

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВИХРЕЙ В ДВУМЕРНЫХ ЛЕГКОПЛОСКОСТНЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А. Ю. Галкин

*Институт металлофизики Национальной академии наук Украины
03142, Киев, Украина*

*Б. А. Иванов**

*Институт магнетизма Национальной академии наук Украины
03142, Киев, Украина*

*Киевский университет им. Тараса Шевченко
03127, Киев, Украина*

Поступила в редакцию 28 декабря 2006 г.

Исследована квазиклассическая динамика магнитных вихрей в двумерных решеточных моделях легкоплоскостных ферромагнетиков. Показано, что низкоэнергетическая часть спектра вихрей, трактуемых как квантовые возбуждения системы, обнаруживает достаточно нетривиальную структуру. Характер спектра наиболее прост для стандартных магнитных вихрей, в которых намагниченность вдали от центра вихря параллельна плоскости базиса. В этом случае спектр имеет зонную структуру, состоящую из нескольких непересекающихся зон, число зон определяется только значением атомного спина S и симметрией решетки. Для чисто двумерных магнетиков с одним спином на элементарную ячейку в случае целых или полуцелых значений спина S присутствует соответственно S или $2S$ зон. Для решетки с базисом с четным числом $2n$ спинов на ячейку число зон равно $2nS$ для любого спина. По сравнению со случаем стандартных вихрей, в которых намагниченность вдали от центра вихря разворачивается в легкой плоскости магнетика, ситуация сильно меняется для вихрей в конусном состоянии. Вихри в конусном состоянии возникают под действием постоянного внешнего поля, перпендикулярного легкой плоскости магнетика. Для них спектр не имеет, как правило, стандартного зонного вида и представляет собой множество, такое что в любой малой окрестности разрешенного значения энергии можно найти запрещенное и наоборот. Указана возможность осциллирующего движения вихря под действием постоянной внешней силы (аналог блоховских осцилляций электронов в кристаллах). Обсуждаются возможности реализации указанных эффектов в других упорядоченных средах, содержащих вихри.

PACS: 75.10.Jm, 75.45.+j, 03.75.Lm

1. ВВЕДЕНИЕ

Вихри как топологически нетривиальные распределения намагниченности известны во многих областях физики магнетизма [1–4]. В двумерных магнетиках вихри (связанные вихревые пары) играют роль нелинейных (солитонных) элементарных возбуждений системы [3, 4]. Свободные вихри появляются при достаточно высоких температурах, $T > T_{BKT}$, и приводят к фазовому переходу Березинского–Костерлица–Таулесса для двумерной

среды [5, 6], см. также обзоры [3, 4]. Трансляционное движение вихрей в двумерных магнетиках приводит к появлению центрального пика в динамических корреляционных функциях, который наблюдается экспериментально методом неупругого рассеяния нейтронов, см. детальную работу [7] и ссылки в ней. Вихри возникают и в обычных магнитных материалах, прежде всего, потому, что вихревые конфигурации намагниченности, как правило, не создают размагничивающего поля. Поэтому состояние с уединенным вихрем наиболее выгодно энергетически для субмикронных мезоскопических образцов

*E-mail: bivanov@i.com.ua

магнитомягких материалов приблизительно круговой формы, так называемых магнитных точек [8]. Анализ магнитных вихрей является важной частью физики конденсированного состояния, в которой вихри появляются во многих системах с непрерывно вырожденным основным состоянием, включая сверхтекучесть [9] и сверхпроводимость [10], в том числе высокотемпературную [11], а также атомные бозе-эйнштейновские конденсаты [12, 13]. Кроме того, известны вихри в нелинейной оптике, которые могут быть созданы в световом пучке, распространяющемся в среде с дефокусирующей нелинейностью, см. [14].

Спецификой динамики вихрей по сравнению с обычными частицами или нетопологическими солитонами является наличие гироскопической силы (гиросилы), такого же типа, как сила Лоренца. Присутствие гиросилы является общим свойством для различных вихрей — в сверхтекучих системах [9] и сверхпроводниках [10, 11], для оптических вихрей [14], для вихрей в ферромагнетиках [15–17], см. также обзоры [2, 4]. В то же время инерционные эффекты, ведущие к ньютоновской динамике солитонных возмущений, для этих систем пренебрежимо малы. Это приводит к ряду особенностей в динамике вихрей, как классической, так и квантовой, и мы ниже обсудим это подробнее. Отметим определяющую роль гиросилы в квантовом депиннинге вихрей в сверхпроводниках [18], а также в случае устойчивости движения вихревой линии и решетки вихрей [19].

В данной работе изучена динамика вихрей, классическая и квантовая, в двумерном легкоплоскостном ферромагнетике на решетке. Квантовые свойства вихрей обсуждаются на основе подхода коллективных переменных, с использованием квазиклассического приближения, а также путем сравнения с некоторыми точно решаемыми моделями. В разд. 2 мы кратко опишем в той мере, в какой это необходимо для дальнейшего анализа, структуру вихрей в континуальной модели ферромагнетика и ту специфику, которая возникает при переходе к дискретным (решеточным) моделям ферромагнетиков. Будет обосновано применение простейшего гироскопического уравнения для координаты центра вихря. Далее, в разд. 3 на основе этого уравнения будет проведено квазиклассическое квантование динамики вихря в простейшей модели двумерного ферромагнетика на квадратной решетке. Мы покажем, что задача сводится к так называемой задаче Харпера (или уравнению Харпера, Harper equation) [20] с весьма нетривиальным спектром, для которой из-

вестно много точных результатов, см. [21]. Оказалось, что спектр вихрей как квантовых возбуждений обнаруживает зонную структуру, состоящую из нескольких (S или $2S$ зон соответственно для целых или полуцелых значений атомного спина) непересекающихся зон. Возможные обобщения задачи о спектре вихря в решеточных моделях ферромагнетиков, которые зачастую приводят к качественным эффектам, будут рассмотрены в разд. 4. В разд. 5 исследовано вынужденное движение вихря под действием постоянной внешней силы. Наличие такой силы, как и для электрона в кристалле, может приводить к осцилляторному движению вихря (блоховские осцилляции). Наконец, в заключительном разд. 6 будут сделаны выводы, обсуждена применимость результатов для других сред, содержащих вихри, и перечислены нерешенные проблемы.

2. СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВИХРЕЙ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

При описании магнитных вихрей в дискретных решеточных моделях ферромагнетика обычно исходят из спинового гамильтониана [4, 22, 23]

$$\hat{H} = - \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{a}} \left\{ J \left(\hat{S}_{\mathbf{l}}^{(x)} \hat{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}^{(x)} + \hat{S}_{\mathbf{l}}^{(y)} \hat{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}^{(y)} \right) + J' \hat{S}_{\mathbf{l}}^{(z)} \hat{S}_{\mathbf{l}+\mathbf{a}}^{(z)} \right\} + K \sum_{\mathbf{l}} \left(\hat{S}_{\mathbf{l}}^{(z)} \right)^2, \quad (1)$$

где $\hat{S}_{\mathbf{l}}$ — оператор спина в узле решетки \mathbf{l} , \mathbf{a} — векторы, соединяющие пары ближайших соседей, J и J' — обменные интегралы, а также учтена одноионная анизотропия с константой K , которая может присутствовать при величине атомного спина $S > 1/2$. Этот спиновый гамильтониан имеет чисто одноосную симметрию (ось C_{∞} в спиновом пространстве), что необходимо для выполнения основного условия существования вихрей, а именно, непрерывного вырождения задачи по направлению спина в легкой плоскости. С учетом присутствия в реальных магнетиках спин-орбитальной связи это условие, строго говоря, требует также наличия одноосной симметрии в координатном пространстве. Поэтому мы будем считать, что решетка также является одноосной, в частности положим, что все векторы \mathbf{a} равны по модулю, $|\mathbf{a}| = a$. Если рассматривать только решетки Браве, это ограничивает модель двумя случаями, а именно, квадратной и треугольной решетками.

Структуру вихря проще всего описать на основе феноменологического макроскопического подхода. Первый шаг в этом подходе состоит в том, что спины трактуются как классические векторы фиксированной длины \mathbf{S} , что отвечает замене $\hat{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{S}$, $|\mathbf{S}| = S$. Фактически то же приближение возникает при квазиклассическом анализе на основе формализма спиновых когерентных состояний, см. [24, 25]. Далее предполагается, что направления спинов медленно меняются в пространстве. В результате состояние системы определяется заданием намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, $|\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)| = M_s = \text{const}$, как функции координат и времени, M_s — намагниченность насыщения. В двумерном случае, который будем обсуждать в основной части работы, речь идет о намагниченности на единицу площади магнетика, $M_s = g\mu_B S/v_0$, g — гиромагнитное отношение, μ_B — магнетон Бора, v_0 — площадь двумерного кристалла, приходящаяся на один спин. Удобно также использовать нормированную намагниченность $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)/M_s$, \mathbf{m} — единичный вектор, и записывать ее в угловых переменных θ, φ :

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_z \cos \theta + \sin \theta (\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi). \quad (2)$$

Динамика намагниченности ферромагнетика описывается хорошо известными уравнениями Ландау – Лифшица без затухания,

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar S} \left[\mathbf{m} \times \frac{\delta W}{\delta \mathbf{m}} \right],$$

см., например, [1–3]. В терминах переменных θ, φ эти уравнения могут быть получены из функционала энергии

$$W = \frac{S^2}{v_0} \int d^2x \{ a^2 J [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \varphi)^2] + K_e \cos^2 \theta \}, \quad (3)$$

интегрирование проводится в плоскости двумерного магнетика и вводится эффективная константа легкоплоскостной анизотропии $K_e > 0$, в которую дают вклады как анизотропия спиновых взаимодействий, так и одноионная анизотропия:

$$K_e = \frac{z}{2}(J - J') + K \left(1 - \frac{1}{2S} \right). \quad (4)$$

Здесь учтена квантовая перенормировка одноионной анизотропии при конечном значении спина, которую легко получить при использовании спиновых когерентных состояний [25], z — число ближайших

соседей. Поскольку для применимости феноменологического описания требуется малость K_e по сравнению с обменной константой J , будем считать, что $K \ll J$ и $J - J' \ll J$. В силу последнего условия при записи обменной энергии в формуле (3) мы положили $J' = J$.

Статические уравнения Ландау – Лифшица, следующие из выражения для этой энергии, имеют вихревое решение

$$\varphi = q\chi + \varphi_0, \quad \theta = \theta(r), \quad (5)$$

где r, χ — полярные координаты в плоскости магнетика, φ_0 — произвольная постоянная, q — целое число, определяющее π_1 -топологический заряд вихря, функция $\theta(r)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, см. детали в работах [2–4]. Вдали от вихря $\theta(r) \rightarrow \pi/2$, а существенные отклонения $\theta(r)$ от равновесного значения $\theta = \pi/2$ локализованы во внутренней области (коре вихря). Размер кора вихря определяется величиной $r_0 = a\sqrt{J/K_e}$ и при малой анизотропии, $K_e \ll J$, превышает величину постоянной решетки. В центре вихря $\cos \theta(0) = \pm 1 = p$ величина p (поляризация вихря) играет роль π_2 -топологического заряда. Естественно, что в рамках макроскопического подхода положение вихря (начало полярной системы координат, использованной при записи формулы (5)) не фиксировано. Решение для вихря, расположенного в некоторой точке $\mathbf{R} = (X, Y)$, получается из уравнения (5) заменой $\mathbf{r} \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, т. е. $r^2 \rightarrow (x - X)^2 + (y - Y)^2$, $\chi \rightarrow \arctg[(y - Y)/(x - X)]$.

В безграничном магнетике, рассматриваемом в приближении сплошной среды, энергия вихря не зависит от его положения. При учете границ возникает взаимодействие вихря с границей, которое является достаточно слабым при достаточно большом размере системы. Это обуславливает медленную динамику спинов, которую можно представить как движение вихря как целого, без изменения его структуры. Поэтому при описании низкочастотной динамики вихря естественно использовать метод коллективных переменных, выбрав в качестве переменных координаты вихря X, Y или \mathbf{R} и считая их зависящими от времени. Такой подход может быть обоснован стандартной теорией возмущений для солитонов, он надежно верифицирован путем прямого численного моделирования динамики вихря в больших решеточных системах [4, 22, 23]. Подобный подход хорошо описывает также экспериментально наблюдаемую низкочастотную динамику вихрей в субмикронных магнитных частицах (магнитных точках),

в которых из-за магнитного дипольного взаимодействия вихрь присутствует в основном состоянии [26].

Обсудим, как изменяются представленные выше свойства вихря при переходе от континуального описания к решеточной модели (1). Прежде всего отметим, что описанный выше вихрь с внеплоскостным кором существует только при не очень большой анизотропии, $K_e < K_c$, K_c — некое критическое значение, $K_c = (0.6-0.8)J$ в зависимости от типа решетки и характера анизотропии. С другой стороны, вдали от кора вихря $\theta \approx \pi/2$, $\nabla\varphi \sim q/r$, и градиент намагниченности мал даже при немалой анизотропии $K_e \sim J$, когда $r_0 \sim a$. Поэтому в этой области феноменологическое описание, в частности основанный на нем топологический анализ вихря, полностью применимы. Фактически оказалось, что феноменологический подход неплохо описывает структуру кора вихря при достаточно сильной анизотропии, например, при $K_e = 0.2J$, когда $r_0 \approx 1.5a$ [27]. Если же анизотропия предельно сильная, $K_e \geq K_c$, то кор отсутствует, $\theta = \pi/2$ во всем пространстве, и реализуется планарный вихрь с характерным «крестом» спинов в центре (при феноменологическом описании такой вихрь является сингулярным).

Метод коллективных переменных может быть развит и для решеточной модели магнетика (определение координаты вихря в решетке и метод расчета этой величины при численном моделировании динамики вихря можно найти в работе [4]). Естественно, что в этом случае энергия вихря зависит от его положения относительно кристаллической решетки, что может быть описано путем введения потенциала решеточного пиннинга $U(X, Y)$, который периодичен с периодом решетки [22]. В простейшем случае квадратной решетки потенциал пиннинга может быть выбран в виде [22]

$$U(X, Y) = U_0 \left(\sin^2 \frac{\pi X}{a} + \sin^2 \frac{\pi Y}{a} \right). \quad (6)$$

Здесь амплитуда потенциала $U_0 = \kappa JS^2$, J — обменный интеграл, S — спин атома, κ — безразмерный параметр. Значение параметра κ сильно зависит от радиуса кора вихря, т. е. от эффективной константы анизотропии K_e . Для предельно сильной анизотропии $K_e \sim K_c$, при которой еще существуют внеплоскостные вихри, значение константы κ не мало, например, $\kappa \sim 0.4$ при $K_e \sim K_c$, но константа κ быстро убывает при уменьшении K_e/J , т. е. $\kappa \sim 1.2 \cdot 10^{-2}$ при $K_e/J = 0.3$ и $\kappa < 10^{-3}$ при $K_e/J < 0.2$ (см. более детальные данные в работе [22]).

Основной особенностью динамики вихрей в упорядоченных средах является появление гироско-

пической силы $\mathbf{F}_G = [\mathbf{G} \times d\mathbf{R}/dt]$, $\mathbf{G} = G\mathbf{e}_z$, действующей на вихрь, движущийся со скоростью $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$. Наличие гиросилы надежно установлено для ферромагнетиков, сверхпроводников и сверхтекучих систем, а также вихрей в нелинейной оптике. Для ферромагнетиков гироскопическая константа G определяется выражением

$$G = \frac{M_S}{g\mu_B} \int \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi\hbar S}{v_0}(pq), \quad (7)$$

в котором интегрирование проводится по всей области изменения переменных θ, φ в вихре. Фактически входящий в формулу (7) интеграл есть π_2 -топологический инвариант для вихря, см. подробнее [2, 25], и в значении гиросилы появляется комбинация введенных выше целочисленных индексов q и p , произведение pq численно равно π_2 -топологическому заряду вихря. Во внеплоскостных вихрях $pq \neq 0$ наиболее энергетически выгодным вихрям отвечает минимальное значение топологического заряда $pq = \pm 1$. Для планарного вихря следует считать, что $pq = 0$, для него нетривиален только π_1 -топологический заряд q , и гиросила отсутствует. Далее мы будем обсуждать только внеплоскостные вихри с кором.

В основном приближении по временным производным динамика внеплоскостного вихря является чисто гироскопической и может быть описана уравнением

$$[\mathbf{G} \times d\mathbf{R}/dt] = \mathbf{F}_e, \quad (8)$$

где \mathbf{F}_e — внешняя сила, действующая на вихрь. При потенциальном движении $\mathbf{F}_e = -\nabla U$, $U = U(X, Y)$ — потенциал вихря, который может быть обусловлен взаимодействием вихря с границами системы; для кристаллических магнетиков потенциал $U = U(X, Y)$ включает в себя и потенциал решеточного пиннинга.

Применимость простого уравнения (8) отвечает возможности пренебречь инерционными эффектами в динамике вихря. Такое приближение дает хорошие результаты при описании вынужденного движения вихрей в сверхпроводниках и сверхтекучих системах, а также применяется для анализа движения плазмы в достаточно сильном магнитном поле (так называемое приближение ведущих центров, см. [28]). Как уже упоминалось, для вихрей в ферромагнетиках оно согласуется со всей совокупностью данных, численных и экспериментальных, касающихся низкочастотной динамики вихрей. Более того, оказалось, что возможность описания более быстрой динамики магнитных вихрей путем выхода за рамки простого гироскопического уравне-

ния (8) в случае ферромагнетика весьма проблематична. Результаты прямого численного моделирования движения вихрей в больших решетках подтверждают уравнение (8) как основное приближение, но не согласуются с его тривиальным обобщением, проведенным путем добавления в левую часть уравнения (8) ньютоновского инерционного члена типа $M d^2 \mathbf{R} / dt^2$. Адекватное описание численных экспериментов в следующем приближении получается только в том случае, когда наряду с этим слагаемым учитывается «высшая гиросила» вида $[\mathbf{G}_s \times d^3 \mathbf{R} / dt^3]$. В частности, в этом случае вместо стандартного движения по циклоиде, характеризующегося двумя частотами, низкой и высокой, появляется более сложное движение со слабо расщепленным дублетом высокой частоты [22]. Такое поведение наблюдалось и в экспериментах для магнитных точек в вихревом состоянии [29]. Обсуждая проблему эффективной массы магнитного вихря, уместно также добавить, что нам неизвестны какие-либо расчеты эффективной массы вихря в ферромагнетиках, а значения эффективной массы в других упорядоченных средах определяются различными физическими явлениями, заведомо отсутствующими в модели (1): например, наличием локализованных состояний квазичастиц в коре вихря в сверхпроводнике [10, 11] или сжимаемостью сверхтекучего гелия [9]. Поэтому далее в работе мы будем исходить из простейшего гироскопического уравнения (8).

Интересные статические и особенно динамические эффекты возникают при наличии внешнего магнитного поля \mathbf{H} , что отвечает добавлению к гамильтониану (1) зеемановского слагаемого $-g\mu_B \mathbf{H} \sum_i \mathbf{S}_i$. Для существования вихревых решений нужно, чтобы поле не нарушало бесконечного вырождения основного состояния магнетика. Это означает, что поле \mathbf{H} должно быть направлено параллельно избранной оси системы, а величина поля должна быть достаточно мала, $H < H_a$, где $H_a = 2K_e S / g\mu_B$ — поле анизотропии. При наличии поля $H < H_a$ основному состоянию системы отвечает $\cos \theta = \cos \theta_0 = H / H_a$, и существуют два типа вихрей: более выгодные («легкие вихри») с $\cos \theta(0) = +1$ и менее выгодные («тяжелые вихри»), в которых при $r = 0$ величина $\cos \theta = -1$ [23, 30]. В макроскопическом приближении тяжелые вихри устойчивы (метастабильны) при любых допустимых значениях поля H , $0 < H < H_a$ [30]. Этот вывод должен сохраняться и для решеточных моделей в пределе $K_e / J \rightarrow 0$. Однако уже при достаточно малых, но конечных значениях анизотропии $K_e \leq (0.1-0.01)J$ в решеточных моделях

стабильность тяжелых вихрей может нарушаться в малых полях $H < H_c \ll H_a$ [23]. Поэтому далее мы ограничимся обсуждением более выгодных вихрей, не упоминая термина «легкий вихрь».

При увеличении магнитного поля размер кора вихря увеличивается, а энергия вихря, в частности, характерное значение потенциала пиннинга, уменьшается. Важно отметить, что в присутствии уже достаточно слабого внешнего поля решение типа планарного вихря невозможно даже в предельно анизотропном магнетике, описываемом XY -моделью, для которой $J' = 0$ и формально $K_e = zJ/2 > J$ [23]. Поэтому вихри в магнитном поле непременно обладают гироскопическими свойствами. Для нашего анализа принципиально важен тот факт, что константа гиросилы $G = G(H)$ непрерывно зависит от магнитного поля [30]:

$$G(H) = G(1 - H/H_a). \quad (9)$$

Происхождение этой зависимости понятно; она непосредственно следует из общего выражения (7) с учетом того факта, что в конусном вихре намагниченность покрывает лишь часть полусферы $\mathbf{m}^2 = 1$, $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) > 0$. Для классической динамики вихрей при достаточно малом значении H/H_a зависимость $G(H)$ не принципиальна, однако, как мы покажем ниже, она приводит к качественному изменению характера спектра соответствующей квантовой задачи.

3. КВАНТОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕЙ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА

В соответствии с уравнением гироскопического приближения (8), динамика вихря при наличии внешнего потенциала $U(X, Y)$ описывается уравнениями

$$G \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial U(X, Y)}{\partial Y}, \quad G \frac{dY}{dt} = \frac{\partial U(X, Y)}{\partial X}, \quad (10)$$

где X, Y — координаты центра вихря. Кстати, из этого уравнения при $U(X, Y) = 0$ непосредственно следует «вмороженность» вихря в конденсат, т. е. отсутствие свободного движения вихря [16]. Общим свойством вихрей в различных моделях упорядоченных сред является то, что движение вихря возникает только из-за наличия внешней силы.

Для квазиклассического анализа этой динамической задачи полезно перейти к гамильтонову формализму. Уравнения (10) могут быть представлены как уравнения Эйлера–Лагранжа

с функцией Лагранжа $L = \hat{G} - U$, где $\hat{G} = (G/2)[(dX/dt)Y - (dY/dt)X]$. Гироскопическое слагаемое \hat{G} формально совпадает с тем, что имеет место для частицы с зарядом e , находящейся под влиянием постоянного магнитного поля $\mathbf{B} = Be_z$, $eB = G$ в стандартной калибровке для вектор-потенциала магнитного поля. Для наших целей удобнее, однако, исходить из калибровки Ландау, использованной впервые для описания движения электрона в магнитном поле (см. [31]), и записать лагранжиан в виде

$$L = GY \frac{dX}{dt} - U(X, Y). \quad (11)$$

Для такого лагранжиана получается, что канонический импульс P , сопряженный координате X , есть $P = GY$. Соответственно, функция Гамильтона системы $H = H(P, X)$ совпадает с потенциалом $U(X, Y)$, в котором сделана замена $Y \rightarrow P/G$. Соответствующее уравнение Гамильтона

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad (12)$$

имеет очевидный интеграл движения

$$H(P, X) = U\left(X, \frac{P}{G}\right) = \text{const.} \quad (13)$$

Уравнения Гамильтона (12) отвечают динамической системе с одной степенью свободы, и для любого потенциала $U(X, Y)$ их решение может быть записано в квадратурах. Для нас важнее, что достаточно полное понимание динамики вихря для любого потенциала может быть достигнуто при использовании метода фазовой плоскости [32]. Не конкретизируя вид потенциала, можно заметить, что для различных потенциалов $U(X, Y)$ динамика этой системы демонстрирует особенности, которые не проявляются в стандартных динамических системах механики с параболической зависимостью гамильтониана от импульса, $H_{mech} = P^2/2m + U(X)$. Это свойство ярко выражено в рассмотренном ниже конкретном примере вихря в потенциале решеточного пиннинга $U(X, Y)$. Его проще всего описать для ферромагнетика с квадратной решеткой, поэтому в данном разделе мы ограничимся этим случаем. Будем также считать, что внешнее магнитное поле отсутствует, оставив рассмотрение более сложных примеров до следующего раздела.

Для описания вихря в решеточной модели ферромагнетика функция $U(X, Y)$ представляет собой потенциал пиннинга и может быть выбрана в виде (4).

Таким образом, для описания динамики вихря в потенциале пиннинга с учетом подстановки $Y \rightarrow P/G$ получим классическую динамическую гамильтонову систему с функцией Гамильтона вида

$$H = U_0 \left(\sin^2 \frac{\pi P}{P_0} + \sin^2 \frac{\pi X}{a} \right), \quad (14)$$

где периодичность потенциала пиннинга по двум координатам трансформировалась в периодическую зависимость функции Гамильтона от координаты и импульса. Период в зависимости H от P определяется величиной P_0 , значение которой принципиально важно для дальнейшего анализа. С учетом общего выражения (7) получаем, что для квадратной решетки $G = 2\pi\hbar S/a^2$. Следовательно, величина P_0 для квадратной решетки определяется только постоянной решетки и величиной атомного спина,

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar S}{a}. \quad (15)$$

Таким образом, мы естественным путем приходим к динамической задаче с гамильтонианом (по существу, классической энергией), который является периодической функцией переменных X и P , и которая, естественно, имеет верхнюю и нижнюю границы. Периодическая зависимость энергии от импульса обычно ассоциируется с динамикой квантовой частицы в периодическом потенциале, в этом случае она является следствием квантовой теоремы Блоха. Здесь важно подчеркнуть, что в нашем случае эти свойства (периодичность по импульсу и ограниченность сверху) присутствуют уже в классической теории движения и не имеют ничего общего с какими-либо квантовыми эффектами. Заметим, что такая же задача, но с большим в два раза значением P_0 , возникает при квазиклассическом описании динамики доменной стенки в одномерной модели Изинга в присутствии внешнего магнитного поля, перпендикулярного легкой оси [33].

Указанные выше свойства гамильтониана вихря (наличие верхнего предела, периодичность по обоим переменным) приводят к результатам, которые качественно отличаются от тех, что получаются в стандартном квадратичном приближении как для чистого классического движения вихрей, так и для квантования этого движения. Начнем с чисто классического анализа движения вихря. Рассмотрим фазовый портрет динамической системы (14). Легко видеть, что на фазовой плоскости есть две системы особых точек типа «центр», см. рис. 1. Одной из них (центры типа $C1$) соответствует минимумы гамиль-

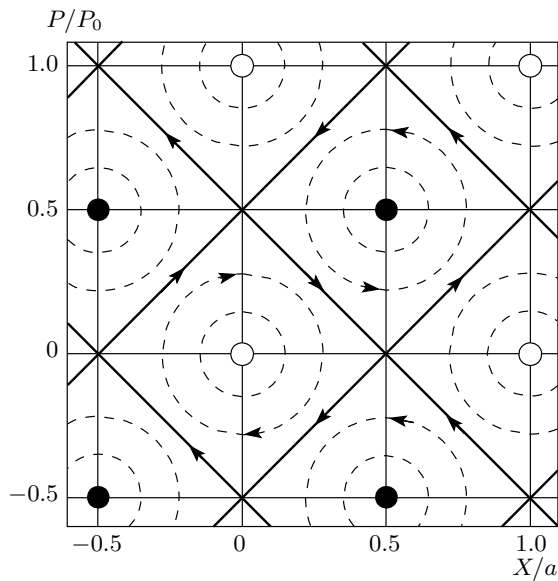


Рис. 1. Фазовая плоскость для динамических переменных вихря P, X . Сепаратрисные траектории показаны сплошными линиями; траектории, отвечающие финитному движению обоих типов, — штриховыми линиями; темные и светлые кружки обозначают положения особых точек соответственно типа центр $C1$ и $C2$, перекрещивающиеся линии соответствуют седловым точкам

тониана (14) по отношению к обоим переменным X и P ,

$$C1 : X = an, \quad P = P_0m, \quad H_{C1} = 0.$$

Здесь и ниже n, m — целые числа. Эти особые точки имеют такие же свойства, как особые точки типа «центр» для стандартных механических систем с параболической зависимостью от импульса. Центры другого вида (центры типа $C2$) расположены в максимумах гамильтониана по отношению к обоим переменным X и P ,

$$C2 : X = \frac{a}{2}(2n+1), \quad P = \frac{P_0}{2}(2m+1), \quad H_{C2} = 2U_0.$$

Центры типа $C2$ отличаются от стандартных направлением движения изображающей точки на фазовой плоскости, см. рис. 1. Существование этих центров, описывающих устойчивые малые осцилляции вихря вблизи максимума потенциала, является уникальным свойством динамической системы с ограниченной сверху функцией Гамильтона $H(P, X)$.

На фазовой плоскости существуют также два типа седловых точек, $S1$ и $S2$, которые соответствуют

максимуму гамильтониана по одной из переменных X или P и минимуму по другой,

$$S1 : X = \frac{a}{2}(2n + 1), \quad P = P_0m$$

и

$$S2 : X = an, \quad P = \frac{P_0}{2}(2m + 1).$$

Седловые точки различных типов отличаются друг от друга направлением движения изображающей точки, которое является стандартным для точки типа $S1$, а для точки типа $S2$ положение входящих и выходящих траекторий изменяется на противоположное. Для седловых точек обоих типов значения гамильтониана совпадают и равны U_0 . При разрешенных значениях интеграла движения, $0 \leq H \leq 2U_0$, фазовая плоскость (X, P) разделяется на области с различными типами финитного движения. Эти оба типа финитного движения присутствуют внутри одной элементарной ячейки кристалла. Один тип финитного движения соответствует колебаниям вихря вблизи минимума потенциала, что является стандартной ситуацией в аналитической динамике частиц. Второй тип финитного движения, а именно, осцилляции вихря вблизи верхнего значения гамильтониана, присутствует только в случае, когда гамильтониан как функция двух переменных, координаты и импульса, имеет верхнюю границу. Эти области финитного движения различного типа отделяются одна от другой сепаратрисами, которые являются отрезками прямой линии. Сепаратрисы связывают седловые точки различных типов и формируют двумерную сеть. В результате инфинитное движение в данной задаче отсутствует.

Перейдем к квазиклассическому квантованию динамики вихря. Легко показать, что площадь фазовой плоскости (механическое действие), приходящаяся на одну элементарную ячейку кристалла A_0 (или, что то же самое, на один элемент указанной выше сети на фазовой плоскости), равна $A_0 = aP_0 = 2\pi\hbar S$. Таким образом, из правила квантования Бора–Зоммерфельда с учетом того факта, что вихрь может находиться в двух состояниях с поляризацией $p = \pm 1$, получается, что должно существовать $2(A_0/2\pi\hbar) = 2S$ квантовых собственных состояний вихря, связанных с его колебаниями в пределах элементарной ячейки. Это значение велико, т.е. динамика может быть квазиклассической только для больших значений спина $S \gg 1$. Таким образом, мы приходим к первому нетривиальному заключению о квантовой динамике магнитного вихря в решетке: мера «квантовости» этого движения не зависит ни от величины потенциала пин-

нинга U_0 , ни от числа спиновых отклонений в коре вихря $\Delta S \approx S(r_0/a)^2$, которое может быть велико при $r_0 \gg a$, т.е. $K_e \ll J$. Движение можно трактовать как «ультраквантовое», только с одним уровнем в яме для спинов $S = 1/2$ и $S = 1$. Квантовые эффекты не малы для умеренных значений спина типа $S \leq 5/2$. Заметим, что для другого квантового эффекта, известного для магнитных вихрей, а именно, туннельного изменения знака поляризации вихря, ситуация иная: вероятность туннелирования экспоненциально мала по параметру $\Delta S \approx S(r_0/a)^2 \gg 1$ [34].

Гамильтониан (14) не содержит малых параметров (кроме параметра квазиклассичности $1/S$, роль которого мы обсудим ниже), но для качественного описания его спектра полезно применить приближение слабой связи, часто используемое в теории электронных состояний в кристаллах. Заменяем в гамильтониане (14) коэффициент U_0 перед «потенциальной энергией» $\sin^2(\pi X/a)$ на λU_0 и будем формально считать, что величина λ мала. Тогда в нулевом приближении по λ импульс P является интегралом движения и спектр задачи повторяет зависимость гамильтониана (14) от P , $E^{(0)}(P) = U_0 \sin^2(\pi P/P_0)$. Далее, рассмотрим слагаемое $\tilde{U}(X) = \lambda U_0 \sin^2(\pi X/a)$ как возмущение. Понятно, что его роль будет в основном такой же, как и обычного решеточного потенциала в стандартном приближении слабой связи, когда невозмущенный спектр является параболическим, $E^{(0)}(P) = P^2/2m^*$, m^* — эффективная масса. В нулевом приближении собственные функции имеют вид $\psi^{(0)} = \exp(iPX)$ с энергией $E^{(0)}(P) = U_0 \sin^2(\pi P/P_0)$, импульс P — интеграл движения. Влияние потенциала $\tilde{U}(X)$ с периодом a приводит к формированию блоховских состояний, являющихся суперпозициями $\psi^{(n)} = \exp(iPX + inP_B)$, импульс превращается в квазиимпульс, а закон дисперсии становится периодическим с периодом, равным размеру соответствующей первой зоны Бриллюэна, $P_B = 2\pi\hbar/a$. Спектр в приближении слабой связи получается путем наложения функций, получающихся из невозмущенного закона дисперсии $E^{(0)}(P)$ со сдвижкой аргумента на величины nP_B , n — целые числа. В точках пересечения функций $E^{(0)}(P + nP_B)$ с различными n влияние возмущения максимально, и формируются запрещенные зоны энергии.

Как хорошо известно, в результате применения этой процедуры для стандартной одномерной задачи с параболической функцией $E^{(0)}(P) = P^2/2m^*$ возникает блоховский закон дисперсии с функцией

$E(P)$, периодической с периодом P_B , с не перекрывающимися разрешенными зонами энергии, разделенными запрещенными зонами шириной порядка \tilde{U} . В принципе, эта картина не связана с малостью $\tilde{U}(X)$, с ростом $\max\{\tilde{U}(X)\}$ ширина запрещенных зон увеличивается, а ширина разрешенных зон убывает. В нашем случае уже невозмущенный закон дисперсии описывается периодической функцией $E^{(0)}(P) = U_0 \sin^2(\pi P/P_0)$, поэтому результатом может быть появление достаточно сложной периодической зависимости, полный период которой должен быть согласован с величинами $P_0 = 2\pi S\hbar/a$ и $P_B = 2\pi\hbar/a$. Учитывая, что приближение слабой связи применимо лишь качественно, полезно обсудить эту ситуацию, особенно вопрос о наличии или числе пересечений невозмущенного спектра, и связанный с этим вопрос о числе зон.

Ситуация наиболее проста для малых спинов, при $S = 1$ периоды P_0 и P_B просто совпадают, а при $S = 1/2$ значение $P_B = 2P_0$; в обоих случаях пересечений нет, и можно ожидать, что спектр состоит из одной разрешенной зоны. Для целых S вопрос тоже ясен; величина $P_0 = SP_B$ является общим периодом, в пределах «магнитной» зоны Бриллюэна $-P_0/2 < P < P_0/2$ находится S обычных зон с размером P_B . Следовательно, в пределах «магнитной» зоны есть S пересечений и спектр состоит из S энергетических зон, см. рис. 2а. Для полуцелых спинов $S > 1/2$ ситуация более сложная. Легко видеть, что сдвиг спектра вправо на величину P_B эквивалентен сдвигу влево на величину $P_B/2$, см. рис. 2б. В результате общая величина периода, удовлетворяющая обоим условиям, должна быть равна $P_B/2 = P_0/2S$, в силу этого число зон также возрастает и равно $2S$, см. рис. 2в. Итак, в рамках теории возмущений общий период в $E(P)$ для спина $S \geq 1$ равен P_B для целого спина и $P_B/2$ — для полуцелого. В соответствии с этим величина спина определяет число разрешенных энергетических зон N в спектре задачи $E(P)$; для целых спинов $N = S$, а для полуцелых спинов $N = 2S$. Естественно, теорема Блоха, которая лишь гласит, что энергия $E(P)$ не изменяется при сдвиге импульса на величину $P_B = 2\pi\hbar/a$, справедлива для любого значения спина. Подтверждение этой закономерности будет дано ниже на основе сравнения с результатами, полученными в рамках уже упоминавшейся модели Харпера, см. [20, 21], для которой известен точный квантовый спектр.

Вернемся к квазиклассическому анализу задачи, который более адекватен проблеме при больших спинах и формально применим при больших

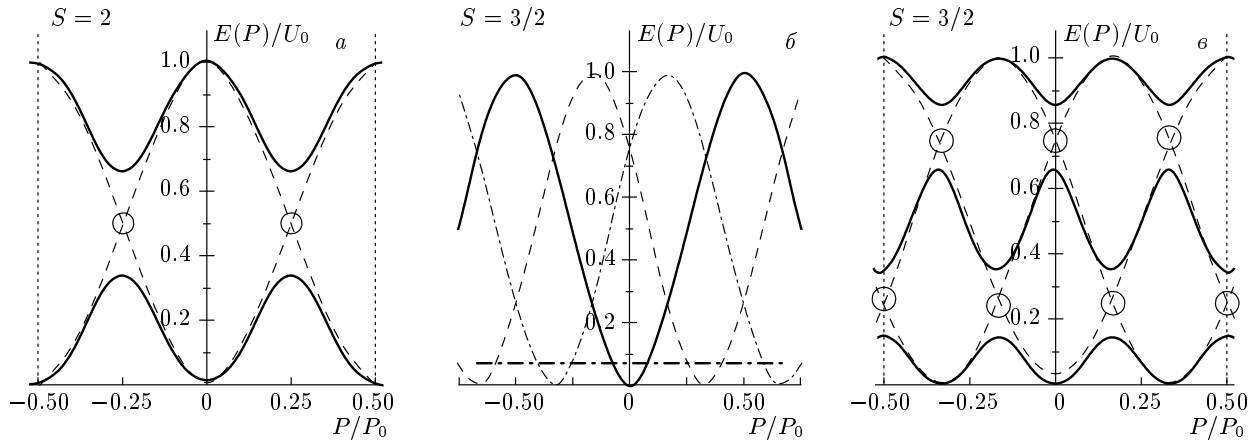


Рис. 2. Закон дисперсии вихрей для спина $S = 2$ (а) и $S = 3/2$ (б) и схема формирования спектра для полуцелого спина (в)

спинах $S \gg 1$. Как отмечалось выше, квантование Бора–Зоммерфельда указывает на существование $2S$ (с учетом возможности двух значений поляризации вихря $p = \pm 1$) локализованных энергетических уровней в пределах одной ячейки кристалла. Понятно, что если учитываются туннельные переходы между такими состояниями, отвечающими различным ячейкам решетки, то эти локализованные состояния будут превращаться в энергетические зоны. Стандартной ситуацией для квазиклассических систем (таких, как вихрь в ферромагнетике с большим спином) является малость вероятности туннелирования, что формально описывается приближением сильной связи, известным в теории электронных состояний.

Для более аккуратной оценки числа состояний рассмотрим значения энергии уровней E_n в области малых энергий, $E_n \ll U_0$. В этой области можно использовать параболическое приближение для зависимости $H(X, P)$ по обоим переменным P и X , что приводит выражение (14) к гамильтониану гармонического осциллятора и дает $E_n = \hbar\omega_0(n+1/2)$. Здесь значение частоты $\omega_0 = \pi U_0/\hbar S$, т. е. $\omega_0 = \kappa\pi JS/\hbar$, см. выше формулу (6). В силу симметрии гамильтониана исходной задачи (14) относительно замены $X \rightarrow X + a/2, P \rightarrow P + P_0/2, H \rightarrow -H + 2U_0$, для состояний, близких к максимуму гамильтониана, получается результат $E_m = 2U_0 - \hbar\omega_0(m+1/2)$, где m — целое число. Таким образом, для квазиклассических спинов $S \gg 1$ значение E_n для $n \ll S$ может быть меньше, чем U_0 .

Ширина n -й энергетической зоны ΔE_n может быть найдена из анализа туннелирования между

квантованными энергетическими уровнями E_n . Для квазиклассического приближения достаточно рассмотреть только туннелирование между соседними состояниями и его вероятность обычно экспоненциально мала по малому параметру квазиклассичности $1/S$. Таким образом, можно ожидать, что при $S \gg 1$ ширина зоны ΔE_n может быть меньше, чем значение U_0 и даже E_n .

Лучший путь исследования туннельного расщепления уровней состоит в использовании инстантонного подхода, который может быть применен к произвольной теории поля, см. [25, 35, 36]. В этом подходе амплитуда вероятности P_{12} квантового перехода от одного заданного состояния к другому определяется интегралом по траекториям

$$\int DX \exp \frac{iA[X]}{\hbar},$$

где

$$A[X] = \int dt L[X(t)]$$

— функционал механического действия, $L(X, dX/dt)$ — лагранжиан, описывающий динамику координаты X , и DX есть интегрирование по всем возможным путям, удовлетворяющим заданным граничным условиям. Для конкретных вычислений удобно перейти к мнимому времени $t \rightarrow i\tau$ (сделать виковский поворот), при этом возникает евклидов пропагатор

$$\int DX \exp \left(-\frac{A_E}{\hbar} \right),$$

где евклидово действие записывается в виде

$$A_E = \int L_E(X, P) d\tau.$$

Инстантонное решение определяет такую траекторию, для которой вероятность туннелирования максимальна, и его построение можно представить как минимизацию A_E по $X(\tau)$ и $P(\tau)$. Минимум евклидова действия реализуется на решении соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала действия или, что эквивалентно, на решении уравнения Гамильтона (12) с заменой $t \rightarrow i\tau$. Легко видеть, что простая замена $P \rightarrow i\Pi$ одновременно с виковским поворотом делает задачу о поиске инстантонного решения уравнения (12) снова гамильтоновой с вещественными канонически сопряженными переменными X и Π , динамика которых описывается вещественным гамильтонианом H_E :

$$H_E = U_0 \left(\sin^2 \frac{\pi X}{a} - \text{sh}^2 \frac{\pi \Pi}{P_0} \right). \quad (16)$$

Отметим, что в данной задаче возможны также и более общие комплексные решения вида $X = X' + iX''$, $P = P' + iP''$ с единственным требованием, что при $\tau \rightarrow \pm\infty$ решение достигает вещественного значения $X = an$, $P = P_0 m$, n, m — целые числа. Анализ системы для вещественных переменных X', X'', P', P'' сводится к интегрируемой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и имеет непрерывное множество решений, удовлетворяющих нужным граничным условиям. Однако это семейство получается из вещественного решения простым преобразованием аргумента $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau + i\psi$, см. детали в работе [37]. Отметим, что в нашей задаче присутствует симметрия относительно замены X на Y и Y на X , которая трансформируется в интересную симметрию инстантонных решений. «Овеществление» переменных для инстантонной задачи может быть проведено и другим способом, а именно, заменой $X \rightarrow i\Xi$ при сохранении импульса P вещественным, что отвечает гамильтониану \tilde{H}_E :

$$\tilde{H}_E = U_0 \left(\sin^2 \frac{\pi P}{P_0} - \text{sh}^2 \frac{\pi \Xi}{a} \right). \quad (17)$$

Соответствующее инстантонное решение в рамках гамильтонова формализма описывает туннелирование импульса, см. фазовый портрет на рис. 3б. Понятно, что величины евклидова действия и вероятности туннелирования для обоих этих процессов совпадают. Учет всех таких инстантонов с $0 \leq \psi \leq 2\pi$ может быть важен для описания туннелирования в малых ферромагнитных частицах [37], особенно эффектов деструктивной интерференции, но в нашем случае достаточно анализировать простое «вещественное» решение одной из указанных выше задач, (16) или (17).

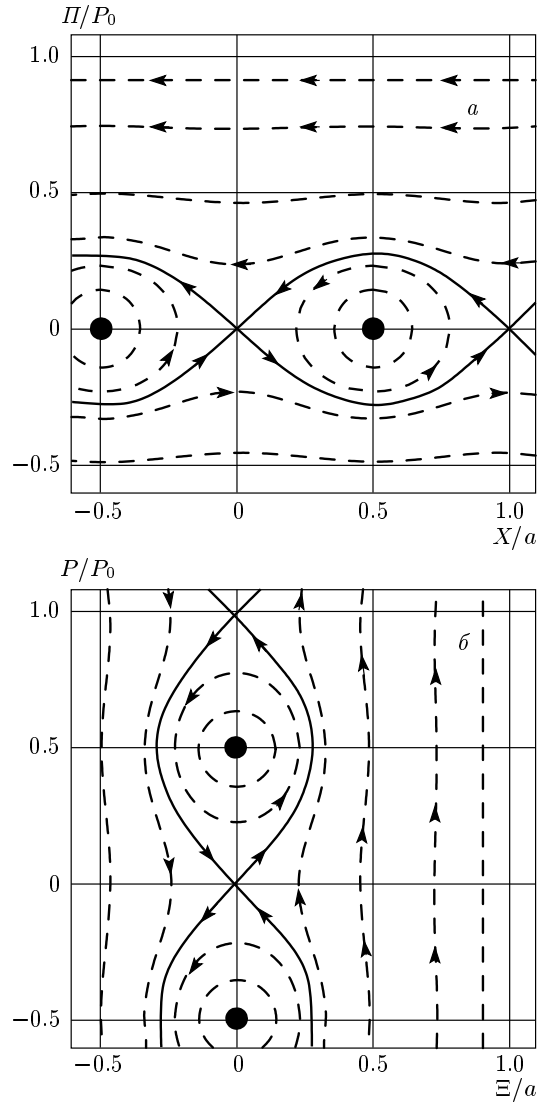


Рис. 3. Фазовая плоскость для изменения вещественных переменных, описывающих туннелирование вихря, при двух различных вариантах «овеществления»: а) переменные Π, X ; б) переменные P, Ξ , см. текст. Сепаратрисные траектории, отвечающие инстантонным решениям, показаны сплошными линиями, остальные траектории — штриховыми линиями. Особые точки типа «центр» обозначены темными кружками, перекрещивающиеся линии соответствуют седловым точкам

Рассмотрим для определенности уравнения для переменных X и Π . Сохранение «евклидовой энергии» H_E позволяет найти явную связь X и Π на любой траектории, т. е. построить «фазовый портрет» инстантонной задачи, см. рис. 3а. Здесь опять уместно отметить отличие нашей проблемы от стандартной «ньютоновской». При параболической зависимо-

сти энергии от импульса числа особых точек для классической динамической задачи и задачи, полученной виковским поворотом и «овеществлением» переменных $P \rightarrow i\Pi$, совпадают. Для обеих задач положение особых точек на плоскостях (X, P) и (X, Π) одинаковое ($\Pi = -iP$), и переход от одной из задач к другой проводится по простому правилу: особой точке типа «центр» (X_c, P_c) на плоскости (X, P) отвечает седло с $X = X_c, \Pi = P_c$ на плоскости (X, Π) , а седлу (X_s, P_s) — особая точка типа «центр» с «аномальным» направлением обхода (такого типа, как точки $C2$ на рис. 1). При непараболической зависимости H от P такой простой закономерности указать нельзя. Наш случай является хорошей демонстрацией этого факта, достаточно сравнить «фазовые портреты» на рис. 1 и рис. 3.

Перейдем к анализу инстантонных решений, описывающих туннелирование. Можно записать точное решение для этих инстантонов. Например, инстантону в переменных P, Ξ отвечает явное выражение вида

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{2 \operatorname{sh}^2 \xi + 1}}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{2 \operatorname{sh}^2 \xi + 1}},$$

где для сокращения записи обозначено $\theta = \pi P/P_0$, $\varphi = \pi \Xi/a$, $\xi = \omega_0 \tau$, $\omega_0 = 2U_0 \pi^2/aP_0$, решение второго типа имеет получается понятной заменой $\theta = \pi X/a$, $\varphi = \pi \Pi/P_0$.

Мы ограничимся описанием туннелирования между низшими по энергии состояниями вихря, что на классическом языке отвечает переходу, скажем, из состояния $X = 0, P = 0$ в состояние с $X = a, P = 0$. Такой переход описывается инстантонным решением со следующими граничными условиями: $X = 0, \Pi = 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и $X = a, \Pi = 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Ему отвечает значение $H_E = 0$ в формуле (16), поэтому легко представить выражение для евклидова действия как

$$A_E = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(X) \left(\frac{dX}{d\tau} \right) d\tau = \int_0^a \Pi(X) dX. \quad (18)$$

С учетом явной зависимости $\Pi(X)$, следующей из формулы (16) при $H_E = 0$, $X/a \rightarrow \varphi$, выражение для евклидова действия на инстантонном решении сводится к простому интегралу и легко вычисляется:

$$A_E = \frac{2P_0 a}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Arsh}(\sin \varphi) d\varphi = \frac{4\hbar S}{\pi} \tilde{G}, \quad (19)$$

где \tilde{G} — константа Каталана, $\tilde{G} \approx 0.915966$. Таким образом, для чисто двумерной системы величина A_E/\hbar может быть велика только за счет большой величины спина S . Ширина соответствующей энергетической зоны определяется через расщепление нижнего уровня $\Delta_0, \Delta E_0 = 2\Delta_0$, где в соответствии со стандартными правилами [35]

$$\Delta_0 \approx \hbar \omega_0 \left[\frac{A_E}{\hbar} \right]^{1/2} \exp \left(-\frac{A_E}{\hbar} \right). \quad (20)$$

Понятно, что в силу указанной выше симметрии гамильтониана исходной задачи (14) относительно замены $X \rightarrow X + a/2, P \rightarrow P + P_0/2, H \rightarrow -H + 2U_0$ такой же ответ будет иметь место и для энергетической зоны, образовавшейся из самого верхнего уровня $\Delta E_N, N$ — полное число зон. Эти две зоны, верхняя и нижняя, имеют минимальную ширину, для зон с промежуточными значениями n или $N - n, 1 < n < N/2$, можно пользоваться следующей универсальной формулой:

$$\Delta E_n \approx \hbar \omega_0 \left[\frac{A_E}{\hbar} \right]^{n+1/2} \exp \left(-\frac{A_E}{\hbar} \right), \quad (21)$$

где A_E дается формулой (20). Это уравнение показывает, что энергия расщепления для $n > 1$ продолжает быть экспоненциально малой по величине спина $S \gg 1$, но с большим значением предэкспоненциального множителя. Для центральных же зон ширина не мала, ее порядок величины есть $\hbar \omega_0$ [33].

Дополнительный аргумент в пользу справедливости приведенных выше утверждений, а также уточнение числа энергетических зон (особенно важное для специального случая полуцелого спина), может быть получен из известного точного результата для задачи Харпера [20, 21], которая возникает в проблеме квантового движения электронов в периодическом потенциале в присутствии магнитного поля. Задача Харпера есть квантовая одночастичная задача с гамильтонианом

$$\hat{H}_H = \sin^2(p/2) + \sin^2(\pi\beta q)$$

(здесь положено $\hbar = 1$), который сводится к виду (14) изменением переменных. Вид спектра гамильтониана Харпера весьма нетривиально зависит от значения параметра β , а именно, от того, является ли β рациональным числом или нет. Если $\beta = m/n$, т. е. в случае так называемого рационального уравнения Харпера, собственные значения энергии для гамильтониана \hat{H}_H демонстрируют n неперекрывающихся зон. Простое каноническое преобразование

$p \rightarrow \pi P/P_0$, $q \rightarrow XP_0/\pi$ приводит наш гамильтониан (14) к гамильтониану Харпера \hat{H}_H с $\beta = 1/S$. Это немедленно дает вышеприведенный результат, $N = S$ для целого S , и $N = 2S$ для полуцелого S . Таким образом, в задаче о квантовом движении вихря в ферромагнетике наблюдается различие в поведении для целых и полуцелых значений атомного спина S . Ранее также закономерности отмечались для спиновых цепочек с антиферромагнитным взаимодействием [38] и эффекта туннелирования полного спина малых магнитных частиц [25, 36] а также для эффектов туннельного изменения топологических зарядов доменных стенок и дисклинаций в антиферромагнетиках [25].

Резюмируя результаты этого раздела, отметим, что результат квантования движения вихря оказался достаточно неожиданным: динамика магнитного вихря в двумерной модели ферромагнетика с квадратной решеткой при умеренных значениях спина S является существенно квантовой, спектр данной задачи имеет зонную структуру и содержит S разрешенных зон энергии для целого спина атома и $2S$ зон для полуцелого.

4. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ

Обсудим теперь возможные обобщения рассмотренной выше простой задачи. Первый вопрос, который возникает, связан с тем, насколько чувствителен результат к структуре решетки ферромагнетика. Необходимая для существования вихрей одноосная симметрия может реализоваться только для достаточно симметричных решеток, к которым относятся квадратная и треугольная решетки Браве, а также некоторые сложные решетки, например, гексагональная решетка в виде пчелиных сот (honeycomb lattice). Наличие вихрей для всех таких решеток хорошо установлено путем численного моделирования [39]. Как и следовало ожидать, какие-либо качественные эффекты для статических свойств вихрей при переходе от одного типа решетки к другому не возникают. Незначительно меняются лишь количественные характеристики вихрей, такие как амплитуда потенциала пиннинга и критическое значение анизотропии. Существенно, что для всех решеток можно установить простую связь значения гироинварианта G с площадью ферромагнетика v_0 , приходящейся на один спин, $G = 2\pi\hbar S/v_0$. Фактически этот результат тоже не является неожиданным: гиропила возникает (и впервые была рассчитана [15–17]) в рамках макроскопического подхода и

в этом подходе выражается только через намагниченность насыщения среды $M_s \propto S/v_0$. Возникает вопрос о том, что происходит с описанными выше квантовыми свойствами вихрей, анализ которых существенно (достаточно вспомнить использование гамильтониана Харпера) базировался на использовании простой квадратной решетки. Обсудим поведение вихрей в треугольной и гексагональной решетках. В обоих случаях мы используем обозначение a для расстояния между ближайшими спинами.

Треугольная решетка. Рассмотрим динамику вихря в ферромагнетике с треугольной решеткой, которая имеет элементарные векторы трансляции $\mathbf{a}_1 = a\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{a}_2 = a(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\sqrt{3})/2$. Векторы обратной решетки \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 определяются формулами $\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{e}_y/(a\sqrt{3})$ и $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{e}_x\sqrt{3} - \mathbf{e}_y)/(a\sqrt{3})$. Периодический потенциал пиннинга, отвечающий симметрии решетки, должен включать сумму выражений типа $U_{\mathbf{g}} \exp(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$, где векторы $\mathbf{g} = 2\pi(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2)$, n_1, n_2 — целые числа с равными коэффициентами $U_{\mathbf{g}}$ при эквивалентных \mathbf{g} . Простейший случай включает набор шести векторов $\pm 2\pi\mathbf{b}_1, \pm 2\pi\mathbf{b}_2$ и $\pm 2\pi(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$, и потенциал пиннинга для треугольной решетки $U^{(triang)}(X, Y)$ может быть записан в виде

$$U^{(triang)}(X, Y) = U_0 \cos\left(\frac{4\pi Y}{a\sqrt{3}}\right) + 2U_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi Y}{a\sqrt{3}}\right). \quad (22)$$

Здесь знак выбран так, чтобы максимум потенциала, который совпадает с позицией какого-то атома, был расположен в начале координат. Заменой $GY \rightarrow P$ мы получаем гамильтониан соответствующей динамической задачи. Он не сводится буквально к уравнению Харпера, но для его анализа можно использовать качественные соображения, апробированные в предыдущем разделе. Во-первых, легко построить фазовую плоскость динамической задачи, см. рис. 4. Здесь, как и для квадратной решетки, имеются две системы особых точек типа «центр», одной системе соответствуют максимумы гамильтониана (22) по отношению к обоим переменным X и P (максимумы совпадают с положениями атомов и расположены в начале координат и эквивалентных точках на фазовой плоскости), а другой — минимумы (в центрах треугольников, образованных ближайшими максимумами). Есть также седловые точки, которые соответствуют максимуму гамильтониана по одной из переменных, X или P , и минимуму по другой. Эти седловые точки расположены между парами ближайших минимумов и максимумов.

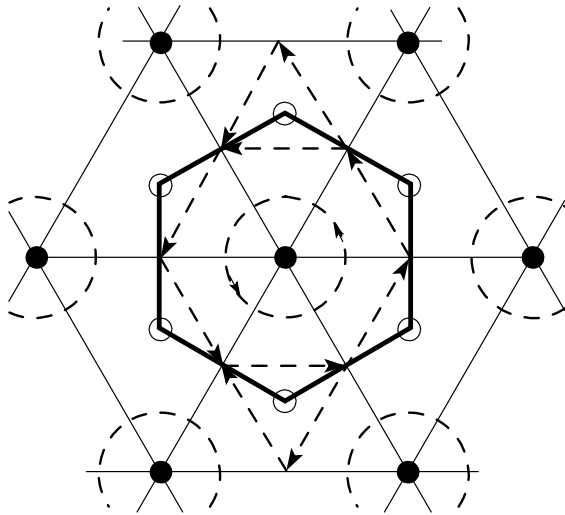


Рис. 4. Фазовая плоскость для динамических переменных вихря P, X в ферромагнетике с треугольной решеткой. Оси X и P направлены соответственно горизонтально и вертикально, они не нанесены для упрощения рисунка. Шестиугольник в центре, ограниченный сплошной жирной линией, представляет неприводимую область на фазовой плоскости задачи (элементарную ячейку). Темные кружки обозначают положения особых точек (центров) типа $C2$, отвечающих максимумам гамильтониана (для решетки в этих точках расположены атомы). Для наглядности эти точки соединены тонкими сплошными линиями, которые для исходного кристалла представляют межатомные связи. Светлые кружки обозначают положения центров типа $C1$, отвечающих минимумам исходного потенциала (22). Штриховыми линиями показаны некоторые характерные траектории; среди них сепаратрисы имеют вид отрезков прямых линий, а замкнутые линии определяют траектории, отвечающие финитному движению вокруг максимумов

Как и для квадратной решетки, присутствует только финитное движение; два различных типа фазовых траекторий отвечают движению изображающей точки или вокруг минимума, или вокруг максимума гамильтониана. Эти области отделены друг от друга сепаратрисными траекториями, которые представляют собой отрезки прямых линий и заканчиваются в седловых точках. Основная особенность задачи состоит в том, что площадь одной неприводимой области, повторением которой можно представить всю плоскость, есть Gv_0 , где $v_0 = \sqrt{3}a^2/2$ — площадь элементарной ячейки кристалла. Эта величина равна значению механического действия A_0 , которое входит в условие квазиклассического квантования Бо-

ра–Зоммерфельда. Используя общую формулу (7) для гироконстанты G , приходим к тому же результату, что и для квадратной решетки, $A_0 = 2\pi\hbar S$. Эта величина определяет постоянную β в уравнении Харпера. Следовательно, можно ожидать, что характер спектра вихрей для треугольной решетки остается тем же, что и для квадратной решетки. Дополнительный аргумент можно получить и с использованием того же приближения слабой связи, что и ранее. Считая формально, что коэффициент перед последним слагаемым в потенциале (22) содержит малый параметр, можно получить такой же спектр, как и на рис. 2.

Гексагональная решетка. Рассмотрим теперь полезный пример гексагональной решетки в форме пчелиных сот (honeycomb lattice), для которой получается нетривиальный результат. Гексагональная решетка является решеткой с базисом, которая получается совмещением в одной плоскости двух треугольных решеток описанного выше типа с расстоянием между точками решетки $a\sqrt{3}$, которые смещены друг относительно друга на вектор $a\mathbf{e}_y$. Потенциал пиннинга легко получить из формулы для потенциала треугольной решетки, в которой предварительно делается замена $a \rightarrow a\sqrt{3}$, по следующему правилу:

$$U^{(hex)} = U^{(triang)}(\mathbf{r}) + U^{(triang)}(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_y).$$

Далее анализ проводится так же, как и ранее, фазовая плоскость представлена на рис. 5. Для перехода к гамильтонову формализму и особенно для квантования важно, что для гексагональной решетки имеются два спина на элементарную ячейку, и величина гироконстанты G в два раза больше, чем для решеток Браве с той же площадью элементарной ячейки \bar{v}_0 , $G = 4\pi\hbar S/\bar{v}_0$. Результат анализа ясен: мы приходим к значению механического действия $A_0 = 4\pi\hbar S$, в два раза большему, чем для решеток Браве. Соответственно, в два раза увеличивается и значение параметра β в гамильтониане Харпера. Существенно, что для гексагональной решетки β является целым числом при всех значениях спина, целых и полуцелых. Это приводит к следующему выводу: для гексагональной решетки число зон равняется $2S$. Поэтому случаи целых и полуцелых спинов похожи, для полуцелого спина $S = (2k + 1)/2$ в гексагональной решетке характер спектра вихрей такой же, как для ферромагнетиков с решеткой Браве и целым спином $S = 2k + 1$, см. рис. 2а.

В свете обсуждавшихся выше закономерностей этот результат можно обобщить для всех решеток с

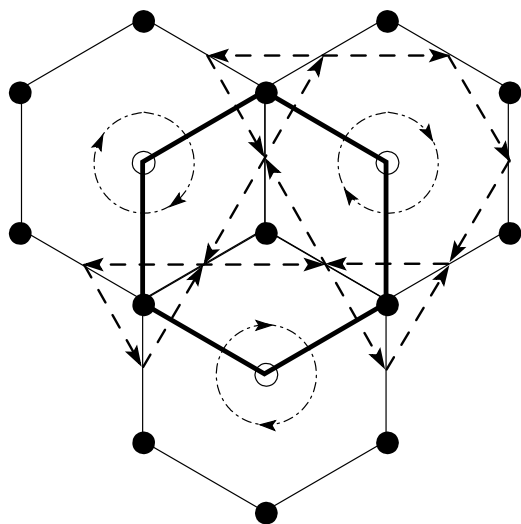


Рис. 5. Фазовая плоскость для динамических переменных вихря P, X в ферромагнетике с гексагональной решеткой. Обозначения такие же, как на рис. 4, с той лишь разницей, что здесь приведены более наглядные в данном случае траектории финитного движения вокруг минимумов потенциала

двумя спинами в элементарной ячейке: для них число зон равняется $2S$ при любом спине. Очевидно, что та же ситуация реализуется и для магнитной структуры, состоящей из двух ферромагнитно связанных магнитных слоев, расположенных друг над другом, каждый из которых представляет собой решетку Браве. Обобщение на случай решеток с более чем двумя спинами на элементарную ячейку, или структуры, состоящей из нескольких слоев, не представляет труда. В частности, очевидно, что для полуполого значения атомного спина здесь возникают различия в поведении для случая четного или нечетного числа атомов (слоев). Фактически, можно сделать общее утверждение: классификация квантовых состояний вихрей в одноосных ферромагнетиках не зависит от симметрии решетки (если она достаточно высокая) и определяется только числом атомов в элементарной ячейке.

Внешнее магнитное поле: разрушение зонной структуры. Весьма важный вариант выхода за рамки модели (1) связан с учетом внешнего магнитного поля. Роль магнитного поля оказывается весьма существенной и может приводить к качественно новым эффектам. Как отмечалось выше, вихри существуют только в том случае, когда достаточно слабое, $H < H_a$, магнитное поле направлено вдоль оси анизотропии магнетика, и наличие поля уменьшает константу гироскопической си-

лы $G \rightarrow G(H) = G(1 - H/H_a)$, см. (9). Понятно, что меняются и все остальные параметры задачи, например, константа U_0 в уравнении (14). Однако роль G наиболее важна, так как константа G непосредственно входит в величину aP_0 , которая определяет как результат квантования задачи по Бору–Зоммерфельду (через величину действия $A = a_0P_0$), так и константу β в гамильтониане Харпера. Конкретно, при наличии поля $\beta = S(1 - H/H_a)$, т. е. в общем случае величина β не является рациональным числом. Для иррационального уравнения Харпера с $\beta \neq m/n$ характер спектра системы меняется принципиально по сравнению с тем, что обычно имеет место для кристаллических твердых тел. Для кристаллов в силу теоремы Блоха спектр состоит из чередующихся разрешенных и запрещенных зон энергии. В одномерном случае эти зоны, как правило, не перекрываются, что и имеет место для рационального гамильтониана Харпера. Для случая же иррационального гамильтониана Харпера установлено, что зонная картина неприменима, и как разрешенные, так и запрещенные значения энергии образуют множества, такие что в сколь угодно малой окрестности разрешенного значения энергии можно найти запрещенное значение и наоборот. Эта закономерность была впервые установлена при анализе движения электронов в кристаллах при наличии сильного магнитного поля [40]. Однако в кристаллах значение определяется числом квантов магнитного потока на одну элементарную ячейку и для яркой реализации эффекта, что отвечает $\beta \leq 1$, необходимы огромные магнитные поля. В случае же больших $\beta \gg 1$ интуитивно ясно, что вопрос о том, является это число рациональным или иррациональным, не должен играть роли. Для электронов в решетке $\beta \gg 1$ отвечают слабые магнитные поля, при которых указанные эффекты не важны, и в соответствии с приближением Лифшица–Онзагера (см. [41]) можно использовать обычный зонный подход. Интересным свойством задачи о динамике вихря в двумерном ферромагнетике, как мы показали выше, является тот факт, что условие $\beta \sim 1$, отвечающее ультраквантовому пределу для металлов, реализуется за счет собственных гироскопических свойств вихря.

5. ДИНАМИКА ВИХРЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

Общей закономерностью, установленной в предыдущих разделах, является появление в динамике вихря гамильтонианов с периодической зависимостью от импульса. Как и для блоховского электро-

на, это должно приводить к особенностям движения частицы под действием постоянной внешней силы. Нам представляется, что полезно указать еще один нетривиальный эффект, который обычно ассоциируется с квантовой механикой, но должен проявляться и в чисто классическом движении вихря. Это так называемые блоховские осцилляции, которые впервые были описаны для блоховского электрона, находящегося под действием электрического поля. Эффект состоит в том, что откликом на постоянную силу (электрическое поле) является осциллирующее движение частицы.

Заметим, что это явление не связано с чисто квантовыми эффектами, необходимое условие его существования — это наличие периодической зависимости функции Гамильтона от импульса. Детальный анализ этой проблемы не только в рамках квантовой механики, но и ее классического аналога, дан в недавнем обзоре А. М. Косевича [42]. Примером этого эффекта в чисто классической физике магнетизма может служить так называемое «закритическое» движение 180-градусной доменной стенки в ферромагнетиках под действием ведущего магнитного поля H_d . Такое осциллирующее движение неоднократно наблюдалось в магнитных пленках с перпендикулярной анизотропией [1].

В идеальном кристалле электрон испытывает блоховские осцилляции под действием постоянного электрического поля \mathbf{E} . Обсудим, в какой мере эта закономерность проявляется в динамике вихря под действием постоянной силы \mathbf{F} .

Анализ задачи наиболее прост в случае, когда потенциал пиннинга зависит только от одной переменной, скажем, координаты y . Для двумерных ферромагнетиков предположение об одномерном потенциале пиннинга является достаточно искусственным, но задача об одномерном потенциале может быть важной для искусственных сверхструктур, в том числе магнитных, см. разд. 6. Запишем потенциал пиннинга:

$$U = U(Y) = U_0 \sin^2 \left(\frac{\pi Y}{a} \right).$$

Пусть внешняя сила направлена вдоль оси x . Выбор направления градиента периодической неоднородности и силы (осей X и Y) проведен так, чтобы анализ был наиболее простым в той калибровке, что принята выше.

Тогда динамика вихря описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = U_0 \sin^2 \frac{\pi P}{P_0} - F_0 X, \quad (23)$$

где P_0 определяется той же формулой (15). Решение соответствующей классической задачи находится элементарно: уравнение

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

дает, что $P = P(0) + F_0 t$, а второе уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{\pi U_0}{P_0} \right) \sin \left(\frac{2\pi P}{P_0} \right)$$

описывает осциллирующее изменение координаты вихря X ,

$$\begin{aligned} X &= X(0) + A(1 - \cos \omega_0 t), \\ A &= \frac{U_0}{2F_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi F_0}{P_0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Возвращаясь к реальным координатам вихря X и $Y = P/G$, получаем, что вихрь движется по синусоиде вдоль оси, перпендикулярной направлению поля. В силу того, что состояние системы не изменяется при сдвиге координаты X на величину δX и одновременном изменении ее энергии E на величину $\delta E = F_0 \delta X$, все траектории подобны и получаются друг из друга сдвигом вдоль X . Осцилляции подобного вида обсуждались для электронов в одномерных сверхструктурах при наличии внешнего магнитного поля [43].

Переход к квантовому случаю может быть проведен так же, как и в оригинальной работе [44], см. также [42]. Понятно, что квантовому аналогу колебательного движения (24) соответствует волновая функция, локализованная около правой точки поворота $X = X_0$ классической задачи (23), которая зависит от полной энергии системы, $H(0, X_0) = E$. Однако мы отмечали, что задача (23) обладает непрерывной симметрией относительно сдвига координаты X и энергии E , $X \rightarrow X + \delta X$, $E \rightarrow E - F_0 \delta X$, выбор соответствующих значений энергии произволен. Поэтому получаем, что квантовый спектр задачи (23) является эквидистантным,

$$E_n = E_0 + \hbar \omega_0 n, \quad (25)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2$ — целые числа, E_0 — произвольная постоянная. Такой спектр энергии возникает в квантовой задаче о блоховских осцилляциях для электронов и носит название лестницы Ванье–Штарка (Wannier–Stark ladder), см. подробнее [42, 44].

К этому результату можно прийти и другим путем, заметив, что квантованию Бора–Зоммерфельда в данном случае соответствует условие, что площадь фазовой плоскости, заключенная между соседними квантованными траекториями, равна $2\pi\hbar$ (в

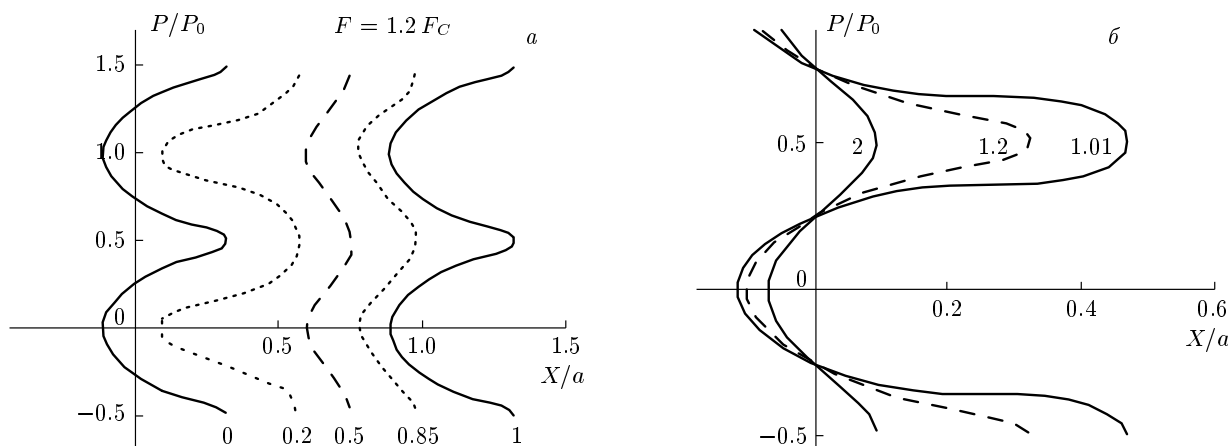


Рис. 6. Траектории движения вихря на фазовой плоскости (X, P) в различных случаях; рис. *a* демонстрирует изменение формы траекторий для одного и того же значения силы $F = 1.2F_C$ при изменении энергии в пределах от некоторой величины E_0 до $E_0 + \Delta E$, $E = E_0 + \eta \Delta E$, выбранные значения η ($\eta = 0, 0.2, 0.5, 0.85, 1$) указаны под кривыми; рис. *б* при постоянном значении энергии и различных отклонениях силы F от критического значения F_C , выбранные значения $F/F_C = 1.01, 1.2, 2$ указаны около кривых

расчете на один период по P). Следовательно, соседние траектории удалены друг от друга на равные расстояния, а их энергии различаются на постоянную величину.

Таким образом, для задачи с чисто одномерным потенциалом пиннинга описание осцилляций вихря буквально сводится к хорошо известной задаче о блоховских осцилляциях электрона в кристалле. Отличие состоит в том, что если для электрона указанный эффект может реализоваться в чисто одномерной системе (атомной цепочке), то для вихрей необходимо рассматривать, как минимум, двумерную среду.

Для задачи о движении вихря в двумерных ферромагнетиках более интересен случай двумерного потенциала пиннинга. Рассмотрим соответствующую задачу для вихря в квадратной решетке с потенциалом вида (6), считая, что внешняя сила направлена вдоль одной из осей симметрии (скажем, оси X). Тогда гамильтониан задачи принимает вид

$$H = U_0 \sin^2 \frac{\pi P}{P_0} + U_0 \sin^2 \frac{\pi X}{a} - FX. \quad (26)$$

Здесь решение классической задачи не может быть выписано через элементарные функции, но качественный анализ не представляет труда. В силу уравнения Гамильтона

$$\frac{dP}{dt} = F - \left(\frac{\pi U_0}{a} \right) \sin \left(\frac{2\pi X}{a} \right),$$

и легко видеть, что при достаточно большом значении силы, $F \geq F_0 = \pi U_0/a$, значение импульса

са неограниченно возрастает, что является необходимым условием осцилляции. Вид траекторий на фазовой плоскости (P, X) определяется уравнением $H(P, X) = E = \text{const}$. В интересующем нас случае $F > F_c$ траектории, отвечающие различным значениям E , описывают инфинитное движение в направлении оси P (см. рис. 6) и финитное изменение координаты, что соответствует блоховским осцилляциям. Таким образом, в случае двумерного потенциала пиннинга с достаточно высокой симметрией блоховские осцилляции появляются только при $F > F_0$.

Квантовый анализ задачи (26) достаточно сложен, и мы можем привести только некоторые простые соображения о спектре этой задачи. Здесь, в отличие от простого случая одномерной неоднородности (23), нет произвольности в выборе соответствующих значений энергии или начальных значений координаты и импульса, которая упрощает исследование модели (23). Можно указать только дискретную симметрию, соответствующую смещению вихря в направлении X на величину na при одновременном изменении его энергии на конечную величину $n\Delta E = nFa$. Поэтому при непрерывном изменении энергии в интервале $E, E + \Delta E$ вид траекторий изменяется, см. рис. 6. Таким образом, в задаче присутствуют два энергетических параметра, ΔE и $\hbar\omega$, где ω — частота классических осцилляций вихря вдоль направления X , которые, вообще говоря, несоизмеримы.

Наводящие соображения о виде спектра можно получить на основе квантования Бора–Зоммер-

фельда. Отметим, что площадь фазовой плоскости (в расчете на один период по P), заключенная между двумя классическими траекториями с энергиями E_1 и E_2 , лежащими в интервале E , $E + \Delta E$ зависит не только от разности $E_1 - E_2$, как для одномерного потенциала, но и от самих значений энергий. С другой стороны, в спектре должна отражаться указанная выше симметрия, связанная с преобразованием $E \rightarrow E + \Delta E$. Предположим, что значения «классических» параметров задачи, входящих в гамильтониан (26), таковы, что площадь между двумя классическими траекториями с энергиями E и $E + \Delta E$ (в расчете на один период по P) в точности равна $2\pi\hbar$. Тогда можно ожидать появления эквидистантного спектра с расстоянием между уровнями равным ΔE . Далее, пусть эта площадь равна $2\pi\hbar n$, т. е. кратна $2\pi\hbar$. Тогда расположение уровней, не будучи эквидистантным, должно демонстрировать периодичность с периодом ΔE . Обобщение для рациональных значений площади типа $2\pi\hbar(n/m)$ понятно, здесь опять возникает периодичность, но более сложная, чем в предыдущем случае. Однако ясно, что указанные условия могут быть выполнены только при некоторых избранных значениях параметров, и в общем случае площадь между двумя классическими траекториями с энергиями E и $E + \Delta E$ не равна $2\pi\hbar(n/m)$. В этом случае, который уместно назвать иррациональным, вместо лестницы Ванье–Штарка из эквидистантных уровней вида (25) здесь можно ожидать реализации квазислучайного спектра. (Пример такого множества может дать распределение корней уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — условно-периодическая функция.) Более детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной работы.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В основной части работы мы обсуждали конкретную задачу о квантовой динамике вихря в двумерном ферромагнетике. Примеры истинно двумерных магнетиков хорошо известны: это пленки Ленгмюра–Блодже типа стеарата марганца, см. [45], и сильно интеркалированные слоистые магнетики, для которых установлено, что в достаточно широком температурном интервале реализуется чисто двумерная динамика вихрей независимо в каждом магнитном слое [7]. Интересно обсудить, в какой мере полученные результаты могут быть применены к квазидвумерным искусственным системам нанометро-

вого масштаба. В физике магнетизма к ним относятся тонкие магнитные пленки, в настоящее время надежно получают образцы с толщиной до десятка атомных слоев [8]. Представляют интерес и примеры других упорядоченных сред, содержащих вихри с гироскопическими свойствами, таких как тонкие пленки сверхтекучего гелия или сверхпроводников.

При обсуждении мезоскопических систем (пленок) мы будем считать, что толщина пленки мала и неоднородностью вдоль нее можно пренебречь. Один эффект перехода от двумерного магнитного кристалла к мезоскопической тонкой пленке понятен из предыдущего рассмотрения: для пленки из N атомных слоев значение гироконстанты G , а следовательно, характерного импульса P_0 , возрастает в N раз, см. формулу (7) и рассуждения, касающиеся гексагональной решетки, в предыдущем разделе. При этом соответственно возрастает и число зон в спектре вихря $E(P)$. Формально это не противоречит реализации квантовой динамики и возможности ее наблюдения, но понятно, что при достаточно большом N зонный характер спектра, обусловленный потенциалом атомного пиннинга, должен «замываться». Иными словами, в этом случае величина действия для вихря велика, $A_0 \gg \hbar$, и квантовые эффекты не существенны. Таким образом, получается, что значение гироконстанты «слишком велико» для реализации типичного квантового зонного спектра с несколькими хорошо различимыми зонами в мезоскопических ферромагнетиках. Поэтому в случае $N \gg 1$ актуальным является анализ систем с $G \ll G_{FM} = 2\pi\hbar S/v_0$.

Здесь прежде всего можно вспомнить об уменьшении G с ростом магнитного поля, см. формулу (9). Интересен также случай антиферромагнетиков (AFM), для которых вихри приобретают гироскопические свойства только при наличии внешнего магнитного поля, причем гироконстанта $G_{AFM} = 4HG_{FM}/H_e$, где H_e — обменное поле AFM [46]. При разумных значениях поля $H \ll H_e$ значение $G_{AFM} \ll G_{FM}$.

Для обоих этих случаев должно в полной мере проявиться описанное выше явление — перестройка спектра при смене рациональных и иррациональных значений параметра β при изменении внешнего поля. В этой связи можно сказать, что AFM являются более удобной системой, так как в них изменение гироконстанты от нуля до некоторой малой величины $G_{AFM} \ll G_{FM}$ происходит при изменении поля от нуля до достаточно малого значения. При этом статическая структура вихря практически не меняется. Проблемой в случае ферромагнетиков является то,

что для них уменьшение G до величины $G \ll G_{FM}$ происходит при $H_a - H \ll H_a$, т.е. в области, где структура кора вихря резко изменяется при изменении поля.

Для сверхпроводников и сверхтекучих жидкостей значение гирокоэффициента на единицу длины вихря определяется выражением $2\pi\hbar n_s$, где n_s — сверхтекучая плотность [9]. Для сверхтекучих систем при низких температурах n_s близко к $1/a^3$ (a — межатомное расстояние). Поэтому получается, что величина G велика и ситуация подобна той, что имеет место в ферромагнетиках: число зон порядка единицы наблюдается только для моноатомного слоя. Следовательно, для моноатомной пленки сверхтекучей жидкости, скажем, на монокристаллической подложке, которая может создавать потенциал пиннинга, ситуация должна быть похожа на ту, что описана выше для ферромагнетиков. С учетом того, что условия квантования не зависят от интенсивности потенциала пиннинга и что размер кора вихря (длина когерентности) в гелии достаточно мал, особенности спектра вихрей могут оказаться существенными для пленок гелия на поверхности кристалла. Хотя нам неизвестны примеры экспериментальной реализации такой системы, мы также не видим причины, запрещающей ее существование.

Для макроскопических пленок толщиной $L \gg a$ более перспективно выглядит случай сверхпроводника, в котором «плотность сверхпроводящих электронов» $n_s \ll 1/a^3$. Ее значение может быть получено из формулы $n_s = mc^2/(4\pi\lambda^2 e^2)$, где m и e — масса и заряд электрона, c — скорость света, λ — глубина проникновения магнитного поля [10]. Используя это выражение и значения констант m , c и e , а также вводя для удобства величину $a \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см, можно представить оценку характерного импульса $P_0^{(SC)}$ для сверхпроводника в удобном виде

$$P_0^{(SC)} \approx 10^4 \left(\frac{\pi\hbar}{a} \right) \left(\frac{LD}{\lambda^2} \right),$$

где L и D — соответственно толщина пленки и период неоднородности. Далее, параметр $\beta^{(SC)} = 2\pi\hbar/P_0 D$ в уравнении Харпера можно оценить как $\beta^{(SC)} \sim 10^{-3}(\lambda^2 a/LD^2)$. Величина λ является макроскопической, и для сверхпроводников второго рода $\lambda \gg \xi$, где ξ — длина когерентности, которая для высокотемпературных сверхпроводников лишь в несколько раз превышает межатомное расстояние a [11]. В силу этого для сверхструктур с характерным размером $L \sim D \sim \xi$ может реализоваться интересующий нас случай $\beta \sim 1$.

Среди других примеров вихревых систем безусловно интересны нелинейные оптические среды, содержащие вихри [14], кор которых имеет макроскопический размер. Заметный потенциал пиннинга для оптических вихрей можно получить в так называемых фотонных кристаллах, т.е. оптических средах с искусственно созданными неоднородностями. Технология изготовления фотонных кристаллов очень быстро развивается, и уже сейчас можно получать как одномерные, так и двумерные кристаллы, параметры которых можно изменять в достаточно широких пределах. Отличительным свойством фотонных кристаллов является наличие зонного спектра линейных волн, что обычно ассоциируется с квантовой задачей о движении электрона в кристалле. Однако здесь уже становится очевидным, что задача является классической и квантовые закономерности появляются лишь как аналоги соответствующих эффектов волновой оптики.

В этом месте уместно кратко обсудить, какие из рассмотренных выше эффектов «выживают» для классических вихрей. В основной части работы мы рассматривали динамику вихрей как квантовых элементарных возмущений двумерного магнетика. Заметим, что представление о квантовых солитонах не является экзотикой, оно общепринято в физике низкоразмерных магнетиков, см. [33, 47]. В этом случае полученные нами стационарные блоховские состояния вихря имеют тот же физический смысл, что и для электронов в кристалле: в этом состоянии квантовый вихрь буквально «размазан» вдоль всей системы. Соответствующее уравнение Шредингера для волновой функции вихря с использованием координатного или импульсного представления и разложения тригонометрических функций в операторе Гамильтона $H = H(P, X)$ в ряд по степеням градиентов может быть записано в виде дифференциального (обобщенного волнового) уравнения для волновой функции вихря. Однако это уравнение не имеет ничего общего с исходным уравнением Ландау–Лифшица. Понятно, что такая картина не отвечает ситуации для оптического вихря, который является ярко выраженной неоднородностью на фоне классической волны (в фотонном кристалле — волны с периодическим законом дисперсии в неоднородной среде). Принципиальное отличие этих задач состоит в том, что для классического вихря наблюдаемы и координата вихря как функция времени, и фаза волны в каждой точке системы.

Иногда в литературе на языке квантовой механики обсуждаются и другие явления, например, туннелирование магнитостатических волн через область

неоднородности кристалла [48] или зенеровское туннелирование оптического пучка в фотонных кристаллах [49] со ссылкой на соответствующий эффект в квантовой механике. Здесь уместно вспомнить, что на заре квантовой механики туннелирование частиц было рассмотрено именно по аналогии с соответствующим эффектом физической оптики. Как в классической оптике, так и в квантовой механике анализируются решения волновых уравнений и принципиальное различие возникает лишь в их интерпретации, конкретно, в проблеме измерения. Пока речь идет о распространении периодических линейных или слабонелинейных волн, использование квантовомеханического языка есть не более чем практически безопасная терминологическая неточность. Однако, когда рассматриваются проблемы распространения солитонов, в частности вихрей, переход от квантового рассмотрения к классическому становится существенно более серьезной проблемой. Для этой ситуации полученные выше состояния, стационарные с точки зрения квантовой механики, непосредственно не применимы. Для взаимодействия отдельного вихря (или солитона другого типа) с потенциальным барьером возможен и «туннельный» (с приведенными выше оговорками) переход и отражение вихря, но соответствующий процесс имеет не вероятностный, а детерминированный характер. Кроме того, для солитоноподобных импульсов весьма вероятно и частичное прохождение, при котором часть импульса проходит через барьер, а часть отражается. Понятно, что последний сценарий не имеет ничего общего с квантовым подбарьерным переходом. Подробное обсуждение «квазиквантовых» эффектов такого типа для вихрей классического поля выходит за рамки нашей работы.

Для вихрей в сверхструктурах могут представлять интерес те нетривиальные эффекты, которые обычно ассоциируются с квантовой механикой, но, по сути, должны проявляться и при чисто классическом движении вихря. Здесь прежде всего можно отметить описанные в разд. 5 блоховские осцилляции вихря под действием постоянной силы \mathbf{F} . Как показано выше, откликом на постоянную силу является осциллирующее движение вихря. Здесь важно, что это явление не исчезает в классическом случае и не связано с туннелированием вихря; для его реализации необходимо только наличие периодической зависимости функции Гамильтона от импульса, см. подробное обсуждение в обзоре [42]. Для одномерной неоднородности, которую легко создать в фотонном кристалле, осцилляции имеют буквально тот же вид, что и в классической задаче,

но при приложении внешней силы в направлении, перпендикулярном градиенту потенциала. Как мы отмечали выше, случай двумерного симметричного потенциала пиннинга вида (14) с одинаковыми множителями перед $\sin^2(\pi x/a)$ и $\sin^2(\pi y/a)$ не является оптимальным для реализации этого эффекта, который появляется только при значении силы, превышающем критическое. Однако и здесь в классическом случае имеет место нетривиальная динамика.

Мы благодарны В. Г. Барьяхтару за полезное обсуждение вопросов, затронутых в нашей статье. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта INTAS-05-1000008-8112.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Малоземов, Дж. Слонзуски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982).
2. V. G. Baryakhtar, M. V. Chetkin, B. A. Ivanov, and S. N. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons. Experiment and Theory*, Springer Tract in Modern Physics **139**, Springer-Verlag, Berlin (1994).
3. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); А. М. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
4. F. G. Mertens and A. R. Bishop, in *Nonlinear Science at the Dawn of the 21th Century*, ed. by P. L. Christiansen and M. P. Soerensen, Springer-Verlag, Berlin (2000).
5. В. Л. Березинский, ЖЭТФ **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
6. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. **C6**, 1181 (1973).
7. D. D. Wiesler, H. Zabel, and S. M. Shapiro, Z. Phys. **B93**, 277 (1994).
8. R. Skomski, J. Phys.: Condens. Matter **15**, R841 (2003).
9. R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge Studies In Low Temperature Physics, ed. by A. M. Goldman, P. V. E. McClintock, and M. Springford, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

10. P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam (1966).
11. G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
12. M. R. Mathews, B. P. Anderson, P. C. Halljan et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
13. K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
14. Yu. S. Kivshar and B. Luther-Davids, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
15. A. A. Thiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 239 (1973).
16. А. В. Никифоров, Э. Б. Сонин, *ЖЭТФ* **85**, 642 (1983).
17. D. L. Huber, *Phys. Rev. B* **26**, 3758 (1982).
18. Pink Ao and D. J. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 132 (1994); M. J. Stephen, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1534 (1994).
19. A. Yu. Galkin and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3053 (1999); *Phys. Rev. B* **66**, 054507 (2002).
20. P. G. Harper, *Proc. Phys. Soc. A* **68**, 879 (1955).
21. M. Wilkinson, *J. Phys. A* **27**, 8123 (1994).
22. B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. B* **58**, 8464 (1998).
23. B. A. Ivanov and G. M. Wysin, *Phys. Rev. B* **65**, 134434 (2002).
24. E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, in: *Frontiers in Physics*, **82**, Addison-Wesley, New York (1991).
25. Б. А. Иванов, *ФНТ* **31**, 841 (2005).
26. K. Yu. Guslienko, B. A. Ivanov, Y. Otani, H. Shima, V. Novosad, and K. Fukamichi, *J. Appl. Phys.* **91**, 8037 (2002); K. Yu. Guslienko, X. F. Han, D. J. Kevaney, R. Divan, and S. D. Bader, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 067205 (2006).
27. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 511 (1996).
28. J. B. Taylor and B. McNamara, *Phys. Fluids* **14**, 1492 (1971).
29. S. B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl, A. Bauer, A. Doran, J. Stöhr, and H. A. Padmore, *Science* **304**, 420 (2004); X. Zhu, Zh. Liu, V. Metlushko, P. Grütter, and M. R. Freeman, *Phys. Rev. B* **71**, 1804089R (2005); C. E. Zaspel, B. A. Ivanov, P. A. Crowell, and J. Park, *Phys. Rev. B* **72**, 024427 (2005).
30. Б. А. Иванов, Д. Д. Шека, *ФНТ* **21**, 1148 (1995).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
32. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Е. Хайкин, *Теория колебаний*, Физматгиз, Москва (1959).
33. B. A. Ivanov and H.-J. Mikeska, *Phys. Rev. B* **70**, 174409 (2004).
34. Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **61**, 495 (1995).
35. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, *УФН* **136**, 553 (1979).
36. *Quantum Tunneling of Magnetization*, ed. by L. Gunter and B. Barbara, Vol. 301 of NATO ASI Series E, Kluwer, Dordrecht (1995).
37. Б. А. Иванов, Н. Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **126**, 1479 (2004).
38. Ian Affleck, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 3047 (1989); I. Affleck, in: *Fields, Strings and Critical Phenomena*, ed. by E. Brezin and J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam (1990), p. 567.
39. G. M. Wysin, *Phys. Rev. B* **49**, 8780 (1994).
40. М. Я. Азбель, *ЖЭТФ* **46**, 929 (1964); D. R. Hofstadter, *Phys. Rev. B* **14**, 2239 (1976).
41. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
42. А. М. Косевич, *ФНТ* **27**, 699 (2001).
43. А. М. Косевич, И. Д. Вагнер, *ФНТ* **25**, 868 (1999).
44. G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **117**, 432 (1960).
45. M. Pomerantz, *Surf. Sci.* **142**, 556 (1984).
46. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994); Б. А. Иванов, Д. Д. Шека, *ЖЭТФ* **107**, 1626 (1995).
47. H.-J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
48. S. O. Demokritov, A. A. Serga, A. Andre, V. E. Demidov, M. P. Kostylev, B. Hillebrands, and A. N. Slavin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 047201 (2004).
49. H. Trompeter, W. Krolikowski, D. N. Neshev, A. S. Desyatnikov, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, T. Pertsch, U. Peschel, and F. Lederer, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 053903 (2006).