

РУСЛА И ДЖОКЕРЫ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

*О. Я. Бутковский**, *М. Ю. Логунов*

*Владимирский государственный университет
600026, Владимир, Россия*

Поступила в редакцию 16 октября 2006 г.

На примере системы Ресслера показано, что в ходе реконструкции модели нелинейного динамического процесса по наблюдаемому временному ряду можно обнаружить области в фазовом пространстве, названные «руслами» и «джокерами» [3]. Показана устойчивость предлагаемого метода обнаружения к шумам и к использованию неточных (избыточных) моделей в процессе реконструкции. Рассмотрена динамика локальных ляпуновских показателей аттракторов этих систем и выявлена ее связь с руслами и джокерами. Показана возможность использования подхода русел и джокеров при построении прогностических моделей. Качество таких моделей анализируется с использованием понятия степени предсказуемости.

PACS: 05.45.-a, 05.10.-a, 05.45.Tr

1. ЧТО ТАКОЕ РУСЛА И ДЖОКЕРЫ

Возможности реконструкции адекватной математической модели по наблюдаемому временному ряду посвящено много работ, и интерес к этой проблеме не остывает. Получаемые результаты реконструкции хаотических систем — модельные уравнения — зачастую значительно не дотягивают по прогностической способности до предельного времени предсказуемого поведения таких систем [1, 2]:

$$\tau_{pred} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}.$$

Здесь λ — наибольший ляпуновский показатель, σ_ξ^2 — дисперсии шумов, неточности модели и др., σ_x^2 — дисперсия наблюдаемой величины.

Одной из причин, вызывающих серьезные затруднения при построении моделей нелинейных процессов, по мнению Малинецкого [3] является неоднородность фазового пространства, а именно наличие областей «русел» и «джокеров». В работах [3, 4] для описания таких процессов и систем введен новый класс математических моделей — динамические системы с джокерами. В них джокеры являются регионами в фазовом пространстве, в которых динамика системы становится плохо предсказуемой — она из-

меняется, усложняется или даже становится вероятностной и случайной. В противоположность джокерам вводятся русла — области устойчивого, хорошо прогнозируемого движения.

Более строгое определение понятия русел дадим так, как это сделано в работе [3]. Рассмотрим n -мерное фазовое пространство хаотической системы F . Предположим, что в некоторой локальной области G поведение системы может быть приближенно описано маломодовой моделью F_1 с размерностью фазового пространства $n_1 < n$. Если траектория системы в течение времени наблюдения достаточно число раз проходила через область G , можно восстановить n_1 -мерную функцию F_1 , определенную в этой области и дающую возможность делать в ней локальный прогноз. Поскольку динамика системы в области G более проста, чем во всем фазовом пространстве (вследствие маломодовости), прогноз поведения n_1 степеней свободы системы с помощью реконструкции функции F_1 будет более точен, чем тот же прогноз с помощью реконструкции функции F . Такая область G , допускающая удовлетворительный прогноз хотя бы некоторых мод хаотической системы, называется руслом [3].

Отметим две возможные причины появления русел в фазовом пространстве. Во-первых, русла могут быть областями локального маломодового движения, в которых хороший прогноз обеспечивает-

*E-mail: olegb@vlsu.ru

ся простотой модельной функции. Во-вторых, русла могут быть областями локальной устойчивости хаотической системы. Отсюда следует, что, возможно, наиболее благодатную почву для наличия русел и джокеров дают системы связанных осцилляторов с переменной связью. Переменность связи может сильно изменять локальную размерность и сложность динамических уравнений процессов.

Рассмотрим далее понятия русел и джокеров на примере известной системы Ресслера:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\quad (1)$$

(в дальнейших численных расчетах будем использовать следующие значения параметров: $a = 0.2$, $b = 0.4$, $c = 8$, которые соответствуют режиму развитаго хаоса).

В разд. 2 мы покажем, что значения локальных ляпуновских показателей системы Ресслера существенно зависят от положения изображающей точки на аттракторе и джокеры этой системы без труда идентифицируются по максимумам показателей. В разд. 3 опишем два метода поиска областей джокеров по временным рядам наблюдаемых динамических систем. В разд. 4 обсудим возможные преимущества прогнозирования динамических систем с использованием подхода русел и джокеров.

2. РУСЛА, ДЖОКЕРЫ И ЛОКАЛЬНЫЕ ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Из самого определения русел и джокеров достаточно очевидно, что, когда локальная динамика системы обладает приблизительно постоянной размерностью, наличие русел и джокеров должно быть связано с локальными ляпуновскими показателями исследуемой системы. Эту связь иллюстрирует рис. 1, где изображены z -компонента системы Ресслера и локальные ляпуновские показатели¹⁾ этой системы (λ_+ — максимальный по аттрактору, λ_0 — нулевой по аттрактору, λ_- — минимальный).

Как следует из рис. 1, в области $z > 0$ все локальные ляпуновские показатели увеличиваются, указывая на неустойчивый характер движения системы

¹⁾ Локальные ляпуновские показатели вычислялись с помощью решения уравнений в вариациях для векторов возмущений и последующей ортогонализации Грама–Шмидта (см., например, [5]).

в этой области, в которой, кроме того, наблюдается локальное увеличение размерности динамики системы. Это означает, что мы вправе предположить здесь наличие джокера.

3. КАК НАЙТИ ДЖОКЕРЫ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ: РЕЗУЛЬТАТЫ ЛОКАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

В практически важных задачах далеко не всегда известен точный вид исследуемой динамической системы, поэтому выявлять области русел и джокеров в ее фазовом пространстве с помощью анализа вариаций локальных ляпуновских показателей не представляется возможным. При этом проблема качественной оценки динамики системы остается актуальной. Здесь мы рассмотрим два метода обнаружения областей джокеров по наблюдаемым временным рядам исследуемых систем.

В работе [3] описан метод, названный тестом на линейное предсказание, с помощью которого в фазовом пространстве находятся области неустойчивого движения траекторий (джокеров). Суть метода сводится к следующему: берется некоторая окрестность точки x_i фазового пространства, причем x_i не включается в окрестность, и по этой окрестности строится линейный прогноз на время Δt вперед. Далее по построенному прогнозу точка x_i экстраполируется на время Δt вперед и оценивается ошибка ϵ_i экстраполяции. Меняя базовую точку x_i и анализируя вид зависимости $\epsilon(t)$, в фазовом пространстве находят области плохо прогнозируемого движения — джокеров.

Результаты этого теста для системы Ресслера (1) показаны на рис. 2. Тест выявил одну область джокеров, подтвердив предположение о ее наличии, сделанное в разд. 2.

Опишем далее метод реконструкции динамических систем (см. также работу [6]), который, кроме того (что сейчас для нас более важно), позволяет найти в фазовом пространстве области джокеров, где происходит локальное изменение динамики нелинейной системы.

Пусть наблюдается временной процесс $y(t)$ (в общем случае векторный, $\mathbf{y}(t)$), генерируемый некоторой нелинейной динамической системой, которая подчиняется уравнению

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}(t), \mathbf{A}) = 0,$$

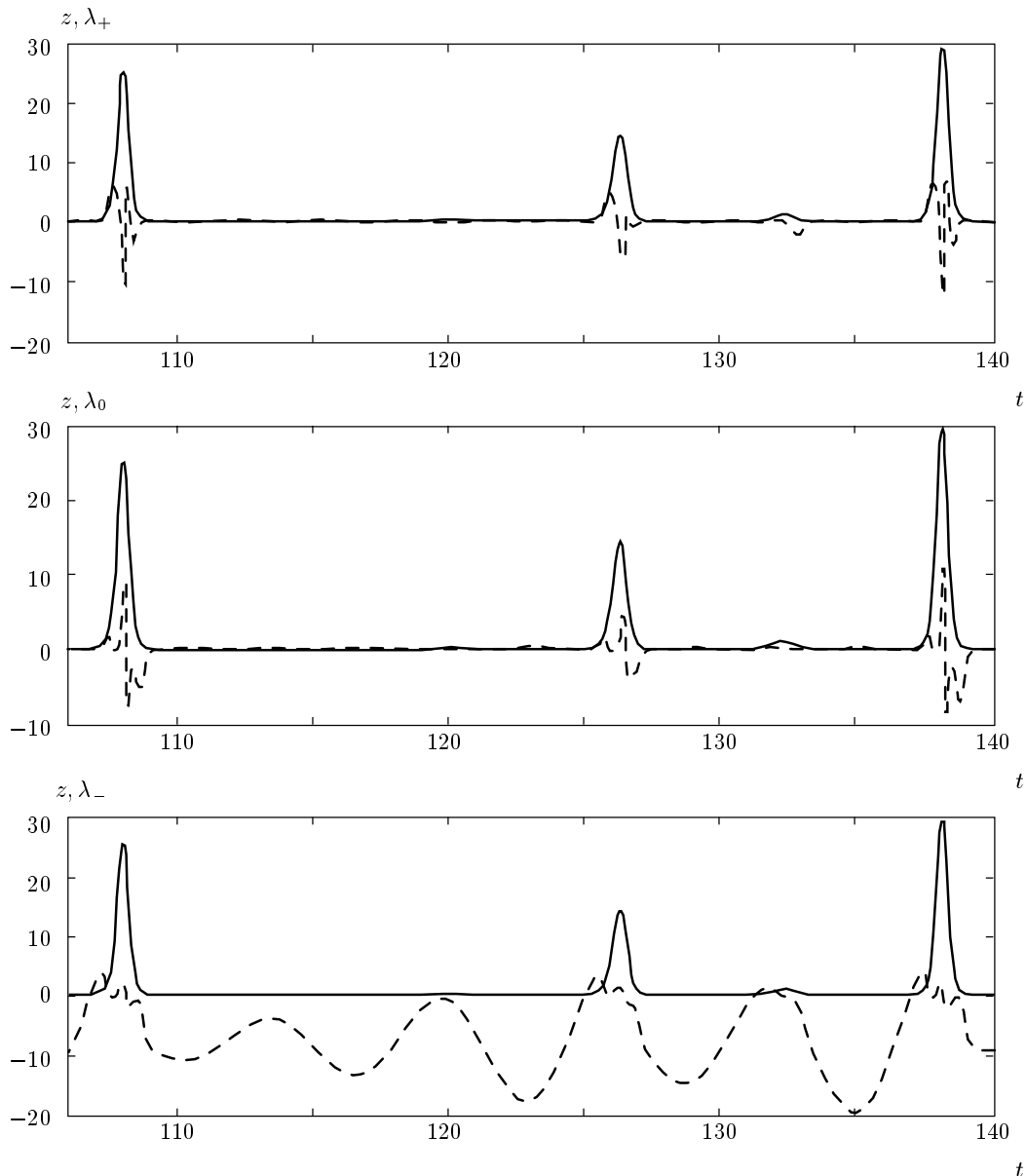


Рис. 1. Поведение локальных ляпуновских показателей (штриховые линии) на аттракторе Ресслера (сплошная кривая). Здесь и далее на рисунках t — безразмерное время

где \mathbf{d} — оператор эволюции, а \mathbf{A} — вектор параметров системы. Для построения динамической модели

$$\mathbf{d}_M(\mathbf{y}(t), \mathbf{a}) = 0,$$

которой предположительно подчиняется система, нужно определить значение вектора параметров \mathbf{a} , при котором на всем временном интервале наблюдения T достигается минимум статистической меры отличия наблюдаемого процесса $\mathbf{y}(t)$ от процесса $\mathbf{z}(t)$, генерируемого этой моделью. В дальнейшем в обо-

значении динамической модели мы опустим индекс « M » для краткости записи, но будем предполагать, что речь идет именно о модельной системе.

Осуществим реконструкцию динамической системы на основе параметризации модели в двух смежных скользящих временных окнах, T_1 и T_2 , выбирая параметры \mathbf{a} модели на основе какого-либо критерия. Двухоконная процедура идентификации, в отличие от однооконных алгоритмов, является более чувствительной к нестационарным свойствам

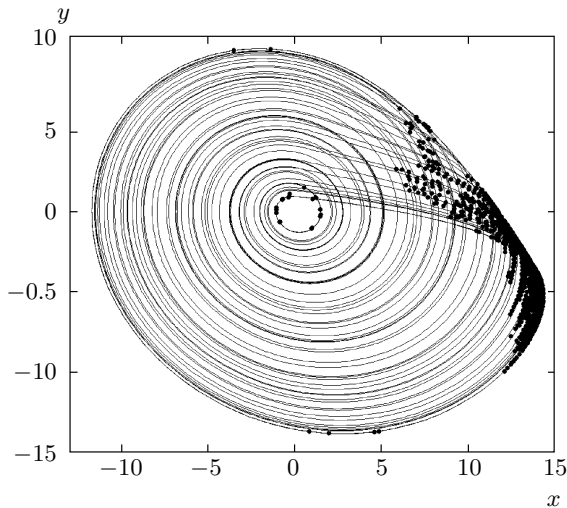


Рис. 2. Тест на линейное предсказание [3]. Точки соответствуют ошибке $\epsilon(t) > 0.5$ и выявляют область джокера

модели наблюдаемого процесса. Важно, что наряду с идентификацией вида и параметров модели предлагаемый алгоритм позволяет эффективно выявлять участки нестационарного (в рамках выбранной модели) поведения.

Представим модель динамической системы в следующем виде:

$$d_i = \frac{dy_i(t)}{dt} - \sum_{k=1}^p a_k F_k(\mathbf{y}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Здесь F_k — нелинейные функции, выбранные из априорных соображений.

Использование аддитивных моделей вида (2) эквивалентно описанию нелинейной динамической системы в расширенном линейном фазовом пространстве $\Phi(p + 1)$, которое получается из пространства состояний динамической системы путем его дополнения нелинейными координатами $\mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, y_k dy_i/dt$ и т. п., соответствующими членам модели (2). Здесь $p + 1$ — размерность расширенного пространства.

В такой постановке задача идентификации динамических систем аналогична задаче дискриминантного анализа. При этом вместо расширенного пространства признаков $X(p + 1)$ используется расширенное фазовое пространство $\Phi(p + 1)$, вместо обучающих выборок из дискриминируемых классов $x_j(1)$ и $x_j(2)$ — отрезки временного процесса $\mathbf{y}(T_1)$ и $\mathbf{y}(T_2)$, наблюдаемые в смежных окнах T_1 и T_2 , а в качестве дискриминантной функции — модель (2). Па-

раметризация модели может проводиться на основе различных критериев, например критерия Фишера:

$$H_i = \max \left\{ \frac{[M_1(d_i) - M_2(d_i)]^2}{\sigma_1^2(d_i) + \sigma_2^2(d_i)} \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где d_i — модельная функция (2), $M_1(d_i)$ и $M_2(d_i)$ — средние значения, а $\sigma_1^2(d_i)$ и $\sigma_2^2(d_i)$ — дисперсии модельной функции, вычисленные на смежных временных окнах.

Знаменатель выражения (3) есть среднеквадратичная мера отклонения наблюдаемого процесса $\mathbf{y}(t)$ от модельного процесса $\mathbf{z}(t)$, вычисленная на временном интервале $T_1 + T_2$. В свою очередь, числитель критерия Фишера служит мерой отличия описания наблюдаемого процесса $\mathbf{y}(t)$ моделью $\mathbf{d}(\mathbf{y}(t), \mathbf{a}) = 0$ на интервале T_1 от его описания на интервале T_2 , т. е. является мерой нестационарности описания наблюдаемого процесса в рамках выбранной модели.

В незашумленных условиях, когда выбранная динамическая модель (2) совпадает полностью с исходной системой $\mathbf{d}(\mathbf{y}(t), \mathbf{A}) = 0$, критерий H стремится к нулю, а значения параметров \mathbf{a} модели стремятся к значениям параметров \mathbf{A} исходной системы. Если модельная система содержит лишние слагаемые по сравнению с оригиналом, то коэффициенты при этих слагаемых также стремятся к нулю, что позволяет исключить их из модели.

В том случае, когда окна скользят по оси времени, критерий H и параметры \mathbf{a} становятся зависимыми от времени:

$$H = H(t), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(t).$$

Анализируя эти зависимости, можно судить о качестве описания наблюдаемой системы моделью с постоянными параметрами и тем самым идентифицировать нестационарность.

Локальность этой процедуры реконструкции (модель строится только по временному промежутку данных длиной $T_1 + T_2$), а также физический смысл критерия Фишера делают ее удобным средством поиска локальных областей расширенного фазового пространства, в которых меняется характер динамики системы. Как следует из свойств критерия Фишера, областям джокеров будут соответствовать его максимумы. В то же время смена динамики системы в некоторой области фазового пространства как раз и означает наличие в ней джокера. Продемонстрируем это положение на рис. 3, где видно, что по уровню $H(t) > 1$ в системе (1) обнаружилось две области джокеров, одна из которых соответствует области неустойчивого движения (с положительными

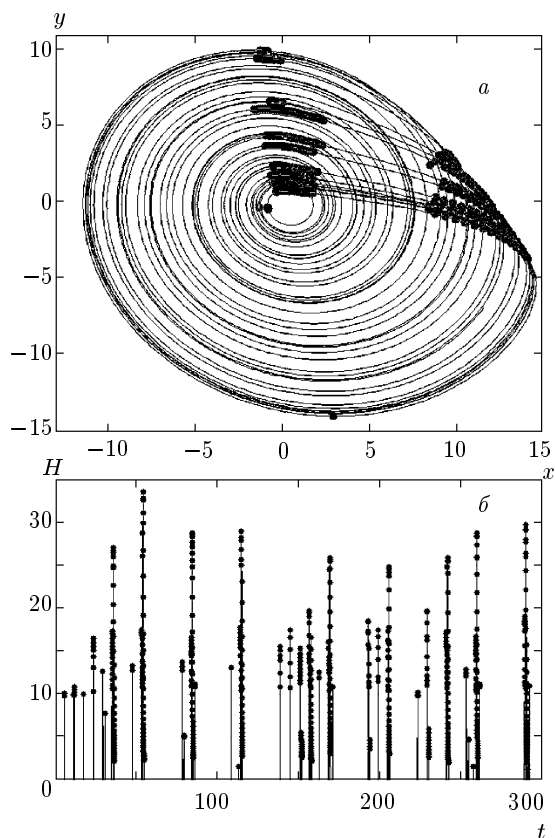


Рис. 3. *а*) Фазовый портрет системы Ресслера (1); *б*) критерий Фишера, построенный при реконструкции точной модели первого уравнения системы (1). Длина скользящих окон T_1 и T_2 — 100 отсчетов или 2 ед. условного времени системы. Точки на графиках соответствуют значениям $H(t) > 1$

ляпуновскими показателями, см. рис. 1, а в другой локально меняется размерность с трех мод до двух (поскольку дальнейшая эволюция системы происходит при $z \approx 0$).

Итак, предлагаемая модификация дискриминантной процедуры, пригодная для поиска джокеров по временным рядам и реконструкции динамических систем, заключается в следующем: выбирается предполагаемый общий вид аддитивной модели наблюдаемого процесса $\mathbf{d}(\mathbf{y}(t), \mathbf{a}) = 0$; с использованием участков процесса, наблюдаемых в смежных временных окнах T_1 и T_2 , подбираются значения параметров \mathbf{a} модели, при которых критерий Фишера (3) принимает максимальное значение; путем перемещения временных окон T_1 и T_2 вдоль оси времени и параметризации модели на новых участках процесса получают временные зависимости критерия Фишера $H(t)$ и восстано-

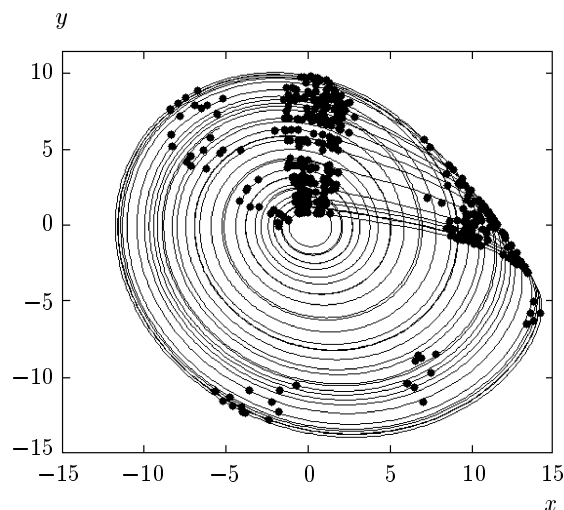


Рис. 4. То же, что рис. 3, но для модели первого уравнения системы (1) вида $c_1\dot{x} + c_2\dot{y} + c_3\dot{z} + c_4yz = 0$. Области джокеров уширяются при использовании неточных моделей при реконструкции

ленных параметров модели $\mathbf{a}(t)$. По максимумам зависимости $H(t)$ определяются области джокеров, а на основе анализа зависимостей $\mathbf{a}(t)$ находится вид исходной системы и оцениваются значения ее параметров.

Встает вопрос о выборе оптимальных параметров реконструкции с точки зрения наилучшего выявления джокеров. Достаточно очевидно, что для этого размер смежного окна реконструкции должен быть сопоставим с размером джокера. Окно, большее чем джокер, сглаживает разницу между модельными описаниями системы на джокерах и на остальной части фазового пространства. Маленькое окно реконструкции может привести к неустойчивости численных алгоритмов и существенному влиянию шума на результаты моделирования.

Покажем, как на обнаружение джокеров влияют неточности модели реконструкции и шумы в наблюдаемых процессах. Из рис. 4 видно, что следствием неточности или неадекватности модели (которая содержит лишнее слагаемое c_4yz) является некоторое размывание областей джокеров, а также их ложное обнаружение в случайных точках фазового пространства. Тем не менее при умеренной неадекватности модели, проблем с идентификацией джокеров не возникает.

Для выяснения вопроса о влиянии шумов, мы проинтегрировали стохастическое дифференциальное уравнение, включающее внутренние шумы в си-

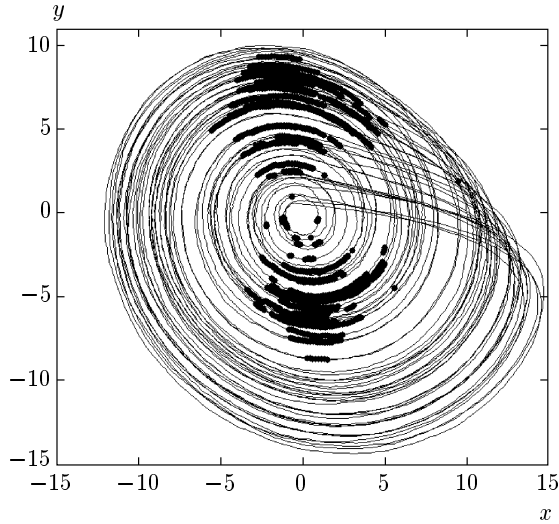


Рис. 5. То же, что рис. 3, но реконструкция проводилась по решению стохастического дифференциального уравнения (4)

системе (1):

$$\begin{aligned} dx &= (-y - z) dt + 0.1dW, \\ dy &= (x + ay) dt + 0.1dW, \\ dz &= [b + z(x - c)] dt + 0.1dW. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь W — стандартный винеровский процесс.

На рис. 5 точками показаны области джокеров, найденные при реконструкции первого уравнения системы (1) по временным рядам x, y, z , полученным при решении системы (4). Параметры системы и реконструкции те же, что для рис. 3.

Видно, что одна из областей джокеров исчезла, но появилась еще одна область. Возможно, такие изменения связаны с тем, что аттрактор Ресслера не является гиперболическим, поэтому динамика системы претерпевает существенные изменения под действием шума.

4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СИСТЕМ С РУСЛАМИ И ДЖОКЕРАМИ

Представляется разумным использовать знания о руслах и джокерах в исследуемых временных рядах, чтобы увеличить дальность их прогноза. Коль скоро динамика системы в руслах и джокерах существенно различается, наиболее очевидным кажется построение различных моделей движения для различных участков фазового пространства системы. При этом можно добиться соответствия сложно-

сти модели и сложности участка фазового пространства, на котором она строится²⁾.

Однако сейчас мы попробуем просто сравнить качество³⁾ реконструкции динамической системы, проведенной по следующим областям фазового пространства: отдельно по руслам, отдельно по джокерам, и по всему фазовому пространству. Таким образом, будем строить одну модельную систему на все фазовое пространство наблюдаемых временных рядов, но по разным их частям.

Пусть мы наблюдаем зашумленный процесс

$$\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

порожденный системой (4). Нашей задачей является построение модельной системы вида (1), все коэффициенты которой найдем с помощью реконструкции уравнений динамики по соответствующим областям фазового пространства.

Будем действовать следующим образом: с помощью дискриминантной процедуры (2) для первого уравнения системы (1) построим зависимость критерия Фишера (3) от времени, $H(t)$, и определим по ней русла и джокеры как области, в которых соответственно $H(t) < 1$ и $H(t) \geq 1$. В результате получим три множества точек фазового пространства: \mathbf{X}_r — точки, лежащие в руслах; \mathbf{X}_j — точки, лежащие в джокерах; \mathbf{X} — все множество точек фазового пространства.

По каждому множеству точек реконструируем модельную систему (1) с помощью метода наименьших квадратов (см., например, [7]) и в дополнение к наблюдаемому процессу $\mathbf{X}(t)$ получим модельные процессы $\mathbf{Z}_r(t)$, $\mathbf{Z}_j(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$, сгенерированные с тех же начальных условий, что и $\mathbf{X}(t)$.

Далее необходимо оценить качество прогноза модельных процессов. Общепринятой характеристикой качества прогноза служит средний квадрат ошибки между наблюдаемым и модельным процессом:

$$\langle \eta^2 \rangle = \langle (X - Z)^2 \rangle.$$

Угловые скобки здесь и далее означают усреднение по ансамблю реализаций. Для того чтобы характеризовать потенциальную предсказуемость, вместо погрешности $\langle \eta^2 \rangle$ удобнее использовать безразмерную характеристику — степень предсказуемости [1, 8]

²⁾ Чего лишены, к примеру, подходы глобальной реконструкции, в которых сложность глобальной модели в руслах избыточна, а в джокерах может быть недостаточна.

³⁾ С точки зрения увеличения дальности прогноза.

$$D(\tau) = \frac{\langle XZ \rangle}{\sqrt{\langle X^2 \rangle \langle Z^2 \rangle}}. \quad (5)$$

Степень предсказуемости (5) представляет собой коэффициент корреляции между прогнозом и наблюдением спустя время τ после начала наблюдения. Эта величина равна единице при $\tau = 0$, поскольку начальное значение прогноза $Z(0)$ берется равным $X(0)$. Если значения $X(t)$ и $Z(t)$ отсчитывать от среднего по ансамблю уровня, то с течением времени величина D будет уменьшаться до нуля. Степень предсказуемости D однозначно связана с абсолютной погрешностью прогноза $\langle \eta^2 \rangle$ следующим образом:

$$D(\tau) = \frac{\langle X^2 \rangle + \langle Z^2 \rangle - \langle \eta^2 \rangle}{2\sqrt{\langle X^2 \rangle \langle Z^2 \rangle}}. \quad (6)$$

Значения $D(\tau)$, близкие к единице, отвечают удовлетворительному прогнозу, тогда как малые значения $D(\tau)$ соответствуют несогласованному ходу наблюдения и прогноза. Время, за которое величина $D(\tau)$ уменьшается до уровня $1/2$, назовем временем предсказуемого поведения. Это время определяется из уравнения

$$D(\tau_{pred}) = 1/2.$$

При этом, как можно показать из соотношения (6), времени предсказуемого поведения τ_{pred} отвечает абсолютная погрешность $\langle \eta^2 \rangle$ порядка дисперсии наблюдаемого процесса: $\langle \eta^2 \rangle \approx \langle X^2 \rangle$.

Обратимся теперь к рис. 6, на котором приведена зависимость степени предсказуемости D от длительности τ прогноза. Видно, что степень предсказуемости модельной системы, реконструированной на области джокеров, существенно ниже, чем у модельных систем, реконструированных на руслах и на всем фазовом пространстве. Таким образом, подтверждается тезис о сложности и неустойчивости фазовых траекторий в джокерах, что проявляется в ухудшении качества реконструкции на них. (Отметим также еще одну возможную причину ухудшения качества реконструкции — малость отношения «площадей» джокеров ко всей фазовой траектории. В нашем примере это отношение составляло примерно 10%.) В то же время реконструкция по руслам не увеличила длительности прогноза по сравнению с реконструкцией по всему фазовому пространству, поскольку, как следует из рис. 6, времени предсказуемого поведения модельных систем, реконструированных по этим областям, практически совпадают: $\tau_{pred}^Z \approx \tau_{pred}^{Z_r}$. Возможно, недостаток информации о

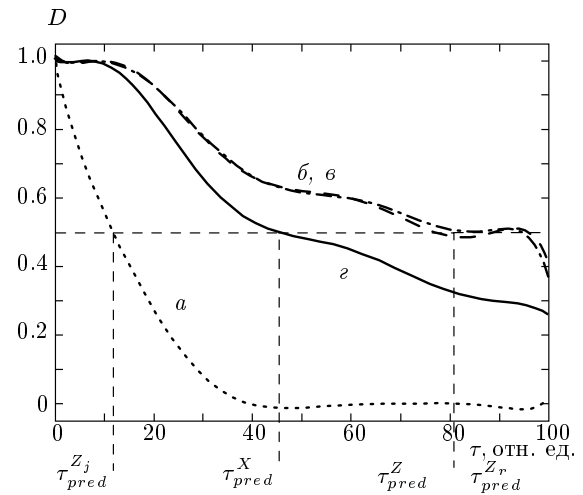


Рис. 6. Степень предсказуемости $D(\tau)$ модельной системы (1), реконструированной на джокерах Z_j (а), на руслах Z_r (б) и на всем фазовом пространстве Z (в); коэффициент корреляции $D(\tau)$ наблюдаемого процесса (4) (z)

динамике в джокере для модели $Z_r(t)$ компенсировался несколько худшим качеством коэффициентов (благодаря включению джокеров во множество точек, по которым проводилась реконструкция) в модели $Z(t)$, что сравнивало их прогностические возможности.

Заметим, что дальность прогноза при использовании модельных процессов Z_r и Z почти вдвое превышает время корреляции наблюдаемого процесса X : $\tau_{pred}^Z \approx \tau_{pred}^{Z_r} \approx 80$ отн. ед., тогда как $\tau_{pred}^X \approx 45$ отн. ед.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта статья является развитием и продолжением работы [3], посвященной описанию динамических систем в терминах русел и джокеров. Здесь мы хотели показать применимость такого подхода и для непрерывных систем. Как нам кажется, он может оказаться полезным для описания сложных, стохастических или распределенных систем.

Подход русел и джокеров позволяет оптимально сбалансировать сложность наблюдаемого процесса и сложность прогностической модели. Наиболее эффективно он может проявиться при исследовании неоднородных, многомерных систем, для описания динамики которых используется несколько моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, УФН **158**, 93 (1989).
2. Г. Шустер, *Детерминированный хаос*, Мир, Москва (1988).
3. Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, Препринт № 32 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (1998).
4. I. Bellachook and G. Malinetskii, in *Proc. 5-th Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, June 26–27, Moscow (1997), p. 40.
5. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос (курс лекций)*, Физматлит, Москва (2001).
6. О. Л. Аносов, О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов, *Радиотехн. и электр.* **42**, вып. 3, 1 (1997).
7. Б. П. Безручко, Д. А. Смирнов, *Построение модельных отображений по хаотическим временным рядам*, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», Саратов (2000).
8. О. Я. Бутковский, Ю. А. Кравцов, в *Труды семинара* Время, хаос и математические проблемы, Книжный дом «Университет», Москва (1999), № 1, с. 165.