

ТЕПЛОЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

*И. И. Вигдорович**

*Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 октября 2006 г.

Для теплового турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом установлены законы подобия для профилей температуры, турбулентного потока тепла, среднеквадратичной пульсации температуры, теплопередачи на стенке. При вдуве температура вне вязкого подслоя в переменных подобия имеет универсальное распределение, известное из экспериментальных данных для непроницаемой пластины, а при отсосе описывается однопараметрическим семейством кривых. Универсальный закон теплопередачи в форме обобщенной аналогии Рейнольдса позволяет представить распределения теплового потока, соответствующие разным числам Рейнольдса, скоростям вдува и отсоса, с помощью функции одной переменной. Результаты получены без использования специальных гипотез замыкания.

PACS: 44.20.+b, 47.27.nb, 47.27.te

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическая задача для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом решена в работах [1–4]. Результаты получены без использования специальных гипотез замыкания при физических предположениях общего характера, поскольку удалось установить наличие универсальной связи между касательным напряжением и градиентом усредненной скорости. Эта связь может быть определена по профилю скорости в одном эталонном течении, в качестве которого выбрано течение в пограничном слое на непроницаемой пластине. Замкнутые таким способом уравнения пограничного слоя решены методом сращиваемых асимптотических разложений [5].

В настоящей работе такой подход [2–4] распространен на тепловую задачу, решение которой также может быть получено только по известным профилям скорости и температуры в эталонном течении. Новым, кроме того, является учет общего граничного условия на пластине, когда температура задана по произвольному закону. Замыкающее соотношение, которое связывает турбулентный поток тепла с градиентами усредненной скорости и температуры,

является в этом случае функционалом, зависящим от распределения температуры на стенке.

Операторные связи между размерными физическими величинами должны иметь специальную структуру, которая обусловлена инвариантностью этих связей относительно выбора системы единиц измерения. Показано, что оператор, выражающий определенную физическую закономерность, может быть представлен в виде функционала от инвариантной гиперповерхности в фазовом пространстве, а в случае зависимости от функции одной переменной — от линии на фазовой плоскости.

В рассматриваемой задаче таким путем можно определить, какая величина продольного градиента температуры на пластине оказывает влияние на решение. В частности, показано, что профили искомым величин при разных граничных условиях, когда заданы постоянные температура или тепловой поток на стенке, имеют одинаковое представление в переменных подобия.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение несжимаемой теплопроводной жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине, обтекаемой равномер-

*E-mail: vigdorovich@imec.msu.ru

ным потоком, имеющим постоянные скорость U_e и температуру θ_e . На обтекаемой поверхности зададим направленную по нормали скорость вдува или отсоса v_w , температуру θ_w или поток температуры j_w , которые также будем считать постоянными. Предположим, что турбулентное течение развивается непосредственно от передней кромки пластины. Уровень пульсаций скорости и температуры в набегающем потоке будем считать пренебрежимо малым и не оказывающим влияния на течение и теплопередачу в пограничном слое.

Температура рассматривается как пассивная примесь, не влияющая на движение жидкости.

2.1. Условия замыкания

Все усредненные величины, в том числе градиенты продольной скорости и температуры, турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток температуры, являются функциями декартовых координат x , y и определяющих параметров задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F_1(x, y, \nu, v_w, U_e), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = F_2(x, y, \nu, \chi, v_w, U_e, \theta_w - \theta_e), \quad (2.2)$$

$$\langle u'v' \rangle = F_3(x, y, \nu, v_w, U_e), \quad (2.3)$$

$$\langle \theta'v' \rangle = F_4(x, y, \nu, \chi, v_w, U_e, \theta_w - \theta_e). \quad (2.4)$$

Здесь ν и χ — коэффициенты молекулярной вязкости и температуропроводности; начало декартовой системы координат расположено на передней кромке пластины. Соотношения (2.2), (2.4) записаны для случая, когда задана постоянная температура стенки. Поскольку перенос пассивной примеси нестационарным полем скорости описывается линейным уравнением, определяющим параметром в соотношениях (2.2), (2.4) является только температурный перепад между пластиной и набегающим потоком.

Величины, стоящие в левых частях равенств (2.1)–(2.4), в силу эллиптического характера задачи могут зависеть также от дополнительных условий, поставленных ниже по потоку, например в области, где в случае вдува происходит отрыв пограничного слоя. Далее будем рассматривать только присоединенный пограничный слой, на который дополнительные параметры практического влияния не оказывают.

Введем в рассмотрение толщину пограничного слоя

$$\Delta = F_5(x, \nu, v_w, U_e) \quad (2.5)$$

как некоторую величину, характеризующую поперечный масштаб течения.

Теперь, выразив величины x , U_e и $\theta_w - \theta_e$ из уравнений (2.1), (2.2), (2.5) и подставив в уравнения (2.3) и (2.4), получим

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= G_1\left(y, \nu, v_w, \Delta, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \langle \theta'v' \rangle &= G_2\left(y, \nu, \chi, v_w, \Delta, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Применяя к этим зависимостям П-теорему и учитывая, что для температуры как пассивной примеси можно использовать специальную размерность, будем иметь

$$\langle u'v' \rangle = -\left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S(\text{Re}, \beta, \eta), \quad (2.7)$$

$$\langle \theta'v' \rangle = -y^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} T(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta), \quad (2.8)$$

$$\text{Re} = \frac{y^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{Pe} = \frac{y^2}{\chi} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\beta = \frac{v_w \varphi(\text{Re})}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}.$$

Локальное число Рейнольдса Re равно отношению характерных значений турбулентной и молекулярной вязкостей, а локальное число Пекле Pe — турбулентной и молекулярной теплопроводностей. Относительно функций S и T предположим, что они непрерывны при

$$0 \leq \text{Re} \leq \infty, \quad 0 \leq \text{Pe} \leq \infty,$$

$$-\infty \leq \beta \leq \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

дифференцируемы внутри этой области и удовлетворяют неравенствам

$$S(\infty, 0, 0) \neq 0, \quad T(\infty, \infty, 0, 0) \neq 0,$$

которые, как было показано [2], являются условиями существования логарифмических профилей скорости и температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине.

Соотношения (2.7), (2.8) представляют собой выражения касательного напряжения и потока температуры через градиенты усредненных скорости и

температуры. Поскольку влияние скорости вдува или отсоса на эти зависимости по мере удаления от стенки должно убывать, будем считать, что входящая в определение параметра β функция φ имеет асимптотику

$$\varphi = O(\text{Re}^{-\alpha}), \quad \text{Re} \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

Формула (2.8) выведена для случая постоянной температуры стенки. При граничном условии второго рода, когда на пластине задан поток температуры, эта зависимость, очевидно, будет иметь тот же вид, но с другой функцией $T^*(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta)$ в правой части, которая отличается от T . Далее, однако, мы покажем, что при постоянном тепловом потоке температура достаточно медленно изменяется по длине пластины, так что различием функций T и T^* в первом приближении можно пренебречь.

Для исследования этого вопроса рассмотрим более общую постановку задачи, когда температура на пластине задана по произвольному закону $\theta_w(x)$; при некотором специальном распределении температуры достигается ее постоянный поток на стенке j_w . Вместо соотношений (2.2), (2.4) в таком случае справедливы связи общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \tilde{F}_2 [x, y, \nu, \chi, v_w, U_e; \theta_w(x') - \theta_e], \\ \langle \theta' v' \rangle &= \tilde{F}_4 [x, y, \nu, \chi, v_w, U_e; \theta_w(x') - \theta_e], \end{aligned} \quad (2.9)$$

в которых \tilde{F}_2, \tilde{F}_4 — операторы, зависящие от функции $\theta_w(x)$ (см. Приложение); при постоянной температуре стенки эти операторы совпадают с функциями F_2, F_4 .

Толщину пограничного слоя можно считать монотонно возрастающей функцией x . Исключив с помощью равенства (2.5) переменную x из соотношений (2.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \tilde{H}_1 [y, \nu, \chi, v_w, U_e, \Delta; \theta_w(\Delta') - \theta_e], \\ \langle \theta' v' \rangle &= \tilde{H}_2 [y, \nu, \chi, v_w, U_e, \Delta; \theta_w(\Delta') - \theta_e]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Операторы, связывающие размерные физические величины, должны иметь специальную структуру. В общем виде этот вопрос исследован в Приложении. В частности, оператор, зависящий от функции одной переменной, эквивалентен функционалу от инвариантной линии на фазовой плоскости и некоторого числа безразмерных параметров. В соответствии с доказанной в Приложении Леммой 1 операторы (2.10) можно представить в виде следующих функционалов:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \tilde{H}_3 [y, \nu, \chi, v_w, U_e, \Delta, \theta_w(\Delta) - \theta_e, z_1; L], \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta' v' \rangle &= \\ &= \tilde{H}_4 [y, \nu, \chi, v_w, U_e, \Delta, \theta_w(\Delta) - \theta_e, z_1; L], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где линия L на фазовой плоскости (z_1, z_2) задана параметрически

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi(\eta) \frac{d \ln |\theta_w - \theta_e|}{d\xi}, \quad z_2 = \frac{dz_1}{d\xi}, \\ \xi &= \ln \text{Re}_\Delta, \quad \text{Re}_\Delta = \frac{U_e \Delta}{\nu} > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для функции ψ будем предполагать выполнение условия

$$\psi = O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0. \quad (2.14)$$

Смысл введения этого множителя в определение переменных z_1, z_2 будет ясен из дальнейшего.

Выразив теперь $x, U_e, \theta_w - \theta_e$ из уравнений (2.1), (2.5), (2.11) и подставив в (2.12), получим операторную связь, аналогичную равенству (2.6),

$$\langle \theta' v' \rangle = \tilde{G}_2 \left[y, \nu, \chi, v_w, \Delta, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, z_1; L \right].$$

Отсюда из соображений размерности следует, что в случае переменной температуры стенки турбулентный поток температуры может быть представлен в виде функционала:

$$\langle \theta' v' \rangle = -y^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{T} [\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta, z_1; L]. \quad (2.15)$$

В частном случае постоянной температуры стенки линия L вырождается в точку P_0 с координатами $(0, 0)$ на фазовой плоскости, и можно принять

$$\tilde{T} [\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta, 0; P_0] \equiv T(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta).$$

Предположим, что \tilde{T} как функционал от линии дифференцируем по Фреше [6] в точке P_0 и является дифференцируемой функцией по остальным аргументам. Это, в частности, означает, что, если линия L целиком лежит в малой δ -окрестности точки P_0 , то выполняется условие

$$\begin{aligned} \tilde{T} [\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta, z_1; L] &= T(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta) + O(\delta), \\ \delta &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогичным образом можно представить нормальные турбулентные напряжения [3], а также среднеквадратичную пульсацию температуры. Для случая постоянной температуры пластины последнее выражение имеет вид

$$\sqrt{\langle \theta'^2 \rangle} = y \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| T_1(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, \eta), \quad (2.17)$$

где T_1 — некоторая универсальная функция. При переменной температуре поверхности имеет место операторное представление, аналогичное (2.15).

2.2. Замена переменных

Функция тока $\psi(x, y)$ усредненного течения и температура в приближении пограничного слоя удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} &= (\nu \psi_{yy} - \langle u'v' \rangle)_y, \\ \psi_y \theta_x - \psi_x \theta_y &= (\chi \theta_y - \langle \theta'v' \rangle)_y; \\ x > 0, \quad y = 0: \quad \psi_y &= 0, \quad \psi_x = -v_w, \quad \theta = \theta_w(x); \\ y \rightarrow \infty: \quad \psi_y &\rightarrow U_e, \quad \theta \rightarrow \theta_e, \quad \langle u'v' \rangle \rightarrow 0, \\ &\langle \theta'v' \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Перейдем в этой задаче к новым переменным по формулам [5]

$$\begin{aligned} \psi &= U_e \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \theta = \theta_e + (\theta_w - \theta_e) \Phi(\xi, \eta), \\ \Lambda(\xi) &= \frac{d \operatorname{Re}_\Delta}{d \operatorname{Re}_x}, \quad \operatorname{Re}_x = \frac{U_e x}{\nu}. \end{aligned}$$

Для функций $\Psi(\xi, \eta)$, $\Phi(\xi, \eta)$, $\Lambda(\xi)$ с учетом соотношений (2.7), (2.15) получим

$$\begin{aligned} \Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - (\Psi + \Psi_\xi) \Psi_{\eta\eta}] &= \\ &= \left[(\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(\operatorname{Re}, \beta, \eta) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta} \right]_\eta, \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda \left[\Psi_\eta \left(\frac{d \ln |\theta_w - \theta_e|}{d \xi} \Phi + \Phi_\xi \right) - (\Psi + \Psi_\xi) \Phi_\eta \right] &= \\ &= \left(\eta^2 \Phi_\eta \Psi_{\eta\eta} \tilde{T}[\operatorname{Re}, \operatorname{Pe}, \beta, \eta, z_1; L] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Pr}^{-1} e^{-\xi} \Phi_\eta \right)_\eta, \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} &= e^\xi \eta^2 \Psi_{\eta\eta}, \quad \operatorname{Pe} = \operatorname{Pr} \operatorname{Re}, \\ \beta &= B \varphi(\operatorname{Re}) (\eta \Psi_{\eta\eta})^{-1}; \\ \xi > -\infty, \quad \eta = 0: \quad \Psi_\eta &= 0, \\ \Lambda(\Psi + \Psi_\xi) &= -B, \quad \Phi = 1; \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow \infty: \quad \Psi_\eta &\rightarrow 1, \quad \Phi \rightarrow 0, \\ (\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(\operatorname{Re}, \beta, \eta) &\rightarrow 0, \\ \eta^2 \Phi_\eta \Psi_{\eta\eta} \tilde{T}[\operatorname{Re}, \operatorname{Pe}, \beta, \eta, z_1; L] &\rightarrow 0. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{Pr} = \nu/\chi$ — молекулярное число Прандтля, $B = v_w/U_e$ — параметр вдува или отсоса. Соотношения (2.20) задают условия на пластине, (2.21) — на внешней границе пограничного слоя. С учетом порядка дифференциальных уравнений на внешней границе поставлены четыре условия: для скорости

и касательного напряжения, температуры и потока температуры.

Будем искать асимптотическое представление решения задачи (2.18)–(2.21) при $\xi \rightarrow \infty$, для чего введем малый параметр ε и новую независимую переменную $\zeta = \varepsilon \xi$, $1/\zeta = O(1)$.

Скорость вдува или отсоса на стенке зададим в виде

$$B = \varepsilon^2 b, \quad b = O(1). \quad (2.22)$$

Поле скорости из уравнения (2.18) и граничных условий (2.20), (2.21) может быть найдено независимо от поля температуры, и эта задача решена в работах [1–4]. Далее получим решение тепловой задачи.

Асимптотические разложения искомых функций по малому параметру ε будут иметь разный вид для разных характерных областей течения. В направлении, перпендикулярном стенке, возникают две такие области: внешняя область, где молекулярной вязкостью и теплопроводностью в уравнениях пограничного слоя можно пренебречь, а характерный масштаб — толщина пограничного слоя, и пристеночная область, характерный масштаб которой определяется из условия равенства по порядку величин турбулентных и вязких напряжений.

3. ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ

В пристеночной области пограничного слоя решение будем искать в переменных стенки:

$$\begin{aligned} y_+ &= \eta e^\xi \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \quad u_+ = \frac{\Psi_\eta}{\sqrt{c_f/2}}, \\ v_+ &= \frac{B}{\sqrt{c_f/2}}, \quad \theta_+ = \frac{\sqrt{c_f/2}}{\operatorname{St}} (1 - \Phi), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где c_f — коэффициент трения на пластине, St — число Стантона, связанное с потоком температуры равенством

$$j_w = U_e \operatorname{St} (\theta_w - \theta_e). \quad (3.2)$$

Проинтегрируем уравнения (2.18), (2.19) поперек слоя и перейдем к независимым переменным ξ и y_+ . Для функций $u_+(\xi, y_+)$, $\theta_+(\xi, y_+)$ получим уравнения

$$\begin{aligned} & \left(y_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right)^2 S \left(\text{Re}, \beta, \frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}} \right) + \\ & + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} - 1 - v_+ u_+ = \\ & = \frac{\Lambda e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}} \left[\left(\frac{d \ln c_f}{2 d \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \int_0^{y_+} u_+^2 dy_+ - \right. \\ & \left. - u_+ \int_0^{y_+} \frac{\partial u_+}{\partial \xi} dy_+ \right], \\ & y_+^2 \frac{\partial \theta_+}{\partial y_+} \frac{\partial u_+}{\partial y_+} \tilde{T} \left[\text{Re}, \text{Pr Re}, \beta, \frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}}, z_1; L \right] + \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta_+}{\partial y_+} - 1 - v_+ \theta_+ = \\ & = \frac{\Lambda e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}} \left[\left(\frac{d}{d \xi} \ln \left(\frac{\text{St} |\theta_w - \theta_e|}{\sqrt{c_f/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \times \right. \\ & \times \int_0^{y_+} \theta_+ u_+ dy_+ - \theta_+ \int_0^{y_+} \frac{\partial u_+}{\partial \xi} dy_+ \left. \right] - \\ & - \frac{\Lambda e^{-\xi}}{\text{St}} \frac{d \ln |\theta_w - \theta_e|}{d \xi} \int_0^{y_+} u_+ dy_+, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= y_+^2 \frac{\partial u_+}{\partial y_+}, \quad \beta = \frac{v_+ \varphi(\text{Re})}{y_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+} \right)^{-1}, \\ z_1 &= \psi \left(\frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}} \right) \frac{d \ln |\theta_w - \theta_e|}{d \xi}, \\ z_2 &= \psi \left(\frac{y_+ e^{-\xi}}{\sqrt{c_f/2}} \right) \frac{d^2 \ln |\theta_w - \theta_e|}{d \xi^2}. \end{aligned}$$

Перейдем в уравнениях (3.3) к пределу при

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad 1/\zeta = O(1), \quad y_+ = O(1).$$

Первый член разложения скорости,

$$u_+(\xi, y_+) = U_+(y_+) + O(e^{-\alpha \zeta / \varepsilon}), \quad \alpha > 0, \quad (3.4)$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\begin{aligned} & \left(y_+ \frac{dU_+}{dy_+} \right)^2 S(\text{Re}, \beta, 0) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1 + v_+ U_+, \\ & U_+(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{Re} = y_+^2 \frac{dU_+}{dy_+}, \quad \beta = \frac{v_+ \varphi(\text{Re})}{y_+} \frac{dy_+}{dU_+}.$$

Для координат линии L на фазовой плоскости (2.13) из условия (2.14) имеем оценки

$$z_1 = O(e^{-\alpha \zeta / \varepsilon}), \quad z_2 = O(e^{-\alpha \zeta / \varepsilon}), \quad \alpha > 0,$$

согласно которым на основании (2.16) оператор, задающий турбулентный поток температуры, в пристеночной области можно заменить функцией, соответствующей постоянной температуре стенки. Следовательно, первый член разложения температуры,

$$\theta_+(\xi, y_+) = \Theta_+(y_+) + O(e^{-\alpha \zeta / \varepsilon}), \quad (3.6)$$

с той же точностью $O(e^{-\alpha \zeta / \varepsilon})$, что и скорость, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & y_+^2 \frac{d\Theta_+}{dy_+} \frac{dU_+}{dy_+} T(\text{Re}, \text{Pe}, \beta, 0) + \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d\Theta_+}{dy_+} = 1 + v_+ \Theta_+, \quad \Theta_+(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь ясно, что функция ψ с асимптотикой (2.14) включена в определение переменных (2.13), для того чтобы получить правильный порядок остаточного члена в разложении (3.6)¹⁾

Асимптотика решений уравнений (3.5), (3.7) во внешней части пристеночной области, т.е. вне вязкого подслоя, имеет вид [2]

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_+} \left(\sqrt{1 + v_+ U_+} - 1 \right) = \\ & = \frac{1}{\varkappa} [\ln y_+ + C(v_+)] + O(y_+^{-\alpha}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_+} \left[(1 + v_+ \Theta_+)^{1/2 \text{Pr}_t^0} - 1 \right] + \\ & + \frac{1}{\varkappa} D(v_+, \text{Pr}) (1 + v_+ \Theta_+)^{1/2 \text{Pr}_t^0} = \\ & = \frac{1}{\varkappa} [\ln y_+ + C(v_+)] + O(y_+^{-\alpha}), \\ & y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В эти соотношения входят постоянная Кармана:

$$\varkappa = \sqrt{S(\infty, 0, 0)},$$

турбулентное число Прандтля в логарифмической области:

$$\text{Pr}_t^0 = \frac{S(\infty, 0, 0)}{T(\infty, \infty, 0, 0)}$$

¹⁾ При $\psi \equiv 1$ порядок остаточного члена равен $O(\varepsilon)$.

и две универсальные функции $C(v_+)$ и $D(v_+, \text{Pr})$, которые должны определяться из экспериментальных данных, причем их предельные значения равны [2]

$$\begin{aligned} C(v_+) &= C_0 + O(v_+), \\ D(v_+, \text{Pr}) &= C_0 - \gamma(\text{Pr}) + O(v_+), \quad v_+ \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где C_0 и $\gamma(\text{Pr})$ — аддитивные постоянные, входящие в логарифмические законы для профилей скорости и температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине. В соответствии с экспериментальными данными примем следующие значения постоянных [2]:

$$\varkappa = 0.41, \quad \text{Pr}_t^0 = 0.89, \quad C_0 = 2.05$$

и для воздуха

$$\gamma(0.7) = 1.6.$$

Вычитая выражение (3.8) из (3.9), получим соотношение, связывающее профили скорости и температуры в пристеночной области вне вязкого подслоя:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{v_+}{2\varkappa} D(v_+, \text{Pr})\right] (1 + v_+ \Theta_+)^{1/2\text{Pr}_t^0} &= \\ = \sqrt{1 + v_+ U_+} + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. ВДУВ И УМЕРЕННЫЙ ОТСОС

Исходя из решения динамической задачи [1, 3, 4], далее будем рассматривать два режима течения. Первый соответствует умеренному отсосу (когда касательное напряжение во внешней области и на стенке имеет один порядок величины) и произвольному вдуву, второй — сильному отсосу, при котором значения касательного напряжения на стенке много больше, чем во внешней области пограничного слоя. В первом случае во внешней области пограничного слоя, где $1/\eta = O(1)$, динамические параметры можно представить в виде [1, 3]

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \Psi_w(\xi) + \eta + \Lambda(\xi)f(\eta) + O(\varepsilon^2), \\ \Psi_w(\xi) + \frac{d\Psi_w(\xi)}{d\xi} &= O(\varepsilon), \\ \Lambda(\xi) &= \frac{\sqrt{c_f/2 + \varepsilon^2 b}}{F_1} + O(\varepsilon^2), \\ F_1 &\equiv \sqrt{-f(\infty)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$c_f = \varepsilon^2 \sigma_1(\zeta, \varepsilon), \quad \sigma_1 = O(1). \quad (4.2)$$

Задающая профиль скорости функция $f'(\eta)$ удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения [3]:

$$\begin{aligned} [(\eta f'')^2 S]' + \eta f'' &= 0, \\ f(0) = f'(\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta f'' \sqrt{S} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(здесь и далее для сокращения записи S обозначает $S(\infty, 0, \eta)$), и имеет логарифмическую асимптотику на стенке:

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= \frac{F_1}{\varkappa} (\ln \eta + A_0 - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \\ \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где A_0 — некоторая постоянная. Функция $f'(\eta)$ имеет универсальный характер, ее можно считать известной из экспериментальных данных для пограничного слоя на непроницаемой пластине и задать, например, с помощью эмпирической формулы Коулса [7]:

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= \frac{F_1}{\varkappa} [\ln \eta - 0.55(1 + \cos(\pi\eta))], \\ F_1 &= \frac{1.55}{\varkappa}, \quad 0 < \eta \leq 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В этом случае величина Δ выбрана как расстояние до стенки δ_{99} , на котором продольная составляющая усредненной скорости на 0.5% отличается от U_e . Сопоставление представлений (4.4) и (4.5) дает $A_0 = 0.23$.

Толщина пограничного слоя следующим образом связана с коэффициентом трения на пластине [1]:

$$\begin{aligned} R_\Delta &= \frac{1}{F_1 \sqrt{c_f/2}} \times \\ &\times \exp \left[\frac{2\varkappa}{q} - \frac{2\varkappa}{v_+} + A_0 - C(v_+) + O(\varepsilon) \right], \\ q &= \frac{B}{\sqrt{c_f/2 + B}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1. Профиль температуры во внешней области

Профиль температуры во внешней области будем искать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= M(\xi)p_0(\eta) + O(\varepsilon^2), \\ M(\xi) &= \varepsilon m(\zeta, \varepsilon), \quad m = O(1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

число Стантона — в виде, аналогичном (4.2):

$$\text{St} = \varepsilon^2 \sigma_2(\zeta, \varepsilon), \quad \sigma_2 = O(1). \quad (4.8)$$

Подставим разложения (4.1), (4.7) в уравнение (2.19) и перейдем к пределу

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad 1/\zeta = O(1), \quad 1/\eta = O(1).$$

При постоянном тепловом потоке на стенке из (3.2), (4.8) для координат линии L на фазовой плоскости (2.13) получим оценки

$$z_1 = O(\varepsilon), \quad z_2 = O(\varepsilon^2),$$

из которых на основании (2.16) следует, что оператор, задающий турбулентный поток температуры, во внешней области можно заменить функцией, соответствующей постоянной температуре стенки. Таким образом, функция $p_0(\eta)$ удовлетворяет краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$(\eta^2 p'_0 f'' T)' + \eta p'_0 = 0; \quad (4.9)$$

$$p_0(\infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^2 p'_0 f'' T = 0$$

(здесь и далее T обозначает $T(\infty, \infty, 0, \eta)$), для выделения однозначного решения которой поставим дополнительное условие

$$\int_0^\infty p_0 d\eta = F_1. \quad (4.10)$$

Из выражений (4.9), (4.10) следует логарифмическая асимптотика функции $p_0(\eta)$ на стенке:

$$p_0(\eta) = -\frac{\text{Pr}_t^0}{\varkappa} (\ln \eta + E_0 - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \quad (4.11)$$

$$\eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0,$$

где E_0 — некоторая постоянная.

Проведем теперь асимптотическое сращивание решений для двух областей — внешней и пристеночной [8]. Перейдем в соотношении (3.11) от переменных стенки к внешним переменным по формулам (3.1), учитывая при этом (3.4), (3.6) и (4.1), (4.2), (4.7), (4.8); вместо функций $f'(\eta)$ и $p_0(\eta)$ подставим их асимптотические представления (4.4), (4.11). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{v_+}{2\varkappa} D(v_+, \text{Pr}) \right] \times \\ & \times \left[1 + \frac{B}{\text{St}} + \frac{B \text{MPr}_t^0}{\varkappa \text{St}} (\ln \eta + E_0 - \ln F_1) \right]^{1/2 \text{Pr}_t^0} = \\ & = \left[1 + \frac{2B}{c_f} + \frac{2B}{\varkappa c_f} \sqrt{\frac{c_f}{2} + B} (\ln \eta + A_0 - \ln F_1) \right]^{1/2} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда при условиях

$$\sigma_1(\zeta, 0) + b \neq 0, \quad \sigma_2(\zeta, 0) + b \neq 0 \quad (4.12)$$

получим два соотношения:

$$M = \frac{\text{St} + B}{\sqrt{c_f/2 + B}} + O(\varepsilon^2), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{v_+}{2\varkappa} D(v_+, \text{Pr}) \right] \left(\frac{\text{St} + B}{\text{St}} \right)^{1/2 \text{Pr}_t^0} = \\ & = \sqrt{\frac{c_f/2 + B}{c_f/2}} + \frac{(A_0 - E_0)v_+}{2\varkappa} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из (4.7), (4.13) следует, что при умеренном отсосе и произвольном вдуве температура во внешней области пограничного слоя должна иметь универсальное распределение:

$$\frac{(\theta - \theta_e) \sqrt{c_f/2 + B}}{(\theta_w - \theta_e)(\text{St} + B)} = p_0(\eta) + O(\sqrt{c_f + B}), \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\eta} = O(1).$$

В частном случае при $B = 0$ соотношение (4.15) есть известный закон дефекта температуры для пограничного слоя на непроницаемой пластине (см., например, [9]). Функция $p_0(\eta)$ не зависит от типа граничного условия для температуры на стенке. Это важно подчеркнуть, поскольку по утверждению из работы [10, с. 219] экспериментальные профили температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине, соответствующие постоянной температуре и постоянному потоку тепла, в переменных подобия (4.15) несколько различаются между собой.

Проинтегрировав соотношение (4.15) поперек пограничного слоя и учтя равенство (4.10), получим выражение поперечного масштаба Δ через интеграл от профиля избыточной температуры:

$$\frac{\delta_t \sqrt{c_f/2 + B}}{\Delta(\text{St} + B)} = F_1 + O(\sqrt{c_f + B}), \quad (4.16)$$

$$\delta_t = \int_0^\infty \frac{\theta - \theta_e}{\theta_w - \theta_e} dy.$$

С другой стороны, продифференцировав первое равенство (4.1), будем иметь представление профиля скорости во внешней области:

$$\frac{U_e - u}{U_e \sqrt{c_f/2 + B}} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O(\sqrt{c_f + B}), \quad (4.17)$$

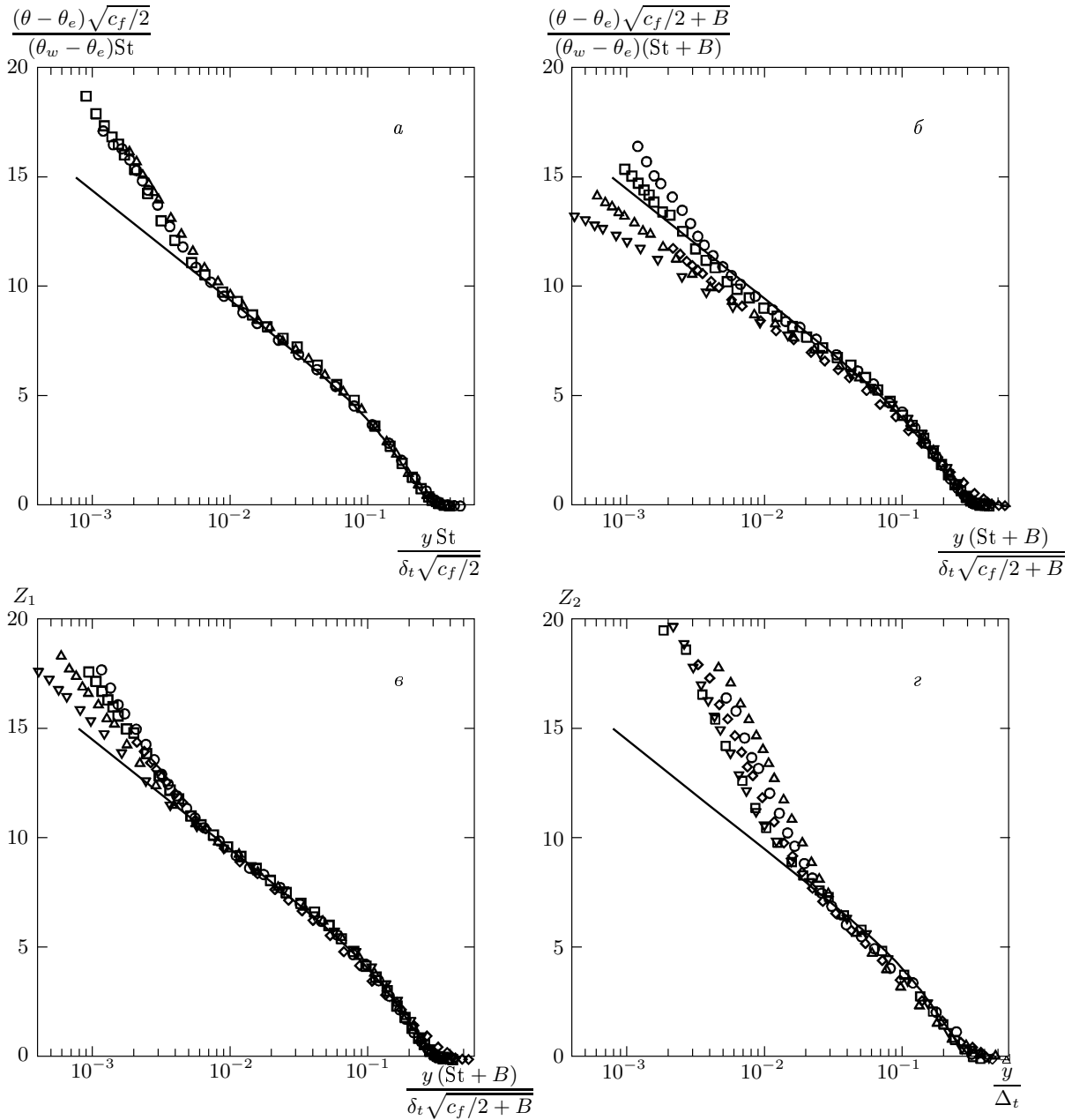


Рис. 1. Экспериментальные профили температуры [12] в пограничном слое на непроницаемой пластине (а), пластине со вдувом (б, в) и отсосом (г) в переменных подобиях: а — $R_x \cdot 10^{-6} = 1.30$ (о), 1.44 (□), 1.99 (△); б, в — $B \cdot 10^3 = 0.96$, $R_x \cdot 10^{-6} = 1.47$ (о), $B \cdot 10^3 = 1.8$, $R_x \cdot 10^{-6} = 1.96$ (□), $B \cdot 10^3 = 3.5$, $R_x \cdot 10^{-6} = 1.98$ (△), $B \cdot 10^3 = 4.0$, $R_x \cdot 10^{-6} = 1.46$ (◇), $B \cdot 10^3 = 4.4$, $R_x \cdot 10^{-6} = 1.98$ (▽); г — $B \cdot 10^3 = -1.29$, $R_x \cdot 10^{-5} = 4.11$, $q = -0.036$ (о), $B \cdot 10^3 = -1.10$, $R_x \cdot 10^{-5} = 9.57$, $q = -0.032$ (□), $B \cdot 10^3 = -2.86$, $R_x \cdot 10^{-5} = 6.76$, $q = -0.12$ (△), $B \cdot 10^3 = -2.51$, $R_x \cdot 10^{-5} = 12.2$, $q = -0.11$ (◇), $B \cdot 10^3 = -2.38$, $R_x \cdot 10^{-5} = 17.7$, $q = -0.11$ (▽). Сплошные кривые — расчеты по формуле (4.19), Z_1 , Z_2 — левые части соотношений соответственно (4.22), (5.32)

интегрирование которого поперек пограничного слоя дает

$$\frac{\delta^*}{\Delta \sqrt{c_f/2 + B}} = F_1 + O\left(\sqrt{c_f + B}\right),$$

где δ^* — толщина вытеснения. Сопоставляя это равенство с (4.16), получим следующую связь между интегральными характеристиками профилей скорости и температуры:

$$\frac{\delta_t(c_f/2 + B)}{\delta^*(St + B)} = 1 + O(\sqrt{c_f + B}). \quad (4.18)$$

Это соотношение есть точное следствие уравнений движения и переноса тепла. В то же время, в работе [11] ошибочно утверждается, что для пограничного слоя на непроницаемой пластине выражение (4.18) приближенно равно 0.8.

Для проверки закона подобия (4.15) использованы экспериментальные данные [12]. В работе [12] в пограничном слое на пластине со вдувом и отсосом измерялись профили скорости и температуры и тепловой поток, но не измерялось трение на стенке. Мы вычисляли коэффициент трения по параметру B и числу Рейнольдса, образованному по толщине вытеснения, с помощью универсального закона трения [1, 4].

На рис. 1а,б в переменных подобия (4.15) построены распределения температуры, полученные при разных скоростях вдува и числах Рейнольдса. На рис. 1а вынесены профили, отвечающие частному случаю непроницаемой пластины; они имеют выраженный логарифмический участок, который описывается уравнением (4.11) при $E_0 = 0.23$.

Для аппроксимации функции $p_0(\eta)$ возьмем формулу, аналогичную формуле (4.5),

$$p_0(\eta) = -\frac{\text{Pr}_t^0}{\varkappa} [\ln(a\eta) - \Pi(1 + \cos(\pi a\eta))], \quad (4.19)$$

$$0 < \eta \leq \frac{1}{a}.$$

Используя условие (4.10) и асимптотическое представление (4.11), получим два уравнения

$$\text{Pr}_t^0(1 + \Pi) = \varkappa F_1 a, \quad \ln(F_1 a) - 2\Pi = E_0,$$

из которых при выбранных значениях постоянных найдем

$$a = 0.84, \quad \Pi = 0.46.$$

Сплошная линия на рис. 1а, построенная по формуле (4.19), хорошо описывает экспериментальные данные. В отличие от соотношения, приведенного в работе [10], формула (4.19) учитывает, что динамический и тепловой пограничные слои имеют разную толщину.

Как видно из рис. 1б, в соответствии с правилом подобия (4.15) все профили температуры во внешней области следуют одной кривой, однако вблизи стенки тем больше отклоняются от логарифмического распределения, чем больше параметр вдува.

Построенные на рис. 2 интегральные характеристики профилей скорости и температуры [12] хорошо соответствуют правилу подобия (4.18).

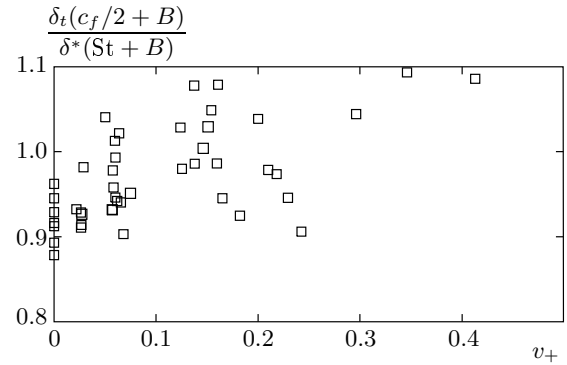


Рис. 2. Интегральные характеристики профилей скорости и температуры [12] в переменных подобия (4.18)

4.2. Закон теплопередачи при вдуве

Соотношение (4.14), связывающее три параметра: число Стантона, коэффициент трения и безразмерную скорость вдува или отсоса, представляет собой универсальный закон теплопередачи в форме обобщенной аналогии Рейнольдса. В формулу (4.14) входит одна эмпирическая функция двух переменных $D(v_+, \text{Pr})$. Принимая во внимание второе равенство (3.10), перепишем (4.14) в виде

$$D(v_+, \text{Pr}) - D(0, \text{Pr}) = \left(\frac{\text{St}}{\text{St} + B}\right)^{1/2\text{Pr}_t^0} \times$$

$$\times \left(\frac{2\varkappa}{q} + A_0 - E_0\right) -$$

$$- \frac{2\varkappa}{v_+} + \gamma(\text{Pr}) - C_0 + O(\sqrt{c_f + B}). \quad (4.20)$$

Переходя в (4.20) к пределу при $B \rightarrow 0$, в частном случае непроницаемой пластины получим зависимость числа Стантона от коэффициента трения:

$$\text{St} = \frac{c_f}{2 \text{Pr}_t^0} \left[1 - \frac{\sqrt{c_f/2}}{\varkappa} \times \right.$$

$$\left. \times (A_0 - E_0 + \gamma(\text{Pr}) - C_0) + O(c_f) \right],$$

которая совпадает с формулой, приведенной в работе [10], и имеет близкие численные значения коэффициентов.

На рис. 3 данные работы [12] построены в форме универсального закона теплопередачи (4.20). С некоторым разбросом экспериментальные точки действительно описывают одну кривую. Погрешности, в первую очередь, связаны с тем, что значения

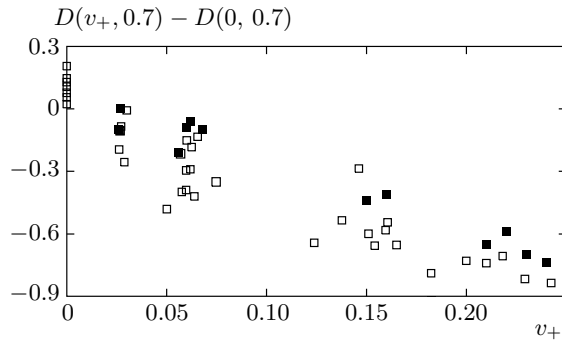


Рис. 3. Функция $D(v_+, 0.7)$ по данным [12]: \square — универсальный закон теплопередачи, \blacksquare — результаты обработки профилей температуры

параметров q и v_+ , входящих в правую часть соотношения (4.20), малы и следовательно функция $D(v_+, Pr)$, имеющая порядок единицы, вычисляется как разность двух больших величин. На рис. 3 приведены также значения функции $D(v_+, Pr)$ [2], найденные путем обработки экспериментальных профилей температуры на основе закона подобия (3.9). Видно, что два разных способа определения функции $D(v_+, Pr)$ дают близкие результаты.

При $v_+ \rightarrow \infty$ функция $D(v_+, Pr)$ стремится к нулю [2].

4.3. Универсальный закон дефекта температуры при вдуве

Правила подобия для профилей температуры (3.9) и (4.15) справедливы в двух примыкающих друг к другу областях пограничного слоя. Объединим эти асимптотические представления в составное разложение для температуры [8], которое будет выполняться всюду вне вязкого подслоя. Для этого перепишем формулу (3.9) во внешних переменных (3.1), учитывая выражения для толщины пограничного слоя (4.6) и функции $D(v_+, Pr)$ (4.14):

$$\left(\frac{2}{q} + \frac{A_0 - E_0}{\varepsilon}\right) (1 - qF)^{1/2Pr_t^0} - \frac{2}{q} = \frac{1}{\varepsilon} (\ln \eta + A_0 - \ln F_1) + O(\varepsilon).$$

Здесь F — левая часть соотношения (4.15). Отсюда, используя малость параметра $q = O(\varepsilon)$, получим

$$\frac{2}{q} \left[(1 - qF)^{1/2Pr_t^0} - 1 \right] = \frac{1}{\varepsilon} (\ln \eta + E_0 - \ln F_1) + O(\varepsilon). \quad (4.21)$$

Искомое составное разложение имеет вид

$$\frac{2Pr_t^0}{q} \left[1 - (1 - qF)^{1/2Pr_t^0} \right] \equiv \frac{2Pr_t^0 \sqrt{c_f/2 + B}}{B} \times \left[1 - \left(1 - \frac{B(\theta - \theta_e)}{(St + B)(\theta_w - \theta_e)} \right)^{1/2Pr_t^0} \right] = p_0(\eta) + O\left(\sqrt{c_f + B}\right). \quad (4.22)$$

При малых η в силу асимптотики (4.11) это соотношение совпадает с (4.21). При $1/\eta = O(1)$ на основании (4.15) имеем $F = O(1)$ и, разлагая левую часть (4.22) по малому параметру q , получим соотношение (4.15). Правило подобия (4.22) представляет собой универсальный закон дефекта температуры, по построению справедливый всюду вне вязкого подслоя.

На рис. 1 в те же данные, что на рис. 1б, построены в форме закона дефекта температуры (4.22). Теперь экспериментальные точки следуют универсальной кривой по всей толщине пограничного слоя за исключением вязкого подслоя вблизи стенки.

Закон дефекта температуры (4.22) позволяет сформулировать правила подобия для среднеквадратичной пульсации и потока температуры. Универсальный закон дефекта скорости, полученный как составное разложение, объединяющее правила подобия (3.8), (4.17), имеет вид [3]

$$\frac{2(U_e - u)}{U_e \left(\sqrt{c_f/2 + B} + \sqrt{c_f/2 + Bu/U_e} \right)} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O\left(\sqrt{c_f + B}\right). \quad (4.23)$$

Вычислим производные температуры и скорости из (4.22), (4.23) и подставим в (2.8), (2.17); определив функцию T из уравнения (4.9), окончательно будем иметь

$$\frac{\langle \theta' v' \rangle}{U_e (\theta_w - \theta_e) (St + B)} = \left(\frac{\eta p_0}{F_1} + \int_{\eta}^{\infty} \frac{p_0 d\eta}{F_1} \right) \left(1 + \frac{qf'}{2F_1} \right) \times \left(1 - \frac{qp_0}{2Pr_t^0} \right)^{2Pr_t^0 - 1} + O\left(\sqrt{c_f + B}\right), \quad (4.24)$$

$$\frac{\sqrt{c_f/2 + B} \sqrt{\langle \theta'^2 \rangle}}{|\theta_w - \theta_e| (St + B)} = -\eta p_0' \left(1 - \frac{qp_0}{2Pr_t^0} \right)^{2Pr_t^0 - 1} T_1 + O\left(\sqrt{c_f + B}\right). \quad (4.25)$$

Здесь и далее T_1 обозначает $T_1(\infty, \infty, 0, \eta)$. Первое из этих соотношений справедливо всюду вне вязкого подслоя, второе — во внешней области пограничного слоя. Таким образом, при произвольном вдуве и умеренном отсосе поток температуры может быть представлен только через функции $p_0(\eta)$ и $f'(\eta)$. Из этого представления видно, что турбулентный поток температуры в степени $1/2Pr_t^0$ имеет логарифмическую асимптотику вблизи стенки.

5. СИЛЬНЫЙ ОТСОС

Зона умеренного отсоса образуется на начальном участке пластины. За ней устанавливается режим сильного отсоса, при котором трение на стенке намного превосходит касательное напряжение во внешней области. При сильном отсосе решение динамической задачи имеет вид [4]

$$\Lambda(\xi) = -\varepsilon^2 b \lambda(s) + O(\varepsilon^3), \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \Psi_w(\xi) + \eta - \varepsilon^2 b g(s, \eta) + O(\varepsilon^3), \\ \Psi_w(\xi) + \frac{d\Psi_w(\xi)}{d\xi} &= \frac{1}{\lambda(s)} + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\frac{c_f}{2} = -\varepsilon^2 b + \varepsilon^4 b^2 t(s) + O(\varepsilon^5), \tag{5.3}$$

где переменная $s = O(1)$ связана с переменной ζ равенством

$$s = \varepsilon^{-1} [\zeta - 2\kappa(-b)^{-1/2}] + \ln \varepsilon + \frac{1}{2} \ln(-b). \tag{5.4}$$

Задающая профиль скорости функция $g_\eta(s, \eta)$ удовлетворяет краевой задаче для уравнения в частных производных [4]. Ее можно представить в виде

$$g_\eta = -\frac{\gamma^2}{4} - \gamma\sqrt{t}, \tag{5.5}$$

где функция $\gamma(s, \eta)$ имеет логарифмическую асимптотику на стенке:

$$\begin{aligned} \gamma(s, \eta) &= -\frac{1}{\kappa} [\ln \eta + A(s) - \ln F_1] + O(\eta^\alpha), \\ \eta &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь $A(s)$ — некоторая функция.

На основании (5.3)

$$q = -t^{-1/2}(s) + O(\varepsilon). \tag{5.7}$$

Толщина пограничного слоя связана с коэффициентом трения на стенке соотношением:

$$\begin{aligned} R_\Delta &= \frac{1}{F_1 \sqrt{c_f/2}} \times \\ &\times \exp \left[\frac{2\kappa}{q} - \frac{2\kappa}{v_+} + A(q) - C_0 + O(\varepsilon) \right], \end{aligned} \tag{5.8}$$

в которое величина A входит как функция параметра q .

Для динамической задачи все искомые величины могут быть рассчитаны [4] только на основе известной функции $f'(\eta)$.

5.1. Внешняя область пограничного слоя

Число Стантона будем искать в виде, аналогичном (5.3),

$$St = -\varepsilon^2 b + (-\varepsilon^2 b)^{k+1} \sigma(s) + O(\varepsilon^{2k+3}), \tag{5.9}$$

где показатель степени k подлежит определению. Таким образом, разложения (5.3), (5.9) предполагают невыполнение условий (4.12), при которых получены соотношения (4.13), (4.14). Из (5.9) и представлений (4.15), (5.3) следует, что профиль температуры при сильном отсосе нужно искать в виде

$$\Phi(\xi, \eta) = (-\varepsilon^2 b)^k p(s, \eta) + O(\varepsilon^{2k+1}), \tag{5.10}$$

а функция $p(s, \eta)$ должна удовлетворять условию срачивания с решением для режима умеренного отсоса:

$$s \rightarrow -\infty, \quad \frac{p(s, \eta) \sqrt{t(s)}}{\sigma(s)} \rightarrow p_0(\eta). \tag{5.11}$$

Подставим разложения (5.1), (5.2), (5.10) в уравнение (2.19) и, учитывая равенство (5.4), перейдем к пределу

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad s = O(1), \quad 1/\eta = O(1).$$

При постоянном тепловом потоке на стенке для координат линии L на фазовой плоскости (2.13) из соотношений (3.2), (5.9) получим оценки

$$z_1 = O(\varepsilon^{2k}), \quad z_2 = O(\varepsilon^{2k}),$$

на основании которых из (2.16) опять следует, что в рассматриваемом приближении выражение для потока температуры не зависит от типа граничного условия на пластине. Таким образом, для функции $p(s, \eta)$ получим уравнение в частных производных:

$$(\eta^2 p_\eta g_{\eta\eta} T)_\eta + (1 + \lambda\eta) p_\eta = \lambda p_s, \tag{5.12}$$

$$p(s, \infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta^2 p_\eta g_{\eta\eta} T = 0.$$

Интегрирование уравнения (5.12) поперек пограничного слоя дает

$$\eta^2 p_\eta g_{\eta\eta} T + p + \lambda \eta p - \lambda \left(1 + \frac{\partial}{\partial s} \right) \int_0^\eta p d\eta + G_1 = 0, \quad (5.13)$$

$$G_1(s) = \lambda(s) \left(1 + \frac{d}{ds} \right) \int_0^\infty p(s, \eta) d\eta. \quad (5.14)$$

Из (5.13), учитывая (5.5) и асимптотику функции $\gamma(s, \eta)$ (5.6), получим асимптотику функции $p(s, \eta)$ на стенке:

$$[p(s, \eta) + G_1(s)]^{1/2 \text{Pr}_t^0} = G_2(s) \left[\frac{\gamma(s, \eta)}{2} + \sqrt{t(s)} \right] + O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (5.15)$$

где $G_2(s)$ — некоторая функция.

Проведем теперь асимптотическое сращивание решений для двух областей — внешней и пристеночной [8]. Из (2.22), (3.1), (5.3) будем иметь

$$v_+ = -\varepsilon \sqrt{-b} + O(\varepsilon^3). \quad (5.16)$$

Перейдем в соотношении (3.11) от переменных стенки к внешним переменным по формулам (3.1), учитывая при этом (5.2), (5.3), (5.9), (5.10); вместо функций $p(s, \eta)$ и $g_\eta(s, \eta)$ подставим их асимптотические представления (5.15) и (5.5), (5.6). В результате получим три равенства:

$$k = \text{Pr}_t^0, \quad G_2(s) = 1, \quad \sigma(s) = G_1(s),$$

из которых второе позволяет замкнуть краевую задачу (5.12) для искомой функций $p(s, \eta)$, а третье с учетом (5.9), (5.14) — вычислить число Стантона через решение этой краевой задачи. Условие сращивания теперь можно записать в виде

$$(p + \sigma)^{1/2 \text{Pr}_t^0} = \gamma/2 + \sqrt{t} + O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (5.17)$$

$$\sigma = \lambda \left(1 + \frac{d}{ds} \right) \int_0^\infty p d\eta. \quad (5.18)$$

Функции $S(\infty, 0, \eta)$, $T(\infty, \infty, 0, \eta)$ в силу уравнений (4.3), (4.9) выражаются через профили скорости

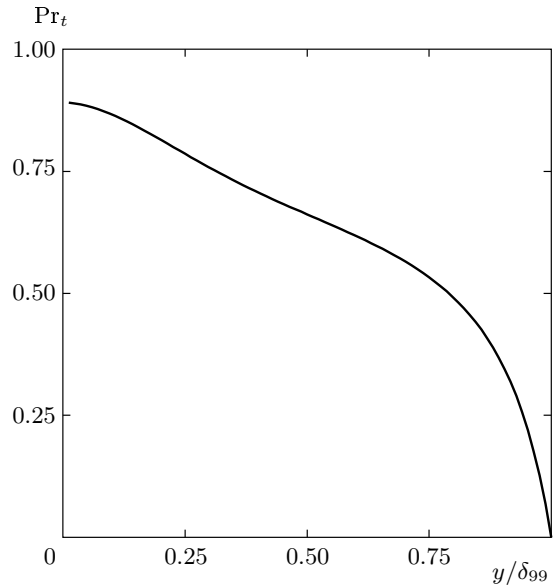


Рис. 4. Турбулентное число Прандтля во внешней области пограничного слоя

и температуры $f'(\eta)$, $p_0(\eta)$ в квадратурах. В частности, турбулентное число Прандтля во внешней области можно представить в виде

$$\text{Pr}_t = \frac{S}{T} = \frac{p'_0[f(\infty) - f + \eta f']}{f''(\eta p_0 + \int_\eta^\infty p_0 d\eta)}, \quad 0 < \eta \leq 1. \quad (5.19)$$

Здесь и далее Pr_t обозначает $\text{Pr}_t(\infty, \infty, 0, \eta)$. Зависимость (5.19) остается справедливой при разных условиях на стенке: вдуве, отсосе, постоянной температуре или постоянном тепловом потоке. Она построена на рис. 4 и хорошо описывает данные измерений (см., например, [13]) всюду кроме области, непосредственно примыкающей к внешней границе пограничного слоя, где по экспериментальным данным $\text{Pr}_t \approx 0.4$, а (5.19) дает значение 0. Это связано с тем, что формулы (4.5), (4.19), на основе которых проведены вычисления, слишком грубо описывают поведение скорости и температуры на внешней границе слоя. Правильный результат мог бы быть получен, если задать при $\eta \rightarrow \infty$ экспоненциальное убывание дефектов скорости и температуры, которое установлено в работе [14].

5.2. Режим, близкий к режиму умеренного отсоса

Режиму умеренного отсоса соответствует предельный переход $s \rightarrow -\infty$ ($\lambda \rightarrow 0$) в уравне-

нии (5.12). Для решения динамической задачи получены следующие разложения [4]:

$$\frac{d\lambda}{ds} = -2\kappa F_1 + O(\tau^2), \quad (5.20)$$

$$\sqrt{t} = \frac{F_1}{\tau} + \frac{A_0 - A_\infty - N_1(0)}{2\kappa} + O(\tau), \quad (5.21)$$

$$\gamma = -\frac{f'}{F_1} + O(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (5.22)$$

где $\tau = 1/\lambda$ и $A_\infty, N_1(0)$ — некоторые постоянные.

Разложение функции p будем искать в виде

$$p = \left(\frac{\tau}{F_1}\right)^{1-2Pr_t^0} p_0(\eta) + \left(\frac{\tau}{F_1}\right)^{2-2Pr_t^0} p_1(\eta) + O(\tau^{3-2Pr_t^0}), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (5.23)$$

Из (5.18), (5.23), принимая во внимание (5.20), будем иметь

$$\sigma = \left(\frac{\tau}{F_1}\right)^{-2Pr_t^0} + \left(\frac{\tau}{F_1}\right)^{1-2Pr_t^0} \times \left[\int_0^\infty \frac{p_1 d\eta}{F_1} + \frac{1-2Pr_t^0}{2\kappa} \right] + O(\tau^{1-2Pr_t^0}). \quad (5.24)$$

Подставляя (5.21), (5.23), (5.24) в соотношение (5.11), получим, что разложение (5.23) удовлетворяет условию срачивания с решением для режима умеренного отсоса.

Подстановка разложений (5.23), (5.24) в левую часть условия срачивания с решением в пристеночной области (5.17) дает

$$\frac{F_1}{\tau} + \frac{p_0}{2Pr_t^0} + \frac{1-2Pr_t^0}{4\kappa Pr_t^0} + \int_0^\infty \frac{p_1 d\eta}{2Pr_t^0 F_1} + O(\tau).$$

Подставляя (5.21), (5.22) в правую часть этого условия, будем иметь

$$\frac{F_1}{\tau} - \frac{f'}{2F_1} + \frac{A_0 - A_\infty - N_1(0)}{2\kappa} + O(\tau).$$

Отсюда, используя асимптотику функций $f'(\eta)$ (4.4) и $p_0(\eta)$ (4.11), для второго члена разложения (5.23) получим

$$\int_0^\infty \frac{p_1 d\eta}{F_1} = \frac{1}{\kappa} \left[Pr_t^0 (E_0 - A_\infty - N_1(0)) + Pr_t^0 - \frac{1}{2} \right].$$

С учетом этого равенства, а также (5.21) и (5.7), соотношение (5.24) можно записать в виде

$$-q\sigma^{1/2Pr_t^0} = 1 + \frac{(A_0 - E_0)q}{2\kappa} + O(q^2), \quad (5.25)$$

$$q \rightarrow -0.$$

5.3. Асимптотический пограничный слой

Предельной формой течения на пластине далеко вниз по потоку является асимптотический пограничный слой — одномерное течение, в котором все усредненные величины зависят только от расстояния до стенки. В этом случае профиль скорости задается в виде [4]

$$g_\eta = -\frac{h^2}{4}, \quad h(\eta) = \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{\eta\sqrt{S}}, \quad (5.26)$$

где функция $h(\eta)$ имеет логарифмическую асимптотику на стенке:

$$h(\eta) = -\frac{1}{\kappa} (\ln \eta + A_\infty - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \alpha > 0.$$

Полагая в формуле (5.13) $\lambda = 0$, получим, учитывая (5.26), что при асимптотическом отсосе функция $p \equiv p_\infty(\eta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\eta h T p'_\infty}{2\sqrt{S}} + p_\infty = 0. \quad (5.27)$$

Условие срачивания (5.17) в рассматриваемом предельном случае имеет вид

$$p_\infty^{1/2Pr_t^0} = \frac{h}{2} + O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0$$

и искомый профиль температуры есть

$$p_\infty = \left(\frac{h}{2}\right)^{2Pr_t} \exp\left(-2 \int_0^\eta \frac{dPr_t}{d\eta} \ln h d\eta\right). \quad (5.28)$$

5.4. Закон теплопередачи при отсосе.

Единый закон теплопередачи

Соотношение (4.14), справедливое при умеренном отсосе и в частном случае непроницаемой пластины, можно записать в виде

$$\left(\frac{St + B}{St}\right)^{1/2Pr_t^0} \left(\frac{2\kappa}{v_+} + C_0 - \gamma(Pr)\right) - \frac{2\kappa}{q} + E_0 - A_0 = O(\varepsilon). \quad (5.29)$$

Здесь учтены условие (5.16) и второе равенство (3.10).

При сильном отсосе σ есть функция только параметра q . Универсальный закон теплопередачи в форме обобщенной аналогии Рейнольдса, применимый во всем диапазоне изменения скорости отсоса, имеет вид

$$\left(\frac{St+B}{St}\right)^{1/2Pr_t^0} \left(\frac{2\kappa}{v_+} + C_0 - \gamma(Pr)\right) - \frac{2\kappa}{q} + E_0 - A_0 = W(q) + O(\sqrt{c_f}), \quad (5.30)$$

$$W = E_0 - A_0 - 2\kappa \left(\sigma^{1/2Pr_t^0} + q^{-1}\right).$$

В справедливости этого соотношения при $1/q = O(1)$ можно убедиться, подставив в его левую часть разложения (5.9), (5.16). При $q \rightarrow 0$ представления (5.29) и (5.30) совпадают в силу асимптотики (5.25).

Единый закон теплопередачи, объединяющий правила подобия (4.20), (5.30), представим следующим образом:

$$\frac{2\kappa\sqrt{c_f/2} + (C_0 - \gamma(Pr))B}{2\kappa\sqrt{c_f/2 + B} + (A_0 - E_0)B} \left(\frac{St+B}{St}\right)^{1/2Pr_t^0} = \frac{1 + W_1(q)}{1 + W_2(v_+, Pr)} + O(\sqrt{c_f + B}). \quad (5.31)$$

Для входящих в правую часть этого соотношения функций имеют место оценки

$$W_1(q) = O(q^2), \quad q \rightarrow 0,$$

$$W_2(v_+, Pr) = O(v_+^2), \quad v_+ \rightarrow 0.$$

Поскольку при вдуве $q = O(\varepsilon)$, правая часть (5.31) зависит только от параметра v_+ и (5.31) совпадает с (4.20), если положить

$$W_2 = \frac{v_+[D(v_+, Pr) - D(0, Pr)]}{2\kappa + (C_0 - \gamma(Pr))v_+}.$$

При отсосе $v_+ = O(\varepsilon)$, правая часть (5.31) есть функция одного параметра q и (5.31) совпадает с (5.30) при

$$W_1 = \frac{qW(q)}{2\kappa + (A_0 - E_0)q}.$$

На рис. 5 данные измерений [12] построены в форме единого закона теплопередачи (5.31). С удовлетворительной точностью экспериментальные точки образуют одну кривую, правая ветвь которой отвечает вдуву, левая — отсосу.

Иное соотношение, известное как предельный закон теплообмена, предложено Кутателадзе и Леонтьевым (см., например, [15]).

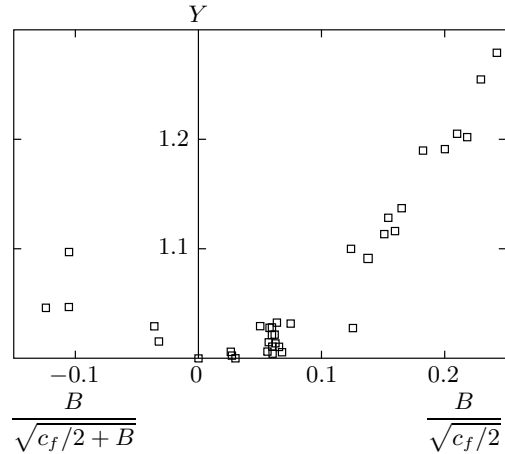


Рис. 5. Экспериментальные данные [12] в форме единого закона теплопередачи; Y — левая часть соотношения (5.31)

5.5. Закон дефекта температуры при отсосе

Закон подобия для температуры можно записать в виде

$$\frac{2Pr_t^0}{\sqrt{-B}} \left(\frac{St+B}{-B}\right)^{1/2Pr_t^0} \times \left[\left(1 - \frac{B(\theta - \theta_e)}{(St+B)(\theta_w - \theta_e)}\right)^{1/2Pr_t^0} - 1 \right] = \varphi(q, \eta) + O(\sqrt{c_f}). \quad (5.32)$$

Согласно соотношению (5.32) профили температуры описываются семейством кривых, зависящих от одного параметра q . Подставляя (5.9), (5.10) в правую часть (5.32), для функции $\varphi(q, \eta)$ получим

$$\varphi = 2Pr_t^0 \left[(p + \sigma)^{1/2Pr_t^0} - \sigma^{1/2Pr_t^0} \right]. \quad (5.33)$$

На основании (5.17), (5.6) функция $\varphi(q, \eta)$ имеет логарифмическую асимптотику на стенке.

Перепишем асимптотическое представление (3.9), справедливое в пристеночной области вне вязкого подслоя, во внешних переменных (3.1), используя выражение для толщины пограничного слоя (5.8) и закон теплопередачи (5.30):

$$2\sigma^{1/2Pr_t^0} \left[\left(1 - \frac{B(\theta - \theta_e)}{(St+B)(\theta_w - \theta_e)}\right)^{1/2Pr_t^0} - 1 \right] = -\frac{1}{\kappa} [\ln \eta + A(q) - \ln F_1] - \frac{2}{q} - 2\sigma^{1/2Pr_t^0} + O(\varepsilon).$$

Левая часть этого равенства с точностью до множителя Pr_t^0 совпадает с левой частью (5.32), а правая часть с учетом (5.17), (5.6) есть асимптотическое

представление функции $\varphi(q, \eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Следовательно, соотношение (5.32) справедливо всюду вне вязкого подслоя.

Закон дефекта температуры (5.32) выполняется во всем интервале изменения параметра подобия q . Переходя в формуле (5.33) к пределу при $q \rightarrow -0$, на основании (5.11), (5.25) будем иметь

$$\varphi(0, \eta) = p_0(\eta). \tag{5.34}$$

В другом предельном случае асимптотического пограничного слоя

$$\varphi(-\infty, \eta) = 2Pr_t^0 p_\infty(\eta)^{1/2Pr_t^0}. \tag{5.35}$$

На рис. 6а в переменных подобия (5.32) даны профили температуры, соответствующие двум предельным случаям — непроницаемой пластине и асимптотическому пограничному слою. Первый профиль построен по формуле (4.19), второй рассчитан на основе представления (5.28). Использован поперечный масштаб

$$\Delta_* = \int_0^\infty Z_3 dy,$$

где Z_3 обозначает левую часть равенства (4.23), вычисленный по профилю скорости из соотношения [4]

$$\frac{\Delta_*}{\Delta} = \int_0^\infty \gamma(q, \eta) d\eta + O(\sqrt{c_f}).$$

Так же как турбулентное число Прандтля, функция p_∞ на основе формул (4.5), (4.19) может быть рассчитана только до границы динамического пограничного слоя.

На рис. 1з в переменных подобия (5.32) представлены данные измерений температуры в пограничном слое, полученные при разных значениях числа Рейнольдса и параметра отсоса [12]. В качестве поперечного масштаба использована величина

$$\Delta_t = \int_0^\infty Z_2 dy,$$

где Z_2 — левая часть равенства (5.32). Поскольку для экспериментальных данных параметр q мал, все профили температуры в согласии с законом подобия (5.32) достаточно близко расположены к кривой, соответствующей непроницаемой пластине. От нее отклоняются только точки, отвечающие вязкому подслою.

Среднеквадратичная пульсация и поток температуры также подчиняются однопараметрическим законам подобия. Вычислим производные температуры и скорости из (5.10), (5.33) и (5.2), (5.5), а функцию T — из уравнения (4.9) и подставим в (2.8), (2.17). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\langle \theta'v' \rangle}{U_e(\theta_w - \theta_e)[St + B + (-B)^{Pr_t^0+1}]} &= \\ &= \left(\eta p_0 + \int_\eta^\infty p_0 d\eta \right) \times \\ &\times \frac{\varphi_\eta \gamma_\eta \left(1 - \frac{q\gamma}{2}\right) \left(\sigma^{1/2Pr_t^0} + \frac{\varphi}{2Pr_t^0}\right)^{2Pr_t^0-1}}{qp_0' f''(\sigma + 1)} + \\ &+ O(\sqrt{c_f}), \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{c_f/2 + B} - B)\sqrt{\langle \theta'^2 \rangle}}{|\theta_w - \theta_e|[St + B + (-B)^{Pr_t^0+1}]} &= -\frac{(q-1)\eta\varphi_\eta}{q(\sigma+1)} \times \\ &\times \left(\sigma^{1/2Pr_t^0} + \frac{\varphi}{2Pr_t^0}\right)^{2Pr_t^0-1} T_1 + O(\sqrt{c_f}). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Представление (5.36) справедливо всюду вне вязкого подслоя, (5.37) — во внешней области пограничного слоя. Соотношения (4.24), (4.25) в силу (5.34), (5.22) получаются из (5.36), (5.37) при малых значениях параметра q . В другом предельном случае $q = -\infty$ на основании (5.35) и уравнения (5.27) эти соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\langle \theta'v' \rangle}{U_e(\theta_w - \theta_e)(-B)^{Pr_t^0+1}} &= p_\infty + O(\sqrt{c_f}), \\ \frac{\sqrt{\langle \theta'^2 \rangle}}{|\theta_w - \theta_e|(-B)^{Pr_t^0}} &= \frac{2p_\infty Pr_t T_1}{h\sqrt{S}} + O(\sqrt{c_f}). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Как видно из (5.36), турбулентный поток температуры в степени $1/2Pr_t^0$ имеет логарифмическую асимптотику вблизи стенки.

На рис. 6б в переменных подобия (5.36) построены профили потока температуры для ряда значений параметра q . Расчеты выполнены на основе представлений (4.24), (5.38).

Вычислив интегральные характеристики профилей скорости и температуры из (5.2), (5.10), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t(c_f/2 + B + B^2)}{\delta^*[St + B + (-B)^{Pr_t^0+1}]} &= \\ &= -\frac{(q^2 + 1)}{q^2(\sigma + 1)g(s, \infty)} \int_\eta^\infty p d\eta + O(\sqrt{c_f}). \end{aligned} \tag{5.39}$$

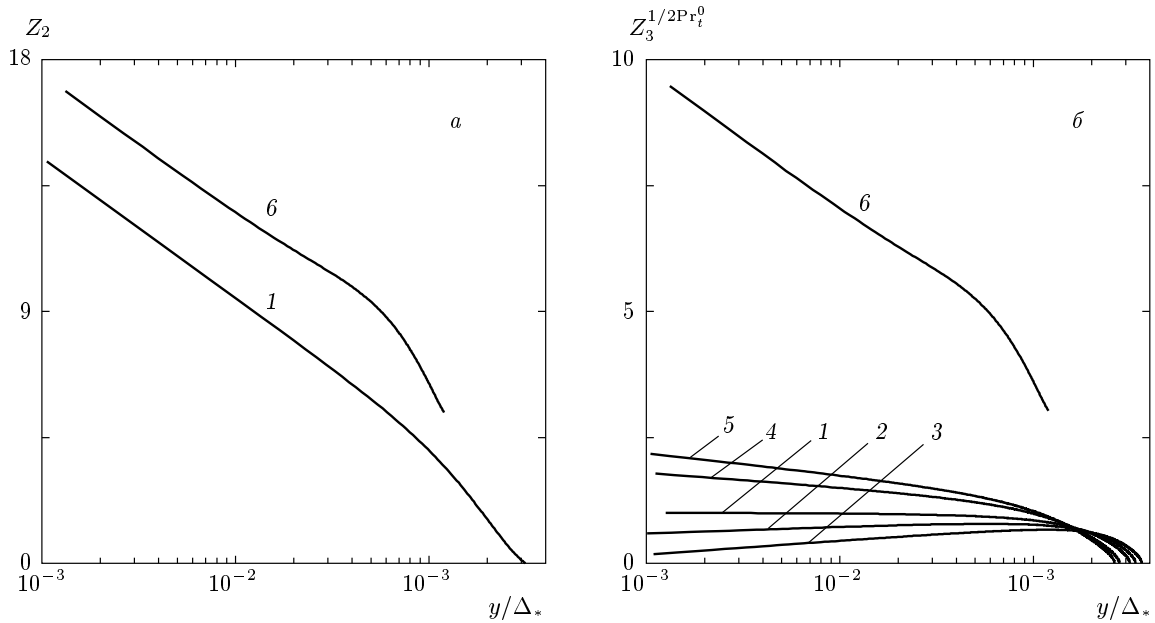


Рис. 6. Расчетные профили температуры (а) и потока температуры (б) в пограничном слое: $q = 0$ (1), 0.05 (2), 0.1 (3), -0.1 (4), -0.15 (5), $-\infty$ (6); Z_3 — левая часть соотношения (5.36)

Правая часть (5.39) есть функция только параметра q . Поскольку, как следует из (5.5), (5.22)

$$g(s, \infty) \rightarrow F_1/q, \quad s \rightarrow -\infty \quad (q \rightarrow -0)$$

и выполняется соотношение (5.11), правило подобия (5.39) в пределе при $q \rightarrow -0$ переходит в соотношение (4.18).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для теплового турбулентного пограничного слоя на пластине с равномерным вдувом и отсосом получено условие замыкания в виде универсальной зависимости потока тепла от градиентов усредненных скорости и температуры. Умеренный продольный градиент температуры на пластине не влияет на эту зависимость, которая, в частности, не меняется, если заданы постоянная температура или постоянный тепловой поток на стенке. Вне вязкого подслоя она может быть определена по двум эмпирическим функциям — построенным в переменных подобия профилям скорости и температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине.

На основе полученного ранее решения динамической задачи в результате асимптотического анализа уравнения переноса тепла установлены законы подобия для основных тепловых величин. При вдуве температура вне вязкого подслоя имеет универсаль-

ное распределение, известное из экспериментальных данных для непроницаемой пластины, а при отсосе описывается семейством кривых, зависящих от одного параметра q . Среднеквадратичная пульсация и поперечный поток температуры также подчиняются однопараметрическим законам подобия, причем при вдуве (малые значения q) тепловой поток выражается через две функции — профили скорости и температуры в пограничном слое на непроницаемой пластине.

При отсосе температура, поток температуры и теплопередача на стенке также могут быть рассчитаны только на основе этих двух функций. Для определения среднеквадратичной пульсации температуры нужно дополнительно знать профиль этой величины в пограничном слое на непроницаемой пластине.

Связь между тепловым потоком, трением и поперечной скоростью на стенке может быть описана функцией одной переменной. Универсальный закон теплопередачи справедлив во всем диапазоне параметров от скоростей отсоса, соответствующих асимптотическому пограничному слою, до скоростей вдува, вызывающих оттеснение потока.

Работа выполнена в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6791.2006.1) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-08-33384).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Операторы, инвариантные относительно выбора системы единиц измерения физических величин

Классическая П-теорема устанавливает вид функциональной зависимости между физическими величинами, исходя из того факта, что эта зависимость должна быть инвариантна относительно выбора единиц измерения [16]. Функциональные связи, однако, являются не единственным возможным способом математического описания реальных физических процессов. Интересующие нас физические параметры обычно сами представляют собой функции, например, пространственных координат и времени. Если в рассматриваемом процессе связь между определяющими параметрами имеет нелокальный характер, физическая закономерность может быть описана с помощью отображения (оператора). Операторные соотношения, так же как и в случае зависимостей функционального типа, должны иметь специальную структуру, обусловленную природой входящих в соотношение физических величин. Такие отображения подчиняются условиям инвариантности относительно определенных групп преобразований, и универсальным инструментом исследования в общем случае являются методы теории групп Ли (см., например, [17]).

Далее исследуется общий вид оператора, выражающего определенную физическую закономерность, при условии инвариантности оператора относительно выбора единиц измерения физических величин. Рассматриваются операторы, зависящие от вектор-функции векторного аргумента, т. е. от m функций n независимых переменных. Для относительно простого случая одной допустимой группы растяжений искомое представление найдено без непосредственного использования результатов общей теории [17].

Пусть характеристиками рассматриваемого физического процесса являются скалярная функция g и вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ векторного аргумента $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Исследуем операторную связь вида

$$g = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{a}; \mathbf{f}(\mathbf{x})]. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l)$ — вектор постоянных и переменных определяющих параметров задачи, от которого зависит функция g . При фиксированной вектор-функции \mathbf{f} оператор $\tilde{\mathbf{F}}$ представляет собой обычную функцию нескольких переменных.

Предположим, что величины, входящие в соотношение (П.1), имеют размерный характер, а оператор $\tilde{\mathbf{F}}$ задает некоторую физическую закономерность, не зависящую от выбора системы единиц измерения. Это означает, что, если любой другой системе единиц измерения отвечают численные значения переменных g^* , \mathbf{a}^* , \mathbf{x}^* и функция $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)$, то из (П.1) необходимо следует равенство

$$g^* = \tilde{\mathbf{F}}[\mathbf{a}^*; \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*)].$$

Будем для определенности считать, что компоненты векторов \mathbf{a} , \mathbf{x} , \mathbf{f} принимают только положительные значения.

Далее используется понятие функционала от линии или в общем случае от гиперповерхности. Согласно работе [6] функционалом от гиперповерхности называется отображение, ставящее в соответствие гиперповерхности S как геометрическому объекту определенное число $\tilde{\mathbf{G}}[S]$. Для гиперповерхности S , заданной в векторном пространстве \mathbf{z} размерности p в параметрическом виде $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{s})$, \mathbf{s} — вектор размерности r ($r < p$), $\tilde{\mathbf{G}}[S]$ есть функционал $\tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{h}(\mathbf{s})]$, инвариантный относительно способа параметрического задания гиперповерхности. Для любой другой параметризации $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{t})$ с неравным нулю якобианом $\det(\partial \mathbf{s} / \partial \mathbf{t}) \neq 0$ выполняется равенство

$$\tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{h}(\mathbf{s})] = \tilde{\mathbf{G}}[\mathbf{h}(\mathbf{s}(\mathbf{t}))].$$

Лемма 1. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ может быть однозначно определена по значениям $f(x^0)$, $f'(x^0)$ в одной точке x^0 и линии L , заданной на фазовой плоскости (z_1, z_2) параметрически:

$$z_1 = x \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad z_2 = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \quad (\text{П.2})$$

Доказательство Леммы 1 элементарно.

Формулировка аналогичной леммы для вектор-функции векторного аргумента требует некоторых дополнительных построений. Рассмотрим матрицу \mathbf{F} , элементами которой являются частные производные:

$$\mathbf{F} = \|F_{ij}\| = \frac{\partial \ln \mathbf{f}}{\partial \ln \mathbf{x}}, \quad d \ln \mathbf{f} = \mathbf{F} d \ln \mathbf{x}. \quad (\text{П.3})$$

Для каждой функции $f_i(\mathbf{x})$ образуем квадратную матрицу вторых производных:

$$\mathbf{T}^{(i)} = \|T_{jk}^{(i)}\| = \left\| \frac{\partial^2 \ln f_i}{\partial \ln x_j \partial \ln x_k} \right\|, \\ i = 1, \dots, m, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь объединенную матрицу \mathbf{S} , строками которой являются все mn строк матриц $\mathbf{T}^{(i)}$. Матрица \mathbf{S} имеет n столбцов, поэтому ее ранг не может быть больше n . Далее будем рассматривать только невырожденный случай, когда ранг объединенной матрицы точно равен n . Пусть \mathbf{T} — какой-либо минор размерности n , определитель которого в рассматриваемой области не равен нулю. Его элементы $T_{jk} = T_{\beta k}^{(\alpha)}$, где $\alpha(j)$ и $\beta(j)$ — функции, принимающие определенные целочисленные значения в интервалах соответственно от 1 до m и от 1 до n . Введем вектор-функцию $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ с элементами $y_j = F_{\alpha\beta}$, для которой должно выполняться соотношение

$$d\mathbf{y} = \mathbf{T} d\ln \mathbf{x}. \quad (\text{П.4})$$

Вектор \mathbf{y} , таким образом, состоит из n функционально независимых элементов матрицы \mathbf{F} . Очевидно, что для заданной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ вектор \mathbf{y} и матрица \mathbf{T} в общем случае могут быть выбраны не единственным образом. Каждому варианту отвечают определенные функции $\alpha(j)$ и $\beta(j)$. Общее число вариантов есть число различных ненулевых миноров размерности n объединенной матрицы \mathbf{S} .

Лемма 2. Дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ может быть однозначно определена по значениям $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{f}^0$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$ в одной точке \mathbf{x}^0 и гиперповерхности S , заданной в фазовом пространстве $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$ параметрически:

$$z_q = F_{ij}(\mathbf{x}), \quad z_r = T_{jk}(\mathbf{x}).$$

Размерность фазового пространства p , таким образом, определяется числом не равных нулю элементов матрицы \mathbf{F} и независимых элементов матрицы \mathbf{T} .

Доказательство Леммы 2. Пусть гиперповерхность S задана параметрически с помощью матриц $\mathbf{U}(\mathbf{s})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{s})$:

$$z_q = U_{ij}(\mathbf{s}), \quad z_r = V_{jk}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n).$$

Для любой параметризации должно существовать преобразование $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ с ненулевым якобианом $\det(\partial \mathbf{s} / \partial \mathbf{x}) \neq 0$, такое что

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{s}(\mathbf{x})) = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (\text{П.5})$$

где матрицы \mathbf{F} и \mathbf{T} выражаются через искомую функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Разрешим систему уравнений (П.4):

$$d\ln \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad (\text{П.6})$$

$$d\ln \mathbf{f} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{y}. \quad (\text{П.7})$$

Соотношение (П.7) получено подстановкой (П.6) в (П.3). С учетом (П.5) перейдем в (П.6), (П.7) к переменной \mathbf{s} :

$$d\ln \mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{s}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s},$$

$$d\ln \mathbf{f} = \mathbf{U}(\mathbf{s}) \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{s}) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s}. \quad (\text{П.8})$$

Здесь $y_j(\mathbf{s}) = U_{\alpha\beta}(\mathbf{s})$.

Для функций $\ln x_j$, $\ln f_i$, таким образом, получены уравнения в полных дифференциалах, условия интегрируемости которых по построению должны выполняться тождественно.

Вектор \mathbf{s}^0 , для которого $\mathbf{x}(\mathbf{s}^0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{f}(\mathbf{s}^0) = \mathbf{f}^0$, определим из системы уравнений

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}^0) = \mathbf{y}^0. \quad (\text{П.9})$$

Для якобиевой матрицы уравнения (П.9) имеет место представление

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{s}^0)}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{V}(\mathbf{s}^0) \mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{s}^0)}{\partial \mathbf{s}}, \quad (\text{П.10})$$

где элементы матрицы \mathbf{X} есть $X_{jk} = \delta_{jk} / x_j^0$, δ_{jk} — символы Кронекера. Условие разрешимости системы (П.9) выполняется, поскольку детерминанты всех трех матриц, стоящих в правой части (П.10), отличны от нуля.

Таким образом, функции $\ln x_j(\mathbf{s})$, $\ln f_i(\mathbf{s})$ могут быть однозначно определены из уравнений (П.8) с помощью квадратур в замкнутом виде, что и доказывает Лемму 2.

Выберем для входящей в (П.1) вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ характерное значение аргумента \mathbf{x}^0 и построим согласно Лемме 2 гиперповерхность S в фазовом пространстве. Легко видеть, что гиперповерхность S не зависит от системы единиц измерения, в которой задана функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Соотношение (П.1) можно записать в виде

$$g = \tilde{G}[\mathbf{a}, \mathbf{x}^0, \mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \mathbf{y}(\mathbf{x}^0); S]. \quad (\text{П.11})$$

Очевидно, что могут не учитываться те из новых аргументов оператора (П.11), которые выражаются через параметры a_1, \dots, a_l . Пусть среди переменных a_1, \dots, a_l , x_1^0, \dots, x_n^0 , $f_1(\mathbf{x}^0), \dots, f_m(\mathbf{x}^0)$ имеется k ($1 \leq k \leq l + n + m$) величин с независимыми размерностями. Обозначим через Π приведенную к безразмерному виду с помощью этих k параметров функцию g , а через $\Pi_1, \dots, \Pi_{l+n+m-k}$ — безразмерные

комбинации, составленные из первых $l + n + m$ аргументов оператора (П.11). Остальные аргументы оператора выбраны так, что они инвариантны относительно произвольных растяжений переменных. Поскольку соотношение (П.11) по предположению выполняется в любой системе единиц измерения, численные значения переменных с независимыми размерностями могут варьироваться произвольно, что позволяет сократить число аргументов оператора на k единиц [18]. Следовательно, соотношения (П.1) и (П.11) эквивалентны операторной связи

$$\Pi = \tilde{H}[\Pi_1, \dots, \Pi_{l+n+m-k}, \mathbf{y}(\mathbf{x}^0); S]. \quad (\text{П.12})$$

Таким образом, инвариантный относительно выбора системы единиц измерения оператор, зависящий от m функций n переменных, может быть представлен в виде функционала от инвариантной гиперповерхности в фазовом пространстве и некоторого количества безразмерных параметров.

В частном случае оператора от функции одной переменной $g = \tilde{F}[a_1, \dots, a_l; f(x)]$ из (П.12) получим

$$\Pi = \tilde{H} \left[\Pi_1, \dots, \Pi_{l-k+2}, x^0 \frac{f'(x^0)}{f(x^0)}; L \right].$$

Здесь L — линия на фазовой плоскости, построенная согласно Леммы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Вигдорович, ДАН **337**, 39 (1994).
2. И. И. Вигдорович, ЖЭТФ **126**, 1180 (2004).
3. И. И. Вигдорович, ПММ **69**, 788 (2005).
4. И. И. Вигдорович, ЖЭТФ **128**, 859 (2005).
5. И. И. Вигдорович, Изв. АН, МЖГ, № 4, 106 (1993).
6. В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1982).
7. D. Coles, J. Fluid Mech. **1**, Pt. 2, 191 (1956).
8. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва (1967).
9. Б. А. Кадер, А. М. Яглом, *Итоги науки и техн., сер. Механика жидкости и газа*, ВИНТИ, Москва (1980), т. 18, с. 81.
10. Т. Себиси, П. Брэдшоу, *Конвективный теплообмен*, Мир, Москва (1987).
11. Р. Н. Hoffmann and A. E. Perry, Int. J. Heat Mass Transfer **22**, 39 (1979).
12. D. G. Whitten, W. M. Kays, and R. J. Moffat, *Rep. HMT-3*, Stanford Univ. (1967).
13. R. L. Simpson, R. J. Moffat, and D. G. Whitten, Int. J. Heat Mass Transfer **13**, 125 (1970).
14. M. Oberlack, J. Fluid Mech. **427**, 299 (2001).
15. С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев, *Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
16. П. В. Бриджмен, *Анализ размерностей*, ГТТИ, Ленинград-Москва (1934).
17. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1978).
18. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, Москва (1977).