

ДИНАМИКА ВИХРЕВОЙ ПАРЫ В РАДИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Е. Ю. Банникова*, В. М. Конторович**

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
61002, Харьков, УкраинаХарьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61077, Харьков, Украина

Г. М. Резник***

Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 декабря 2006 г.

Получено решение плоской задачи о движении пары вихрей в радиальном потоке. Показано, что при определенных соотношениях между параметрами вихревые пары могут совершать попятное движение в ограниченной части плоскости. После прохождения области источника течения вихревые пары изменяют скорость поступательного движения. В случае расходящегося потока они замедляются, в случае сходящегося потока — ускоряются. Вращательное движение двух вихрей одного знака при наличии радиального потока переходит в движение по логарифмической спирали. Задача может иметь астрофизические и геофизические применения.

PACS: 47.32.C-, 95.30.Lz, 98.54.-h

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде астрофизических и геофизических задач возникает ситуация, в которой система вихрей (в простейшем случае вихревая пара) взаимодействует с расходящимся (или сходящимся) радиальным потоком. Примером подобных движений в астрофизике может служить дипольно-вихревая модель активных ядер галактик (АЯГ) [1]. В этой модели предполагается, что обнаруженные в АЯГ «затеняющие»¹⁾ торы [2–5] являются тороидальными вих-

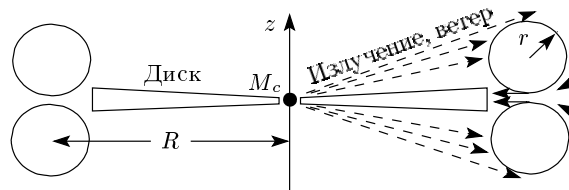


Рис. 1. Дипольно-вихревая модель затеняющих торов в АЯГ (сечение плоскостью симметрии) [1]; M_c — центральная масса, R — большой радиус тора

*E-mail: bannikova@astron.kharkov.ua

**E-mail: vkont@ira.kharkov.ua

***E-mail: greznik11@yahoo.com

¹⁾ Идея затеняющих торов лежит в основе унифицированной модели АЯГ [3, 4], в которой различие между такими типами активных ядер, как радиогалактики и квазары (а также между разными типами сейфертовских галактик), связано с положением затеняющих торов относительно луча зрения. Например, в случае квазаров можно наблюдать центральную область АЯГ, примыкающую к черной дыре в центре галактики, а в случае радиогалактики центральная область закрыта для наблюдателя поверхностью тора. В 2004 г. затеняющие торы были обнаружены прямыми наблюдениями в инфракрасном диапазоне с помощью рекордных наблюдений на 8-метровом оптическом интерферометре Южной Европейской Обсерватории [5] и идея затеняющих торов получила прямое подтверждение.

рями, в которых самогравитация уравновешивается центробежными силами [6]. (Возможные применения к геофизике мы обсудим в конце статьи.)

Вихревой характер движений в затеняющем торе превращает его из чисто геометрического объекта в динамический объект, что позволяет описывать динамические явления в АЯГ. Возникновение вихревого движения может быть связано со взаимодействием тора с радиальным потоком ветра и излучения из центральной части АЯГ. Это же взаимодействие обеспечивает дипольный характер вихревых движений в торе (рис. 1).

В связи со сказанным представляет интерес рас-

смотреть гидродинамическую задачу о взаимодействии вихрей с радиальным потоком. Оказалось, что подобные задачи не рассматривались ранее. Простейшей из них является плоская задача о взаимодействии радиального потока с дипольной вихревой парой (схему движений в которой можно представить из рис. 1, но теперь мы ограничиваемся чисто двумерной задачей). В данной работе получено ее точное решение для движения вихрей в идеальной жидкости. Возможные обобщения, также допускающие точные решения, рассмотрены в конце статьи.

2. ПЛОСКИЕ ВИХРИ В РАДИАЛЬНОМ РАСХОДЯЩЕМСЯ ПОТОКЕ

Исходное уравнение для функции тока на плоскости имеет вид [7]

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) = 0, \quad (1)$$

где скорость течения \mathbf{v} определяется через функцию тока ψ согласно соотношениям

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta \psi = \text{rot}_z \mathbf{v},$$

а $J(\alpha, \beta)$ — якобиан. Уравнение (1) представляет собой проекцию на ось z уравнения сохранения завихренности в двумерном случае, имеющего вид

$$\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2)$$

Выделим в функции тока регулярную часть ψ_r , описывающую поток, и сингулярные компоненты ψ_s , описывающие точечные вихри:

$$\psi = \psi_r + \psi_s, \quad (3)$$

где

$$\psi_s = \frac{1}{2\pi} \sum_m A_m \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|,$$

A_m — интенсивность m -го вихря, а \mathbf{r}_m — его радиус-вектор²⁾.

Сингулярная компонента удовлетворяет уравнению Пуассона [9, 10]

$$\Delta \psi_s = \sum_m A_m \delta(x - x_m) \delta(y - y_m). \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (1), получаем уравнение для функции тока

$$\frac{\partial \Delta \psi_r}{\partial t} + J(\psi_s + \psi_r, \Delta \psi_r) = 0 \quad (5)$$

²⁾ Используется подход, развитый в работе одного из авторов [8].

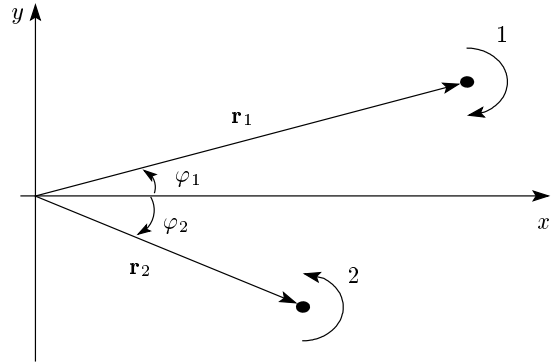


Рис. 2. Два точечных вихря, 1 и 2, в декартовых и полярных координатах. Направления стрелок соответствуют $A_1 < 0, A_2 > 0$

и выражения для компонент скорости m -го вихря:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\left. \frac{\partial(\psi_r + \psi_s^m)}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}, \\ \dot{y}_m &= \left. \frac{\partial(\psi_r + \psi_s^m)}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ψ_s^m — функция тока ψ_s без вклада m -го вихря.

Выберем регулярную компоненту ψ_r , описывающую радиальный расходящийся поток с источником в начале координат³⁾, в виде

$$\psi_r = -Q\varphi, \quad Q = \text{const} > 0. \quad (7)$$

Тогда завихренность потока вне источника обращается в нуль:

$$\Delta \psi_r = \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (5) удовлетворяется тождественно, а выражения (6) с учетом (7) дают

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\left. \frac{\partial \psi_s^m}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} + Q \frac{x_m}{r_m^2}, \\ \dot{y}_m &= \left. \frac{\partial \psi_s^m}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_m} + Q \frac{y_m}{r_m^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае двух вихрей (рис. 2) уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{A_2}{2\pi} \frac{y_{12}}{r_{12}^2} + Q \frac{x_1}{r_1^2}, & \dot{y}_1 &= \frac{A_2}{2\pi} \frac{x_{12}}{r_{12}^2} + Q \frac{y_1}{r_1^2}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{A_1}{2\pi} \frac{y_{12}}{r_{12}^2} + Q \frac{x_2}{r_2^2}, & \dot{y}_2 &= -\frac{A_1}{2\pi} \frac{x_{12}}{r_{12}^2} + Q \frac{y_2}{r_2^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

³⁾ Заметим, что используемое приближение несжимаемой жидкости неприменимо на малых расстояниях от источника (стока) радиального течения, определяемых величиной скорости звука.

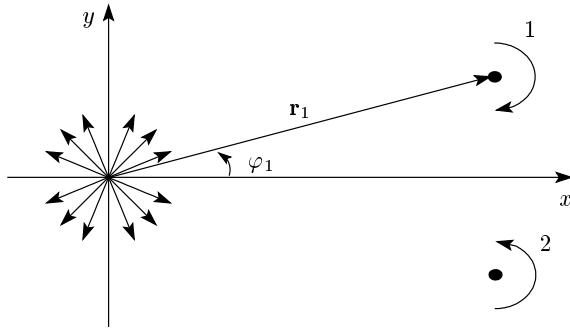


Рис. 3. Пара вихрей в расходящемся радиальном потоке

Здесь $(x_{12}, y_{12}) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Пусть $A_2 = -A_1$ (вихревая пара) и вихри в начальный момент расположены симметрично относительно оси x (рис. 3). Тогда $x_{12} = 0$, $y_2 = -y_1$ и достаточно следить за движением одной из компонент пары $y = y_1 > 0$, для которой уравнения (10) приводятся к виду

$$\dot{x} = -\frac{A}{4\pi y} + Q \frac{x}{r^2}, \tag{11a}$$

$$\dot{y} = Q \frac{y}{r^2}. \tag{11б}$$

Здесь $x = x_1 = x_2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = A_2 > 0$. Как известно [11], в отсутствие потока такая пара движется поступательно со скоростью $A/4\pi y$ в отрицательном направлении оси x . Из уравнения (11б) следует, что $\dot{y} > 0$, т.е. для расходящегося потока расстояние между вихрями увеличивается, а взаимодействие между ними (первый член в уравнении (11a)) уменьшается.

3. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА И ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Можно выписать гамильтониан H для произвольной системы вихрей, удовлетворяющей уравнениям (9):

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \neq n} A_m A_n \ln r_{mn} - Q \sum_m A_m \operatorname{arcctg} \frac{x_m}{y_m}.$$

Для этого достаточно умножить уравнения (9) на A_m и проверить, что

$$\dot{x}_m \frac{\partial H}{\partial x_m} + \dot{y}_m \frac{\partial H}{\partial y_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

в силу чего

$$A_m \dot{x}_m = -\frac{\partial H}{\partial y_m}, \quad A_m \dot{y}_m = \frac{\partial H}{\partial x_m}.$$

Исходные уравнения для пары вихрей, движущейся симметрично по отношению к источнику, помещенному в начало координат (уравнение (11)), в декартовых координатах приводятся к канонической форме

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{12}$$

с гамильтонианом H , не зависящим явно от времени:

$$H(x, y) = \frac{A}{4\pi} \ln y - Q \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}. \tag{13}$$

Его собственное значение — «энергия» E (первый интеграл системы (11)) параметризует траекторию пары, что может быть записано в виде

$$E = \frac{A}{4\pi} \ln y - Q \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, \tag{14}$$

где фаза движения по траектории, $\Phi \equiv \operatorname{arcctg}(x/y)$, равна

$$\Phi = \frac{A}{4\pi Q} \ln y - \frac{E}{Q}. \tag{15}$$

В зависимости от соотношения между параметрами вихря и ветра возможен случай попятного движения пары между x_- и x_+ , где

$$x_{\pm} = y \frac{2\pi Q}{A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{A}{2\pi Q} \right)^2} \right). \tag{16}$$

В точках x_{\pm} производная \dot{x} меняет знак. Для существования этих точек поворота должно выполняться неравенство

$$(2\pi Q/A)^2 \geq 1. \tag{17}$$

При $A > 0$ пара движется в отрицательном направлении оси x . Бесконечности отвечают следующие значения фазы Φ :

$$\begin{aligned} \Phi = +0, \quad x = +\infty, \\ \Phi = \pi - 0, \quad x = -\infty. \end{aligned} \tag{18}$$

При $A < 0$ пара движется в положительном направлении оси x . Аргумент котангенса лежит при этом в интервале $(-\pi, 0)$ и бесконечности отвечают следующие значения фазы Φ :

$$\begin{aligned} \Phi = -0, \quad x = -\infty, \\ \Phi = -\pi + 0, \quad x = +\infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Удобно рассматривать движение вихрей в полярных координатах:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi = \operatorname{arcctg}(x/y).$$

В этом случае уравнения (11) принимают вид

$$\dot{r} = -\frac{A}{4\pi r} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{Q}{r}, \quad (20a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{4\pi r^2}. \quad (20б)$$

Эти уравнения также можно представить в гамильтоновой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi}, \\ \tilde{H} &= \frac{A}{4\pi} \ln \xi + \frac{A}{4\pi} \ln \sin^2 \varphi - 2Q\varphi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\xi = r^2$, а гамильтониан $\tilde{H}(\xi, \varphi)$ в два раза больше гамильтониана $H(x, y)$ для той же системы в декартовых координатах, $\tilde{H} = 2H$. Таким образом, гамильтоновы уравнения движения в этих координатах принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2Q - \frac{A}{2\pi} \operatorname{ctg} \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{A}{4\pi \xi}. \end{aligned} \quad (22)$$

Минимальное расстояние r_* до центра (источника) достигается при значении полярного угла $\varphi_* = \operatorname{arcctg}(4\pi Q/A)$. Уравнение траектории $r(\varphi)$, параметризуемое собственным значением гамильтониана, явно разрешается относительно расстояния до центра:

$$\xi(\varphi) \equiv r^2(\varphi) = \exp\left(\frac{8\pi}{A}E + \frac{8\pi Q}{A}\varphi - \ln \sin^2 \varphi\right), \quad (23)$$

где мы использовали $\tilde{E} = 2E$, а величина E определяется формулой (14). Уравнение (20б) с учетом соотношения (23) интегрируется в квадратурах:

$$t - t_0 = \frac{4\pi}{A} \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi_1 \exp[2(\mu + \lambda\varphi_1) - \ln \sin^2 \varphi_1], \quad (24)$$

где

$$\mu = \frac{4\pi E}{A}, \quad \lambda = \frac{4\pi Q}{A}$$

и $t(\varphi)$ выражается через элементарные функции. Обращение этой функции, а также нахождение расстояния как функции времени $r(t)$ может быть проделано численно.

Возвращаясь к уравнению траектории в декартовых координатах:

$$x = y \operatorname{ctg} \left[\frac{A}{4\pi Q} \ln y - \frac{E}{Q} \right], \quad (25)$$

найдем расстояние между компонентами пары на бесконечном удалении от источника. В соответствии с соотношениями (19) имеем

$$\begin{aligned} y_{+\infty} &= \exp\left(\frac{4\pi E}{A}\right), \\ y_{-\infty} &= \exp\left[\frac{4\pi(E + \pi Q)}{A}\right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Расстояние между вихрями в паре увеличивается в $\exp(4\pi^2 Q/A)$ раз после прохождения области потока.

4. СДУВАНИЕ КОМПОНЕНТ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ ПОТОКОМ

Выберем значения энергии так, чтобы попасть на требуемую траекторию. Например, для траектории с попятным движением должно выполняться условие (17). Рассматривая уравнение (16) совместно с уравнением траектории, представим его в виде

$$x_{\pm} = y_{\pm} \frac{2\pi Q}{A} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{A}{2\pi Q}\right)^2} \right], \quad (27)$$

где y_{\pm} определим согласно

$$y_{\pm} = \exp\left[\frac{4\pi}{A}(E + Q \operatorname{arcctg} \Psi_{\pm})\right] \quad (28)$$

через значения фазы

$$\Psi_{\pm} = \frac{2\pi Q}{A} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{A}{2\pi Q}\right)^2} \right]. \quad (29)$$

Выбираем подходящее значение y_0 , попадающее в допустимый интервал, определяемый предельными значениями (26), и достаточно близкое к положению точки поворота. Из уравнения траектории находим соответствующее ему значение x_0 и строим численно траекторию и соответствующий ей график $x(y)$. Обращая график, находим требуемую функцию $y(x)$.

Из рис. 4 видно, что приходящая из положительной бесконечности по x вихревая пара по мере приближения к источнику ветра расходится и в определенной части траектории при подходящих параметрах может совершать действительно попятное движение. После этого, оказавшись на достаточно большом расстоянии от источника ветра, где влияние его ослабевает, пара продолжает движение в прежнем направлении, определяемом знаком циркуляции. Она выходит на асимптотику на отрицательной бесконечности с изменившимся (увеличившимся в соответствии с уравнениями (26)) расстоянием между компонентами.

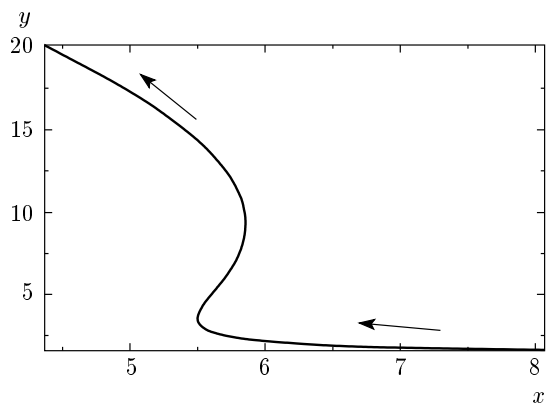


Рис. 4. Траектория вихря в области попятного движения. Пара приходит справа. Выбранные параметры $Q = 1$, $A = 2\pi - 0.6$, $E = 0$ соответствуют траектории, проходящей через точку $x_0 = 6.17$, $y_0 = 2$

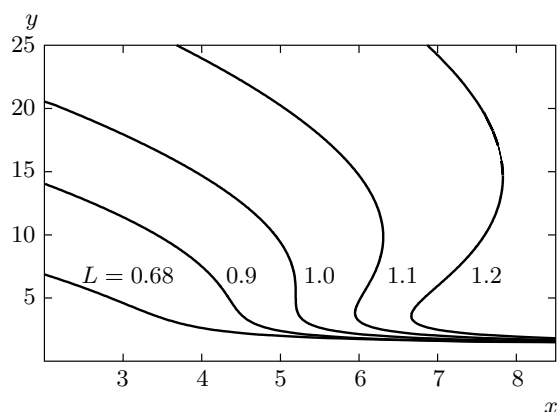


Рис. 5. Траектории вихря при различных значениях безразмерного параметра $L = 2\pi Q/A$ и $E = 0$. Кривая, соответствующая значению $L = 1.0$, разделяет области с попятным движением вихря ($L > 1$) и движения без точек поворота ($L < 1$)

Можно также построить траектории вихрей в центральном потоке, численно решая дифференциальные уравнения пары (11), используя упомянутые значения x_0 и y_0 в качестве начальных (см. подпись к рис. 4). Семейство траекторий, содержащих и не содержащих область попятного движения, показано на рис. 5.

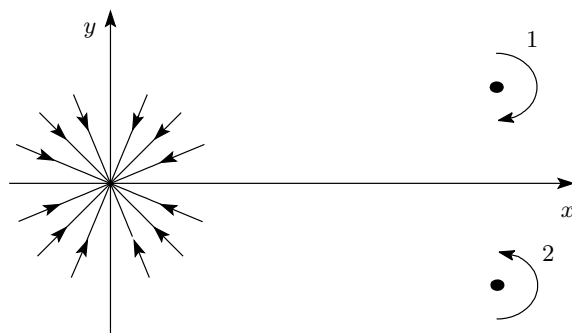


Рис. 6. Пара вихрей в сходящемся потоке (схема в декартовых осях)

5. УСКОРЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ РАДИАЛЬНЫМ СХОДЯЩИМСЯ ПОТОКОМ

Пусть радиальный поток является сходящимся (рис. 6). В этом случае в приведенных уравнениях величина $Q < 0$ и ее удобно заменить согласно $Q = -P = \text{const} < 0$. При этом выражение для регулярной компоненты функции тока переписывается в виде

$$\psi_r = -Q\varphi = P\varphi. \tag{30}$$

Тогда, согласно уравнению (11б), $\dot{y} < 0$ и расстояние между вихрями уменьшается. Расстояние между компонентами пары на бесконечности в соответствии с соотношениями (18) равно

$$\begin{aligned} y_{+\infty} &= \exp\left(\frac{4\pi E}{A}\right), \\ y_{-\infty} &= \exp\left[\frac{4\pi(E - \pi P)}{A}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Из выражений (31) следует, что после прохождения мимо стока расстояние между центрами вихрей уменьшается в $\exp(4\pi^2 P/A)$ раз.

Следуя той же схеме, что и выше, находим траекторию движения пары. Видно, что расстояние между компонентами пары, приходящей из бесконечности, уменьшается, а в определенной части траектории вблизи стока при подходящих параметрах вихри могут совершать попятное движение (рис. 7). При этом, оказавшись на достаточно близком расстоянии от стока, пара приобретает дополнительную скорость благодаря уменьшению расстояния между ее компонентами и, пройдя вторую точку поворота, продолжает движение с большей скоростью в прежнем направлении, определяемом знаком циркуляции. Пара выходит на асимптотику на отрица-

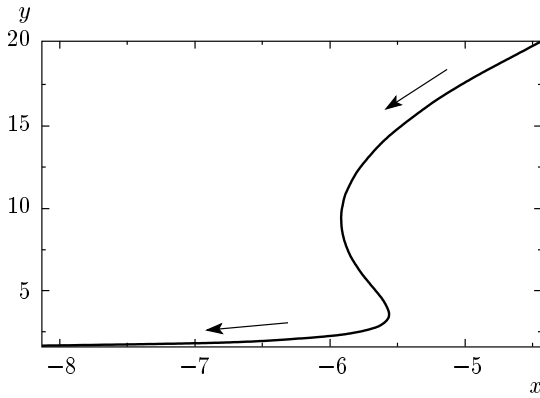


Рис. 7. Траектория вихря (компоненты пары) в области попятного движения. Пара приходит справа. Выбранные параметры соответствуют $P = -Q = 1$, $A = 2\pi - 0.6$, $E = 0$

тельной бесконечности с уменьшившимся расстоянием между компонентами и соответственно увеличившейся скоростью движения. В рассмотренном нами примере (рис. 7) скорость пары, «выброшенной» из области стока, увеличилась на три порядка.

6. ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ

Гамильтониан (21) в полярных координатах можно представить в виде

$$\tilde{H} = \tilde{K}(\xi) + \tilde{U}(\varphi),$$

где φ и ξ — соответственно обобщенные координата и импульс, $\tilde{K}(\xi) = (A/4\pi) \ln \xi$ — кинетическая энергия, а потенциальная энергия

$$\tilde{U}(\varphi) = \frac{A}{4\pi} \ln \sin^2 \varphi - 2Q\varphi.$$

Тогда лагранжиан системы⁴⁾ имеет вид

$$\tilde{L}(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{A}{4\pi} \ln \dot{\varphi} - \frac{A}{4\pi} \ln \sin^2 \varphi + 2Q\varphi + \text{const}, \quad (32)$$

где обобщенная скорость $\dot{\varphi} = A/4\pi \xi$ обратно пропорциональна импульсу ξ . Зная $\tilde{L}(\dot{\varphi}, \varphi)$, мы можем записать уравнение Лагранжа, которое сводится к уравнению

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = \frac{4\pi}{A} \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (33)$$

⁴⁾ В силу обратной зависимости между обобщенной скоростью и импульсом в нашем случае $\tilde{L} = -\tilde{H}$.

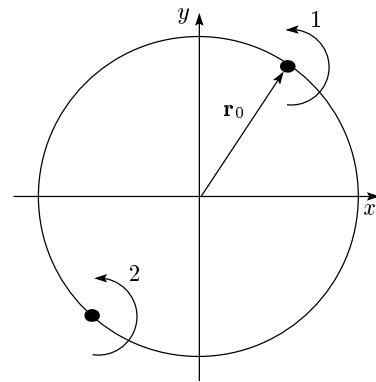


Рис. 8. Начальное состояние для двух вихрей одного знака с $A_1 = A_2 = A$. В отсутствие потока вихри равномерно вращаются по окружности

интегрируя которое, получаем решение

$$t - t_0 = C \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \exp\left(\frac{8\pi Q \varphi}{A}\right), \quad (34)$$

соответствующее полученному выше (24) в рамках гамильтонового подхода. Здесь

$$C = \frac{4\pi}{A} \exp\left(\frac{8\pi E}{A}\right).$$

7. ВИХРИ ОДНОГО ЗНАКА В РАДИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим два вихря одного знака с равной по величине циркуляцией в радиальном потоке, расположенных симметрично относительно источника (рис. 8).

Как известно [9], в отсутствие потока расстояние $2r_0$ между вихрями сохраняется и они вращаются вокруг центра завихренности с угловой скоростью $A/2\pi r_0^2$. При наличии потока уравнения движения (11) принимают вид

$$\dot{x} = -\frac{A}{4\pi} \frac{y}{r^2} + Q \frac{x}{r^2}, \quad (35a)$$

$$\dot{y} = \frac{A}{4\pi} \frac{x}{r^2} + Q \frac{y}{r^2}, \quad (35b)$$

где $y = y_1 = -y_2$, $A_1 = A_2 = A$.

Из системы (35) получаем $r^2 = 2Qt + r_0^2$, т. е. квадрат расстояния между вихрями в расходящемся потоке линейно растет со временем (рис. 9a). Для сходящегося потока расстояние между вихрями за конечное время $t = r_0^2/2P$ обратится в нуль (рис. 9б).

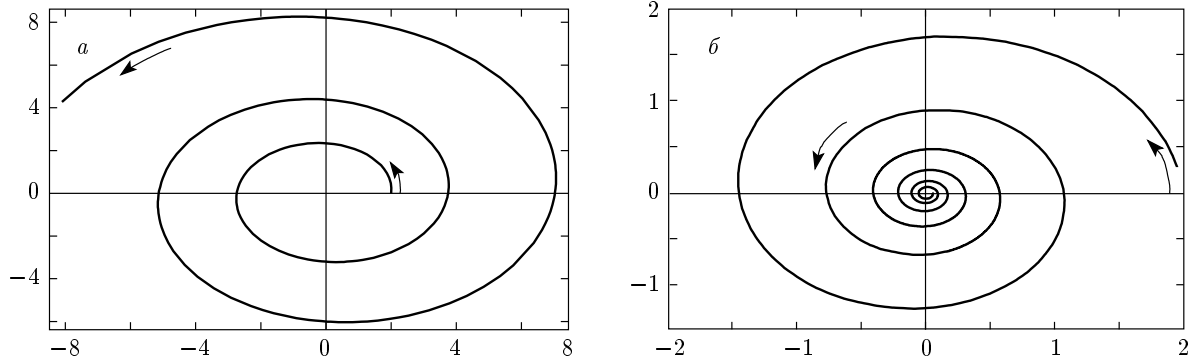


Рис. 9. Траектории движения одного из двух вихрей с равными интенсивностями $A = 4\pi$ для случаев расходящегося радиального потока с $Q = 0.1$ (а) и сходящегося потока с $P = -Q = 0.1$ (б)

При этом угловая скорость вращения вихрей неограниченно возрастает. При решении системы (35) удобно ввести комплексную координату $w = x + iy$. Тогда $|w|^2 = r^2$ и (35) примет вид

$$\frac{\dot{w}}{w} = \left(Q + \frac{A}{4\pi} i \right) \frac{1}{|w|^2} = \left(Q + \frac{A}{4\pi} i \right) \frac{1}{2Qt + r_0^2}. \quad (36)$$

Интегрируя уравнение (36), получаем

$$w = w_0 \left(1 + \frac{2Qt}{r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}(1 + i\frac{A}{4\pi Q})}, \quad (37)$$

где w_0 — начальное значение комплексной координаты. В предельном случае $Q \rightarrow 0$ решение описывает равномерное вращение. Для того чтобы это увидеть, введем новую переменную $\eta = 2Qt/r_0^2$:

$$w^2 = w_0^2 \left[(1 + \eta)^{1/\eta} \right]^{iAt/2\pi r_0^2}. \quad (38)$$

Учитывая, что $\lim_{\eta \rightarrow 0} (1 + \eta)^{1/\eta} = e$, получаем

$$w \rightarrow w_0 \exp \left(i \frac{At}{2\pi r_0^2} \right).$$

В полярных координатах это движение выглядит особенно просто. Легко видеть, что выражение для мгновенной угловой скорости приобретает вид ($\dot{H} = A \ln \xi / 4\pi - 2Q\varphi$)

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{A}{4\pi(2Qt + r_0^2)},$$

откуда

$$\varphi(t) = \frac{A}{8\pi Q} \ln \left(1 + \frac{2Q}{r_0^2} t \right) + \varphi(0),$$

т. е. траектория представляет собой логарифмическую спираль. Предельный переход при $Q \rightarrow 0$ становится очевидным.

8. ВИХРИ В РАДИАЛЬНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОТОКЕ

Вращение потока можно учесть, введя дополнительное слагаемое в выражение для регулярной компоненты функции тока,

$$\psi_r = -Q\varphi + \psi_r^\Omega,$$

где $\psi_r^\Omega = \Omega r^2 / 2$ соответствует твердотельному вращению потока с угловой скоростью Ω . Тогда уравнения движения двух вихрей (10) в терминах комплексных координат $w = x + iy$ принимают вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - i\Omega w_1 = \frac{iA_2}{2\pi r_{12}^2} (w_1 - w_2) + \frac{Q}{r_1^2} w_1, \quad (39)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - i\Omega w_2 = -\frac{iA_1}{2\pi r_{12}^2} (w_1 - w_2) + \frac{Q}{r_2^2} w_2.$$

Переходя во вращающуюся систему координат с помощью преобразования $w = w' \exp(i\Omega t)$ и учитывая, что $r^2 = |w|^2 = |w'|^2$, а $r_{12}^2 = |w_1 - w_2|^2 = |w'_1 - w'_2|^2$, получаем для w' уравнения для вихрей в чисто радиальном потоке без вращения, позволяющие использовать полученные выше результаты.

9. ВЫВОДЫ

В работе показано, что на плоскости задача о паре вихрей в радиальном потоке допускает точное решение. При определенном соотношении между параметрами возникают области попятного движения. В расходящемся потоке расстояние между компонентами пары увеличивается, но целостность пары не

нарушается. В сходящемся потоке вихри в паре сближаются, а скорость движения пары возрастает. В обоих случаях пара уходит на бесконечность из области потока, изменив расстояние между компонентами на конечную величину. Для вихрей одного знака с равными интенсивностями расстояние между вихрями линейно зависит от времени. В расходящемся потоке они неограниченно удаляются друг от друга. В сходящемся потоке расстояние между ними обращается в нуль за конечное время. Заметим, что задача о движении вихрей во вращающихся потоках с радиальным движением может найти качественные геофизические приложения. Упомянем в этой связи недавно открытое вращение двух вихрей вокруг южного полюса Венеры [12]. При наличии в районе полюса меридионального потока задача напоминает рассмотренную выше.

В рассмотренной нами модели отсутствует «подкрутка» вихрей ветром (в силу сохранения циркуляции). Для ее учета потребуются рассмотрение диссипативных моделей. Интересно исследовать поведение вихревой пары при нецентральной циркуляции. И, наконец, интерес представляет движение кольцевых вихрей в центральном потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, *Радиофиз. и радиоастрон.* **11**, 42 (2006); *Астрон. ж.* **84**, 298 (2007).
2. R. R. J. Antonucci and J. S. Miller, *Astrophys. J.* **297**, 621 (1985).
3. R. Antonucci, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 473 (1993).
4. C. M. Urry and P. Padovani, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **107**, 803 (1995).
5. W. Jaffe, K. Meisenheimer, H. J. A. Rottgering et al., *Nature* **429**, 47 (2004).
6. К. Ю. Блиох, В. М. Конторович, *ЖЭТФ* **123**, 1123 (2003); E-print archives, astro-ph/0407320.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
8. G. M. Reznik, *J. Fluid. Mech.* **240**, 405 (1992).
9. В. В. Мелешко, М. Ю. Константинов, *Динамика вихревых структур*, Наукова думка, Киев (1990).
10. С. В. Алексеев, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов, *Введение в теорию концентрированных вихрей*, ИКИ, Москва–Ижевск (2005).
11. Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1947).
12. http://www.esa.int/SPECIALS/Venus_Express/SEMDGJC4VUE_0.html.