

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПЫЛЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПЛАЗМЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

В. С. Воробьев, О. Ф. Петров, В. Е. Форттов*

*Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенного института высоких температур Российской академии наук
127412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.

Рассматриваются пылевые частицы в плазме тлеющего разряда, которые в некотором внешнем поле образуют кристаллоподобную или жидкоподобную структуру. Найдено самосогласованное электрическое поле электронов, ионов и пылевых частиц. Оценена величина потенциала, необходимого для удержания пылевых частиц в направлении, перпендикулярном оси трубки. Показано, что потенциальная энергия взаимодействия системы упорядоченных пылевых частиц имеет вид, характерный для ионных кристаллов. Оценены критические параметры для жидкоподобной пылевой структуры. Полученная на основе такого подхода корреляционная функция пылевых частиц сравнивается с измеренной.

PACS: 05.70.Jk, 52.27.Lw

1. ВВЕДЕНИЕ

Пылевая плазма газовых разрядов представляет собой частично ионизованный газ, содержащий пылевые частицы микронных размеров с большим отрицательным зарядом. Частицы пыли, взаимодействуя друг с другом и частицами плазмы, могут образовывать упорядоченные структуры, подобные жидкости или твердому телу [1, 2].

В литературе значительное внимание уделяется поиску эффективного парного потенциала, описывающего взаимодействие между пылинками. Отмечается также, что при моделировании пылевых структур обычной многокомпонентной плазмой электронов и ионов разных сортов необходимо учитывать ряд специфических особенностей пылевой плазмы. Одной из них является зависимость заряда пылевых частиц от их концентрации и других параметров плазмы. Другими — наличие постоянных потоков электронов и ионов плазмы на пылевые частицы, процессов поверхностной рекомбинации, необходимость постоянных источников ионизации для существования плазмы, поддерживаемых подводом энергии в разряд. В частности, наличие таких потоков приводит к изменению асимптотики потенциала на

больших расстояниях [1–3]. Вместе с тем, несмотря на обилие работ по пылевой плазме, методы и подходы, разработанные для обычной многокомпонентной плазмы, в недостаточной степени используются для этого объекта. Несмотря на отмеченные особенности, пылевая система во многих аспектах сохраняет черты многокомпонентной плазмы. Пылевые частицы, электроны и ионы плазмы разряда, взаимодействуя между собой по закону Кулона, находятся в самосогласованном поле, создаваемом всеми зарядами.

В настоящей работе экспериментально находится парная корреляционная функция для пылевых частиц в плазме тлеющего разряда в условиях, когда за счет наличия некоторого внешнего «удерживающего» потенциала образуются упорядоченные пылевые структуры, подобные кристаллу или жидкости. Такие структуры наблюдаются уже на протяжении последних пятнадцати лет [1–3]. Для интерпретации этих и других экспериментальных данных развита адекватная теоретическая модель. В условиях существования упорядоченной пылевой структуры получено решение уравнения Пуассона–Больцмана и найден самосогласованный потенциал. С его помощью рассчитывается корреляционная функция и потенциальная энергия пылевых частиц. Показано, что рассчитанная корреляционная функция нахо-

*E-mail: vrbv@mail.ru

дится в неплохом согласии с измеренной. Потенциальная энергия пылевых частиц, когда отношение среднего расстояния между пылевыми частицами к ионному дебаевскому радиусу велико (экранирование пылевых частиц плазменными сильное), имеет вид, характерный для ионных кристаллов. Когда же это отношение мало, потенциальная энергия имеет дебаевскую форму, хорошо известную в теории плазмы. Специфическая зависимость заряда пылевых частиц от их плотности приводит к появлению минимума в зависимости потенциальной энергии от плотности. В данной работе рассчитан вклад потенциальной энергии в давление и показано, что ее зависимость от плотности пылевых частиц имеет минимум и две ветви. На ветви, реализующейся при больших плотностях, преобладают силы отталкивания, а на ветви при малых плотностях — силы притяжения. Для жидкоподобной пылевой структуры оценены параметры критической точки.

2. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПЫЛЕВЫХ СТРУКТУР В ПЛАЗМЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

Образование кристаллоподобных или жидкоподобных пылевых структур наблюдалось в приэлектродном слое высокочастотного емкостного разряда в аргоне. Для целей настоящей работы была специально измерена парная корреляционная функция, представленная на рис. 1. Вкратце, суть эксперимента заключалась в том, что напряжение от высокочастотного генератора с несущей частотой

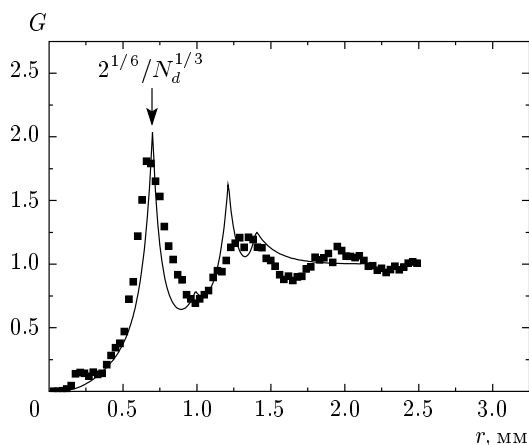


Рис. 1. Символы — корреляционная функция пылевых частиц ($N_d = 4000 \text{ см}^{-3}$), измеренная в работе [4]. Сплошная линия — расчет по формуле (36)

13.56 МГц подавалось на два плоских электрода, между которыми возникал тлеющий разряд. Через отверстие в верхнем электроде из специального контейнера вбрасывались пылевые частицы. Макрочастицы представляли собой либо пластиковые сферы диаметром 1.9 мкм, либо полидисперсные (Al_2O_3) диаметром 2–5 мкм. Эти пылинки, попадая в разряд и заряжаясь отрицательно, зависали в приэлектродном слое. Видеозапись обрабатывалась при помощи специальной программы, которая позволяла идентифицировать положения отдельных частиц в поле зрения видеосистемы и построить бинарную корреляционную функцию для каждой полученной плазменно-пылевой структуры. Корреляционная функция на рис. 1 приведена для плотности пылевой компоненты $N_d = 4000 \text{ см}^{-3}$. Ее вид характерен для упорядоченного состояния вещества. Так, ее первый максимум на рис. 1 соответствует первому максимуму корреляционной функции гранецентрированного кристалла, положение которого определяется из соотношения

$$R = 2^{1/6}/N_d^{1/3} \approx 0.7 \text{ мм.} \quad (1)$$

Это дает основания предположить, что каждая пылевая частица окружена сферой, на которой распределены 12 ближайших соседей, находящихся на расстоянии R . При условии, что пылевой кристалл идеален, затем должна располагаться сфера с шестью вторыми соседями на расстоянии $R_1 = R\sqrt{2}$, третья — с 24 частицами на расстоянии $R_2 = R\sqrt{3}$ и т. д. Положение частиц локализовано в пространстве, и они могут лишь совершать колебания около положений равновесия. Электроны и ионы плазмы тлеющего разряда движутся между пылевыми частицами, обеспечивая их зарядку и экранировку. Типичные для тлеющего разряда параметры плазмы имеют значения: концентрация ионов $N_i \approx 10^8 \text{ см}^{-3}$, температура ионов $T_i \approx 0.05 \text{ эВ}$, а электронов $T_e \approx 2 \text{ эВ}$. В этих условиях радиус экранирования определяется ионами и его значение равно $R_i = \sqrt{T_i/4\pi e^2 N_i} \approx 0.17 \text{ мм}$. Отношение $R/R_i \approx 4.2$ показывает, что ионный дебаевский радиус существенно меньше среднего расстояния между пылинками, и поэтому экранировка пылевых частиц зарядами плазмы существенна. Заряд пылевых частиц можно оценить, используя уравнение в приближении ограниченного орбитального движения с параметром Хавнеса [1, 2]:

$$\exp \frac{Ze^2}{aT_e} \left(\frac{mT_i}{MT_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{Ze^2}{aT_i} \right) \times \left(1 + \frac{ZN_d}{N_i - ZN_d} \right) = 1, \quad (2)$$

где Z — модуль заряда пылевой частицы, a — ее радиус.

Из этого уравнения легко получается связь плотности пылевых частиц и их заряда:

$$N_d = \frac{N_i}{Z} \times \left[1 - \exp \frac{Ze^2}{aT_e} \left(\frac{mT_i}{MT_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{Ze^2}{aT_i} \right) \right], \quad (3)$$

где m, M — массы электрона и иона. Из (3) при $N_d = 0$ вытекает уравнение, определяющее максимальный заряд уединенной частицы. По мере роста концентрации заряд пылевых частиц уменьшается. При фиксированных значениях T_e, T_i, M, Z и a концентрация пыли пропорциональна концентрации ионов. Если же плотность ионов не меняется, то изменение плотности пылевых частиц сопровождается изменением их заряда. В эксперименте для левитации пылевых частиц необходимо, кроме того, чтобы электрическая сила уравновешивалась силой тяжести, т. е. выполнялось равенство

$$\frac{4\pi a^3}{3} N_d M_d g = ZeE, \quad (4)$$

где M_d — масса пылевой частицы, g — ускорение силы тяжести, E — составляющая напряженности электрического поля, направленная вдоль оси заряда. Поэтому, если напряженность поля не меняется, в разряде устанавливаются определенная концентрация пылевых частиц и их заряд.

Полагая радиус пылевых частиц равным $a = 5$ мкм, получаем, что $Z \approx 10000-15000$. Величина $ZN_d \approx 4 \cdot 10^7$ см⁻³ составляет заметную долю от концентрации электронов. Из условия электронейтральности,

$$N_i = N_e + ZN_d, \quad (5)$$

находим, что $N_e \approx 6 \cdot 10^7$ см⁻³, что заметно меньше концентрации ионов.

Отметим также, что, несмотря на относительно высокую температуру поступательного движения около 5 эВ, скорость теплового движения пылевых частиц из-за большой массы ($M_d \approx 5 \cdot 10^{-10}$ г)

остается очень малой (не более 1 см/с). Поэтому относительно теплового движения электронов и ионов плазмы пылевые частицы являются неподвижными источниками возникновения и гибели зарядов.

3. УПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ

Пусть пылевые частицы образуют структуру, подобную гранецентрированному кристаллу («пылевой кристалл»). В этом случае выделенная пылевая частица с зарядом Z окружена слоем из 12 ближайших соседей, заряд которых равномерно распределен по сфере радиуса R . Затем расположен второй слой, образованный шестью частицами на расстоянии $R\sqrt{2}$, третий — из 24 частиц на расстоянии $R\sqrt{3}$ и т. д. В таблице приводятся расстояния от выделенной частицы $r_n = R\sqrt{n}$ и соответствующие координационные числа для гранецентрированного кристалла.

Если же пылевые частицы образуют жидкоподобную структуру («пылевая жидкость»), то за счет образования вакансий и других дефектов структуры число ближайших соседей в слоях становится несколько меньшим, чем для идеального кристалла. Так, согласно данным работы [4], в первой координационной сфере оно составляет 10.5 вместо 12, во второй — приблизительно 5.5, в третьей — 22. В таблице приведены координационные числа для жидкого состояния для первых трех координационных сфер. На больших расстояниях за счет теплового движения и так называемой структурной диффузии [5] слои перемешиваются, происходит потеря порядка и пылевые частицы распределяются равномерно. В этом случае число частиц в сферическом слое от $R\sqrt{i}$ до $R\sqrt{i+1}$ определяется как

$$n_i = 4\pi R^3 i \left(\sqrt{i+1} - \sqrt{i} \right) N_d \approx 2\pi\sqrt{2i}. \quad (6)$$

Следуя работе [5], функцию распределения пылевых частиц представим в виде

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_i g_i(r). \quad (7)$$

Для идеального кристалла под знаком суммы в формуле (7) стоит сумма δ -функций $g_i(r) = n_i \delta(r - r_i)$. В общем случае введенная выше функция может быть определена как сумма ряда гауссовых функций [5]:

$$g_i(r) = \frac{n_i}{\sqrt{2\pi D}} \exp \left(-\frac{(r - r_i)^2}{2D} \right). \quad (8)$$

Номер слоя, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Расстояние, r_i	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$
Кристалл, n_i	12	6	24	12	24	8	48	6	36	24	24	24	72
Жидкость, n_i	10.5	5.5	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Дисперсия $D = D_T + D_S$ характеризует среднеквадратичные отклонения частиц от положения равновесия, которые происходят за счет теплового движения (D_T) и дефектов структуры (D_S). Часть дисперсии, связанную с тепловым движением, запишем как $D_T = T/k$, где k — коэффициент жесткости [5]. Структурная часть дисперсии D_S связана с возрастанием статистического разброса в распределении положений частиц, вызванном характерным для жидкостей отсутствием дальнего порядка. Она растет пропорционально квадратному корню из среднего расстояния соответствующего слоя от центральной частицы, т.е. $D_S = 2Sr_i$, где S — некоторая постоянная, имеющая размерность длины. По мере увеличения r расстояния между соседними слоями все более и более сужаются, а их ширина возрастает, поэтому в конце концов образуется постоянный «фон» $\rho = N_d$, соответствующий средней концентрации пылевых частиц. Ниже для нескольких первых слоев будем использовать формулу (7) с δ -функцией, а для последующих будем полагать распределение равномерным.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА – БОЛЬЦМАНА

Пусть пылевые частицы за счет потенциала заряженной стенки или специального дополнительного устройства ловушки [1, 2] находятся в «потенциальной ловушке» и образуют упорядоченную структуру. Уравнение Пуассона – Больцмана для самосогласованного потенциала Φ в сферической геометрии имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi e \left[N_e \exp \frac{e\Phi}{T_e} - N_i \exp \left(-\frac{e\Phi}{T_i} \right) - Z\rho(r) \right]. \quad (9)$$

Здесь и ниже знаки зарядов пылевых частиц, электронов и ионов учтены, так что в дальнейшем величина Z — это модуль заряда.

Следует отметить, что учет эффектов поглощения плазмы пылевыми частицами и анизотропии

распределения плазмы по скоростям в окрестности поглощающей частицы приводит к тому, что на больших расстояниях $\tilde{r} > R_i \ln(R_i/a)$ у бoльцмановской экспоненты для ионов в уравнении (9) возникает множитель f , имеющий вид [2]

$$f(r) = 1 + \frac{a^2}{2r^2} \left(\frac{Ze^2}{aT_i} - \frac{1}{2} \right).$$

В нашем случае характерный масштаб расстояний $R < \tilde{r}$. Поэтому этими эффектами в дальнейшем будем пренебрегать, полагая $f(r) = 1$.

Сначала найдем решение для случая, когда пылевая частица с зарядом Z окружена концентрическими сферами с радиусами $R\sqrt{i}$, на которых равномерно распределен заряд Zn_i . Между этими сферами свободно перемещаются электроны и ионы плазмы. На границах слоев возникают «скачки» зарядов на величины Zn_i .

Поскольку радиус частицы мал, $a \ll R$, потенциал вблизи отрицательно заряженной частицы чисто кулоновский и граничное условие при $r \rightarrow 0$ имеет вид

$$\Phi(r)|_{r \rightarrow 0} = -\frac{Ze}{r}. \quad (10)$$

Удобно ввести безразмерные переменные: расстояние $x = r/R$, заряд $z = Ze^2/RT_i$, потенциал $\varphi = -e\Phi/zT_i$. В этих переменных уравнение (9) примет вид

$$\varphi'' + \frac{2}{x}\varphi' = \frac{\alpha^2}{z}(e^{z\varphi} - \delta e^{-z\tau\varphi}), \quad (11)$$

где

$$\delta = \frac{N_e}{N_i}, \quad \tau = \frac{T_i}{T_e}, \quad \alpha = \frac{R}{R_i}.$$

Величина $\alpha = R/R_i$ есть отношение расстояния между ближайшими пылинками к ионному дебаевскому радиусу. Граничное условие (10) упрощается и принимает вид

$$\varphi(x)|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{x}. \quad (12)$$

Запишем уравнение (11) в линейном по φ ($e^\varphi \approx 1 + \varphi$) приближении. Тогда

$$\varphi'' + \frac{2}{x}\varphi' - \alpha^2(1 + \delta\tau)\varphi = \alpha^2 \frac{1 - \delta}{z}. \quad (13)$$

Величина $\delta\tau$ отражает роль электронов в экранировании в неизотермической плазме. В условиях тлеющего разряда эта величина мала и ниже мы будем ею пренебрегать. Решение (13) можно представить как

$$\varphi = \varphi_c + \omega, \quad (14)$$

где φ_c и ω — соответственно постоянная и переменная составляющие потенциала. Постоянная составляющая возникает из-за нарушения зарядовой симметрии, вызванной наличием заметного количества пылевых частиц, $N_e < N_i$, и уравнение (14) допускает решения $\varphi_c = \text{const}$ и

$$\varphi_c = -\frac{1-\delta}{z} = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{\alpha^2}. \quad (15)$$

С использованием (3) соответствующий размерный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_c &= -\frac{T_i Z N_d}{e N_i} = \\ &= -\frac{T_i}{e} \left[1 - \exp \frac{Ze^2}{aT_e} \left(\frac{mT_i}{MT_e} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{Ze^2}{aT_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда следует, что постоянная составляющая самосогласованного потенциала не превосходит температуру ионов. Она равна нулю для уединенной пылевой частицы и стремится к значению $\sim T_i/e$ по мере роста концентрации пылевых частиц и уменьшения их заряда.

Теперь найдем переменную составляющую. Специфика задачи состоит в наличии сферических слоев, при переходе через которые заряд меняется на конечную величину. Потенциал при этом должен оставаться непрерывным.

Рассмотрим первый слой, $0 \leq x \leq 1$. Решение для потенциала будем искать в виде

$$\omega_0(x) = \frac{1}{x} (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}). \quad (17)$$

Постоянная B находится из условия, что при $x \rightarrow 0$ потенциал должен быть кулоновским, т.е. $\omega_0(x) \rightarrow 1/x$. Откуда следует, что

$$B = 1 - A. \quad (18)$$

Заряд, соответствующий потенциалу (17), находится из соотношения

$$\begin{aligned} z_0(x) &= -r^2 \frac{d\omega_0}{dx} = \\ &= -Ae^{\alpha x}(\alpha x - 1) + Be^{-\alpha x}(\alpha x + 1). \end{aligned} \quad (19)$$

В следующем слое, $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, решение будем искать в виде

$$\omega_1(x) = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x}, \quad (20)$$

$$z_1(x) = -A_1 e^{\alpha x}(\alpha x - 1) + B_1 e^{-\alpha x}(\alpha x + 1). \quad (21)$$

Граничные условия записываются как

$$\omega_0(1) = \omega_1(1), \quad z_0(1) + n_1 = z_1(1), \quad (22)$$

где n_1 — скачок заряда при переходе через слой.

Из условий (17), (19), (20), (21), (22) находим, что

$$A_1 = A - \frac{n_1 e^{-\alpha}}{2\alpha}, \quad (23)$$

$$B_1 = B + \frac{n_1 e^{\alpha}}{2\alpha}. \quad (24)$$

Аналогично строятся решения для последующих слоев. Легко показать, что коэффициенты A_i и B_i , определяющие решение в i -м слое, связаны с коэффициентами A_{i-1} и B_{i-1} рекуррентными формулами:

$$A_i = A_{i-1} - \frac{n_i e^{-\alpha\sqrt{i}}}{2\alpha\sqrt{i}}, \quad (25)$$

$$B_i = B_{i-1} + \frac{n_i e^{\alpha\sqrt{i}}}{2\alpha\sqrt{i}}. \quad (26)$$

Из формул (25), (26) получаем:

$$A_n = A - F_n^-, \quad (27)$$

$$B_n = 1 - A + F_n^+, \quad (28)$$

где

$$F_n^- = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{n_i e^{-\alpha\sqrt{i}}}{\sqrt{i}}, \quad F_n^+ = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{n_i e^{\alpha\sqrt{i}}}{\sqrt{i}}. \quad (29)$$

Далее будем полагать, что при $x \geq \sqrt{N}$ частицы распределены равномерно, N — наибольший номер слоя, после которого частицы распределены равномерно. В этом случае в правой части уравнения (9) появляется постоянное слагаемое ZN_d , а в уравнении (13) левая часть должна быть равна нулю и решение имеет дебаевский вид:

$$\tilde{\omega} = C_N e^{-\alpha x}/x. \quad (30)$$

Постоянная C_N находится из условия $\tilde{\omega}(\sqrt{N}) = \omega_N(\sqrt{N})$, что приводит к значению

$$C_N = A_N e^{2\alpha\sqrt{N}} + B_N - \frac{4\pi\sqrt{2N} e^{\alpha\sqrt{N}}}{\alpha^2}. \quad (31)$$

Способ вычисления постоянной A будет описан ниже.

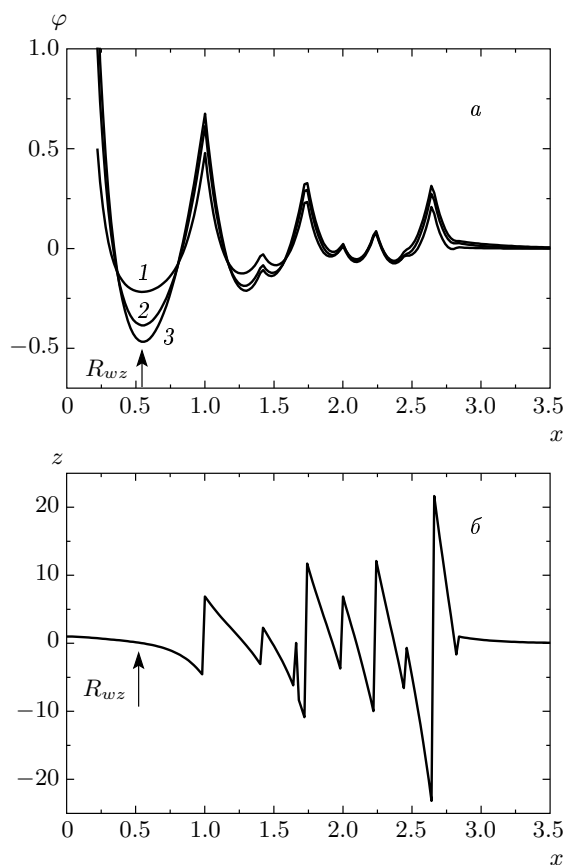


Рис. 2. Зависимости потенциала $\varphi(x) = \omega(x) - 4\pi\sqrt{2}/\alpha^2$ (а) и заряда $z(x)$ (б) от расстояния x для кристаллоподобной структуры, полученные из решения уравнения Пуассона – Больцмана для 9 слоев пылевых частиц. На рис. а – $\alpha = 8$ (1), 4.25 (2), 2.5 (3); б – $\alpha = 4.25$. Для первых трех слоев n_i взяты в соответствии с таблицей для кристалла, для последующих вычислены по формуле (6)

Рисунки 2, 3 иллюстрируют зависимости потенциала φ (а) и заряда z (б) от расстояния x . На рис. 2 в девяти первых слоях скачки заряда брались в соответствии с таблицей, т. е. как для идеального кристалла. Далее полагалось, что заряд распределен равномерно в соответствии с формулой (6). На рис. 3 скачки заряда учитывались в первых четырех слоях в соответствии с таблицей для жидкости.

В обоих случаях на границе слоев производная потенциала претерпевает разрыв, связанный со скачком заряда в этом слое. При переходе к равномерному распределению изломы исчезают и потенциал плавно стремится к нулю. При условии, что $\alpha \geq 1$, распределение потенциала φ между слоями довольно слабо зависит от параметра α . Распреде-

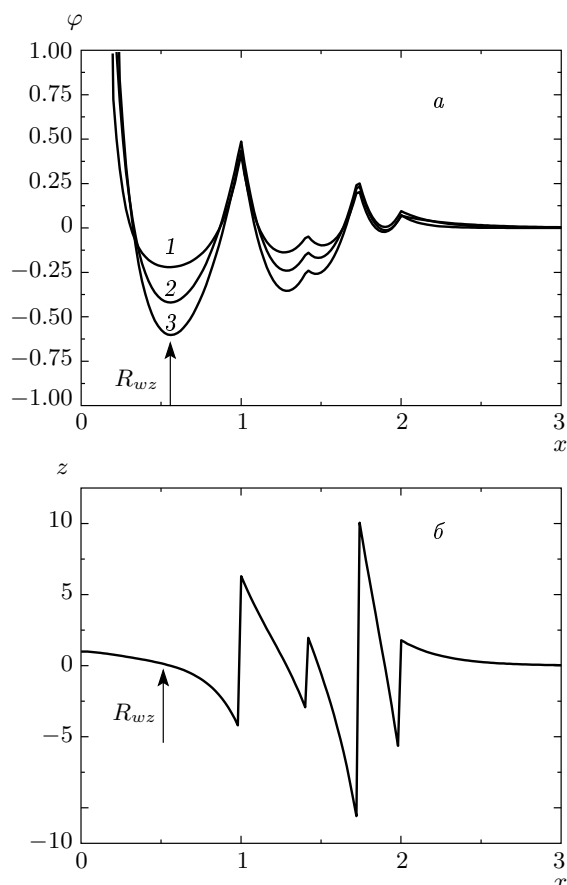


Рис. 3. Зависимость потенциала (а) и заряда (б) для жидкоподобной структуры (см. подпись к рис. 2). Для первых четырех слоев n_i взяты в соответствии с таблицей для жидкости, а для последующих вычислены по формуле (6)

ление заряда практически не зависит от параметра α , поэтому на рис. 2б, 3б представлен график только для $\alpha = 4.25$. Он начинается со значения $z = 1$, соответствующего безразмерному заряду выделенной частицы. С ростом x этот заряд экранируется ионами плазмы и меняет знак, становясь отрицательным. В точке $x = 1$ происходит скачок заряда на 12 единиц. Затем картина повторяется и в точке $x = \sqrt{2}$ заряд возрастает на шесть единиц и т. д. При равномерном распределении скачки прекращаются и заряд плавно убывает.

5. УДЕРЖИВАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Примечательно, что расстояние, на котором заряд впервые полностью экранируется, а потенциал

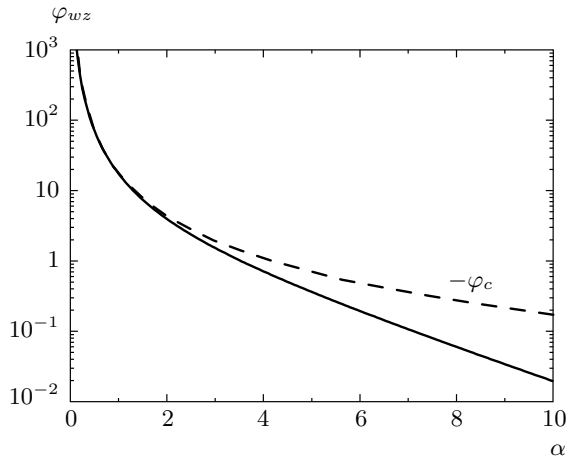


Рис. 4. Зависимость потенциала на границе ячейки Вигнера–Зейтца от параметра α (сплошная линия), $-\varphi_c(\alpha)$ (штриховая линия)

имеет минимум (максимум с учетом знака зарядов), совпадает с размером ячейки Вигнера–Зейтца

$$R_{wz} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{N_d^{1/3}} = \frac{0.62}{N_d^{1/3}}.$$

На рис. 2, 3 это расстояние отмечено стрелкой. Значение потенциала на границе ячейки $\varphi(R_{wz})$ в зависимости от параметра α представлено на рис. 4. На этом же рисунке показана зависимость $-\varphi_c(\alpha)$. При $\alpha \leq 1$ потенциал $\varphi(R_{wz}) \approx -\varphi_c$. При больших α имеет место неравенство $\varphi(R_{wz}) < -\varphi_c$.

Рассмотрим пылевую систему как совокупность ячеек Вигнера–Зейтца. В этом случае периферийный слой такой системы должен состоять из положительных ионов. Чтобы эти ионы не могли смещаться, вся система должна находиться в потенциальной ловушке, образованной отрицательными зарядами. Потенциал ловушки φ_s должен превосходить по модулю потенциал на границе ячейки Вигнера–Зейтца, т. е. $\varphi_s \geq \varphi_{wz}$. Для оценки потенциала стенки можно также воспользоваться теорией ограниченного орбитального движения, если в формулах этой теории формально заменить Ze/a на φ_s , где φ_s — потенциал стенки. Тогда из уравнений (2), (3) с точностью до геометрического коэффициента порядка единицы получаем условие удержания пылевой плазмы в виде

$$e\varphi_s \sim Ze^2/a \geq \Phi_{wz}. \quad (32)$$

На рис. 5 представлена качественная картина распределения потенциалов у стенки, ограничивающей объем с пылевой плазмой.

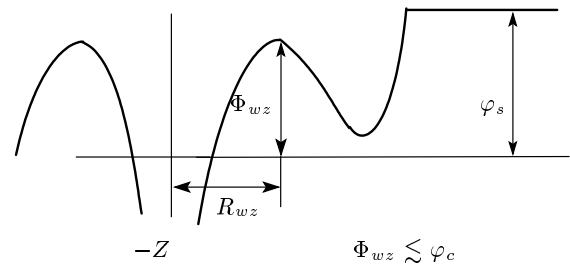


Рис. 5. Качественная картина распределения потенциалов у границы пылевой плазмы: φ_s — потенциал стенки, Φ_{wz} — потенциал на границе ячейки Вигнера–Зейтца

Неравенство (32) можно также переписать в виде

$$\frac{R}{R_i} > \left(\frac{4\pi\sqrt{2}aT_i}{Ze^2}\right)^{1/2}. \quad (33)$$

Для рассматриваемых параметров плазмы это эквивалентно тому, что $R/R_i > 1$. Следовательно, для удержания пылевой плазмы необходимо, чтобы среднее расстояние между пылевыми частицами превосходило ионный дебаевский радиус, т. е. экранировка пылевых зарядов плазменными должна быть существенной.

6. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

В рассматриваемом приближении пылевые частицы непосредственно взаимодействуют с ионами и электронами плазмы. Взаимодействие же пылевых частиц между собой можно свести к действию некоторого самосогласованного поля на каждую из них. Это поле в среднем изотропно, т. е. обладает сферической симметрией. Для получения этого поля из найденного выше самосогласованного потенциала вычтем потенциал центральной пылевой частицы с учетом экранировки, т. е. рассмотрим величину

$$e\tilde{\Phi}(r) = e\Phi(r) - e^2 Z \exp\left(-\frac{r}{R_i}\right) \left(1 + \frac{r}{R_i}\right) \frac{1}{r}. \quad (34)$$

При малых r потенциал $\tilde{\Phi}(r) \rightarrow -\Phi_e$ и становится отрицательным. С ростом r он осциллирует и при больших r стремится к нулю. Вероятность обнаружить пылевую частицу на расстоянии r от начала координат, т. е. корреляционную функцию, можно записать как

$$G(r) = \exp\left(-e\tilde{\Phi}(r)/T_i r\right). \quad (35)$$

В формуле (35) использована температура ионов, поскольку это основная компонента, формирующая самосогласованное поле, и динамика экранирования пылевых частиц определяется скоростью движения ионов. Переходя к безразмерным потенциалам и учитывая знаки зарядов, выражение (35) можно переписать в виде

$$G(x, \alpha, z) = \exp \left[z\alpha \left(\varphi(x, \alpha) - \exp(-\alpha x) \frac{1+\alpha x}{x} \right) \right]. \quad (36)$$

Найденная корреляционная функция помимо расстояния зависит от двух безразмерных параметров α и z . Рассчитанная по формуле (36) функция для жидкоподобной пылевой структуры представлена на рис. 1 сплошной линией. При этом использованы следующие значения параметров: $Z = 10000$, $T_i = 0.05$ эВ, $R_i = 0.017$ см, $R = 0.074$ см. Расчетная функция достаточно хорошо воспроизводит первый максимум экспериментальной. Последующие максимумы расчетной корреляционной функции расположены на несколько меньших расстояниях, чем измеренные. Это свидетельствует об отличии реальной пылевой структуры, реализуемой в эксперименте, от предполагаемой, заложенной в расчет. В целом же расчет неплохо воспроизводит все особенности измеренной корреляционной функции. Кроме того, рассматриваемый метод допускает возможность варьирования координационных чисел и расстояний между слоями для лучшего согласия с экспериментальными данными.

Из формулы (36) следует выражение для первого максимума корреляционной функции, которое удобно записать как

$$\ln G_{max} = \frac{Ze^2}{T_i R_i} \chi(\alpha), \quad (37)$$

где

$$\chi(\alpha) = A(e^\alpha - e^{-\alpha}) - \frac{4\pi\sqrt{2}}{\alpha^2} - \alpha e^{-\alpha}. \quad (38)$$

В диапазоне $3 < \alpha < 9$ функция $\chi(\alpha)$ меняется слабо и ее значение $\chi(\alpha) \approx 0.41$. Это позволяет из формулы (38) найти заряд пылевых частиц по значению корреляционной функции в первом максимуме. Из графика на рис. 1 следует, что экспериментальное значение $\ln G_m \approx 0.64$. Полагая $T_i = 0.05$ эВ, $R_i = 0.017$ см, получаем, что $Z \approx 9200$. Это значение хорошо согласуется с величиной, получаемой из теории ограниченного орбитального движения ($Z \approx 9800$).

7. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Следуя монографии [6], энергию взаимодействия пылевой частицы с электронами и ионами, отнесенную к единице объема, представим в виде

$$U = 2\pi N_d \int_0^\infty r^2 dr [N_e V_{de} G_{de} + N_i V_{di} G_{di}], \quad (39)$$

где $V_{de} = Ze^2/r$ и $V_{di} = -Ze^2/r$ — потенциалы взаимодействия пылевой частицы соответственно с электроном и ионом. В формуле (39) G_{de} , G_{di} — соответствующие корреляционные функции, имеющие вид

$$G_{de} = \exp \frac{e\Phi}{T_e} - 1, \quad G_{di} = \exp \left(\frac{-e\Phi}{T_i} \right) - 1. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39) и переходя к безразмерным переменным в линейном по Φ приближении, получим

$$U = -\frac{2\pi e^4 Z^2 N_d N_{i0} R}{T_i} u \left(\frac{R}{R_i} \right), \quad (41)$$

$$u = \int_0^\infty \varphi(1 + \delta\tau) x dx \approx \int_0^\infty (\omega + \varphi_c) x dx. \quad (42)$$

Если в выражении (39) считать, что $N_d = N_i$, $Z = 1$, а для корреляционной добавки воспользоваться дебаевским приближением $\varphi = \exp(-\kappa r)/r$, где κ — обратный дебаевский радиус, то получим хорошо известную отрицательную дебаевскую добавку к энергии электрона или иона. Отрицательный знак этой добавки связан с тем, что в плазме разноименные заряды в среднем находятся ближе друг к другу, чем одноименные.

Для рассматриваемой задачи интеграл (42) вычисляется аналитически. Для этого подставим ω в формулу (42) в виде

$$\omega = \frac{1}{\alpha^2} \left(\omega'' + \frac{2}{x} \omega' \right),$$

который следует из уравнения Пуассона для этой функции. После интегрирования получим

$$u(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \left[(x\omega' + \omega) \Big|_0^{\sqrt{N}} - 2\pi\sqrt{2} N + \alpha C_N e^{-\alpha\sqrt{N}} \right]. \quad (43)$$

Воспользуемся тем, что $x\omega' = z(x)/x$. Последняя функция претерпевает разрыв первого рода при переходе через каждый слой. Величина этого разрыва при переходе через i -й слой находится из условия

$$-\frac{z(x)}{x} \Big|_{x \rightarrow \sqrt{i-0}} + \frac{z(x)}{x} \Big|_{x \rightarrow \sqrt{i+0}} = \frac{n_i}{\sqrt{i}}. \quad (44)$$

Это позволяет записать энергию взаимодействия в виде

$$u(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n_i}{\sqrt{i}} - 2\pi\sqrt{2} \right) + \frac{d}{dx}(x\omega) \Big|_{x \rightarrow 0}^{\sqrt{N+1}} + \alpha C_N e^{-\alpha\sqrt{N}} \right]. \quad (45)$$

Величина

$$\frac{d}{dx}(x\omega) \Big|_{x \rightarrow 0}^{\sqrt{N}} + \alpha C_N e^{-\alpha\sqrt{N}} = \alpha T(\alpha, N), \quad (46)$$

где

$$T(\alpha, N) = 1 + 2A \left(e^{\alpha\sqrt{N}} - 1 \right) - 2e^{\alpha\sqrt{N}} F_N^- - 4\pi \frac{\sqrt{2N}}{\alpha^2}. \quad (47)$$

Если пылевые частицы распределены равномерно, то сумма в (45) обращается в нуль. Выделенная пылевая частица экранируется плазменными, и должно выполняться соотношение $u(\alpha) = 1/\alpha$, которое приводит к обычной дебаевской поправке к энергии частицы. Поэтому нужно потребовать, чтобы функция $T(\alpha, N) = 1$. Кроме того, результат в этом случае не будет зависеть от числа N . Выберем постоянную A так, чтобы это условие выполнялось. Из формулы (47) находим

$$A = \frac{2\pi\sqrt{2N}/\alpha^2 + e^{\alpha\sqrt{N}} F_N^-}{e^{\alpha\sqrt{N}} - 1}. \quad (48)$$

При $\alpha \ll 1$ величина $A \approx 2\pi\sqrt{2}/\alpha^3$, когда же параметр $\alpha > 1$, значение $A \approx F_N^-$. Энергия взаимодействия (41) приобретает вид, характерный для ионных кристаллов [7, 8]:

$$U = - \frac{e^2 Z^2 (N_d)^2 N_d^{4/3}}{2 \cdot 2^{1/6}} M, \quad (49)$$

где

$$M = \alpha + \mu, \quad (50)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^N \left(\frac{n_i}{\sqrt{i}} - 2\pi\sqrt{2} \right) \quad (51)$$

— эффективный параметр Маделунга.

Если параметр α велик, то первое слагаемое в сумме (50) доминирует и имеет место обычная дебаевская экранировка центральной пылевой частицы плазмой. В том случае, когда параметр α не столь велик, главным становится второе слагаемое

(50). Тогда энергия взаимодействия пылевых частиц (49) имеет форму энергии Маделунга, т. е. такую же, как для сильнокоррелированной классической ионной системы. Функция (51) является аналогом постоянной Маделунга для сильнокоррелированной системы заряженных пылевых частиц. Для ее возникновения необходимо, чтобы в нескольких первых слоях $n_i/\sqrt{i} \neq 2\pi/\sqrt{2}$.

Расчет выполним для кристаллоподобной и жидкоподобной пылевых структур. В первом случае допустим, что для девяти первых слоев заряды распределены как в кристалле, а начиная с десятого слоя $n_i/\sqrt{i} \approx 2\pi\sqrt{2}$. Тогда величина

$$\mu = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{n_i}{\sqrt{i}} - 2\pi\sqrt{2} \right) = 2.39.$$

Это значение близко к постоянной Маделунга для решетки хлористого натрия, равной 1.747 [8]. Соответствующая величина $u(\alpha)$ равна $u(\alpha) = (2.39 + \alpha)/\alpha^2$.

Во втором случае предположим, что для трех первых слоев заряды распределены как в жидкости (см. таблицу), а начиная с четвертого слоя $n_i/\sqrt{i} \approx 2\pi\sqrt{2}$. Величины μ и $u(\alpha)$ соответственно равны

$$\mu = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{n_i}{\sqrt{i}} - 2\pi\sqrt{2} \right) = 0.933, \quad u(\alpha) = \frac{0.933 + \alpha}{\alpha^2}.$$

Специфика пылевой плазмы заключается в том, что заряд Z не является независимым параметром и, согласно уравнениям (2), (3), уменьшается с повышением плотности пылевых частиц.

Уравнения (41) и (3) устанавливают зависимость $U(N_d)$ в параметрической форме. Учет зависимости заряда от плотности приводит к появлению минимума потенциальной кривой и ветви, соответствующей возрастанию потенциала с увеличением плотности. Ниже расчеты будут проводиться для фиксированных значений параметров, типичных для тлеющего разряда: $T_e = 2$ эВ, $T_i = 0.05$ эВ, $N_i = 10^8$ см⁻³, $a = 5$ мкм, $M = 1837 \cdot 41m$ (масса иона аргона). При этих значениях параметров величина потенциала в минимуме для жидкоподобной структуры в расчете на одну частицу достигает $U_m = 510$ эВ, а плотность пылевых частиц $N_m = 1000$ см⁻³. Отметим, что по порядку величины энергия в минимуме совпадает с энергией взаимодействия пылевых частиц с $Z \approx 15000$ на среднем расстоянии между пылинками $R \approx 0.07$ мм. Действительно, в этом случае величина $e^2 Z^2 / R \approx 440$ эВ.

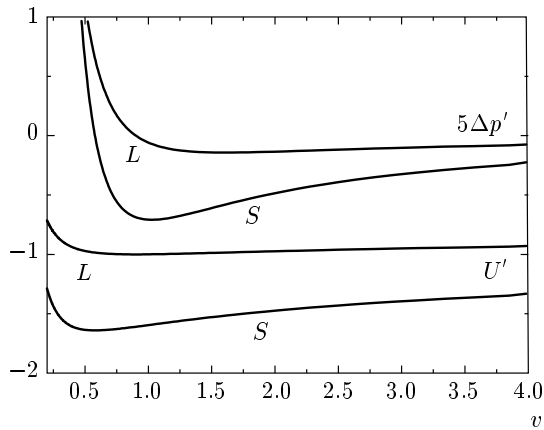


Рис. 6. Две нижних линии — зависимости приведенных потенциалов $U' = U/U_m N_d$ от приведенного удельного объема пылевых частиц $v = N_m/N_d$ для жидкости (L) и кристалла (S). Величины $U_m = 510$ эВ, $N_m = 1000$ см⁻³. Две верхних линии — для приведенных потенциальных составляющих давления $\Delta p' = \Delta p/U_m N_m$

В дальнейшем удобно ввести безразмерные единицы для энергии и удельного объема $U' = U/N_d U_m$ и $v = N_m/N_d$. В этих безразмерных переменных потенциальные энергии для жидкости и кристалла представлены на рис. 6. Это типичные кривые для взаимодействия частиц, имеющие минимум, крутую ветвь, соответствующую отталкиванию, и медленно спадающую ветвь, соответствующую притяжению. Как и у обычных веществ, минимум кривой для кристалла глубже, чем для жидкости, и смещен в сторону меньших удельных объемов.

8. СЛЕДСТВИЯ

Уменьшение давления, соответствующее потенциалу (49), получается дифференцированием энергии по объему $\Delta p = -\partial U/\partial V$. Выполняя дифференцирование, получаем

$$\Delta p = -\frac{Z^2 e^2 N_d^{4/3}}{3 \cdot 2^{7/6}} \left(\mu + \frac{6N_d}{Z} \frac{\partial Z}{\partial N_d} (\mu + \alpha) \right). \quad (52)$$

Приведенные давления для жидкости и кристалла $\Delta p' = \Delta p/U_m N_m$, рассчитанные по формуле (52) при $\mu = 0.933$ (кривая L), 2.39 (кривая S), приведены на рис. 6. Как и следует, давление обращается в нуль в точке минимума потенциала.

Добавляя к отрицательному давлению вклад тепловой части в ван-дер-ваальсовом виде [7], получим

уравнение состояния сильнокоррелированной пылевой системы:

$$p = \frac{N_d T}{1 - 4N_d V} - \frac{Z^2 e^2 N_d^{4/3}}{2^{7/6} \cdot 3} \times \left(\mu + \frac{6N_d}{Z} \frac{\partial Z}{\partial N_d} (\mu + \alpha) \right). \quad (53)$$

Величина $4V$ в уравнении (53) соответствует учетверенному исключенному объему. Выбирая в качестве такого объема объем самой частицы, получаем $4V = 16\pi a^3/3 \approx 1.7 \cdot 10^{-10}$ см³. Концентрация пыли в минимуме потенциала равна $N_m = 1000$ см⁻³, поэтому поправка $16\pi a^3 N_m/3 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ мала.

Пусть температура и концентрация пылевых частиц будут термодинамическими переменными (зряд является функцией концентрации). Остальные параметры, характеризующие состояние плазмы, остаются постоянными. Вопрос, как реализовать подобную ситуацию в эксперименте, заслуживает отдельного обсуждения. В этом случае из уравнения (53) можно оценить параметры критической точки. Обычная процедура определения критических параметров, состоящая в решении уравнения (53) вместе с условиями $dp/dN_d = d^2 p/dN_d^2 = 0$, приводит к уравнениям

$$-\frac{\partial \Delta p}{\partial N_d} 4V N_d = \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial N_d^2} (1 - 4V N_d) N_d, \quad (54)$$

$$T_c = -\frac{\partial \Delta p}{\partial N_d} (1 - 4V N_d). \quad (55)$$

Первое из этих уравнений определяет критическую плотность, второе — критическую температуру. Поскольку величина $4V N_d \ll 1$, критическая плотность определяется по точке перегиба зависимости потенциальной части давления от плотности, т. е. из условия

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial N_d^2} \right|_{N_d=N_c} = 0.$$

Критическая температура при этом находится как

$$T_c = \left. \frac{\partial \Delta p}{\partial N_d} \right|_{N_d=N_c}.$$

На рис. 7 построены безразмерные изотермы давления согласно уравнению (53) при $\mu = 0.933$ (пылевая жидкость). Критической изотерме соответствует температура $T_c = 0.0675$ или в размерных единицах $T_c \approx 34$ эВ. Критическая плотность $N_c \approx 0.1$ или в размерных единицах $N_c \approx 100$ см⁻³. Безразмерное давление в критической точке очень малое,

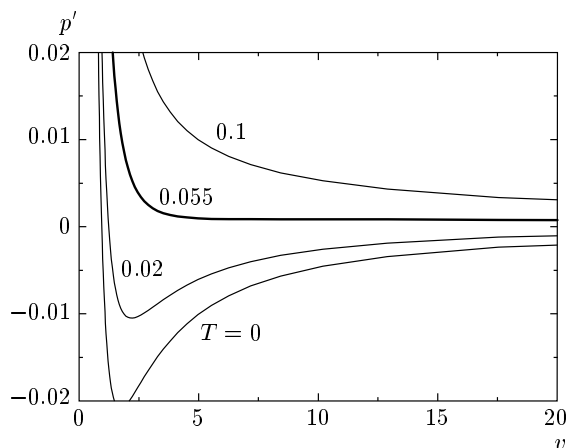


Рис. 7. Изотермы согласно уравнению (53) при различных значениях безразмерной температуры. Критической изотерме соответствует $T = 0.0675$

$p'_c \approx 0.001$. Заряд пылевых частиц и фактор сжимаемости в критической точке равны соответственно $Z_c \approx 18940$ и $\chi = p_c/T_c n_c \approx 0.23$. Изотерма при большей температуре монотонна, а при меньшей имеет минимум и максимум. Эти критические параметры заметно отличаются от таковых, оцененных в работе [9] на основе модельных парных потенциалов.

Полученные оценки критических параметров позволяют сделать вывод, что критический режим может реализоваться для очень разреженной пылевой системы, когда среднее расстояние между пылинками достигает долей сантиметра. При этом параметр $\alpha \gg 1$. Положительный потенциал на границе ячейки Вигнера–Зейтца становится очень малым и, следовательно, малым становится потенциал, необходимый для удержания такой плазмы. Однако в лабораторных условиях наблюдать особенности критического поведения пылевой плазмы затруднительно, поскольку в объеме удержания будет слишком мало пылевых частиц. В космических условиях ситуация становится более благоприятной. В большинстве экспериментов температура пыли заметно ниже критической, а

плотность существенно выше. Проводя аналогию с обычными веществами, можно утверждать, что состояние пылевой плазмы в лабораторных условиях соответствует плотному твердому или жидкому докритическим состояниям. В частности, при этом возможен фазовый переход жидкость–кристалл, что и наблюдалось неоднократно [1–3].

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Исследования вещества в экстремальных условиях», программы Max Planck Award Cooperation Research Program «Physics of High Energy Density Plasmas», РФФИ (гранты №№ 06-02-17532, 05-02-117582а, 05-02-17607а, 05-08-33713а, 06-03-32629а) и NWO (Project 047.016.020).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Форттов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, УФН **174**, 495 (2004).
2. V. E. Fortov, A. V. Ievlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill, Phys. Rep. **421**, 1 (2005).
3. N. K. Ailawadi, Phys. Rep. **57**, 241 (1980).
4. Б. М. Смирнов, УФН **162**, 96 (1992).
5. Я. И. Френкель, *Кинетическая теория жидкостей*, Наука, Ленинград (1975).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1995).
7. А. А. Ликальтер, УФН **170**, 831 (2000).
8. Ch. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York, London, Sydney, Toronto (1978).
9. S. A. Khrapak, G. E. Morfill, A. V. Ievlev, H. M. Thomas, D. A. Beysens, B. Zappoli, V. E. Fortov, A. M. Lipaev, and V. I. Molotkov, Phys. Rev. Lett. **96**, 015001 (2006).