \quad (42)$$

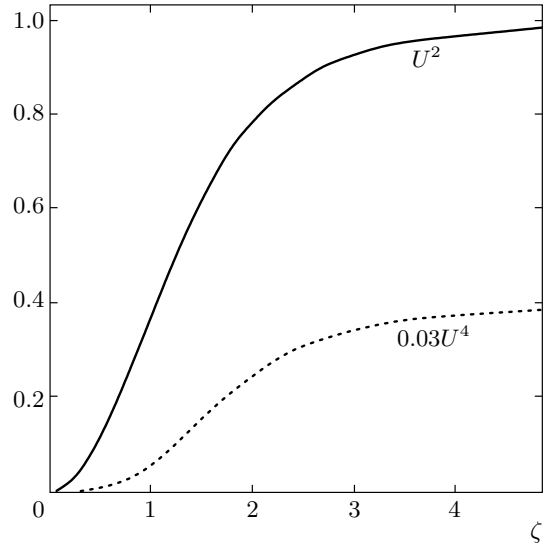


Рис. 2. Радиальный профиль величины  $U^2 \sim \rho$  (сплошная кривая), соответствующей вихрям «светлого» (нормальная ДГС) и «темного» (аномальная ДГС) солитонов НУШ, а также коротковолновой компоненте «светлого» дырочно-вихревого солитона; в последнем случае пунктирная кривая соответствует «дырке» длинноволновой составляющей  $0.03U^4 \sim \rho^2$

Из второго выражения (42) видно, что чем больше амплитуда солитона  $\rho_{max}$  и чем короче его длительность ( $\sim 1/\rho_{max}$ ), тем уже соответствующий вихрь.

Поведение  $\rho \sim U^2$  в окрестности вихревого центра, при  $r \ll r_v$ , и вдали от него, при  $r \gg r_v$ , можно определить из уравнения (40). В первом случае следует пренебречь правой частью этого уравнения (ввиду малости  $U$ ). Тогда  $U \sim \zeta$ . Коэффициент пропорциональности здесь, как показывает численный анализ задачи (40), (41), равен 1.36. Вдали от вихревого центра можно не учитывать первые два слагаемых в левой части (40) (из-за медленного изменения  $U$ ). В результате, переходя к размерным переменным, получим для случая  $|m| = 1$

$$\rho \approx \begin{cases} 2.95 \rho_{max} (r/r_v)^2, & r \ll r_v, \\ \rho_{max} [1 - 0.16(r_v/r)^2], & r \gg r_v. \end{cases} \quad (43)$$

Рассмотренные здесь светлые и темные пространственно-временные солитоны НУШ являются вихревыми в том смысле, что их волновой вектор (а, следовательно, и фазовая скорость) имеет угловую компоненту. При распространении солитона его волновой вектор описывает пространственную спираль вокруг особой оси, на которой  $\rho = 0$ .



Солитоны ЯО являются двухкомпонентными: вихревой солитон огибающей  $\psi$  распространяется синхронно с длинноволновым солитоном  $u$ , не имеющим несущей частоты. Как видно из выражения (22), в центре вихря амплитуды обоих солитонов обращаются в нуль, т.е. вихрь коротковолнового солитона огибающей сопровождает «дырка» длинноволнового солитона. В этой связи такие двухкомпонентные солитоны можно назвать «дырочно-вихревыми» (см. рис. 2).

Вихри нелинейных квазимонохроматических пучков с величинами топологических зарядов  $|m| > 1$  неустойчивы, т.е. с течением времени они распадаются на вихри с  $m = \pm 1$  [16]. Соответствующее уравнение для пучков отличается от уравнения (40) тем, что нелинейный член в скобках его правой части равен  $U^2$ , а не  $U^4$  [16]. Как показано в работе [28], степень нелинейности не сказывается качественным образом на поведении вихрей. На основании этого результата можно предположить, что и рассмотренные здесь «светлые» двухкомпонентные «дырочно-вихревые» солитоны с  $|m| > 1$  должны распадаться на соответствующие структуры с элементарным по величине топологическим зарядом.

#### 4. УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА – ПЕТВИАШВИЛИ ДЛЯ СОЛИТОННЫХ ПАРАМЕТРОВ. ВТОРИЧНЫЕ СОЛИТОНЫ

Динамика рассмотренных в предыдущем разделе нелинейных поперечных возмущений солитонов НУШ и системы ЯО подчиняется уравнению (26), основные свойства решений которого хорошо исследованы. В общем случае система (1), (2) (или эквивалентное ей уравнение (25) при преобразовании (24)) не сводится к (26) или к сколько-нибудь простым уравнениям. Поэтому анализ системы (1), (2) наиболее рационально проводить, используя приближенные методы и подходы, сопровождаемые различного рода предположениями.

В настоящем разделе мы рассмотрим с общих позиций слабонелинейные длинноволновые поперечные возмущения солитонов различных уравнений на фоне их плоских одномерных решений.

Представим динамические солитонные параметры  $\rho$  и  $\Phi$  в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \Phi = \Phi_0(z) + \Phi_1, \quad (44)$$

где параметры одномерного солитонного решения имеют вид

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad \Phi = \Phi_0(z) = -f(\rho_0)z.$$

Подставляя соотношения (44) в систему (1), (2), после линеаризации относительно  $\rho_1$ ,  $\Phi_1$  и представления

$$\rho_1, \Phi_1 \sim \exp[i(k_z z + k_x x + k_y y)]$$

получим «дисперсионное» уравнение

$$k_z^2 = k_\perp^2 [\mu^2 + \rho_0 G(\rho_0) k_\perp^2], \quad (45)$$

где

$$\mu^2 = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \rho_0 \left. \frac{df}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}, \quad k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Продолжая отмеченную во втором разделе аналогию с идеальной жидкостью, приходим к выводу о том, что второе слагаемое в квадратных скобках в уравнении (45), отвечающее дифракции солитонов, описывает дисперсионные эффекты в течении данной жидкости. В силу критерия само- и дефокусировки (см. начало разд. 2), из уравнения (45) легко видеть, что при  $\mu^2 < 0$  нелинейность носит самофокусирующий характер, а при  $\mu^2 > 0$  — дефокусирующий.

Величина  $v_s \equiv \mu v$ , как следует из (45), представляет собой скорость распространения длинноволновых возмущений (когда вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь) в направлении, поперечном к движению солитона в связанной с ним системе отсчета. Здесь  $v$ , как и выше, — скорость солитона вдоль оси  $z$ . Везде ниже будем полагать, что нелинейность имеет дефокусирующий характер, поэтому параметр  $\mu$  является вещественным. В этом случае солитон можно рассматривать как некую упругую среду, в которой способны распространяться возбуждения, подчиняющиеся дисперсионному соотношению (45). Данное положение обладает достаточной степенью общности по отношению к солитонам различных уравнений ввиду общности системы (1), (2). Сами солитоны являются нелинейными возбуждениями диспергирующих сред. Поэтому обсуждаемые поперечные возмущения солитонов можно назвать «внутрисолитонным звуком» (ВЗ). Здесь уместна аналогия со вторым звуком в газе тепловых фононов [29], представляющих собой возбуждения среды в виде первичного звука. Дисперсия ВЗ обусловлена дифракцией исходного (первичного) солитона на им же создаваемых неоднородностях (правая часть (2) или второе слагаемое в квадратных

скобках (45)). Нелинейность и дисперсия в совокупности способны породить уединенные бегущие волны — солитоны. В этой связи возникает вопрос: способна ли система (1), (2) породить нелинейные возмущения типа солитонов ВЗ? В таком случае можно было бы говорить о солитонном характере поперечных возмущений первичных солитонов.

Длинноволновое (слабодисперсионное) и слабонелинейное приближения означают соответственно

$$\varepsilon = (k_{\perp} l_z)^2 \ll 1$$

и

$$\rho_1 \ll \rho_0, \quad \Phi_1 \ll \Phi_0.$$

Здесь  $l_z \approx v\tau_p$  — характерный продольный размер исходного солитона. Кроме того, будем считать, что

$$\left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2 \ll 1.$$

Данное условие соответствует анизотропии поперечных возмущений: они значительно сильнее локализованы вдоль оси  $x$ , чем вдоль  $y$ .

В силу длинноволнового приближения отношения второго слагаемого в квадратных скобках (45) (происхождение которого связано с правой частью (2)) к первому равно  $\varepsilon \ll 1$ . Так как мы рассматриваем здесь слабонелинейные анизотропные возмущения, в квадратных скобках правой части (2) следует сохранить только первое слагаемое в виде

$$\Delta_{\perp} \rho \approx \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}.$$

Ограничиваясь квадратичной нелинейностью, запишем разложение

$$f(\rho) = f(\rho_0) + \frac{\mu^2}{\rho_0} \rho_1 + \left(\frac{d\mu^2}{d\rho_0^2} - \frac{\mu^2}{2\rho_0^2}\right) \rho_1^2.$$

Суммируя сказанное, перепишем систему (1), (2) в виде

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\mu^2}{\rho_0} \rho_1 = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \\ & - \left( \frac{d\mu^2}{d\rho_0^2} - \frac{\mu^2}{2\rho_0^2} \right) \rho_1^2 - G_0 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}, \quad (47) \end{aligned}$$

где  $G_0 \equiv G(\rho_0)$ .

В правых частях уравнений (46), (47) содержатся слагаемые более высокого порядка малости (нелинейность, дисперсия, неоднородность вдоль оси  $y$ ),

нежели каждое слагаемое в левых частях. Поэтому в нулевом порядке по  $\varepsilon$  ими следует пренебречь. Тогда мы получим волновые уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rho_1, \Phi_1 = 0.$$

Такая ситуация соответствует бездисперсионному приближению в (45), когда второе слагаемое в квадратных скобках несущественно. Данные уравнения имеют решения в виде волн, бегущих вдоль прямых  $x \mp \mu z = \text{const}$ . Рассмотрим только одну из них. Для учета дисперсии и нелинейности будем считать, что величины  $\rho_1$  и  $\Phi_1$  зависят от «локальной»  $\zeta = x - \mu z$  и «медленной»  $\eta = \varepsilon z$  координат [30]. Замечая, что в новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

найдем из уравнений (46), (47) в нулевом приближении по  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{\rho_0} \rho_1. \quad (48)$$

Подставляя данное соотношение в правые части (46) и (47), после дифференцирования (47) по  $\zeta$  перепишем данную систему в виде

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} = \\ = -\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - 2 \frac{\mu}{\rho_0} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} - \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} - \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \zeta^2} = \\ = -\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - 2 \frac{d\mu}{d\rho_0} \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} + \frac{\rho_0}{\mu} G_0 \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \zeta^3}. \end{aligned}$$

Суммируя данные уравнения и исключая затем переменную  $\Phi_1$  дифференцированием по  $\zeta$  и использованием соотношения (48), приходим к уравнению КП

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + h \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} - s \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \zeta^3} \right) = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2}, \quad (49)$$

где

$$h = \frac{\mu}{\rho_0} + \frac{d\mu}{d\rho_0}, \quad s = \frac{\rho_0}{2\mu} G_0.$$

Если поперечные возмущения считать плоскими, т. е. не зависящими от  $y$ , то уравнение (49) после интегрирования по  $\zeta$  переходит в уравнение КдВ. Однако при  $G_0 > 0$  это уравнение обладает неустойчивыми по отношению к возмущениям вдоль оси  $y$  солитонными решениями [4]. Поэтому устойчивые

нелинейные поперечные возмущения должны быть принципиально неоднородными.

Уравнение (49) имеет устойчивое решение, локализованное в плоскости  $xy$  рациональным образом. Данное решение получило название «ламп» и в лабораторной системе координат имеет вид [31]

$$\rho_1 = -B \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{x - \mu_{\perp} z}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{l_y} \right)^2 \right], \quad (50)$$

где

$$B = \frac{12s}{h}, \quad \mu_{\perp} = \mu - \frac{3s}{l_x^2}, \quad l_y = \sqrt{\frac{\mu}{6s}} l_x^2. \quad (51)$$

Очевидно, величины  $l_x$  и  $l_y$  имеют смысл размеров «лампа» вдоль соответствующих осей.

Нелинейные возмущения первичных солитонов типа «ламп» можно назвать вторичными солитонами, для которых первичные солитоны являются своеобразной упругой средой.

Следует особо подчеркнуть, что вторичные солитоны могут формироваться на первичных солитонах только при дефокусирующем характере нелинейности.

Параметр  $\rho_1$  описывает возмущение амплитуды и длительности первичного солитона. Увеличение в некоторой области плоскости  $xy$  значения  $\rho_1$  сопровождается локальным сжатием первичного солитона и увеличением его амплитуды. Как видно из соотношений (4), (7) и (9), величина  $\partial\Phi/\partial z$  определяет добавку к обратной групповой скорости распространения первичных солитонов КдВ и МКдВ. В этих случаях области первичного солитона, обладающие повышенным значением  $\rho_1$ , распространяются с большей групповой скоростью и наоборот. В то же время из выражений (15), (17) и (21) следует, что  $\partial\Phi/\partial z$  определяет добавку к обратной фазовой скорости солитона огибающей или добавку к солитонному показателю преломления. Здесь увеличение в некоторой области первичного солитона значения  $\rho_1$  сопровождается увеличением его фазовой скорости в этой же области — выгибанием вперед его фазовых волновых фронтов. Групповые скорости солитонов НУШ и системы ЯО при этом не изменяются.

Связавшись с «центром масс» солитона, можно положить  $z = vt$ . Тогда  $v_{\perp} = \mu_{\perp} v$  — скорость распространения вторичного солитона поперек первичного в сопутствующей системе координат. Таким образом, параметр  $\mu_{\perp}$  представляет собой отношение скорости вторичного солитона в системе отсчета, связанной с первичным солитоном, к скорости первичного солитона в лабораторной системе координат. В силу квазиодномерности рассматриваемых

здесь солитонов имеем  $\mu_{\perp} \ll 1$ , так как в этом случае поперечная динамика развивается значительно медленнее продольной (в пределе одномерных солитонов  $\mu_{\perp} = 0$ ).

Приведем полезное выражение для параметра  $h$ . Заметим, что в рассмотренных нами примерах зависимость  $f(\rho)$  имеет степенной характер. Отталкиваясь от гидродинамической аналогии, представим зависимость «давления»  $P$  от «плотности»  $\rho$  в виде уравнения Тэта [32]

$$P = A\rho^{\Gamma},$$

где  $\Gamma$  — параметр «адиабаты», характерный для поперечных возмущений солитона, постоянная

$$A = \frac{\mu^2}{\Gamma\rho_0^{\Gamma-1}}$$

выбрана из приведенного выше равенства

$$\mu^2 = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}.$$

Используя связь между  $P(\rho)$  и  $f(\rho)$ , запишем

$$f(\rho) = \frac{\mu^2}{\Gamma-1} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma-1}. \quad (52)$$

Сравнивая выражение (52) с выражениями (5), (8), (10), (13), (16), (18) и (23), найдем, что для солитонов КдВ  $\Gamma = 5/3$ , для МКдВ, НУШ и ЯО  $\Gamma = 3$ , а для солитонов СГ  $\Gamma = -1$ .

Используя соотношение (52), перепишем выражение для параметра нелинейности  $h$  в виде

$$h = \frac{\mu}{2\rho_0} (\Gamma + 1). \quad (53)$$

Теперь приведем выражения для коэффициентов  $\mu$ ,  $h$  и  $s$  в случаях первичных солитонов перечисленных выше уравнений, а также проведем соответствующий анализ решений типа вторичных солитонов.

1. Рассмотрим вторичный солитон на фоне первичного солитона уравнения КдВ. Определим здесь и ниже длительность  $\tau_p$  первичного солитона как параметр, характеризующий экспоненциальное убывание полевой переменной (или ее огибающей) на солитонных «хвостах» согласно закону

$$\propto \exp \left( -\frac{|t - z/v|}{\tau_p} \right).$$

Тогда, как следует из выражения (4),

$$(1/2)\tau_p = \rho_0^{1/3}.$$

С учетом этого найдем

$$\mu = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{2v_0 b}{3}}, \quad h = \frac{32}{3} \sqrt{\frac{2v_0 b}{3}} \tau_p^2,$$

$$s = \frac{2\sqrt{6}}{9} \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) \frac{v_0^{3/2}}{\sqrt{b}} \tau_p^3, \quad B = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) \frac{v_0 \tau_p}{b}.$$

Из выражения (50) следует, что амплитуда  $\rho_{1m}$  «лампа» (вторичного солитона) приблизительно равна

$$\rho_{1m} \approx B/l_x^2.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\mu - \mu_\perp}{\mu} \approx \frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \ll 1,$$

так как согласно условию слабой нелинейности, при котором получено уравнение (49),

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \ll 1.$$

Из выражений (51) и приведенных выше выражений видно, что условие анизотропии вторичных солитонов

$$\left(\frac{l_x}{l_y}\right)^2 \ll 1$$

эквивалентно последнему условию. Таким образом, с хорошей точностью можно считать

$$\mu_\perp \approx \mu.$$

Заметим, что данный вывод является общим и относится также к примерам, приведенным ниже.

Для электромагнитных импульсов, распространяющихся в нерезонансных средах, имеем [7]

$$b \approx (v_0 \omega_0^2)^{-1}$$

(где  $\omega_0$  — характерная частота резонансного поглощения) при условии

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1.$$

Тогда

$$\mu_\perp = v_\perp/v \approx \mu \sim (\omega_0 \tau_p)^{-1} \ll 1,$$

что находится в согласии с общим выводом. Аналогичным образом найдем

$$\frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \approx (\omega_0 \tau_p)^2 \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2.$$

Для выполнения условия слабой нелинейности

$$\frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \ll 1$$

необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left(\frac{l_x}{l_z}\right)^2 \gg (\omega_0 \tau_p)^2.$$

Данное условие является достаточно жестким. Пусть, например,  $(\omega_0 \tau_p)^2 \sim 10$ , тогда пространственный размер вторичного солитона должен превышать размер первичного минимум на порядок.

2. Рассмотрим вторичные солитоны на фонах «светлого» и «темного» солитонов МКДВ. В этих случаях находим, соответственно,

$$\mu = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{v_0 b}{2}}, \quad h = \sqrt{2v_0 b},$$

$$s = \frac{\pi^2 v_0^{3/2}}{48\sqrt{2b}} \tau_p^3, \quad B = \frac{\pi^2 v_0 \tau_p^3}{8b}, \quad b > 0,$$

и

$$\mu = \frac{2\sqrt{v_0|b|}}{\tau_p}, \quad h = 4\sqrt{v_0|b|},$$

$$s = \frac{\pi^2 v_0^{3/2}}{96\sqrt{|b|}} \tau_p^3, \quad B = \frac{\pi^2 v_0 \tau_p^3}{32|b|}, \quad b < 0.$$

Качественные выводы, сделанные выше для вторичных солитонов КдВ, справедливы и здесь.

3. Для вторичных солитонов на фонах «светлого» и «темного» солитонов НУШ имеем, соответственно,

$$\mu = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{v_0 k_2}{\omega}}, \quad h = 2\sqrt{\frac{v_0 k_2}{\omega}},$$

$$s = \left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right) \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^{3/2} \frac{\tau_p}{3\sqrt{k_2}},$$

$$B = 2 \left(\frac{\pi^2}{12} + 1\right) \frac{v_0 \tau_p}{\omega k_2}, \quad k_2 > 0,$$

и

$$\mu = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{2v_0|k_2|}{\omega}}, \quad h = 2\sqrt{\frac{2v_0|k_2|}{\omega}},$$

$$s = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^{3/2} \frac{\tau_p}{6\sqrt{2|k_2|}}, \quad B = \frac{v_0 \tau_p}{2\omega|k_2|}, \quad k_2 < 0.$$

Используя оценку

$$|k_2| \approx (\omega v_0)^{-1},$$

в обоих этих случаях получаем

$$\mu \approx (\omega \tau_p)^{-1} \ll 1$$

(так как в силу квазимонохроматичности солитона  $\omega\tau_p \gg 1$ ), а

$$\frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \approx \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \ll 1.$$

Последнее неравенство здесь выполняется в силу принятого при выводе выражения (49) длинноволнового приближения.

4. Рассмотрим вторичные солитоны на фоне солитонов ЯО. Для этого случая

$$\mu = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{v_0 k_2}{\omega}}, \quad h = 2\sqrt{\frac{v_0 k_2}{\omega}},$$

$$s = \frac{\tau_p}{12} \sqrt{\frac{v_0}{\omega k_2}} \left[ \left(\frac{\pi^2}{6} + 2\right) \frac{v_0}{\omega} + \frac{v_l}{2\Omega} \right],$$

$$B = \frac{\tau_p}{2k_2} \left[ \left(\frac{\pi^2}{6} + 2\right) \frac{v_0}{\omega} + \frac{v_l}{2\Omega} \right], \quad k_2 > 0.$$

Рассмотрим для этого случая два физических примера, следуя подходам работ [11–15]. При взаимодействии между электромагнитными импульсами обыкновенной и необыкновенной волн в режиме РЗБ [11–13]  $k_2 \approx (\omega v_0)^{-1}$ , где  $v_0 \approx v_l$  в данном случае — скорость света в среде ( $v_0$  — скорость обыкновенной, а  $v_l$  — необыкновенной волн). Кроме того, «красный» частотный сдвиг  $\Omega$  обыкновенной волны  $\Omega \ll \omega$ . Тогда

$$\mu \approx (\omega\tau_p)^{-1} \ll 1,$$

как и в случае вторичных солитонов НУШ, а

$$B \approx \frac{v_l \tau_p}{4\Omega k_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \approx \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \frac{\omega}{\Omega}.$$

Здесь для выполнения условия слабой нелинейности поперечных возмущений необходимо выполнение неравенства

$$\left(\frac{l_x}{l_z}\right)^2 \gg \frac{\omega}{\Omega},$$

которое является более жестким, чем для вторичных солитонов НУШ.

Пусть теперь физическая ситуация соответствует саморассеянию Манделъштама–Бриллюэна оптического импульса в условиях замедленного при электромагнитно-индуцированной прозрачности

света [14, 15]. Групповая скорость последнего в этом случае равна скорости звука  $v_l$ . Тогда

$$k_2 \approx (\omega v_l)^{-1}, \quad B \approx \frac{v_0 \tau_p}{\omega k_2}$$

(здесь  $v_0$  — фазовая скорость света в среде, близкая к скорости света в вакууме) и

$$\frac{\rho_{1m}}{\rho_0} \approx \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \frac{v_0}{v_l}.$$

Здесь также условие слабой нелинейности является более жестким, чем в случае НУШ:

$$\left(\frac{l_x}{l_z}\right)^2 \gg \frac{v_0}{v_l}.$$

Так что предположения, сделанные при выводе уравнения КП (49), естественным образом выполняются для вторичных солитонов на фоне солитонов огибающей НУШ.

Как отмечалось выше,

$$\rho_{1m} \approx \frac{B}{l_x^2}.$$

Кроме того, из приведенных выше выражений для  $B$  видно, что во всех случаях данная величина является монотонно возрастающей функцией длительности первичного солитона. Так как с возрастанием длительностей амплитуды первичных солитонов убывают, мы приходим к общему выводу об убывании амплитуды вторичного солитона с ростом амплитуды первичного при фиксации остальных параметров.

Из представленной в настоящем разделе схемы выпадают солитоны СГ. Для этих солитонов  $\Gamma = -1$ . Тогда, как следует из формулы (53),  $h = 0$ , поэтому здесь при выводе из системы (1), (2) уравнения для слабонелинейных длинноволновых возмущений необходимо учитывать члены более высокого порядка малости. Опуская промежуточные выкладки (которые достаточно просты и принципиально не отличаются от тех, с помощью которых мы получили уравнение (49)), запишем окончательное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + h_s \rho_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} + r \rho_1 \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \zeta^3} + \right. \\ \left. + 2r \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \zeta^2} - s \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial \zeta^3} \right) = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\mu = \sqrt{av_0} \tau_p, \quad h_s = 3\sqrt{v_0 a} \tau_p^3,$$

$$r = -\frac{\rho_0}{2\mu} G'(\rho_0) = \frac{\pi^2 v_0^{3/2}}{16\sqrt{a}} \tau_p^2,$$

$$s = \frac{\pi^2 v_0^{3/2}}{48\sqrt{a}} \tau_p.$$

Данное уравнение значительно сложнее для анализа, чем (49). Следует отметить, что в случае одномерных поперечных возмущений, когда правая часть уравнения (54) обращается в нуль, оно переходит в высшее уравнение КдВ при отсутствии члена  $\sim \partial^5 \rho_1 / \partial \zeta^5$ , соответствующего линейной дисперсии пятого порядка. Именно последнее обстоятельство делает это уравнение неинтегрируемым [33]. Однако в общем случае вопрос об интегрируемости уравнения (54) пока остается открытым.

Как видно из выражений для  $h$  и  $h_s$ , нелинейность поперечных возмущений определяется дисперсионными характеристиками среды, в которой распространяются первичные солитоны. Действительно, параметры  $h$  и  $h_s$  не зависят от коэффициентов нелинейности уравнений, решениями которых являются одномерные первичные солитоны. На самом деле нелинейность здесь неявным образом присутствует, так как первичный солитон есть результат уравновешивания дисперсии и нелинейности. Однако же формально параметры  $h$  и  $h_s$  зависят от коэффициентов дисперсии в уравнениях, порождающих первичный солитон. Это видно уже непосредственно из уравнения (2). Коэффициенты  $h$  и  $h_s$  определяются параметром  $\mu$ , который, в свою очередь, выражается через  $f(\rho)$ . В отсутствие поперечных возмущений добавка к обратной скорости солитона (групповой или фазовой) равна

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -f(\rho_0).$$

В то же время хорошо известно, что скорость солитона однозначно определяется законом дисперсии, порождаемым соответствующим линейризованным волновым уравнением [5, 34–36]. Следовательно, зависимость  $f(\rho)$ , а с ней величина  $\mu$  и коэффициент нелинейности  $h$  для вторичного солитона, определяются дисперсионными характеристиками первичного солитона.

На основании сказанного выше можно констатировать, что конкретный вид нелинейной зависимости  $Q(\theta)$  в левой части уравнения (11) не столь важен. Важно то, чтобы это уравнение порождало солитоноподобное (кинкоподобное) решение, а закон дисперсии для линейризованного уравнения оставался таким же, как и для (12) в отсутствие поперечных

возмущений. Тогда можно утверждать, что для соответствующего вторичного солитона  $h = 0$  и для исследования его движения необходим анализ уравнения (54). Данный вывод подтверждается примером кинка уравнения модели « $\theta^4$ », для которого так же, как и в случае кинка СГ,  $\Gamma = -1$  [3]. Таким образом, уравнение (54) описывает динамику слабонелинейных длинноволновых поперечных возмущений кинков широкого класса нелинейных уравнений типа уравнения Клейна–Гордона.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в настоящей работе подход, берущий свое начало из усредненного вариационного принципа, позволил получить несколько качественных результатов, касающихся поперечных структур и динамики различных солитонов.

Базовая система (1), (2) обладает высокой степенью универсальности в том смысле, что она описывает влияние поперечных возмущений на солитоны различных уравнений. Это позволяет, исследуя свойства решений данной системы, делать общие заключения относительно поперечной солитонной динамики. С другой стороны, обсуждаемая система нелинейна и в этом смысле, казалось бы, ничуть не проще исходных уравнений, порождающих квазиодномерные солитоны. Тем не менее система (1), (2) содержит производные только по трем пространственным переменным, а временные производные, в отличие от исходных уравнений, в ней отсутствуют, что является следствием усреднения по времени в соответствующем лагранжиане. В этом смысле данная система все же проще исходных уравнений.

В общем случае система (1), (2) эквивалентна уравнению (25) для комплексной функции  $\psi$ , связанной с варьируемым солитонным эйконалом  $\Phi$  и величиной  $\rho$  преобразованием Маделунга (24). Несмотря на то что уравнение (25) выглядит все еще достаточно сложным, оно демонстрирует возможность сведения проблемы динамики квазиодномерного пространственно-временного солитона к задаче о поведении пространственного пучка. Особенно наглядно это демонстрируется левой частью (25), содержащей слагаемые типа обобщенного НУШ.

В частном случае, для рассмотренных здесь поперечных возмущений солитонов НУШ и ЯО, уравнение (25) сводится к уравнению Шредингера (26) с нелинейностью пятого порядка. Методы исследования структур решений последнего уравнения достаточно хорошо разработаны, что позволило здесь опи-

сать, в частности, вихревую и дырочно-вихревую структуру пространственно-временных солитонов НУШ и ЯО, соответственно. Кроме того, найдены решения в виде «темных» пуль солитонов НУШ, а также трехмерных длинно-коротковолновых «пуль» системы ЯО. В дальнейшем представляет интерес исследование вопроса устойчивости таких «пуль» и дырочно-вихревых солитонов.

Следует заметить, что линейризованные варианты НУШ и ЯО обладают одним и тем же законом дисперсии:

$$k_z = \frac{k_z \omega^2}{2} - \frac{v_0 k_{\perp}^2}{2\omega}.$$

Приведенные в четвертом разделе настоящей работы соображения о том, что дисперсионные свойства уравнений, порождающих первичные солитоны, определяют параметры нелинейности для вторичных поперечных возмущений, позволяют высказать предположение, согласно которому и другие уравнения с отмеченным линейным законом дисперсии способны породить для поперечных возмущений уравнение типа (26). В этом отношении заслуживает внимания исследование влияния поперечных возмущений на векторные НУШ (например, на солитоны системы Манакова) [37], а также на двухэлектронные акустические поляроны в системе длинных молекул [38]. В последнем случае нелинейная система отличается от системы ЯО (19), (20) тем, что поле огибающей является двухкомпонентным:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)^T.$$

Общие выводы о влиянии поперечных возмущений на соответствующие солитоны могут пролить свет на поперечную динамику конкретных физических объектов, описываемых данными уравнениями.

Не исключено, что можно найти обобщения преобразования Маделунга, которые позволят переписать систему (1), (2) в виде, отличающемся от (25), но более пригодном для теоретического анализа. Это позволило бы провести точное исследование (1), (2) для поперечных возмущений солитонов уравнений, отличных от НУШ и ЯО.

Система (1), (2) в своем самом общем виде содержит нелинейность и дисперсию, которые способны породить вторичные солитоны на фоне первичных. Не исключено поэтому, что уравнение КП (49) и его солитоны (50) — всего лишь частный случай, соответствующий слабонелинейным длинноволновым поперечным возмущениям. Вполне возможно, что использование других предположений относительно поперечных возмущений, подчиняющихся «гидродинамической» системе (1), (2), приведет к другим ин-

тегрируемым моделям, описывающим вторичные солитоны, свойства которых отличны от свойств «ламп» (50). На наш взгляд, это замечание заслуживает внимания еще и по той причине, что малоамплитудные длинноволновые поперечные возмущения солитонов СГ (или, как было замечено в конце четвертого раздела, нелинейного Клейна–Гордона) не описываются уравнением КП.

Первичные солитоны можно некоторым образом рассматривать как динамические волноводы, по которым способны распространяться нелинейные поперечные возмущения в виде вторичных солитонов.

Важной отличительной особенностью системы (1), (2), по сравнению с родственными системами, найденными в пионерских работах [1, 2], является то, что в данной системе поперечные возмущения учитываются в совокупности с явлением дифракции. Последнему соответствует правая часть (2), отсутствовавшая в [1, 2]. Дело в том, что интегралы, соответствующие дифракционным членам в методе УЛ, для солитонов многих уравнений являются расходящимися. Данное обстоятельство было, по-видимому, основной причиной, по которой поперечные возмущения в [1, 2] учитывались в приближении «геометрической оптики для солитонов» (причем только для «светлых»). На этот случай в работе [3] был предложен метод регуляризации, позволивший избавиться от этих расходимостей и учесть тем самым дифракционные эффекты в поперечной динамике при распространении различных солитонов.

Таким образом, можно еще раз констатировать, что система (1), (2) в самом общем случае (с поправкой на приближенный характер метода УЛ) описывает влияние поперечных возмущений на распространение квазиодномерных солитонов и представляет в этой связи интерес для дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16422а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Жданов, Письма в ЖЭТФ **43**, 414 (1986).
2. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987).
3. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **125**, 1409 (2004).
4. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, Москва (1991).

5. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **119**, 419 (2001).
6. С. В. Сазонов, УФН **171**, 663 (2001).
7. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
8. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
9. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1745 (1972).
10. N. Yadjima and M. Oikawa, Prog. Theor. Phys. **56**, 1719 (1976).
11. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, Письма в ЖЭТФ **75**, 746 (2002).
12. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003).
13. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, КЭ **35**, 1019 (2005).
14. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **81**, 259 (2005).
15. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **128**, 1123 (2005).
16. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005).
17. С. Н. Власов, В. И. Таланов, В. А. Петрищев, Изв. ВУЗов. Радиофизика **14**, 1353 (1971).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 8, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
19. Р. К. Kaw, K. Nishikawa, Y. Yoshida, and A. Hasegawa, Phys. Rev. Lett. **35**, 88 (1975).
20. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
21. N. N. Akhmediev and J. Soto-Crespo, Phys. Rev. A **47**, 1358 (1993).
22. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны: нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003).
23. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Изв. ВУЗов. Радиофизика **16**, 1020 (1973).
24. L. Berge, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
25. X. D. Cao, C. J. McKinstrie, and G. P. Agrawal, Phys. Rev. A **49**, 4085 (1994).
26. Д. С. Кузнецов, *Специальные функции*, Высшая школа, Москва (1965).
27. J. C. Neu, Physica D **43**, 385 (1990).
28. Y. Chen and J. Atai, J. Opt. Soc. Amer. B **9**, 2252 (1992).
29. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 9, *Статистическая физика*, часть 2, Наука, Москва (1978).
30. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1991).
31. L. A. Bordag, A. R. Its, A. V. Matveev, S. V. Manakov, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **63**, 205 (1979).
32. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, *Введение в нелинейную акустику*, Наука, Москва (1966).
33. Ф. Калоджеро, в кн. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко, Наук. думка, Киев (1990), с. 65.
34. E. Schlömann, Appl. Phys. Lett. **19**, 274 (1971).
35. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, Письма в ЖЭТФ **27**, 226 (1978).
36. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **107**, 20 (1995).
37. С. В. Манаков, ЖЭТФ **67**, 543 (1974).
38. А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наук. думка, Киев (1984).