

УСКОРЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКИ СИЛЬНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПОЛЯХ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ С ИОНАМИ ПЛАЗМЫ

А. А. Балакин, Г. М. Фрайман*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2006 г.

Рассмотрены электрон-ионные столкновения в сильных электромагнитных полях в ультррелятивистском предельном случае ($a = eA/mc^2 \gg 1$). С использованием точных канонических преобразований для перехода к дрейфовым координатам получены выражения для связи дрейфовых координат и импульса электрона с его координатами и импульсом в лабораторной системе с учетом неадиабатических эффектов. Предсказано появление сверхбыстрых частиц с максимальной энергией, пропорциональной кубу векторного потенциала лазерного импульса. Получены выражения для функций распределения по энергиям таких высокоэнергичных («горячих») электронов, появившихся в результате столкновений, а также для их числа. Показано, что, как и в реальных экспериментах на петаваттном лазере [1], эти функции распределения представляют собой степенные зависимости.

PACS: 45.20.Jj, 52.20.Dq, 52.27.Ny, 52.35.Mw

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что столкновения электронов с ионами в сильных электромагнитных полях с уже не релятивистскими уровнями интенсивности порождают целый ряд интересных эффектов: рост джоулева нагрева [2, 3], генерацию гармоник [4] и быстрых частиц [5]. Переход к релятивистским интенсивностям электромагнитных полей приводит к неожиданным модификациям указанных выше эффектов. В частности, как показано в данной работе, при электрон-ионных столкновениях в ультррелятивистских полях возможно появление быстрых частиц с энергиями вплоть до p_{osc}^3/m^2c ($\mathbf{p}_{osc} = -e\mathbf{A}/c$ — осцилляторный импульс частицы, \mathbf{A} — вектор-потенциал электромагнитной волны). Отметим, что максимальная энергия быстрых частиц растет даже быстрее, чем в нерелятивистском случае, когда энергия частиц ограничена величиной $2p_{osc}^2/m$. Следы таких сверхбыстрых частиц, по-видимому, можно найти и в эксперименте [1, 6], где для плазмы, взаимодействующей с лазерным излучением интенсивностью порядка 10^{20} Вт/см², от-

мечено появление электронов с энергиями вплоть до нескольких ГэВ. Традиционно наличие быстрых электронов в этих экспериментах объясняется в рамках бесстолкновительных моделей, в которых ускорение осуществляется за счет возбуждаемых плазменных волн [1, 6, 7].

В данной работе мы оцениваем эффективность появления быстрых электронов в прозрачной плазме при электрон-ионных столкновениях в поле релятивистски сильного лазерного импульса. Весь анализ выполнен без учета потерь на излучение в рамках классических уравнений движения. Работа состоит из двух частей. В первой части обсуждается задача о мгновенной (обусловленной столкновениями) «инъекции» электрона в поле плавного в продольном и в поперечном направлениях волнового пакета и определении его максимальной энергии после выхода из области волнового пакета. Пакет считается распространяющимся в вакууме со скоростью света. Эта задача неоднократно решалась многими авторами (см., например, [8] и цитируемую там литературу). Новизна нашего подхода состоит в использовании перехода к дрейфовым координатам, соответствующим в нерелятивистском при-

*E-mail: balakin@appl.sci-nnov.ru

ближении усредненному пондеромоторному описанию [9], осуществляемого в рамках точного канонического преобразования, что позволяет оценить также и неадиабатические эффекты обмена энергией электрона с полем. Во второй части работы анализируется задача об инжекции электрона, вызванной кулоновскими столкновениями. Удар электрона об ион происходит мгновенно, за время, много меньшее периода поля, поэтому рассеяние электрона можно рассматривать как его инжекцию (рождение) с новым значением кинематического импульса после рассеяния. Для описания процесса столкновения мы используем результаты исследования электрон-ионных столкновений в сильных полях (учтен эффект притяжения электронов к иону). С учетом этого выполнены оценки для определения распределения по инжектируемым импульсам при столкновениях и найдены функции распределения по энергиям и углам, а также плотность потока быстрых электронов из единицы объема. В Заключении даны оценки возможных для наблюдения величин и проведено сопоставление с результатами известных экспериментов [1].

2. ЭФФЕКТ a^3

Одной из причин, побудивших авторов к написанию данной работы, был вопрос о величине максимальной энергии, которую может получить частица в релятивистски сильных полях. Например, известно [8], что при ионизации газа в релятивистски сильном лазерном поле частицы могут иметь энергию порядка

$$p_{osc}^2/m = mc^2 a^2.$$

Здесь введено часто используемое обозначение для нормированного вектор-потенциала

$$a = eA/mc^2.$$

Возникает вопрос, можно ли при столкновениях получить большую энергию?

Ответ тривиально получается из формул для движения частицы в поле плоской монохроматической волны [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\perp &= \mathbf{q} + \mathbf{p}_{osc}, \\ p_\parallel &= \frac{p_0^2 + q^2 + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{osc} + p_{osc}^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p_0 = mc$ — импульс покоя, \mathbf{q}, α — интегралы движения, $\mathbf{p}_\perp, p_\parallel$ — кинематические импульсы частицы поперек и вдоль волнового вектора волны в лабораторной системе координат.

Считая удар мгновенным на периоде поля, т. е. фактически рассматривая скачкообразное изменение импульса частицы («инжекцию» частицы с новыми импульсами) и учитывая сохранение в адиабатическом приближении усредненного по фазе импульса после прохождения волнового пакета, легко получить ответ. Оптимальному режиму столкновения соответствует «рождение» частицы с начальными импульсами

$$p_\perp = 0, \quad p_\parallel = p_{osc},$$

откуда следует

$$\mathbf{q} = -\mathbf{p}_{osc}, \quad \alpha \approx p_0^2/2p_{osc}.$$

Значение усредненного по фазе волны (т. е. дрейфового) продольного импульса будет равно

$$\langle p_\parallel \rangle \approx \frac{p_{osc}^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle}{2\alpha} = \frac{p_{osc}(p_{osc}^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle)}{p_0^2}. \quad (2)$$

Используя формулы (1) и (2), выразим максимальную энергию H_{max} через величину a ,

$$H_{max} = c\langle p \rangle_{max} \approx mc^2 a(a^2 + \langle a^2 \rangle) \approx 2mc^2 a^3.$$

Из полученного выражения видно, что максимальная энергия возрастает пропорционально a^3 . Это и есть эффект a^3 , которому посвящена статья. Интересно, что в релятивизме с ростом амплитуды электромагнитной волны p_{osc} порог по энергии растет даже быстрее, чем в нерелятивистском случае,

$$H_{nonrel}^{max} \leq \frac{2p_{osc}^2}{p_0}.$$

Вообще говоря, отсюда можно получить достаточно неожиданный результат о возможности еще более сильного ускорения частицы в поле электромагнитной волны. Пусть частица рассеялась (например, на ионе) и получила импульс \mathbf{p} . Тогда, вновь используя формулы (1), (2), найдем, что средний по фазе импульс будет равен

$$\langle \mathbf{p}_\perp \rangle = \mathbf{q}, \quad \langle p_\parallel \rangle = p_\parallel - \frac{p_{osc}^2 + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{2(p_\parallel - w)}. \quad (3)$$

Здесь интегралы движения равны $\mathbf{q} = \mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}_{osc}$, $\alpha = w - p_\parallel$, энергия равна $w = \sqrt{p^2 + p_0^2}$. В качестве значения \mathbf{p}_{osc} берутся значения осцилляторного импульса в момент рассеяния.

Полагая $\mathbf{p}_\perp = 0$ (частица рассеялась вдоль \mathbf{k}), а величину импульса достаточно большой $p \gg p_0$, сразу получим, что средний импульс (и, соответственно, конечная энергия частицы) станет в a^2 раз больше, чем после рассеяния! Такой процесс можно называть «кулоновским ускорителем».

Однако возникают вопросы: в какой степени усредненный по фазе импульс сохраняется после прохождения волнового пакета и каковы ограничения роста энергии? Для ответа на эти вопросы удобно перейти к каноническим переменным, в которых гамильтониан задачи не зависит от быстро осциллирующего внешнего поля. В нерелятивистском случае такую систему координат называют дрейфовой. Сохраним это название и в общем релятивистском случае.

3. ДРЕЙФОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Вид дрейфовых координат в релятивистском случае и переход к ним нетривиальны. В качестве исходного возьмем гамильтониан свободного движения в поле электромагнитного волнового пакета, записанный в обобщенных координатах (когда не только привычные канонические импульсы \mathbf{P} и координаты \mathbf{r} , но время ct и энергия Hc также являются канонически сопряженными координатой и импульсом соответственно, см., например, [11]):

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{P} + \mathbf{p}_{osc}(\mathbf{r}, t))^2 + p_0^2 - H^2}{2p_0}. \quad (4)$$

Роль времени для такого обобщенного гамильтониана выполняет параметр s — «собственное» время, так что уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}}, & \frac{d\mathbf{P}}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}, & \frac{dH}{ds} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что величина

$$H = -\frac{\sqrt{(\mathbf{P} + \mathbf{p}_{osc})^2 + p_0^2}}{p_0}$$

отрицательна для растущего времени

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{H}{p_0} > 0.$$

Заметим, что использование обобщенных координат [10, 11] позволило привести гамильтониан к простому квадратичному виду без использования громоздких коренных зависимостей. Гамильтониан \mathcal{H} обладает важным свойством — он тождественно равен нулю на траектории движения. Действительно, гамильтониан \mathcal{H} постоянен, поскольку в нем нет явной зависимости от параметра s , кроме того, эта постоянная равна нулю в силу выражения для энергии частицы в релятивистском случае.

Для перехода к дрейфовым координатам необходимо провести каноническое преобразование, исключая явную зависимость от быстрой фазы из гамильтониана свободного движения \mathcal{H} . При этом собственно свободное движение в дрейфовых координатах в поле плоской однородной электромагнитной волны должно представлять прямую линию с сохранением импульса частицы. В общем виде производящая функция такого преобразования может быть найдена из решения уравнения Гамильтона–Якоби для нашего гамильтониана и собственного времени s . Фактически, эта задача давно решена [10]. Однако, поскольку нас интересуют и неадиабатические поправки, мы приведем необходимые выкладки, слегка модифицировав процедуру. Выберем систему координат так, чтобы ось x была сонаправлена с волновым вектором электромагнитной волны \mathbf{k} . В этой лабораторной системе координат гамильтониан примет вид

$$2p_0\mathcal{H} = (\mathbf{P}_\perp + \mathbf{p}_{osc}(x-t))^2 + P_x^2 + p_0^2 - H^2, \quad (5)$$

где для краткости временная координата по-прежнему обозначается символом $t = ct$.

В сопровождающей системе координат $\{\xi, \eta\}$,

$$\xi = x-t, \quad \eta = x+t, \quad P_x = P_\xi + P_\eta, \quad H = P_\eta - P_\xi,$$

гамильтониан может быть записан как¹⁾

$$2p_0\mathcal{H} = (\mathbf{P}_\perp + \mathbf{p}_{osc}(\xi))^2 + p_0^2 + 4P_\xi P_\eta. \quad (6)$$

Далее, проводя каноническое преобразование с помощью производящей функции (символ $\langle \rangle$ подразумевает усреднение по координате ξ , т. е. по фазе волны)

$$F = \bar{\mathbf{p}}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{osc}(\xi, \bar{p}_\eta)) + \bar{p}_\eta \eta + \bar{p}_\xi \xi - \int \frac{p_{osc}^2 - \langle p_{osc}^2 \rangle}{4\bar{p}_\eta} d\xi \quad (7)$$

и с учетом определения

$$r_{osc} = \int \frac{p_{osc}}{2P_\eta} d\xi, \quad (8)$$

получим замену переменных вида

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_\perp &= \mathbf{P}_\perp, & \bar{\mathbf{r}}_\perp &= \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{osc}, & \bar{p}_\eta &= P_\eta, \\ \bar{\eta} &= \eta + \frac{1}{4P_\eta^2} \int (p_{osc}^2 + 2\mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle) d\xi, & & & & (9) \\ \bar{p}_\xi &= P_\xi - \frac{p_{osc}^2 + 2\mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{4P_\eta}, & \bar{\xi} &= \xi, & & \end{aligned}$$

¹⁾ Это каноническая замена переменных с производящей функцией $F_\xi = \bar{\mathbf{p}}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + \bar{p}_\xi(x-t) + \bar{p}_\eta(x+t)$.

где не зависящий от координат гамильтониан имеет вид

$$2p_0\mathcal{H} = p_{\perp}^2 + p_0^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle + 4p_{\xi}p_{\eta}. \quad (10)$$

Следует отметить, что каноническое преобразование с помощью выражений (7), (8) можно выполнить при произвольной (не обязательно гармонической) зависимости вектор-потенциала

$$\mathbf{A} = -\frac{c\mathbf{P}_{osc}}{e}$$

от координаты ξ .

Наконец, возвращаясь к привычным координатам $\{x, t\}$, получим связь для импульсов в дрейфовой \mathbf{p} и лабораторной \mathbf{P} системах координат, а также выражение для гамильтониана:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{P}_{\perp}, \quad p_x = P_x - \frac{p_{osc}^2 + 2\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{P}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{2(p_x + h)}, \quad (11)$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_{\perp}^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle - h^2}{2p_0}. \quad (12)$$

Здесь специально выделено слагаемое $\langle p_{osc}^2 \rangle$, которое соответствует эффективному «утяжелению» частицы в релятивистски сильных полях. Данное слагаемое может плавно зависеть от координат, что соответствует появлению пондеромоторного потенциала. Обратим внимание, что выражения для дрейфовых импульсов (11) совпадают с усредненными по фазе волны кинематическими импульсами (3) (напомним, что величина h отрицательна).

Отметим ряд интересных особенностей дрейфовых координат в релятивистском пределе. В отличие от нерелятивистского случая, в релятивизме амплитуды осцилляций по координате и импульсу существенно зависят от энергии частицы. Это легко видеть из выражения (8), поскольку величина p_{η} в общем случае определяется энергией частицы, а не только ее массой покоя. Кроме того, реальное время частицы $t(s)$ течет неравномерно в силу периодического изменения импульса частицы во внешнем поле. Так что «дрейфовое» (равномерное) время у разных осциллирующих частиц оказывается разным. Это означает, что, в отличие от нерелятивистского случая, невозможно ввести дрейфовую систему координат в едином (лабораторном, реальном) времени t для всех частиц.

Для частицы, двигающейся в поле только одной волны, гамильтониан (12) можно переписать в более привычной форме

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 + p_0^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle},$$

выразив импульс h в явном виде. Напомним, что в качестве гамильтониана может выступать любая каноническая переменная (чаще импульс), записанная как функция от оставшихся канонических переменных. Такой вид гамильтониана встречается во многих работах по усредненному описанию движения частицы в поле волны (см., например, [8, 12] и цитируемую там литературу). Появление в уравнении дополнительного потенциала \mathcal{V} (например, кулоновского потенциала иона) усложнит вид гамильтониана (12),

$$\mathcal{H} = \frac{p_{\perp}^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle - h^2}{2p_0} + \frac{2h\mathcal{V} - \mathcal{V}^2}{2p_0} + \mathcal{V} \frac{p_{osc}^2 + 2\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{P}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{2p_0(p_x + h)}, \quad (13)$$

и уже не позволит записать гамильтониан в привычном виде, поскольку выразить импульс h окажется значительно труднее.

3.1. Условия адиабатичности

Еще одно отличие предложенного нами подхода от усредненного описания состоит в возможности рассматривать поле волнового пакета, а не только плоской монохроматической волны. Как уже отмечалось выше, формулы (11) и (12) совершенно не изменятся при наличии произвольной зависимости от «продольной» координаты ξ . Введение дополнительной зависимости от оставшихся координат приведет к появлению осциллирующих слагаемых в дрейфовом импульсе

$$p_{\perp, \eta} = P_{\perp, \eta} - \delta p_{\perp, \eta}$$

и гамильтониане

$$\mathcal{H} = \frac{p_{\perp}^2 + p_x^2 + p_0^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle - h^2}{2p_0} + \delta p_{\eta} \frac{p_x - h + 2U}{p_0} + \delta \mathbf{p}_{\perp} \cdot \frac{2\mathbf{p}_{\perp}^d - 2\mathbf{P}_{osc} + \delta \mathbf{p}_{\perp}}{2p_0}, \quad (14)$$

где

$$\delta p_i = \int \frac{\partial U}{\partial r_i} d\xi, \quad U = \frac{2\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{P}_{osc} + p_{osc}^2 - \langle p_{osc}^2 \rangle}{4p_{\eta}}. \quad (15)$$

В случае плавной зависимости от поперечных координат эти слагаемые малы по сравнению с длиной волны излучения. Это позволяет оценить неадиабатические поправки к усредненному описанию по теории возмущений. Более того, если окажется, что они несущественны, мы можем продолжить цепочку канонических преобразований и найти поправки

к дрейфовому гамильтониану во втором порядке и т. д. [13].

Условия же адиабатического приближения при движении в волновом пакете легко найти и из общих соображений. Действительно, изменение импульсов будет адиабатически (экспоненциально) малым, если собственное время пролета пакета вдоль координат $\{\mathbf{r}_\perp, \eta\}$ будет много больше собственного времени пролета периода поля. Эти времена легко оценить:

$$s_0 = \frac{\lambda}{v_\xi}$$

— собственное время пролета периода поля,

$$s_1 = \frac{L_\perp}{v_\perp}, \quad s_2 = \frac{L_\parallel}{v_\eta}$$

— собственные времена пролета по поперечной и «продольной» координате. Скорости пролета в собственном времени определяются по стандартным формулам

$$\frac{dr_i}{ds} = v_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

и равны (как следует из (10))

$$v_\perp = \frac{p_\perp}{p_0} \approx a, \quad v_\xi = \frac{2p_\eta}{p_0}, \quad v_\eta = \frac{2p_\xi}{p_0}.$$

Учитывая дополнительно связь импульсов,

$$p_{max} \approx p_\xi \approx p_{osc}^2/p_\eta \gg p_0,$$

для ультрарелятивистского случая, условия адиабатичности можно записать в следующем простом виде:

$$p_{max} \ll \frac{2L_\perp}{\lambda} p_{osc}, \quad p_{max} \ll \sqrt{\frac{L_\parallel}{\lambda}} p_{osc}. \quad (16)$$

По сути, это те же условия, что записывались ранее другими авторами [8], но выраженные через максимальный импульс частицы.

Физический смысл условий довольно прозрачен. Сверхбыстрая частица летит почти вместе с волной и из-за релятивистского замедления ей надо больше собственного времени для прохождения осцилляций поля по сравнению с нерелятивистским случаем. Вылет же поперек пакета происходит так же быстро, как и ранее. Именно по этой причине обычное нерелятивистское условие адиабатичности, $L_\perp, L_\parallel \gg \lambda$, заменяется на условия (16), в которые входит импульс частицы. Аналогичным образом могут быть получены и условия нарушения адиабатичности при распространении волнового пакета в среде (например, в плазме). В этом случае ограничение фактически состоит в невозможности превышения частицей групповой скорости волны.

3.2. Изменение энергии при мгновенном ударе

Выпишем соотношения для энергии при резком скачкообразном изменении полного импульса частицы вследствие упругого столкновения. Пусть до столкновения частица имела кинематический импульс $\{h, \mathbf{p}\}$ в лабораторной системе координат, а сразу после мгновенного (на масштабе периода поля) упругого столкновения импульс частицы стал $\{h, \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}\}$. В качестве важного примера таких столкновений могут служить электрон-ионные столкновения в пренебрежении изменением импульса иона (бесконечно тяжелый ион). Как известно, рассеяние частиц на кулоновском потенциале иона в отсутствие внешних полей происходит с сохранением энергии частиц [10]. Это следует прямо из стационарности соответствующего гамильтониана взаимодействия частиц.

Найдем изменение дрейфового импульса частицы $\Delta \mathbf{p}$. Изменение поперечного дрейфового импульса частицы в точности равно $\delta \mathbf{p}_\perp$,

$$\Delta \mathbf{p}_\perp = \delta \mathbf{p}_\perp.$$

Кроме того, поскольку p_η не преобразуется при переходе к дрейфовым координатам, получим

$$\Delta p_\eta = \frac{\delta p_x}{2} = \frac{\Delta p_x + \Delta h}{2}.$$

Выражение для изменения оставшейся компоненты импульса

$$\Delta p_\xi = \frac{\Delta p_x - \Delta h}{2}$$

надо записывать с учетом формул перехода к дрейфовым координатам (9):

$$\Delta p_\xi = \frac{\delta p_x}{2} - \frac{p_{osc}^2 + 2(\mathbf{p}_\perp + \delta \mathbf{p}_\perp) \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{4(p_\eta + \delta p_x/2)} + \frac{p_{osc}^2 + 2\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle}{4p_\eta}.$$

Отсюда для изменения энергии находим

$$\Delta h = \frac{1}{2(p_x + h + \delta p_x)} \left[\frac{-\delta p_x}{p_x + h} \times \right. \\ \left. \times (p_{osc}^2 + 2\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_{osc} - \langle p_{osc}^2 \rangle) + 2\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{osc} \right]. \quad (17)$$

В нерелятивистском пределе, $p_x, |h - p_0| \ll p_0$, мы получаем хорошо известное выражение для изменения энергии:

$$\Delta h = \frac{-\Delta \mathcal{E}}{c} \approx \frac{\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{osc}}{p_0}, \quad (18)$$

отражающее тот факт, что изменение энергии частицы — это работа, совершенная над ней полем. Максимальное изменение энергии при этом получается при рассеянии частицы назад, когда $\delta\mathbf{p} = -2\mathbf{p}_{osc}$. Здесь и далее, если не оговорено обратное, мы считаем начальный дрейфовый импульс малым по сравнению с осцилляторным импульсом. В случае же релятивистского движения легко видеть, что возможно заметное изменение энергии и при рассеянии вбок (вдоль \mathbf{k} — особенно при $\delta p_x \approx p_0, p_x$) из-за изменения «массы» частицы и, соответственно, изменения осцилляторной траектории, поскольку в релятивистском случае амплитуда осцилляций зависит от величины дрейфового импульса частицы.

Проанализируем выражение (17). Можно заметить, что выражение в квадратных скобках ограничено по амплитуде и не может превышать величины порядка p_{osc}^2 . Это напрямую следует из малости начальных дрейфовых импульсов $p \ll p_{osc}$ и оценки для энергии $h \approx p_{osc} \gg p_0$. Полагая малым изменение импульса вдоль \mathbf{k} ($\delta p_x \ll h \approx p_{osc}$), мы сразу же приходим к ограничению максимальной получаемой энергии величиной порядка p_{osc} , как и отмечалось выше.

Пусть теперь частица рассеялась почти на 90° относительно направления своей начальной скорости ($\delta\mathbf{p}_\perp = -\mathbf{p}_{osc}$) и полетела вдоль волнового вектора электромагнитной волны. Тогда в знаменателе (17) окажется малая величина

$$2(p_x + h + \delta p_x) \approx \frac{p_0^2}{p_{osc}} \ll p_{osc}.$$

В результате максимально возможная энергия частиц будет порядка

$$\Delta h_{max} = \frac{p_{osc}}{p_0^2} (p_{osc}^2 + \langle p_{osc}^2 \rangle) \approx \frac{2p_{osc}^3}{p_0^2} \gg p_{osc}. \quad (19)$$

Это и есть полученная ранее оценка (2).

Отметим, что в ряде случаев использование формул для дрейфовых координат более удобно, чем выражения для изменения импульсов. В частности, они позволяют довольно легко получить распределение частиц по энергиям после столкновения. Кроме того, дрейфовые координаты удобны при численном моделировании столкновений частиц в релятивистски сильных полях.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕРХБЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Найдем распределение по энергии таких сверхбыстрых частиц, появляющихся при электрон-ионных

столкновениях в единицу времени. Для этого необходимо вычислить интеграл

$$g(h) = n_i \iint n(\rho) v \delta(h - \Delta h) \rho d\rho d\phi, \quad (20)$$

где $n_i = n_e/Z$ — концентрация ионов, $n(\rho)$ — плотность частиц перед последним ударом, h — изменение дрейфовой энергии при релятивистском кулоновском соударении.

Плотность частиц перед последним ударом можно определить из следующих соображений. Заметим, что релятивистски сильные лазерные поля соответствуют условиям сильного поля, определенным в работе [2]. А именно, осцилляторный импульс частицы значительно превышает тепловой импульс,

$$p_{osc} = \frac{eA}{c} \gg mv_T = \sqrt{\frac{mT}{2}}, \quad (21)$$

и размах осцилляций значительно превосходит масштаб столкновений,

$$r_{osc} \approx \frac{c}{\omega} \gg b_{osc} \approx \frac{e^2 Z}{p_{osc} c}. \quad (22)$$

В последней формуле даны приближенные выражения для радиуса осцилляций r_{osc} и резерфордовского радиуса b_{osc} для случая ультрарелятивистских интенсивностей $p_{osc} \gg mc$.

Рассеяние частиц в сильных полях происходит в два этапа [2]. Вначале происходит притяжение частицы к иону (т.е., фактически, изменение плотности тестовых частиц) при практически неизменном импульсе. Затем имеет место «жесткое» столкновение (удар) с сильным изменением импульса электронов, включая рассеяние на большие углы и уход от кулоновского центра. Для определения концентрации частиц $n(\mathbf{r})$ перед последним, «жестким» ударом можно воспользоваться как результатами численного моделирования, так и результатами анализа точечного отображения [2]. В обоих случаях зависимость $n(\mathbf{r})$ является сингулярной:

$$n = n_e \frac{\mathcal{B}}{\rho}, \quad (23)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — поперечная координата электрона перед жестким ударом,

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}) \geq b_v = \frac{e^2 Z}{mv^2}$$

— некий коэффициент, характеризующий степень притяжения частиц к иону и имеющий резкую зависимость от направления начальной скорости \mathbf{v} относительно \mathbf{v}_{osc} . В релятивистски сильных полях

распределение (23), по-видимому, сохранится, так как это простейший вид распределения в условиях, когда частицы с окружности собираются в точку. Поскольку в релятивистском случае сохраняется закон увеличения рассеянного импульса с уменьшением прицельного параметра, распределение (23) будет иметь место в силу кинематических причин. Вид распределения (23) подтверждают и предварительные численные расчеты столкновений в релятивистски сильных полях.

Для определения изменения импульса, входящего в выражение (17) для h , воспользуемся точными формулами рассеяния релятивистской частицы на кулоновском центре [10]. Использование формул из работы [10] оправдано тем, что последний, «жесткий» удар происходит на временных и пространственных масштабах, существенно меньших масштабов электромагнитной волны (периода и длины волны). Естественно, это верно для столкновений вдали от точек остановки частицы (когда полная скорость частицы равна нулю), отсутствующих в релятивистски сильных полях. Величина продольного²⁾ импульса δp_x равна

$$\delta p_x = p_{osc} \cos \phi \sin \theta(\rho), \quad (24)$$

где угол рассеяния θ дается выражением

$$\theta = \pi - \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2/\rho^2}} \arccos \frac{-\beta \sqrt{p_{osc}^2 + p_0^2}}{\sqrt{p_{osc}^2 \rho^2 + p_0^2 \beta^2}}. \quad (25)$$

Здесь

$$\beta = \frac{e^2 Z}{p_{osc} c} \Big|_{p_{osc} \gg p_0} \approx b_{osc}$$

— характерный параметр задачи рассеяния. Отметим важную особенность рассеяния с релятивистскими скоростями. При малых прицельных параметрах $\rho \approx \beta$ становится возможным рассеяние вперед. Более того, при уменьшении прицельного параметра $\rho \rightarrow \beta$ рассеяние приобретает быстроосциллирующий характер в силу того, что в формуле для угла рассеяния (25) знаменатель $\sqrt{1 - \beta^2/\rho^2}$ стремится к нулю. Частицы, имеющие прицельный параметр $\rho < \beta$, падают на кулоновский центр и далее не рассматриваются.

В случае, когда интерес представляет рассеяние в ультрарелятивистских полях ($p_{osc} \gg p_0$), выражение для угла рассеяния (25) упрощается:

$$\theta = \pi - \frac{2}{\sqrt{1 - \eta^2}} \arccos(-\eta), \quad (26)$$

²⁾ Величина изменения остальных компонент для интересующих нас частиц будет мала.

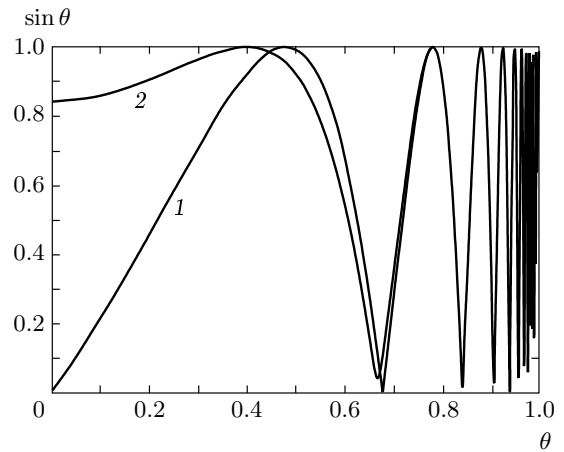


Рис. 1. Графики функций $\sin \theta$ для θ , определяемого выражениями (26) (1) и (28) (2)

где

$$\eta = \frac{\beta}{\rho} \geq 1.$$

При этом интеграл (20) для циркулярно³⁾ поляризованной электромагнитной волны принимает вид

$$g(h) = v n_e n_i \iint \delta \left(h - \frac{p_{osc}(2 + \cos \theta)}{1 - \sin \theta \cos \phi + \mu} \right) \times \frac{B \eta}{\beta} \frac{d\eta d\phi}{\eta^3}, \quad (27)$$

где

$$\mu = \frac{p_0^2}{2p_{osc}^2} = \frac{1}{2a^2} \ll 1$$

— малый параметр задачи. Для вычисления такого интеграла необходимо выразить параметр интегрирования η через величину h . Однако аналитически это сделать довольно сложно в силу трансцендентного характера зависимости угла рассеяния от η (26).

Рассмотрим подробнее величину $\sin \theta$ (см. рис. 1). Основным интерес для нас представляют энергии порядка $h \sim p_{osc}/\mu$, что соответствует значениям $|\sin \theta| \approx 1$. При этом в силу быстроосциллирующего характера этой функции представляется возможным заменить ее на некую похожую функ-

³⁾ Аналогичным образом можно записать выражения для произвольно поляризованной волны, но при этом появится дополнительный интеграл, связанный с зависимостью от фазы поля в момент столкновения. Циркулярная поляризация выделена тем, что в этом случае модуль осцилляторной скорости не зависит от фазы поля, что приводит к снятию одного интегрирования.

цию более простого вида. В качестве примера такой функции можно взять (см. рис. 1)

$$\theta = \sin \left(1 + 2\pi / \sqrt{1 - \eta^2} \right). \quad (28)$$

Очевидно, что при этом область малых значений $\eta \ll 1$, ответственных за относительно малое изменение энергии, будет описываться неправильно, т. е. мы должны ограничиться энергиями $h \geq 2p_{osc}$.

В результате интеграл (27) будет иметь вид

$$g(h) \approx 2vn_en_i \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{B\eta_k}{\beta} \frac{\partial \theta^*}{\partial h} \frac{1}{\eta_k^4} \frac{4\pi^2 d\phi}{(\theta^* + \pi(k+1))^3} \approx \\ \approx vn_en_i \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{2}{\pi\eta_1^4} \frac{B\eta_1}{\beta} \int \frac{\partial \theta^*}{\partial h} d\phi. \quad (29)$$

Здесь η_k — значения $\eta \in (0.4, 1)$, при котором $\sin \theta = 1$, θ^* — значение угла рассеяния, при котором удовлетворяется δ -функция в интеграле (27):

$$\theta^* \approx \arcsin \frac{1 + \mu - 2p_{osc}/h}{|\sin \phi|}. \quad (30)$$

Заметим, что из этого выражения легко вновь получить ограничение на максимальную энергию, исходя из требования действительности функции \arccos :

$$h \leq 2p_{osc}/\mu.$$

Окончательно распределение частиц по энергиям принимает вид

$$g(h) = vn_en_i \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{2}{\pi\eta_1^4} \frac{B\eta_1}{\beta} \times \\ \times \frac{p_{osc}}{h^2} K \left(1 - \left(1 + \mu - 2\frac{p_{osc}}{h} \right)^2 \right), \quad (31)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. После отделения зависимости от основных параметров плазмы распределение по энергиям принимает следующий простой вид:

$$g(h) \approx \frac{n_i^2 Z^3 \Lambda}{h^2}, \quad (32)$$

где Λ — логарифмический множитель. Эта формула удобна для экспериментальных оценок. Например, меняя тип газа (т. е. величину Z), мы получаем кубичную зависимость от заряда иона. Кроме того, явно видно, что убывание функции $g(h)$ с ростом энергии частиц происходит по степенному закону. Отметим, что поскольку энергия таких частиц высока, в дальнейшем они практически не будут сталкиваться в плазме, поэтому их закон распределения

сохраняется. Зависимость от плотности газа (величины n_i) не столь очевидна, так как высокие концентрации приводят к нарушению условий адиабатичности (16).

На самом деле оценку (32) можно получить из совсем простых соображений. Предположим, что частица рассеивается изотропно, если ее прицельный параметр мал, $\rho \sim \beta$ (см. рис. 1). Тогда, используя формулы (3) и (23), для частиц с $p > p_{osc}$ распределение по энергиям можно привести к простому виду:

$$g(h) = 2\pi vn_in_e B\beta \int \delta \left(h - \frac{p_{osc}}{1 + \mu - \cos \vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Здесь ϑ — угол между волновым вектором и кинематическим импульсом частицы p_x после столкновения, $p_x = p_{osc} \cos \vartheta$. Интеграл легко вычисляется с помощью определения δ -функции, если для энергии частицы выполнены условия

$$h > p_{osc}, \quad h < 2p_{osc}a^2.$$

Получим

$$g(h) = 4\pi vn_in_e B\beta \frac{p_{osc}}{h^2} \approx \frac{n_i^2 Z^3}{h^2}. \quad (33)$$

Интересно отметить, что в результате грубого предположения об изотропности рассеяния был «утрачен» логарифмический фактор (ср. с (32)), но зависимость от основных параметров осталась правильной.

4.1. Обсуждение

С одной стороны, при выводе формулы (31) был сделан ряд упрощающих предположений о рассеянии частиц. С другой стороны, точные формулы для рассеяния (25) позволяют численно построить функцию $g(p)$ во всем диапазоне параметров как для сверхбыстрых частиц (обсуждаемых в данной статье, $p \ll p_{osc}$, $g \propto 1/p^2$), так и для относительно медленных частиц (рассмотренных в работе [5], $p < p_{osc}$, $g \propto 1/p^3$).

К сожалению, численное моделирование ограничивает нас конечным набором амплитуд волны a . На рис. 2 в двойном логарифмическом масштабе приведены функции распределения электронов по импульсам для нескольких значений a . Ясно видна граница обрезания $p_{max}/p_{osc} = 2a^2$ и степенной закон убывания $g \propto 1/p^2$ при $p > p_{osc}$. В обратном предельном случае $p < p_{osc}$ функция распределения также убывает по степенному закону, но быстрее, $g \propto 1/p^3$. Наконец, в переходной области $h \sim p_{osc}$

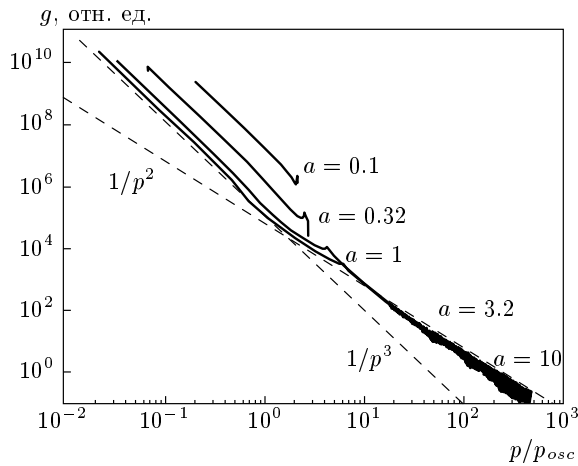


Рис. 2. Функции распределения электронов по импульсам для различных значений параметра a . Видна максимальная энергия и переход от одного закона распределения к другому при $p \approx p_{osc}$. Штрихами показаны законы $g \propto 1/p^2$ и $g \propto 1/p^3$

имеет место «всплеск», связанный с заметным вкладом частиц, рассеявшихся на большие углы (больше 90°).

На рис. 2 приведены функции $g(p)$, т. е. функции распределения электронов по импульсу, поскольку в ультррелятивистском случае имеет место линейная связь импульса и энергии, $h = pc$, и функции распределения по энергии и импульсу совпадают. Однако в нерелятивистском и слаборелятивистском случаях одномасштабной является функция распределения по импульсам [5]. Мы привели функции распределения электронов по импульсам, чтобы излишне не усложнять график.

Для наглядности можно также привести рисунок из недавней экспериментальной работы [1], в которой авторами наблюдались электроны с энергиями в несколько сотен МэВ (рис. 3). На этом рисунке можно видеть и то, что функция распределения электронов по энергиям имеет степенной вид, и излом, связанный с неадиабатичностью движения в волновом пакете для электронов со слишком большими энергиями (16). Исчезновение эффекта при увеличении концентрации может быть связано с тем, что в плотной плазме пропадает сам эффект притяжения, поскольку перестает работать приближение парных столкновений.

Действительно, представленные выше результаты получены в рамках приближения парных столкновений, когда считается, что вероятность столкновения одновременно трех и более частиц в одной точ-

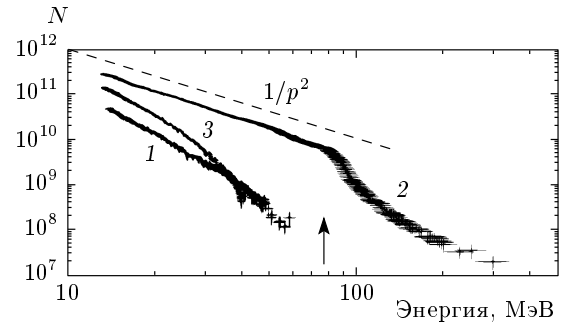


Рис. 3. Функции распределения электронов по энергии [1]. Видны излом при переходе на неадиабатический режим и исчезновение эффекта при возрастании концентрации $n_e = 5.4 \cdot 10^{18}$ (1), $7.7 \cdot 10^{18}$ (2), $83 \cdot 10^{18}$ (3). Штрихами показан закон $g \propto 1/p^2$. Стрелкой обозначена граница адиабатичности (16)

ке пренебрежимо мала. Условием выполнения этого приближения является требование малости объема взаимодействия, $nV_{int} \ll 1$. В сильных полях объем взаимодействия равен $V_{int} \approx \sigma_{eff} r_{osc}$, что дает условие,

$$r_E \ll r_D, \tag{34}$$

где

$$r_D = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{mv_T^2}}$$

— радиус Дебая. Но это же условие может быть получено и из других соображений. Новый масштаб r_E , появляющийся при учете притяжения частиц — это расстояние, с которого частица через осцилляцию попадает точно в ион (точнее, значение этого масштаба равно $\sqrt{2\pi} r_E$, см. [2]). Эффект притяжения не будет «замыт» соседними частицами, если этот масштаб не превышает радиуса дебаевской экранировки r_D . Отсюда снова получаем условие (34).

Наконец, рассмотрим ограничения предложенной модели. Следует отметить, что формулы (24), (25) для рассеяния релятивистских электронов [10] получены в пренебрежении влиянием ряда эффектов: излучением, квантовыми поправками, рождением виртуальных электрон-позитронных пар и т. д., поскольку эти эффекты оказываются не столь существенными. Рождение виртуальных электрон-позитронных пар в процессе рассеяния приводит к эффективному изменению заряда иона на малую величину порядка 10^{-3} [14], кроме того, оно учитывается только с помощью множителя

в зависимости (27) распределения электронов по энергиям. Выражения для матриц рассеяния в квантовой и классической задачах совпадают [14] (как и в нерелятивистском случае), т. е. квантовые эффекты несущественны в широком диапазоне параметров. Излучение частицы при движении в поле волны сказывается только при интенсивностях накачки порядка 10^{28} Вт/см² [14], т. е. много больших достижимого в настоящее время. Открытым остается вопрос о влиянии излучения частиц во время самого процесса электрон-ионного столкновения. Скорее всего, это приведет только лишь к изменению диаграммы рассеяния (изменятся зависимости (25), (26)) и к незначительному уменьшению импульса рассеянной частицы. В результате зависимость (31) может оказаться несколько модифицированной, но сам эффект появления сверхинтенсивных частиц останется. На это, в частности, указывает наличие сверхбыстрых частиц в эксперименте [1] со степенным законом распределения по энергиям.

В любом случае выражения для дрейфовых координат в релятивистски сильном лазерном поле представляют интерес сами по себе как для вывода интеграла столкновений, так и для численного моделирования электрон-ионных столкновений в релятивистских полях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1. Найдено каноническое преобразование и получены выражения для связи импульсов в дрейфовой и лабораторной системах координат для произвольной интенсивности электромагнитной волны. Дрейфовая система координат — это такая система, в которой гамильтониан частицы в плоской монохроматической волне не зависит от координат. При движении в плоской монохроматической волне величины дрейфовых импульсов сохраняются и равны величине кинематических импульсов, усредненных по фазе волны. Применение точного канонического преобразования к дрейфовым координатам позволило оценить неадиабатические поправки к дрейфовому импульсу при движении в поле пространственно-ограниченного волнового пакета и найти условия адиабатичности движения. Оказалось, что в ультра-релятивистском случае уже недостаточно привычных условий плавности масштабов пакета по сравнению с длиной волны. В силу релятивистского за-

медления времени условия становятся зависящими и от импульса частицы (16).

2. Анализ выражений для дрейфовых импульсов показал, что частица может увеличить свою энергию в a^2 раз при мгновенной «инжекции» внутрь волнового пакета (3). Примером такой «инжекции» могут служить кулоновские столкновения, когда частица сразу после мгновенного (на масштабе периода поля) столкновения получает кинетический импульс порядка $p_{osc} = amc$ и увеличивает его при движении в волне еще в a^2 раз. Результирующий импульс оказывается пропорциональным a^3 (эффект a^3). Диаграмма направленности таких частиц очень узкая и имеет направление вдоль волнового вектора электромагнитной волны. Для современных лазеров это позволяет достигнуть энергии порядка нескольких ГэВ.

3. Найдены функции распределения таких частиц по энергиям для кулоновских столкновений. При этом использовались результаты анализа столкновений в сильных электромагнитных полях, развитые авторами ранее [2]. Оказалось, что функции распределения таких сверхбыстрых электронов по энергиям (32) изменяются по степенному закону с показателем 2. По-видимому, именно эти электроны наблюдаются в эксперименте [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17367, 04-02-16684).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. P. D. Mangles, B. R. Walton et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 245001 (2005).
2. Г. М. Фрайман, В. А. Миронов, А. А. Балакин, *ЖЭТФ* **115**, 463 (1999); G. M. Fraiman, V. A. Mironov, and A. A. Balakin, *Phys. Plasmas* **8**, 2502 (2001).
3. A. Brantov, W. Rozmus, R. Sydora et al., *Phys. Plasmas* **10**, 3385 (2003).
4. Г. М. Фрайман, В. А. Миронов, А. А. Балакин, *ЖЭТФ* **120**, 797 (2001).
5. Г. М. Фрайман, А. А. Балакин, Н. Фиш, *Письма ЖЭТФ* **81**, 3 (2005).
6. M. H. Key, M. D. Cable et al., *Phys. Plasmas* **5**, 1966 (1998); S. P. Hatchet, C. G. Brown et al., *Phys. Plasmas* **7**, 2076 (2000).
7. S. P. D. Mangles, C. D. Murphy et al., *Nature* **431**, 535 (2004).

8. I. Y. Dodin, N. J. Fisch, and G. M. Fraiman, Письма ЖЭТФ **78**, 238 (2003).
9. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2001).
11. К. Шарлье, *Небесная механика*, Наука, Москва (1966).
12. М. Д. Токман, Plas. Phys. Rep. **150**, 140 (1999).
13. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНТИ, Москва (1985).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, Москва (2001).