

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ $1/f^\alpha$ -ШУМА В МЕТАЛЛАХ

*Р. О. Зайцев**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 сентября 2006 г.

Изучается механизм, приводящий к возрастанию показателя α в $1/f^\alpha$ -шумах до значений $\alpha = 3/2$. Показатель вычисляется методом ренормгруппы и ϵ -разложения в пространстве размерности $d = 6 - \epsilon$. Показано, что в чистых металлах показатель α меняется в интервале $1 \leq \alpha < 3/2$ и имеет небольшой температурный максимум. Обсуждаются возможные условия его исчезновения.

PACS: 72.70.+m, 73.50.Td, 74.40.+k

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты измерений спектрального состава флуктуирующих токов, возникающих на концах сопротивления, находятся в полном согласии с флуктуационно-диссипационной теоремой, так что в области низких частот интенсивность шумов пропорциональна первой степени температуры и не зависит от частоты.

Предположим теперь, что через сопротивление протекает электрический ток, и снова измерим спектральный состав. Тогда оказывается, что в области самых низких частот интенсивность шумов начинает возрастать по мере уменьшения частоты.

Это явление, которое носит название $1/f$ -шума, проявляется не только в электрических цепях. Изучение спектрального состава $1/f^\alpha$ -шума в широком интервале температур обнаружило некоторые закономерности, присущие только металлам.

1. Для металлических пленок на диэлектрической подложке с малой теплопроводностью (шум типа А) в области температур порядка дебаевской (Θ) показатель α оказался явно больше единицы. С повышением температуры до 500 К показатель α уменьшается до значений, близких к единице, обнаруживая для некоторых металлов (Ag) немонотонный ход при $T \geq \Theta$.

2. Для металлических пленок на подложке с металлическим покрытием или на подложке с большой теплопроводностью (шум типа В) показатель

α несколько меньше или равен единице и почти не зависит от температуры.

Сопоставление двух первых закономерностей указывает на возможность наличия по крайней мере двух механизмов, определяющих показатель α .

2. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Эффект обнаружения $1/f$ -шумов связан с возможностью измерить временную компоненту так называемого четырехтокового коррелятора — коэффициента разложения обычного двухтокового коррелятора по степеням приложенного электрического поля \mathbf{E} или по степеням постоянной плотности протекающего тока \mathbf{j} :

$$\delta K_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}^E E_\gamma E_\nu, \quad \delta K_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}^J j_\gamma j_\nu. \quad (1)$$

Более строгие определения даны ниже.

Вычисление четырехтоковых корреляторов $S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}$ проводится в асимптотическом пределе, когда достаточно выделить вклад наиболее сильно расходящихся дальнедействующих и низкочастотных функций Грина. В кристаллическом твердом теле нет необходимости учитывать виртуальные ток-токовые гидродинамические моды, так как они обрезаются на частотах порядка обратного времени релаксации по импульсу. Основной эффект происходит от виртуальных теплопроводностных и диффузионных (или только от диффузионных) мод, каждая из которых дает множитель

*E-mail: zaitsev@mbslab.kiae.ru

$(\omega^2 + D^2 q^4)^{-1}$, где D — коэффициент диффузии или теплопроводности:

$$S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}(\omega) = \int_{|\omega|}^{\infty} d\omega' (\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\gamma}) \frac{d\mathbf{q}}{(\omega'^2 + D^2 q^4)^2}. \quad (2)$$

Важно отличать индексы α, β , относящиеся к ток-токовым источникам флуктуаций, от индексов γ, ν , относящихся к обычным источникам тока или напряжения. Невыписанное в (2) слагаемое, содержащее произведение двухтоковых вершин $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\gamma\nu}$, дает несингулярный вклад порядка q^4 , в то время как смешанные вершины $\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\nu}$ и $\Gamma_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\gamma}$ дают постоянную величину, пропорциональную плотности фононных состояний.

Это обстоятельство позволяет установить связь между соотношением (2) и интенсивностью $1/f$ -шумов, пропорциональной плотности фононных состояний.

Интегрируя правую часть соотношения (2) при постоянных $\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta\nu}$ и $\Gamma_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\gamma}$, с учетом нижнего частотного предела ω получаем $S_{\omega} \propto \omega^{-3/2}$, что соответствует максимально возможному показателю α , который наблюдается в металлах.

Интуитивно ясно, что вывод о постоянстве двухтоковых вершин не является удовлетворительным, так как в длинноволновом пределе все дальнедействующие вершины должны обращаться в нуль. Разрешением этого противоречия является возможность написания уравнений ренормгруппы для $\Gamma_{\alpha\nu}$ в пространстве критической размерности. Оказывается, что двухтоковая вершина удовлетворяет линейному уравнению, где в качестве источника выступает скалярная вершинная часть Γ_s . В дифференциальной форме

$$-\frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{(n)}}{\partial t} = \Gamma_{\alpha\nu}^{(n)} \Gamma_s b_s. \quad (3)$$

При $d = 6$ параметр t есть логарифмическая переменная, которая в трехмерном пространстве переходит в $\omega^{-3/2}$.

Для скалярных вершин Γ_s имеем систему нелинейных уравнений типа Гелл-Манна–Лоу с коэффициентами A_s^{pm} , которые зависят от температуры:

$$-\frac{\partial \Gamma_s}{\partial t} = A_s^{pm} \Gamma_p \Gamma_m. \quad (4)$$

В асимптотическом пределе $t \gg 1$ решение уравнений (4) имеет вид

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_s}{t} \quad (5)$$

с постоянными γ_s . Таким образом, в трехмерном пространстве и низкочастотном пределе все скалярные вершины обращаются в нуль по закону $\Gamma_s \propto q^3 \propto \omega^{3/2}$.

Подстановка (5) в уравнения (3) также дает решения, обращающиеся в нуль при $\omega \rightarrow 0$:

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{(n)} \propto \Gamma_{\alpha\nu}^{(n)}(0) \omega^\lambda, \quad \text{где } \lambda = \frac{3}{2} \gamma_s b_s > 0. \quad (6)$$

Отсюда имеем

$$S_{\alpha\beta\gamma\nu} = B_{nm} \left\{ \Gamma_{\alpha\nu}^{(n)}(0) \Gamma_{\beta\gamma}^{(m)}(0) + \Gamma_{\alpha\gamma}^{(n)}(0) \Gamma_{\beta\nu}^{(m)}(0) \right\} \times \omega^{-3(1-2\gamma_s b_s)/2}. \quad (7)$$

При нулевой теплопроводности $\gamma_s b_s = 1/6$, что дает закон $1/f$. Включение теплопроводностных мод приводит к температурной зависимости некоторых коэффициентов γ_s через безразмерный параметр φ , который обратно пропорционален произведению фононного затухания на время электронной релаксации по импульсу.

Известно, что в области температур ниже температуры Дебая фононное затухание не зависит от температуры, так что параметр φ возрастает в основном за счет температурного роста обратного времени электронной релаксации.

В области температур выше дебаевской, где обратное время электронной релаксации возрастает пропорционально температуре, ширина наиболее быстрых фононных мод увеличивается еще быстрее, что приводит к медленному температурному убыванию параметра φ . Будет показано, что величина $\gamma_s b_s$ — убывающая функция параметра φ . Отсюда заключаем, что в образцах с не слишком большим остаточным сопротивлением показатель α имеет максимум вблизи температуры Дебая, что как раз и наблюдается в эксперименте.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При заданной частоте в электрических цепях интенсивность $1/f$ -шума пропорциональна квадрату постоянного тока, протекающего через шумящий источник:

$$K_{\alpha,\beta}(x, x') = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) \hat{j}_\beta(\mathbf{r}', t') \right\} \right\rangle. \quad (8)$$

Здесь $j_\alpha(\mathbf{r}, t)$ — оператор плотности тока; фигурные скобки — антикоммутатор; угловые скобки — усреднение по состояниям с заданными температурой, объемом и химическим потенциалом.

Для использования диаграммной техники Келдыша [1] запишем правую часть соотношения (9) в виде произведений операторов, упорядоченных во времени:

$$K_{\alpha,\beta}(x, x') = \frac{1}{2} \left\langle \left(\hat{j}_\alpha(\mathbf{r}, t_+) \hat{j}_\beta(\mathbf{r}', t'_-) + \hat{j}_\beta(\mathbf{r}', t'_+) \hat{j}_\alpha(\mathbf{r}, t_-) \right) \right\rangle. \quad (9)$$

Считаем, что любой момент времени со знаком «плюс» больше любого момента времени со знаком «минус».

Для вычисления компонент Фурье по обычному времени каждый оператор, взятый на верхней части контура Келдыша (t_+), следует считать умноженным на двухкомпонентную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а оператор, взятый на нижней части контура Келдыша (t_-), следует считать умноженным на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Переход к представлению, в котором одна из диагональных компонент одночастичной функции Грина равна нулю, а недиагональные матрицы пропорциональны запаздывающей и опережающей функциям Грина, осуществляется с помощью матрицы преобразования

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в новом представлении операторы, взятые на t_+ , оказываются умноженными на матрицу:

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R = \frac{1}{2} (1 + \hat{\tau}_x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10a)$$

и соответственно для t_- :

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R = \frac{1}{2} (1 - \hat{\tau}_x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10б)$$

Для нахождения интенсивности $1/f$ -шума необходимо провести разложение коррелятора (8) по степеням произведения векторного потенциала, относящегося к источнику напряжения, для оператора плотности тока. Во втором порядке теории возмущений по величине приложенного напряжения в качестве коэффициента получим четырехтоковый оператор:

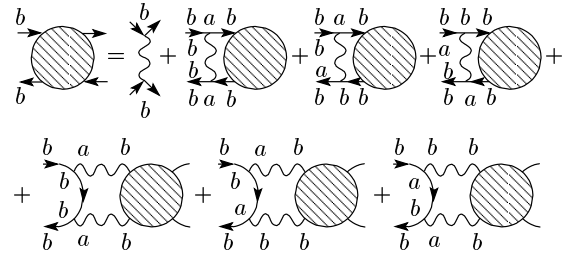


Рис. 1. Линеаризованная система кинетических уравнений, записанная в диаграммной технике Келдыша

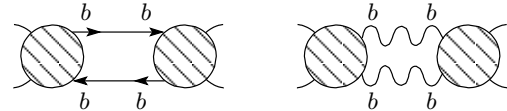


Рис. 2. Диаграммы, изображающие эффект перепутывания запаздывающих и опережающих функций Грина

$$S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{T}_\Gamma \left(\hat{j}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_+) \hat{j}_\beta(\mathbf{r}_2, t'_-) \hat{j}_\gamma(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{j}_\nu(\mathbf{r}_4, t_4) \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \hat{T}_\Gamma \left(\hat{j}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_-) \hat{j}_\beta(\mathbf{r}_2, t'_+) \hat{j}_\gamma(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{j}_\nu(\mathbf{r}_4, t_4) \right) \right\rangle. \quad (11)$$

Здесь операторы приложенного тока $\hat{j}_\gamma(\mathbf{r}_3, t_3)$ и $\hat{j}_\nu(\mathbf{r}_4, t_4)$ следует считать умноженными на матрицы τ^z , которые после R -преобразования превращаются в τ^x .

Если использовать представление с нулевой диагональной одночастичной функцией Грина $G^{aa} = 0$, $G^{ab} = G^A$, $G^{ba} = G^R$, $G^{bb} = F$, то для выявления диффузионных и теплопроводностных мод достаточно рассмотреть систему лестничных уравнений при малых передаваемых частоте и импульсе и с одинаковыми индексами b на левых концах (рис. 1).

Усреднение кинетических уравнений по быстрым электронным и фононным переменным дает запаздывающую диффузионную или теплопроводностную функцию Грина. Корреляционная функция F , пропорциональная произведению запаздывающей и опережающей функций Грина, есть результат сцепления левой (опережающей) и правой (запаздывающей) цепочек лестничных диаграмм, изображенных на рис. 2.

Существование такой функции есть непосредственное следствие флуктуационно-диссипационной теоремы. В случае диффузионной или теплопроводностной моды имеем

$$\hat{D}_\omega(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & D_\omega^A(\mathbf{q}) = 1/(-i\omega - Dq^2) \\ D_\omega^R(\mathbf{q}) = 1/(i\omega - Dq^2) & F_\omega(q) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь q — передаваемый импульс, ω — передаваемая частота, D — коэффициент диффузии или теплопроводности,

$$F_\omega(q) = \frac{i}{2} \text{cth}(\omega/2T) (D_\omega^R(\mathbf{q}) - D_\omega^A(\mathbf{q})). \quad (13)$$

В области конечных температур и достаточно низких частот, $\hbar\omega \ll T$, формула (13) приводится к классическому виду:

$$F_\omega(q) = \frac{2T}{\omega^2 + D^2q^4}. \quad (14)$$

Интегрирование двух корреляторов (14) по всем импульсам и частотам приводит к логарифмической расходимости, когда число пространственных измерений равно шести, что и определяет критическую размерность.

Поскольку в кинетических явлениях число фононов не сохраняется, диффузионная запаздывающая функция формируется только за счет электронных лестничных диаграмм. По этой причине все диаграммы, образованные корреляционными функциями (14), удается классифицировать по степени связности электронных линий.

Теплопроводностной моде отвечают неравновесные собственные функции, пропорциональные энергии соответствующего элементарного возбуждения — электронного или фононного.

Непосредственные вычисления неприводимых четырехтоковых корреляторов, проделанные по теории возмущений, не приводят к существенной частотной аномальной зависимости.

Происхождение сингулярной зависимости в области предельно низких частот следует связать с наличием дальнедействующих и сильно взаимодействующих диффузионных и теплопроводностных мод. В этом смысле наша задача эквивалентна теории критических явлений, где критические индексы определяются наличием сильно взаимодействующих критических колебаний. Гипотеза универсальности позволяет определить критические индексы, если считать, что величина критических индексов не зависит от величины взаимодействия.

В нашем случае при числе измерений $d = 6$ все сингулярные поправки имеют логарифмический характер, так что отбор диаграмм происходит по наивысшей степени логарифмической расходимости. По этой причине в шестимерном пространстве уравнения для скалярных, двухтоковых и четырехтоковых

вершинных частей вполне аналогичны соответствующим уравнениям теории взаимодействующих критических колебаний, записанных в четырехмерном пространстве. Основное отличие настоящей теории от современной теории критических явлений состоит в предположении о возможности непрерывного перехода от пространства критической размерности $d = 6$ к трехмерному пространству. На основании этой гипотезы удается определить сингулярный закон частотного возрастания $1/f^\alpha$ -шумов.

4. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕНОРМГРУППЫ

Для написания уравнений ренормгруппы (3), (4) необходимо определить коэффициенты b_s и A_{qn}^p , используя для этого второй порядок теории возмущений по числу диффузионных и теплопроводностных линий. В случае электрон-фононного взаимодействия полное число четырехчастичных скалярных вершин равно 12, что приводит к необходимости найти 1728 коэффициентов. Однако непосредственные вычисления указывают на возможность пренебрежения всеми Γ_s , которые имеют хотя бы одну линию, входящую или выходящую из одного угла. В результате остается всего пять вершин (рис. 3).

4.1. Уравнения для скалярных вершин

Поскольку электрон-фононное взаимодействие не меняет направления электронного спина, классификацию диаграмм удается провести по степени связности электронных линий, соединяющих отдельные части электронных диаграмм, и вообще не рисовать фононных линий (см. рис. 3, на котором изображены все интересующие нас вершины).

Для вершины Γ_e (рис. 3) введем обозначение $\Gamma_e(1\ 2|3\ 4)$, где числа обозначают спиновые индексы входящих электронных линий. Естественно считать, что вершина Γ_e симметрична по каждой паре индексов, отделенных вертикальной чертой, а также относительно взаимной перестановки этих пар.

Вершина $\Gamma_{ep} = \Gamma_{ep}(12)$ (рис. 3) определяется всего двумя индексами, по которым она симметрична. В отличие от Γ_e и Γ_{ep} , две другие вершины $\Gamma_1(1\ 2\ 3\ 4)$ и $\Gamma_3(1\ 2\ 3)$ имеют входящие и выходящие электронные линии, соединяющие разные углы. Из определения следует, что эти вершины инвариантны относительно циклической перестановки аргументов.

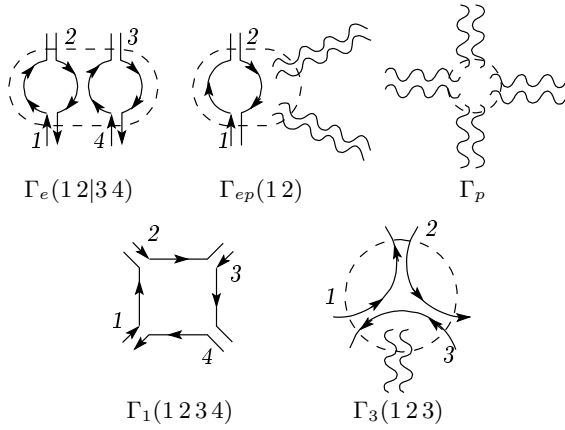


Рис. 3. Электрон-фононные скалярные вершины, записанные в нуль-петлевом приближении

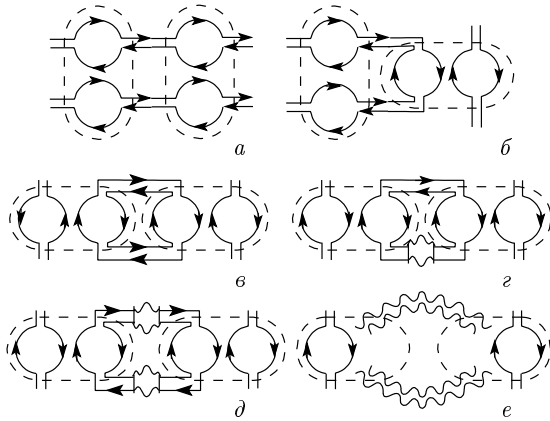


Рис. 4. Первые поправки к скалярной вершинной части $\Gamma_e(12|34)$

Уравнения ренормгруппы восстанавливаются с помощью второго порядка теории возмущений. На рис. 4 изображены шесть диаграмм, которые определяют поправки к вершине Γ_e . Диаграммы, показанные на рис. 4*в,г,д*, имеют замкнутые электронные линии, однако после добавления нескольких фононных линий в левую и правую части диаграмм, обведенных штриховым овалом, они приобретают связанный характер, а сами блоки превращаются в вершины Γ_e .

После усреднения по быстрым переменным пары внутренних электронных и пары волнистых линий становятся корреляторами диффузионного и теплопроводностного типа.

Дифференцируя по логарифмической переменной $t = -\ln q$ (в пространстве критической размер-

ности), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 -\dot{\Gamma}_e(12|34) &= 2\Gamma_e(12|34)^2 + \\
 &+ \Gamma_e(12|12)\Gamma_e(12|34) + \Gamma_e(12|34)\Gamma_e(34|34) + \\
 &+ \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma)\Gamma_e(\sigma\sigma|34) - \\
 &- \varphi \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma)\Gamma_e(\sigma\sigma|34) + \\
 &+ \varphi^2 \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma) \sum_{\sigma'} \Gamma_e(\sigma'\sigma'|34) + \\
 &+ \Gamma_{ep}(12)\Gamma_{ep}(34). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Суммирование по спиновой переменной $\sigma = \pm$ проводится с учетом равенства проекций спинов, относящегося к каждой паре внутренних электронных линий. Уравнение (15) необходимо дополнить уравнениями для $\Gamma_{ep}(12)$ и Γ_p :

$$\begin{aligned}
 -\dot{\Gamma}_{ep}(12) &= \Gamma_e(12|12)\Gamma_{ep}(12) + \\
 &+ \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma)\Gamma_{ep}(\sigma\sigma) - \\
 &- \varphi \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma)\Gamma_{ep}(\sigma\sigma) + \\
 &+ \varphi^2 \sum_{\sigma} \Gamma_e(12|\sigma\sigma) \sum_{\sigma'} \Gamma_{ep}(\sigma'\sigma') + \\
 &+ 2\Gamma_{ep}^2(12) + \Gamma_{ep}(12)\Gamma_p; \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\dot{\Gamma}_p &= 3\Gamma_p^2 + \sum_{\sigma} \Gamma_{ep}(\sigma\sigma)\Gamma_{ep}(\sigma\sigma) - \\
 &- 3\varphi \sum_{\sigma} \Gamma_{ep}^2(\sigma\sigma) + 3\varphi^2 \left[\sum_{\sigma} \Gamma_{ep}(\sigma\sigma) \right]^2. \quad (17)
 \end{aligned}$$

При выключенном магнитном поле естественно положить $\Gamma_e(\sigma\sigma|\sigma\sigma) = \Gamma_e(\sigma\sigma|-\sigma-\sigma)$, $\Gamma_{ep}(\sigma\sigma) = \Gamma_{ep}$, после чего получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned}
 -\dot{\Gamma}_e &= (3+g)(\Gamma_e^2) + \{\Gamma_{ep}^2\}, \\
 -\dot{\Gamma}_{ep} &= g(\Gamma_e\Gamma_{ep}) + 2[\Gamma_p^2] + \{\Gamma_p\Gamma_{ep}\}, \\
 -\dot{\Gamma}_p &= 3(g-1)(\Gamma_{ep}^2) + 3\{\Gamma_p\Gamma_p^2\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Здесь $g = 3 - 2\varphi + 4\varphi^2$, а величина φ , определяющая температурное влияние теплопроводности решетки, вычислена в следующем разделе.

В правой части уравнений (15)–(18) появляются не универсальные коэффициенты, происходящие от интегрирования двух диффузионных, двух теплопроводностных корреляторов, а также от произведения диффузионного и теплопроводностного корреляторов. В уравнениях они изображаются круглыми, фигурными и квадратными скобками. С помощью масштабных преобразований все они могут быть превращены в единицу.

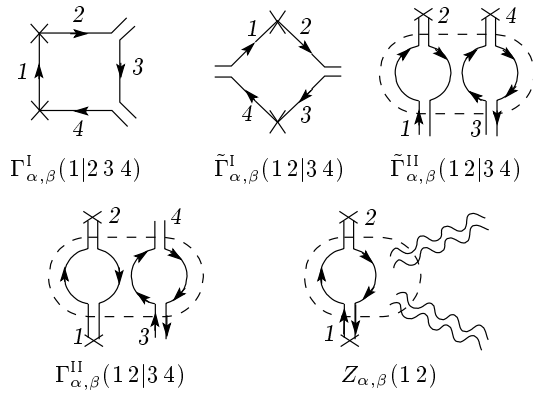


Рис. 5. Двухтоковые четырехвершинные части, записанные в нулевом приближении

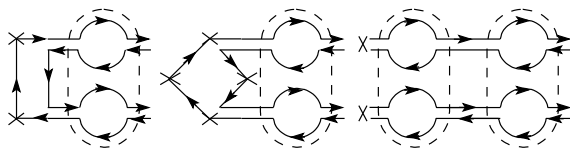


Рис. 6. Уравнения для двухтоковых вершины $\Gamma_{\alpha,\beta}^I$, $\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^I$ и $\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^{II}$ записанные в первом приближении

Для пространства критической размерности ($d = 6$) точка обозначает дифференцирование по переменной $t = -\ln q$, которая при $d = 3$ переходит в $\omega^{-3/2}$.

4.2. Уравнения для двухтоковых вершин

Двухтоковые вершины отличаются от скалярных тем, что на двух углах они имеют кресты, изображающие операторы плотности тока (см. рис. 3 и 5). Классификацию двухтоковых вершин проведем по степени связности и по расположению токовых вершин при движении вдоль электронной линии. В результате получим пять классов диаграмм, изображенных на рис. 5. Как было отмечено, определение оператора тока для временных процессов содержит дополнительный множитель τ^x . В случае флуктуирующих токов имеем дополнительный множитель $(1/2)(1 \mp \tau^x)$ соответственно тому условию, что в исходном t_{\mp} -представлении значение тока берется только на нижней (t_-) или на верхней (t_+) части контура Келдыша. Поэтому будем считать, что токовый индекс пробегает не три, а девять всевозможных значений.

Чтобы получить уравнения для токовых вершин, достаточно соединить всевозможными неэквивалентными способами диаграммы, изображенные

на рис. 5, со скалярной вершиной $\Gamma_e(1234)$ (см. рис. 6, по которому восстанавливаем уравнения ренормгруппы):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Gamma_{\alpha,\beta}^I(1|234)}{\partial t} &= \Gamma_{\alpha,\beta}^I(1|234)\Gamma_e(23|34), \\ -\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^I(1,2|3,4)}{\partial t} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^I(12|34)\Gamma_e(12|34), \\ -\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^{II}(12|34)}{\partial t} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^{II}(12|34)\Gamma_e(12|34). \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения для вершин $\Gamma_{\alpha,\beta}^{II}(12|34)$ и $Z_{\alpha,\beta}(12)$, изображенных на рис. 5, связывают между собой все двухтоковые вершины, однако удается доказать, что они дают более быстро убывающие решения, чем полученные из формулы (19). Отсюда заключаем, что три первые двухтоковые вершины $\Gamma_{\alpha,\beta}^I(1|234)$, $\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^I(12|34)$ и $\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta}^{II}(12|34)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$-\dot{\Gamma}_{\alpha,\beta} = (\Gamma_{\alpha,\beta}\Gamma_e). \quad (20)$$

4.3. Уравнения для четырехтоковых вершин

Подобно тому как двухтоковые вершины можно выразить через произведения двухтоковых и скалярных, четырехтоковые вершины получим через произведения двухтоковых (все по той же причине отсутствия дальнедействующих ток-токовых корреляторов). Поэтому для получения соотношений (4) достаточно попарно перемножить медленно убывающие двухтоковые диаграммы, показанные на рис. 5. При этом при объединении пары электронных концов в цепочку лестничных диаграмм необходимо также учитывать две возможности, изображенные на рис. 2.

Поскольку все существенные двухтоковые вершины (19) убывают по одному и тому же закону, получаем общее соотношение (2) или эквивалентное ему, но просуммированное по векторным индексам:

$$-\frac{\partial S_{\alpha,\beta,\alpha,\beta}}{\partial t} \propto \Gamma_{\alpha,\beta}^2. \quad (21)$$

В силу линейности уравнений (19) вся тензорная структура четырехвершинной части $S_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}$ определяется начальными условиями (при $t = 0$) для двухтоковых вершин. Вычисления по теории возмущений показывают, что «нулевые» двухтоковые вершины, относящиеся к двум флуктуирующим токам $\Gamma_{\alpha,\beta}(0)$ или к двум реальным источникам $\Gamma_{\mu,\nu}(0)$, оказываются равными нулю, в отличие от вершин смешанного типа $\Gamma_{\alpha,\nu}(0)$. Именно это обстоятельство, определяющее сильную анизотропию тензора $S_{\alpha,\beta,\mu,\nu}$, учитывает соотношение (7).

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ α

Рассмотрим сначала B -шум — ситуацию с выключенной теплопроводностью: $\varphi = 0, \Gamma_p = \Gamma_{ep} = 0$. В интересующем нас пределе $t \gg 1$ имеем

$$\Gamma_e = 1/t, \quad \Gamma_{\alpha,\beta} \propto t^{-1/6}, \quad S \propto t^{2/3}. \quad (22)$$

В соответствии с этим в пространстве размерности $d = 6 - \epsilon$ получаем

$$S \propto q^{-2\epsilon/3} \propto \omega^{-\epsilon/3}, \quad (23)$$

что при $\epsilon = 3$ дает $1/f$ -шум.

В случае А, когда требуется изучить влияние теплопроводностной моды, для начала требуется исследовать систему уравнений (18). Эту систему удобно исследовать в переменных g, u, v, τ , где

$$\begin{aligned} g &= 3 - 2\varphi + 4\varphi^2, \quad u = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_p}, \\ v &= \frac{\Gamma_{ep}}{\Gamma_p}, \quad \tau = \ln(|\gamma_p|), \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{(3+g)u^2 + v^2}{3 + 3(g-1)v^2} - u, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{v(gu + 2v + 1)}{3 + 3(g-1)v^2} - v. \end{aligned} \quad (24)$$

В условиях $\tau \rightarrow -\infty$ или $\Gamma_p \rightarrow 0$ начало координат $v = u = 0$ всегда есть неустойчивый центр. В области больших значений параметра g ($g > 6$) система имеет единственный устойчивый центр:

$$A = \left(u = \frac{3}{3+g}, v = 0 \right). \quad (25)$$

Две другие фиксированные точки с $v \neq 0$ определяются из следующего уравнения:

$$g^2 v^2 (27v^2 - 6v - 2) - g(3v^2 + 2v - 2)(18v^2 - 2v - 1) + 3(3v^2 - 2v - 2)^2 = 0; \quad (26a)$$

$$u = \frac{1}{g} [2 + 3(g-1)v^2 - 2v]. \quad (26b)$$

Для действительных v и g первое уравнение можно решить относительно g :

$$g = 6 \frac{3v^2 + 2v - 2}{-1 - 2v + 18v^2 \pm \sqrt{1 + 4v - 8v^2}}. \quad (27)$$

В конечном счете удастся обнаружить две области, в каждой из которых имеются по два действительных решения. Существует также область $0.7615 < g < 4.663$, для которой действительные решения вообще отсутствуют.

Соотношения (26), (27) решают задачу о температурной зависимости показателя α .

Можно обнаружить, что для всех $g > 6$ ($\varphi > 1.15$) устойчивым оказывается решение с независимыми Γ_e и Γ_p , когда $\Gamma_{ep} = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{1}{(3+g)t}, \quad \Gamma_p = \frac{1}{3t}, \\ \Gamma_{\alpha,\beta} &\propto t^{-1/(3+g)}, \quad S \propto t^{-2/(3+g)}, \end{aligned} \quad (28)$$

поэтому

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{3}{(3+g)}, \quad (29)$$

где

$$g = 3 - 2\varphi + 4\varphi^2. \quad (30)$$

Если же $\varphi < 1.15$, или $g < 6$, то устойчивостью обладают решения с отличной от нуля перепутывающей вершиной $\Gamma_{ep} = v\Gamma_p$. Параметр v определяется уравнением четвертой степени (26a), а устойчивому решению соответствует выражение (27), в котором следует использовать отрицательный знак перед радикалом. При этом согласно формулам (20) и (21):

$$\Gamma_{\alpha,\beta} \propto t^{-k}, \quad S \propto t^{1-2k}, \quad (31)$$

где

$$k = \frac{3(g-1)v^2 - 2v + 2}{3g[1 + (g-1)v^2]}, \quad (32)$$

откуда

$$\alpha = \frac{3}{2} - 3k. \quad (33)$$

Исследование уравнения (26) показывает, что в области $0.94 < \varphi < 1.15$ устойчивым решениям соответствуют действительные значения v из интервала $0 < v < 0.176$. Таким образом, соотношения (27) и (32) определяют показатель α в параметрической форме. Максимальному значению $v = 0.176$ соответствует минимальное значение $\alpha = 1.117$.

Таким образом, соотношения (32) и (33) определяют показатель α в параметрической форме. Соответствующая кривая изображена на рис. 7.

Область значений параметра φ : $0 < \varphi < 0.94$, для которой из формул (27) и (32) можно получить комплексное значение показателя α , рассматриваться не будет. Дело в том, что значение $\varphi < 1$ можно обнаружить только в чистых металлах и при достаточно низких температурах. Сама величина φ определена в следующем разделе, где показано, что обычно $\varphi > 1$.

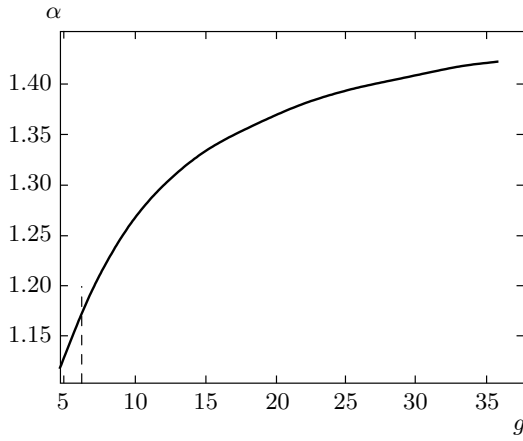


Рис. 7. Зависимость показателя α от параметра g ; справа от вертикальной черты использована формула (29), слева от нее — формулы (22), (23)

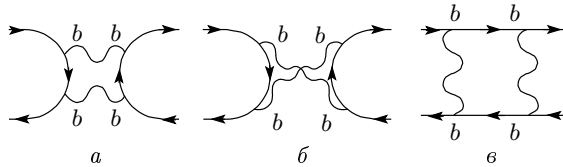


Рис. 8. Диаграммы a и b изображают вклад в числитель, а диаграмма v — в знаменатель безразмерной величины φ

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА φ

Как следует из соотношения (2), в правой части уравнений (15)–(17) появляются неуниверсальные коэффициенты, происходящие от интегрирования двух диффузионных, двух теплопроводностных мод, а также от произведения диффузионного и теплопроводностного коррелятора. В уравнениях (15)–(17) соответствующие коэффициенты изображаются круглыми, квадратными и фигурными скобками. С помощью масштабных преобразований все они могут быть превращены в единицу. В результате параметр φ определяется однозначно как отношение двухфононной к двухэлектронной интенсивности диффузионных флуктуаций. Таким образом, появление параметра φ в уравнениях ренормгруппы (15) имеет причиной вторую возможность возбуждения диффузионных флуктуаций, которая изображена на рис. 8а и 8б наряду с обычным электрон-фононным механизмом (рис. 8в).

Нас интересуют наиболее сильно расходящиеся диаграммы, поэтому достаточно вычислить вклад

от произведений диагональных функций Грина с одинаковыми вторыми причинными индексами:

$$G_{\omega}^{bb}(p) = \text{th} \left(\frac{\xi_p}{2T} \right) \text{Im} \left[\frac{1/2}{\omega - \xi_p + i/2\tau} \right],$$

$$D_{\omega}^{bb}(q) = \text{cth} \left(\frac{\xi_p}{2T} \right) \frac{1}{4\omega_q} \times \text{Im} \left[\frac{1}{\omega - \omega_q + i\Gamma} + \frac{1}{\omega + \omega_q + i\Gamma} \right]. \quad (34)$$

Отсюда находим особую часть произведения функций Грина с мало различающимися аргументами (\mathbf{p} и $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p} + \mathbf{Q}$, \mathbf{q} и $\mathbf{q}_+ = \mathbf{q} + \mathbf{Q}$), а также ω и $\omega_+ = \omega + \Omega$:

$$G_{\omega}^{bb}(p)G_{\omega_+}^{bb}(p_+) = \text{th} \left(\frac{\xi_p}{2T} \right) \text{th} \left(\frac{\xi_{p_+}}{2T} \right) \delta(\omega - \xi_p) \times \text{Im} \left[\frac{4\pi}{\Omega - \mathbf{Q}\mathbf{v}_p - i/\tau} \right],$$

$$D_{\omega}^{bb}(q)G_{\omega_+}^{bb}(q_+) = \text{cth} \left(\frac{\omega_q}{2T} \right) \text{cth} \left(\frac{\omega_{q_+}}{2T} \right) \frac{1}{\omega_q \omega_{q_+}} \times \left\{ \delta(\omega - \omega_q) \text{Im} \left[\frac{\pi}{\Omega - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_q - 2i\Gamma} \right] + \delta(\omega + \omega_q) \text{Im} \left[\frac{\pi}{\Omega + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_q - 2i\Gamma} \right] \right\}. \quad (35)$$

Для упрощения вычислений воспользуемся тем обстоятельством, что электронные импульсы правой и левой диаграмм интегрируются вблизи поверхности Ферми, так что каждую из них имеет смысл усреднить по направлениям электронных импульсов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 :

$$\overline{G_{\omega_1 - \omega}^{bb}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})} = \pi \text{th} \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2T} \right) \frac{\theta(2p_0 - q)}{v_0 q},$$

$$\overline{D_{\omega_1 - \omega}^{bb}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})} = \pi \text{cth} \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2T} \right) \times \frac{\theta [4p_0^2 c^2 - (\omega - \omega_1)^2]}{2p_0^2 c^2}. \quad (36)$$

Переходя к пределу $\mathbf{Q} \rightarrow 0$ и $\Omega \rightarrow 0$ и полагая $\omega_{1,2} \approx \xi_{1,2} \rightarrow 0$, получим искомую величину φ как отношение суммы двух диаграмм 8а и 8б к электрон-фононной диаграмме 8в: $\varphi = N/D$, где

$$N = 2g^2 \int \frac{\omega_q^2}{\Gamma_q (v_0 q)^2} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}, \quad (37)$$

$$D = g^4 \int \frac{\tau \xi \xi_p^2}{(p_0 c)^4} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Здесь учтены две неэквивалентные диаграммы 8а и 8б, а электрон-фононный матричный элемент был записан в виде $W(q) = \zeta_0 c q$, где c — скорость продольного звука, $\zeta_0 = g^2 m p_0 / (2\pi^2 \hbar^3)$ — безразмерная константа БКШ. В используемой здесь сферической модели интегралы по длинам векторов p, q ограничены условиями

$$\begin{aligned} \max \hbar q &= \min \left(\frac{\Theta}{c}, 2p_0 \right), \\ \max \xi_p &= \min (\Theta, 2p_0 c), \end{aligned} \quad (38)$$

где Θ — температура Дебая, p_0 — импульс Ферми.

Используя грубую оценку $\varphi \sim 1/\tau\Gamma$, можно обнаружить, что в «грязном» металле величина φ — медленно убывающая функция температуры (в основном за счет температурного возрастания фононной ширины Γ). В чистом металле величина φ имеет максимум как функция температуры. Для его обнаружения рассмотрим два предельных случая.

6.1. Низкие температуры ($T \ll \Theta$)

В этой области затухание фононов весьма слабо зависит от температуры и определяется своим значением при $T = 0$ [2]:

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega &= \frac{\pi \zeta_0 m c \omega}{2p_0} \theta(2p_0 - q), \\ \zeta_0 &= \frac{g^2 m p_0}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad q = \frac{\omega}{c}. \end{aligned} \quad (39)$$

В работе [2] была вычислена энергетическая зависимость скорости электронной релаксации при $T = 0$. Однако нам потребуется еще и следующий член разложения:

$$\frac{1}{2\tau} = \frac{\pi \zeta_0 |\omega|}{12 p_0^2 c^2} (\omega^2 + \pi^2 T^2). \quad (40)$$

Подставляя (39) и (40) в (37), получаем (с логарифмической точностью)

$$\varphi = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{2\pi^2 T^2}{\Theta^2} \ln \left(\frac{\Theta}{T} \right) \right\}. \quad (41)$$

Таким образом, в области низких температур параметр φ — возрастающая функция отношения T/Θ , имеющая конечное минимальное значение при $T = 0$.

6.2. Высокие температуры ($T \gg \Theta$)

В этой области температур затухание фононов определяется их взаимодействием с колебаниями решетки. Время релаксации электронов слабо зависит

от энергии и в широкой области температур выражается через проводимость σ . Величина, стоящая в числителе N , выражается через парциальную фонон-фононную теплопроводность κ_{ph}^λ , где λ — индекс поляризации фононов:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p_0^3 c^2 \tau}{3\pi^2 \hbar^3 m}, \quad \kappa_{ph}^\lambda = \int \frac{c_\lambda^2 q^2 dq}{6\Gamma_\lambda (2\pi)^3}, \\ \varphi &= \frac{20e^2 p_0^4}{\sigma} \frac{c^4}{\zeta_0^2 \Theta^5} \sum_\lambda \zeta_\lambda^2 \kappa_{ph}^\lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

Используя при $T = \Theta$ закон Видемана–Франца, получим следующую оценку:

$$\varphi \approx 26 n_e^{4/3} \frac{\kappa_{ph}}{\kappa_e}, \quad (43)$$

где $n_e = 2p_0^3 c^3 / \Theta^3$ — число электронов на один атом.

Поскольку при $T = \Theta$ теплоемкость диэлектриков всего на порядок меньше теплоемкости металлов, величина $\varphi(\Theta)$, вычисленная согласно формуле (43), может в несколько раз превышать единицу.

Что же касается температурной зависимости, то при $T \gg \Theta$ она является достаточно медленной. Для поперечных фононов $\Gamma \propto 1/T$ [3], так что величина φ имеет постоянную составляющую (так как согласно закону Видемана–Франца проводимость тоже порядка $1/T$). Аномальный вклад в теплопроводность дают фононы с максимальной скоростью звука. Как показано в работе [4], для них $\kappa_{ph} \sim (Mc^2/T)^{5/4}$. Таким образом, зависящая от температуры часть параметра φ имеет вид

$$\Delta\varphi = 20\delta \left(\frac{Mc^2}{\Theta} \right)^{1/4} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^{1/4}. \quad (44)$$

Большой численный коэффициент компенсируется малым параметром δ , определяющим долю фононов с аномально малым затуханием порядка ω^4 и изотропным законом дисперсии.

Сравнение (41) и (44) позволяет определить температуру T^* , для которой параметр φ принимает максимальное значение:

$$\left(\frac{T^*}{\Theta} \right)^2 \sim \left(\frac{Mc^2}{T^*} \right)^{1/4}.$$

В результате получим

$$T^* \sim \Theta \left(\frac{Mc^2}{\Theta} \right)^{1/9}. \quad (45)$$

При этом $T^* > \Theta$, а также

$$\varphi(T^*) \sim \left(\frac{Mc^2}{\Theta} \right)^{2/9}. \quad (46)$$

7. КАЧЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

При выключенном теплопроводностном механизме значение α не зависит от температуры и близко к единице.

При конечной теплопроводности решетки в области температур $T \gg \Theta$, когда температура T превышает температуру Дебая Θ , обнаруживаем медленное убывание показателя α с повышением температуры. В области низких температур $T \ll \Theta$ показатель α возрастает, начиная от значения $\alpha(T = 0)$, которое тем больше, чем меньше остаточная длина свободного пробега электронов.

Экспериментальные данные [5, 6] по температурной зависимости показателя α хорошо согласуются с формулой (44), если вместо числа 20δ в (44) подставить $1/3$.

В экспериментах на пленках Ag было обнаружено максимальное значение $\alpha = 1.2$ при $T^* = 290$ К. Подставляя для серебра $\Theta = 215$ К и $Mc^2/T^* = 790$, получаем согласие с формулой (45), если коэффициент пропорциональности считать равным 0.65.

Из полученных соотношений следует, что основным механизмом возникновения $1/f$ -шума следует считать диффузионный. Теплопроводность решетки проявляет себя через температурную зависимость параметра φ , которая изменяет, но не определяет показатель α .

Заметим, что размерное исчезновение $1/f$ -шума, если и происходит, то на частотах $\omega^* \sim D/L^2$, где L — длина образца. Этот размер есть расстояние между теми гранями образца, через которые втекает транспортный ток. Именно на этих поверхностях, в местах прикрепления контактов, не выполняется естественное условие, т.е. на этой границе $\partial n/\partial z \neq 0$. На остальных гранях поток электронов

равен нулю, поэтому на них выполняются граничные условия второго типа $\partial n/\partial x = 0$. По этой причине соответствующие размеры не определяют частотного обрезания.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты настоящей работы были получены на основе обнаружения сильной расходимости интегралов от произведения корреляторов двух диффузионных, двух теплопроводностных, а также диффузионной и теплопроводностной мод. В конечном счете это приводит к возможности возрастания показателя α до значений, близких к $3/2$. Полученная выше температурная зависимость $\alpha(T)$ качественно согласуется с отдельными экспериментами. Это обстоятельство подтверждает правильность основного предположения о возможности непрерывного предельного перехода от вычислений, сделанных в шестимерном пространстве, к реальному пространству трех измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
2. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **32**, 399 (1957).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (2001), с. 352.
4. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **12**, 419 (1942).
5. P. Dutta and P. M. Horn, Rev. Mod. Phys. **53**, 497 (1981).
6. J. Clarke and T. Hsiang, Phys. Rev. **13**, 4790 (1976).