

НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

А. Т. Ильичев^{a*}, Г. Г. Цыпкин^b

^a Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, Москва, Россия

^b Институт проблем механики Российской академии наук
119526, Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 апреля 2008 г.

Рассматриваются новые механизмы переходов к неустойчивости для вертикальных течений с фазовым переходом, возникающих в горизонтально протяженных двумерных областях пористой среды. Дестабилизация плоской поверхности фазового перехода происходит при бесконечном волновом числе и при нулевом волновом числе. В последнем случае переход к неустойчивости сопровождается обратимыми бифуркациями в докритической окрестности порога неустойчивости и образованием вторичных (не обязательно горизонтально-однородных) течений. Докритические структуры в окрестности перехода к неустойчивости подчиняются нелинейному диффузионному уравнению Колмогорова – Петровского – Пискунова. Рассматривается два примера движений в пористой среде: первый относится к неустойчивости слоя воды, расположенного над слоем смеси воздуха и пара в пористой среде при изотермических условиях в присутствии капиллярных сил, действующих на поверхности фазового перехода. Второй пример описывает вертикальные течения с фазовыми переходами в высокотемпературном геотермальном резервуаре, состоящем из двух высокопроницаемых слоев, разделенных низкопроницаемым слоем.

PACS: 61.43.Gt

1. ВВЕДЕНИЕ

Типичным для задач теории гидродинамической устойчивости является положение, когда критическое волновое число k_c , при котором происходит переход к неустойчивости однородных течений, отлично от нуля. При условии обратимости исходной задачи (инвариантности относительно отражений неограниченного пространственного направления $x \rightarrow -x$), а также пространственной однородности (инвариантности относительно сдвигов $x \rightarrow x + l$) слабонелинейные модуляции наиболее неустойчивой моды удовлетворяют амплитудному уравнению Гинзбурга – Ландау с кубичной нелинейностью (см., например, [1]). Это уравнение приближенно описывает эволюцию пакета слабонеустойчивых мод в окрестности порога неустойчивости в теории вязкой жидкости (см., например, [2–6]).

Тем не менее известны случаи, когда $k_c = 0$; например, при химических реакциях [7], конвекции при малых числах Прандтля [8], в ряде биологических моделей [9]. Во всех этих случаях переход к неустойчивости происходит при ненулевой вещественной частоте возмущений на нейтральной кривой. В работе [10] показано, что все периодические по времени слабонелинейные модуляции наиболее неустойчивой моды удовлетворяют обобщенному уравнению Гинзбурга – Ландау, где в кубичную нелинейность дают вклад слагаемые с производными от медленно меняющейся амплитуды. Возможность строгой математической трактовки, представленной в работе [10], связана именно с неравенством нулю вещественной частоты на критической кривой.

Все упомянутые процессы с переходом, отвечающем дестабилизации узкой полосы длинных волн, описываются уравнениями диффузионного типа. Случаи вырождения в этом классе задач, когда при переходе удовлетворяется принцип обмена устойчивости (равенство нулю вещественной час-

*E-mail: ilichev@mi.ras.ru

тоты в окрестности критической кривой) были, по-видимому, неизвестны в теории гидродинамической устойчивости.

Настоящая статья посвящена рассмотрению класса течений, которые при потере устойчивости подвергаются именно вырожденному типу перехода с нулевым критическим волновым числом. Это фильтрационные течения в горизонтально-протяженных областях пористых сред, фазовый переход в которых происходит на некоторой поверхности в области течения. В рассмотренных примерах проявляется свойство «дополнительности»: наряду с указанным переходом возможен переход, при котором наиболее неустойчивой моде соответствует бесконечное волновое число, т.е. в окрестности порога неустойчивости наиболее неустойчивой является полоса очень коротких мод. Вопрос о том, насколько сосуществование этих взаимно дополняющих друг друга типов перехода является общим, остается открытым.

Для перехода с $k_c = 0$, подчиняющегося принципу обмена устойчивости, эволюция узкой полосы слабонеустойчивых мод описывается вещественным диффузионным уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) с невырожденной квадратичной нелинейностью в случае общего положения. Это уравнение впервые рассматривалось в работе [11] для описания возрастания количества вещества в применении к одной биологической проблеме. Оно обладает замечательными свойствами, обсуждению которых посвящена многочисленная литература (см., например, [12, 13]).

В качестве примеров течений, для которых возникают обсуждаемые переходы с критическими числами $k_c = 0$ и $k_c = \infty$, рассматриваются задачи, описывающие следующие явления.

1. Задача об испарении воды и диффузии пара, описывающая процессы переноса в шахтах, туннелях и других конструкциях, находящихся в контакте с горными породами. Функционирование таких систем сопровождается тепло- и массообменом между конструкцией и окружающей породой [14]. Искусственная вентиляция позволяет поддерживать микроклимат, необходимый для эксплуатации. Вентиляция сопровождается испарением с кровли сооружения, а вода из водоносных горизонтов, расположенных над горными выработками, двигается вниз под действием гравитационных сил или давления в водоносном горизонте. В зависимости от условий вода может поступать в подземные сооружения как в жидком, так и в парообразном состоянии. Если окружающие породы имеют относительно низкую про-

ницаемость, то подземные воды, двигаясь к кровле горной выработки могут испаряться в паровом пространстве горных пород, и их поступление в подземное сооружение осуществляется в виде пара. В этом случае в породах образуется область, насыщенная смесью пара и воздуха и расположенная ниже водонасыщенной области. Возникающая при этом поверхность испарения, разделяющая эти две области, может быть как устойчивой, так и неустойчивой [15].

2. Движения фаз в высокотемпературном геотермальном резервуаре, состоящем из двух высокопроницаемых горизонтальных слоев, разделенных слоем низкопроницаемой породы. Верхний и нижний высокопроницаемые слои заполнены соответственно водой и паром. Внутри слоя низкопроницаемой породы находится поверхность раздела фаз, разделяющая области, занятые водой и паром. Эта поверхность также может быть как устойчивой, так и неустойчивой [16, 17].

Первая задача представляет собой простой пример течения в пористой среде при наличии поверхности фазового перехода, в котором более тяжелая фаза (вода) расположена над более легкой фазой (смесью воздуха с водяным паром). Целью исследования простой модели данного явления служит возможность обнаружения фундаментальных физических эффектов, возникающих в подобных процессах и характеризующих изучаемые типы переходов к неустойчивости.

Вторая задача представляет собой пример более сложного явления, учитывающего влияние температуры, и характеризуется большим числом физических параметров. По этой причине детальный теоретический анализ переходов, возможный в первом примере, в этом случае затруднен и мы ограничиваемся рассмотрением перехода к неустойчивости при изменении проницаемости и набора заданных значений остальных физических параметров.

Настоящая статья организована следующим образом. В разд. 2 рассматриваются упомянутые задачи. Дана формулировка и представлены основные стационарные вертикальные течения, подлежащие исследованию на устойчивость. Раздел 3 посвящен изложению результатов анализа нормальной устойчивости этих течений. В разд. 4 дано описание коротковолновой неустойчивости, а в разд. 5 — длинноволновой неустойчивости. Раздел 6 посвящен обсуждению характерных особенностей динамики системы в окрестности порога неустойчивости для рассматриваемых типов перехода.

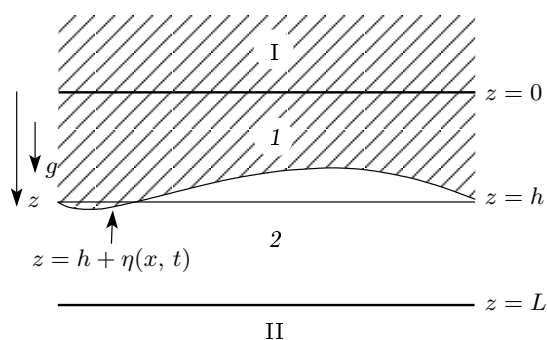


Рис. 1. Геометрия задачи: I — высокопроницаемая область $\{z < 0, -\infty < x < \infty\}$, 1 — низкопроницаемая область $\{0 < z < h + \eta, -\infty < x < \infty\}$, 2 — низкопроницаемая область $\{h + \eta < z < L, -\infty < x < \infty\}$, II — область $\{z > L, -\infty < x < \infty\}$; остальные объяснения см. в тексте

2. ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

Рассматриваются течения с фазовым переходом в горизонтально-неограниченных областях пористой среды. Предполагается, что низкопроницаемый слой расположен между высокопроницаемыми слоями (высокопроницаемым слоем и пространством подземного сооружения в первой задаче), давление и температура в которых выравниваются вследствие высокой проницаемости. Область изучаемого течения — низкопроницаемый слой — представляет из себя полосу $0 \leq z \leq L, -\infty < x < \infty$ в декартовой системе координат $x y z$ с осью z , направленной вниз. Области I и 1 на рис. 1 отвечают соответственно верхним высокопроницаемому и низкопроницаемому слоям, заполненным жидкой фазой. Область 2 отвечает нижнему низкопроницаемому слою, заполненному паром или смесью воздуха с паром. Область II соответствует пространству подземного сооружения в первой задаче и высокопроницаемому слою во второй задаче.

Внутри низкопроницаемых слоев выполняются уравнения, выражающие закон Дарси, связывающий скорости жидкости \mathbf{w} и градиент давления P , а также уравнения диффузии для температуры T или влажности ν . На поверхности фазового перехода $z = h + \eta$ выполняются условия термодинамического равновесия, уравнение Клайперона – Клаузиуса, а также условия сохранения массы:

$$\rho_1(\mathbf{w}_{1n} - \mathbf{V}_n) = \rho_2 \mathbf{w}_{2n}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{V}_n — нормальная компонента скорости поверхности фазового перехода, и условие баланса тепла:

$$\lambda(\text{grad } T_2 - \text{grad } T_1) \cdot \mathbf{n} = q \rho_1 (\mathbf{w}_{2n} - \mathbf{V}_n), \quad (2.2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности пористой среды, а q — удельная теплота фазового перехода.

2.1. Вертикальные течения с диффузией пара

2.1.1. Формулировка

Область I на рис. 1 отвечает водоносному слою. На границе $z = 0$ области I давление воды постоянно. Низкопроницаемая среда содержит слой воды 1 и слой 2, насыщенный смесью воздуха и паров воды. Граница $z = L$ низкопроницаемого слоя, примыкающая к свободному пространству выработки II, обдувается воздухом постоянной влажности ν_a , которая меньше, чем влажность насыщения ν_* , т. е. парциальное давление пара в воздухе меньше, чем давление насыщения пара в воздухе при заданном значении температуры T . Предположение о постоянстве температуры оправдано медленностью протекающих процессов.

Будем предполагать, что внутри низкопроницаемой области находится поверхность фазового перехода, которая в случае стационарного вертикального течения жидкости вниз является плоской. Это означает, что в области жидкой фазы осуществляется подток воды из высокопроницаемого слоя к этой поверхности, где происходит испарение. Образовавшийся в результате этого пар диффундирует через область смеси воздух–пар 2 к свободной поверхности $z = L$, которая обдувается воздухом. Диффузия пара происходит в том случае, когда парциальное давление пара вблизи поверхности испарения больше парциального давления на контакте со свободной поверхностью.

Движение воды в области 1 описывается уравнением неразрывности и законом Дарси с учетом массовой силы:

$$\text{div } \mathbf{v}_w = 0, \quad \mathbf{v}_w = -\frac{k}{\mu_w} \text{grad } (P - \rho_w g z). \quad (2.3)$$

Уравнение в области 2 представляет собой уравнение диффузии пара, а для газов справедливо уравнение Клайперона

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \text{div } D \text{ grad } \rho_v, \quad (2.4)$$

$$P_v = \rho_v R_v T, \quad P_a = \rho_a R_a T.$$

Здесь \mathbf{v} — скорость фильтрации, $\mathbf{v} = m\mathbf{w}$, m — пористость, k — проницаемость, μ — вязкость, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность, D — коэффициент диффузии. Индексы « v », « w », « a » отвечают величинам соответственно для пара, воды, воздуха. Типичные значения для физических постоянных: $D = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $P_a = 10^5 \text{ Па}$, $R_a = 287 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, $R_v = 461 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ [18].

Вместо уравнения диффузии для плотности пара удобно использовать аналогичное уравнение для функции влажности $\nu = \rho_v / (\rho_a + \rho_v)$. Это уравнение следует из (2.4) и при условии малости парциального давления пара по сравнению с атмосферным давлением имеет вид

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = D \Delta \nu. \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.3) эквивалентна уравнению Лапласа для давления:

$$\Delta P = 0. \quad (2.6)$$

Будем предполагать, что полное давление в области 2 смеси воздуха с паром совпадает с давлением в области II подземного сооружения. Это означает, что фильтрации газа в области 2 не происходит. На поверхности испарения разница между давлением в областях 1 и 2 зависит от физических свойств породы и равна капиллярному давлению. Динамическое условие на поверхности испарения $z = h + \eta(x, t)$ имеет, таким образом, вид

$$P_1 = P_2 + P_c \equiv P_a + P_c. \quad (2.7)$$

Капиллярное давление P_c отрицательно, когда порода смачиваема, и положительно в случае несмачиваемой породы.

Граничное условие для влажности на границе $z = h + \eta(x, t)$ следует из определения функции влажности и уравнений Клайперона для воздуха и пара:

$$\nu = \nu_* = \frac{R_a P_{v*}}{R_v P_a}. \quad (2.8)$$

Зависимость парциального давления насыщения может быть представлена в виде [19]

$$P_{v*} = F(T) \quad \text{или} \quad \nu_* = \frac{R_a F(T)}{R_v P_a},$$

$$F(y) = 10^5 \exp \left[-7226.6 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{373.16} \right) + 8.2 \ln \frac{373.16}{y} - 0.0057(373.16 - y) \right].$$

Из предположения об изотермичности изучаемых процессов следует, что насыщенность на поверхности фазового перехода $z = h + \eta(x, t)$, являясь функцией температуры, постоянна в рамках рассматриваемой модели.

Условие сохранения массы (2.1) на границе $z = h + \eta(x, t)$ в комбинации с законом Дарси имеет вид

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n = -\frac{k}{m\mu_w} \times [\text{grad} (P - \rho_w g z)]_{n1} + D \frac{\rho_a}{\rho_w} (\text{grad} \nu)_{n2}. \quad (2.9)$$

Граничные условия на верхней границе $z = 0$ и на нижней границе $z = L$, совпадающей с кровлей конструкции, записываются в виде

$$z = 0: \quad P = P_0; \quad z = L: \quad \nu = \nu_a. \quad (2.10)$$

Рассматриваемые процессы характеризуются физическими параметрами, которые определяют две безразмерные комбинации

$$\alpha = \frac{P_c + P_a - P_0}{\rho_w g L}, \quad (2.11)$$

$$\beta = \frac{D}{k} \frac{\rho_a}{\rho_w} (\nu_* - \nu_a) \frac{m\mu_w}{\rho_w g L},$$

играющие ключевую роль в дальнейшем рассмотрении. Заметим, что параметр α в формуле (2.11) является мерой отклонения давления в водоносном горизонте P_0 от гидростатического при заданном капиллярном давлении, в то время как параметр β характеризует отношение диффузионного переноса пара к потоку воды, вызванного гидростатическим давлением.

2.1.2. Основное течение

При заданных значениях параметров поверхность фазового перехода занимает некоторое равновесное положение $z = h$. Это положение определяется из решения стационарной задачи (2.5), (2.6):

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \nu(z)}{dz^2} = 0.$$

Закон сохранения массы на поверхности $z = h$ имеет вид (см. (2.9))

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \nu(z)}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{k}{m\mu_w} \left[\left(\frac{dP}{dz} \right)_1 - \rho_w g \right] = D \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{d\nu}{dz} \right)_2. \quad (2.12)$$

Из формул (2.7), (2.8), (2.10), (2.12) следуют выражения для распределений давления и влажности в слоях соответственно $0 < z < h$ и $h < z < L$:

$$\begin{aligned} P_{st} &= P_0 + \frac{P_a + P_c - P_0}{h} z, \\ v_{st} &= \frac{v_a - v_*}{L - h} z + \frac{Lv_* - hv_a}{L - h}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а также уравнение для определения положения поверхности испарения:

$$\frac{\alpha}{H} - 1 + \frac{\beta}{1 - H} = 0, \quad H = \frac{h}{L}. \quad (2.14)$$

Квадратное уравнение (2.14) имеет корни

$$\begin{aligned} H_{g,s} &= -\frac{1}{2}(\beta - \alpha - 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 - 4\alpha}, \\ H_g &\geq H_s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Легко видеть, что для нейтральной ($P_c = 0$) или смачиваемой ($P_c < 0$) пористой среды, когда $\alpha < 0$, один корень (2.15) положителен, а другой — отрицателен. Физический смысл имеет только положительный корень, отвечающий знаку «+» перед радикалом в (2.15).

Для несмачиваемой среды при $P_c > 0$ меньший корень может стать положительным, когда давление P_0 в водоносном слое уменьшается настолько, что α становится положительным. При дальнейшем уменьшении P_0 параметр α достигает критического значения

$$\beta = (1 - \sqrt{\alpha})^2, \quad (2.16)$$

при котором происходит слияние корней (2.15). Стационарное решение (2.13) перестает существовать, когда α превосходит это критическое значение.

Рассматриваемое решение (2.13) описывает стационарный процесс испарения на поверхности фазового перехода более тяжелой жидкости (воды), лежащей над более легкой жидкостью (смесью пара с воздухом). В случае, когда существует единственное положение для стационарной поверхности фазового перехода, это решение, очевидно, определяет проникновение влаги в подземную конструкцию в результате диффузии пара через породу. Если возможны два положения равновесия поверхности фазового перехода, т. е. оба корня уравнения (2.14) положительны, то один из этих корней оказывается динамически неустойчивым.

Область \mathcal{D} на плоскости параметров (α, β) , где оба корня (2.15) положительны, имеет вид

$$\mathcal{D} = \{(\alpha, \beta) | 0 < \alpha < 1; \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} < 1\}.$$

Корни H_g и H_s совпадают на границе $\partial\mathcal{D}$ области \mathcal{D} :

$$\partial\mathcal{D} = \{(\alpha, \beta) | 0 < \alpha < 1; \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 1\}.$$

2.2. Вертикальные течения в геотермальных системах

2.2.1. Формулировка

Рассмотрим течения, реализующиеся в высокотемпературных геотермальных резервуарах. Пусть резервуар состоит из двух высокопроницаемых горизонтальных слоев, разделенных слоем низкопроницаемой породы. Слой низкопроницаемой породы представляет собой горизонтальную полосу бесконечной протяженности: $-\infty < x < \infty$, $0 < z < L$, с осью z , направленной вертикально вниз. Верхний и нижний высокопроницаемые слои соответственно заполнены водой и паром. Внутри слоя низкопроницаемой породы находится поверхность раздела фаз, разделяющая области, занятые водой и паром (рис. 1).

Процессы тепло- и массопереноса в геотермальных системах описываются в рамках равновесной термодинамики и подчиняются законам сохранения массы и энергии, закону Дарси для воды и пара и уравнениям состояния. Предполагается, что вода и пар несжимаемы. Система основных уравнений в двух областях низкопроницаемой породы, разделенных поверхностью раздела, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_j &= 0, \quad \mathbf{v}_j = -\frac{k}{\mu_j}(\operatorname{grad} P - \rho_j g \mathbf{e}_z), \\ (\rho C)_{2,1} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_j C_j \mathbf{v}_j \cdot \operatorname{grad} T &= \\ &= \operatorname{div}(\lambda_j \operatorname{grad} T), \\ \lambda_{2,1} &= m\lambda_j + (1 - m)\lambda_s, \\ (\rho C)_{2,1} &= m\rho_j C_j + (1 - m)\rho_s C_s, \quad j = v, w. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь C — теплоемкость, λ — теплопроводность. Индекс «s» соответствует скелету пористой среды, «1» — области воды, «2» — области пара.

Условия на границе раздела между областями воды и пара формулируются как условия на поверхности термодинамически равновесного фазового перехода $z = h + \eta$ ($\eta = \eta(x, t)$ — отклонение поверхности раздела фаз) и имеют вид (см. (2.1), (2.2) и закон Дарси (2.17))

$$\begin{aligned}
 m \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n &= \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} (\text{grad } P)_{n+} - \\
 &- \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n-} + \\
 &+ \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right) (\mathbf{e}_z)_n, \\
 m q \rho_w V_n &= \lambda_- (\text{grad } T)_{n-} - \lambda_+ (\text{grad } T)_{n+} - \\
 &- \frac{k q \rho_w}{\mu_w} ((\text{grad } P)_{n-} - \rho_w g (\mathbf{e}_z)_n), \\
 T_+ &= T_-, \quad P_+ = P_-, \quad \ln \frac{P_-}{P_a} = A + \frac{B}{T_-}, \\
 A &= 12.512, \quad B = -4611.73 \text{ К}.
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Здесь индексы «+» и «-» обозначают величины, относящиеся соответственно к области пара и жидкости.

Граничные условия на плоских границах между низкопроницаемым и высокопроницаемыми слоями имеют вид

$$\begin{aligned}
 z = 0: \quad P &= P_0, \quad T = T_0; \\
 z = L: \quad P &= P^0, \quad T = T^0.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

При достаточно низких значениях проницаемости в уравнении теплопроводности можно пренебречь конвективным переносом тепла по сравнению с кондуктивным [16, 17]. Поэтому будем полагать соответствующие конвективные члены в уравнении теплопроводности равными нулю. Учитывая это предположение, перепишем уравнения (2.17) в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T, \\
 0 < z < h \cup h < z < L, \\
 a_{1,2} &= \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Далее будем полагать, что эффективные теплоемкость и теплопроводность определяются только соответствующими параметрами пород, т.е. $\lambda_{1,2} = \lambda$, $a_{1,2} = a$.

2.2.2. Основное течение

При условии пренебрежения конвективным переносом тепла из формул (2.18), (2.19), (2.20) следует, что стационарные распределения давления и температуры имеют вид [16]

$$\begin{aligned}
 P_-^s &= P_0 + \frac{P_* - P_0}{h} z, \\
 T_-^s &= T_0 + \frac{T_* - T_0}{h} z, \\
 P_+^s &= \frac{P^0 - P_*}{L - h} z + \frac{LP_* - hP^0}{L - h}, \\
 T_+^s &= \frac{T^0 - T_*}{L - h} z + \frac{LT_* - hT^0}{L - h},
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

где индекс «*» означает значение величин на фронте. Подставляя выражения (2.21) в условия (2.18), получим уравнения для определения равновесных давления P_* , температуры T_* и положения поверхности h :

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{L - h} - \frac{P_* - P_0}{h} + \rho_w g \left[1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right] &= 0, \\
 \lambda \frac{T^0 - T_*}{L - h} - \lambda \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{k q \rho_w}{\mu_w} \left[\frac{P_* - P_0}{h} - \rho_w g \right] &= 0, \\
 P_* &= f(T_*) = P_a \exp \left(A + \frac{B}{T_*} \right).
 \end{aligned}$$

Выражая из первых двух уравнений равновесные давления и температуру и подставляя их в третье уравнение, получим уравнение для определения положения поверхности фазового перехода в виде

$$G(H) = 0, \quad H = h/L,
 \tag{2.22}$$

где $G(y)$ — трансцендентная функция, вид которой приведен, например, в работе [16]. Решения (2.21) описывают стационарные вертикальные течения с фазовым переходом, которые и подлежат исследованию на устойчивость.

3. ДЕСТАБИЛИЗАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

3.1. Течения с диффузией пара

Дестабилизация основного режима возможна только в случае несмачиваемой пористой среды ($\alpha > 0$), следовательно, рассмотрим только этот случай. Уравнения (2.5) и (2.6) являются линейными, значит должна быть проведена линеаризация вокруг решения (2.21) только граничных условий. Пусть P' , ν' , η обозначают соответственно возмущение основного давления, влажности и положения поверхности фазового перехода. Линеаризованная форма закона сохранения (2.9) имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{k}{m \mu_w} \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)_- + D \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{\partial \nu'}{\partial z} \right)_+.
 \tag{3.1}$$

Условие скачка давления (2.7) и условие постоянства влажности (2.8) на поверхности перехода принимают вид

$$P' + \frac{dP_{st}}{dz}\eta = 0, \quad \nu' + \frac{d\nu_{st}}{dz}\eta = 0, \quad z(t, y) = h. \quad (3.2)$$

Ищем решение (3.1), (3.2) в виде

$$\{P', \nu', \eta\} = \{\hat{P}(z), \hat{\nu}(z), \hat{\eta}\} \exp(\sigma t + i\kappa y).$$

Выражения для амплитуд имеют вид

$$\hat{P}(z) = \hat{P}_- \frac{\text{sh}(\kappa z)}{\text{sh}(\kappa h)}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\nu}(z) = \hat{\nu}_+ \frac{\text{sh}[d(L-z)]}{\text{sh}[d(L-h)]}, \quad (3.4)$$

где $d^2 = \sigma/D + \kappa^2$. Из формул (3.3), (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\hat{P}(z)}{dz}\right)_{z=h} &= \kappa \hat{P}_- \text{cth}(\kappa h), \\ \left(\frac{d\hat{\nu}(z)}{dz}\right)_{z=h} &= -d\hat{\nu}_+ \text{cth}[d(L-h)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.1), (3.2) получим, что негравитационное решение $\hat{\eta}, \hat{P}_-, \hat{\nu}_+$ существует при выполнении следующего дисперсионного соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma\Sigma - \alpha \frac{K \text{cth}(KH)}{H} + \\ + \beta \sqrt{\Sigma + K^2} \frac{\text{cth}[(1-H)\sqrt{\Sigma + K^2}]}{1-H} = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$K = \kappa L, \quad \Sigma = \frac{\sigma L^2}{D}, \quad \gamma = \frac{Dm\mu_w}{k\rho_w gL}.$$

Рассмотрим механизм потери устойчивости, удовлетворяющий принципу обмена устойчивостей, т. е. когда $\Sigma = 0$ на границе устойчивости. Уравнение маргинального множества получается подстановкой $\Sigma = 0$ в выражение (3.6). Имеем

$$f(K) \equiv \frac{\text{cth} K [(1-H)]}{\text{cth}(KH)} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1-H}{H} \equiv \Delta. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.6) следует, что для $K \rightarrow \infty$ величина $\Sigma \rightarrow \Sigma_0 K$, где

$$\Sigma_0 = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{H} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{1-H}.$$

Из соотношения (3.7) и факта, что неравенство $\Sigma_0 > 0$ очевидным образом подразумевает неустойчивость рассматриваемого режима, следует, что существуют два сценария в случае несмачиваемой пористой среды.

Легко установить, что, если значение левой части уравнения (3.7) для какого-либо значения K меньше значения правой части, тогда основное решение неустойчиво, т. е. $\Sigma > 0$ для этих K . Предположим, что

$$\frac{\text{cth}[K(1-H)]}{\text{cth}(KH)} < \Delta \quad (3.8)$$

и решение устойчиво, т. е. $\Sigma < 0$ для любого K . Если $\Sigma < 0$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\Sigma + K^2} \text{cth}[\sqrt{\Sigma + K^2}(1-H)]}{K \text{cth}(KH)} < \\ < \frac{\text{cth}[K(1-H)]}{\text{cth}(KH)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Одновременно из дисперсионного соотношения (3.6) следует, что, если $\Sigma < 0$, то выполняется неравенство

$$-\Delta K \text{cth}(KH) + \sqrt{\Sigma + K^2} \text{cth}[\sqrt{\Sigma + K^2}(1-H)] > 0$$

или

$$\frac{\sqrt{\Sigma + K^2} \text{cth}[\sqrt{\Sigma + K^2}(1-H)]}{K \text{cth}(KH)} > \Delta,$$

что противоречит неравенствам (3.8) и (3.9). Следовательно, если справедливо (3.8), то должно выполняться $\Sigma > 0$.

Для ясности используем геометрическую интерпретацию уравнения (3.7). Левая часть уравнения представляет собой функцию, которая зависит от K и стремится к единице при $K \rightarrow \infty$. Эта функция имеет минимум при $H < 1/2$ или максимум при $H > 1/2$ для $K = 0$. Правая часть уравнения (3.7) не зависит от K и представляет собой прямую, параллельную оси K .

3.2. Течения в геотермальных системах

Предполагая, что неизвестные функции представимы в виде

$$\begin{aligned} \{P'(x, y, t), T'(x, y, t), \eta(y, t)\} = \\ = \{\hat{P}(x), \hat{T}(x), \hat{\eta}\} \exp(\sigma t + i\kappa x), \end{aligned}$$

получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
 F(\Sigma, K) \equiv & \hat{\alpha} \operatorname{cth}[\hat{\alpha}(1-H)] \times \\
 & \times \left\{ \frac{\omega_w}{a} \Gamma_3 K \operatorname{cth}(KH) - (1-R)\Sigma + \right. \\
 & + \frac{\omega_v}{a} \Gamma_4 R K \operatorname{cth}[K(1-H)] \left. \right\} + \hat{\alpha} \operatorname{cth}(\hat{\alpha}H) \times \\
 & \times \left\{ \frac{\omega_v}{a} \Gamma_5 R K \operatorname{cth}[K(1-H)] + \right. \\
 & + \frac{\omega_w}{a} \Gamma_0 K \operatorname{cth}(KH) - (1-R)\Sigma \left. \right\} + \\
 & + \frac{\omega_v B}{T_0} \frac{mq\rho_w R}{\lambda T_0} \Gamma K \left\{ \Sigma \operatorname{cth}[K(1-H)] + \Sigma \frac{\mu_v}{\mu_w} \operatorname{cth}(\kappa H) + \right. \\
 & \left. + \Gamma_1 K \frac{\omega_w}{a} \operatorname{cth}(KH) \operatorname{cth}[K(1-H)] \right\} = 0. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{P_f}{T_f^2}, \quad \Gamma_0 = \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_f - 1}{H} + \frac{P_f - 1}{H}, \\
 \Gamma_1 &= \frac{1}{H} + \frac{P_1 H - P_f}{H(1-H)}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{H} + \frac{T_1 H - T_f}{H(1-H)}, \\
 \Gamma_3 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_1 - T_f}{1-H} + \frac{P_f - 1}{H}, \\
 \Gamma_4 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_1 - T_f}{1-H} + \frac{P_1 - P_f}{1-H}, \\
 \Gamma_5 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_f - 1}{H} + \frac{P_1 - P_f}{1-H}, \\
 \hat{\alpha} &= \sqrt{K^2 + \Sigma}, \quad K = \frac{\kappa}{L}, \quad \Sigma = \frac{a\sigma}{L^2}, \\
 \omega_w &= \frac{P_0 k}{m\mu_w}, \quad \omega_v = \frac{P_0 k}{m\mu_v}, \quad R = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad T_f = \frac{T_*}{T_0}, \\
 T_1 &= \frac{T^0}{T_0}, \quad P_f = \frac{P_*}{P_0}, \quad P_1 = \frac{P^0}{P_0}, \quad H = \frac{h}{L}.
 \end{aligned}$$

Из (3.10) получим асимптотику на бесконечности $\Sigma = \sigma_0|K|$, $K \rightarrow \pm\infty$,

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \left[\frac{\omega_v}{a} R(\Gamma_4 + \Gamma_5) + \frac{\omega_w}{a}(\Gamma_0 + \Gamma_3) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\omega_w \omega_v}{a} \frac{B}{T_0} \frac{mq\rho_w R}{\lambda T_0} \Gamma \Gamma_1 \right] \times \\
 & \quad \times \left[2(1-R) - \frac{\omega_v}{a} \frac{B}{T_0} \frac{mq\rho_w R}{\lambda T_0} \left(1 + \frac{\mu_v}{\mu_w} \right) \Gamma \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

В этом случае

$$f(K)_{1,2} = \Delta, \quad (3.11)$$

где константа Δ , зависящая от физических параметров задачи дана в работе [17]. В отсутствие вещественных корней уравнения (3.11) неустойчивость может возникнуть в следующих случаях [17]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f(K)_2} &> \frac{1}{f(K)_1} = \min \left[\frac{1-H}{H}, 1 \right], \\
 \frac{1}{f(K)_1} &< \frac{1}{f(K)_2} = \max \left[\frac{1-H}{H}, 1 \right].
 \end{aligned}$$

4. КОРОТКОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

4.1. Течения с диффузией пара

Первый сценарий перехода реализуется при $H > 1/2$. Рисунок 2а иллюстрирует устойчивость основного течения. Уменьшение давления P_0 влечет за собой увеличение Δ и линия $\zeta = \Delta$ становится асимптотической к графику функции

$$\zeta = f(K) = \operatorname{cth}[K(1-H)] \operatorname{cth}^{-1}(KH)$$

в плоскости (K, ζ) , когда $\Sigma = 0$. Дальнейшее уменьшение P_0 означает, что Δ становится больше единицы и линия $\zeta = \Delta$ пересекает график $f(K)$ в двух точках, симметричных относительно нуля. Инкремент $\Sigma > 0$ на двух бесконечных симметричных относительно нуля полубесконечных интервалах (рис. 2б). Соответствующий переход к неустойчивости в плоскости (K, Σ) представлен на рис. 2в.

При этом корень H_s , соответствующий более высокому положению фронта (напомним, что ось z направлена вниз), неустойчив для всех $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$. Корень H_g становится неустойчив через переход $K = \infty$ на Γ_1 ,

$$\Gamma_1 = \{(\alpha, \beta) | 1/4 < \alpha < 1/2, \alpha + \beta = 1/2\}.$$

4.2. Течения в геотермальных системах

Пусть $H < 1/2$, т.е. $\min[(1-H)/H, 1] = 1$. В этом случае переход к неустойчивости имеет место при $f(K)_1 = 1$. Последнее равенство выполняется при $\kappa = \pm\infty$. Следовательно, в этом случае начало неустойчивости соответствует бесконечное волновое число. Когда дальнейшее изменение параметров приводит к развитию неустойчивости, интервал неустойчивых собственных чисел расширяется с бесконечности.

Если $H > 1/2$, т.е. $\max[(1-H)/H, 1] = 1$, начало неустойчивости имеет место аналогично предыдущему случаю. При этом $f(K)_2 = 1$, развитие неустойчивости схематично изображено на рис. 2 (для $f(K)_2$) и концы интервала волновых чисел, характеризующих убывание нормальных мод, приходят с бесконечности [17].

5. ДЛИННОВОЛНОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим однородное течение вязкой жидкости в случае одного пространственного измерения,

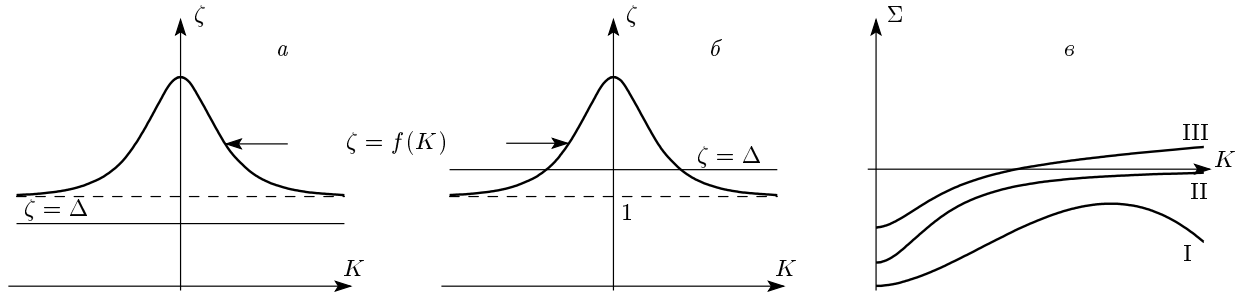


Рис. 2. Случай $H > 1/2$. Сравнительные положения линии $\zeta = \Delta$ и графика $\zeta = f(K)$ для устойчивого (а) и неустойчивого (б) фронтов. Эскизы дисперсионных кривых $\Sigma = \Sigma(K)$ (в) для устойчивого (I), маргинального (II) и неустойчивого (III) фронтов

когда независимыми переменными являются x и t (обобщение анализа на случай более высоких размерностей может быть проведено достаточно легко) [20]. Пусть соответствующая линеаризованная гидродинамическая задача допускает решение в виде нормальных мод $\mathbf{A} \exp(i\kappa x + \sigma t)$ с вещественными волновыми числами κ и дисперсионным соотношением $D(\kappa, \sigma, \hat{R}) = 0$, где \hat{R} является параметром задачи, изменение которого приводит к потере устойчивости рассматриваемого течения. Будем предполагать, что задача инвариантна относительно пространственного отражения $x \rightarrow -x$, а также, что имеет место принцип смены устойчивости, т. е. $\text{Im} \sigma = 0$ при возникновении неустойчивости и маргинальной моде соответствует $\sigma = 0$.

Из пространственной обратимости следует, что выражение $\mathbf{A} \exp(-i\kappa x + \sigma t)$ также является решением линеаризованной задачи, т. е. $D(\kappa, \sigma, \hat{R}) = D(-\kappa, \sigma, \hat{R})$ для любого σ . Предположим далее, что при потере устойчивости наиболее неустойчивой (наименее устойчивой) модой, является мода с волновым числом $\kappa(R_c) = 0$, где R_c — критическое значение параметра. Тогда в случае общего положения алгебраическая аппроксимация дисперсионного соотношения для $|\hat{R} - R_c| \ll 1$, описывающая узкую полосу слабо неустойчивых мод, имеет вид

$$\sigma = \hat{a} - \hat{b}\kappa^2 + O(\kappa^4), \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

где $\hat{a} = r(\hat{R} - R_c)$, $r > 0$, $0 < \hat{b} \rightarrow b_c$ при $\hat{R} \rightarrow R_c$. Кривая нейтральной устойчивости для рассматриваемого случая схематически изображена на рис. 3. Ширина полосы неустойчивых мод имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$, где $\varepsilon = |\hat{R} - R_c|$ (рис. 4).

При малых ε задача допускает в качестве приближенных решений моды вида $\varepsilon A(X, T)$, где A — вещественная функция, X, T — медленно меняющиеся соответственно координата и время. В случае

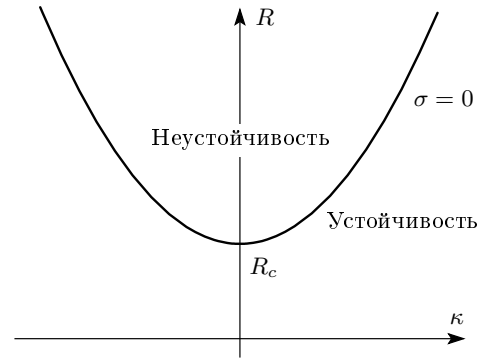


Рис. 3. Критическая кривая $\sigma = 0$ в плоскости (κ, \hat{R})

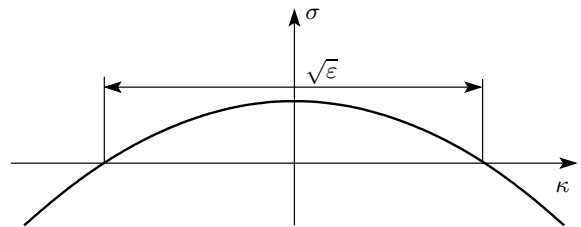


Рис. 4. Вид зависимости $\sigma(\kappa, \hat{R})$ при фиксированных \hat{R} , $0 < \varepsilon = \hat{R} - R_c \ll 1$

невыврожденной квадратичной нелинейности имеем $X = \sqrt{\varepsilon}x$, $T = \varepsilon t$. Амплитуда наиболее неустойчивой моды, в соответствии с (5.1), подчиняется уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\hat{a}}{\varepsilon}A + b_c \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \hat{d}A^2, \quad (5.2)$$

где $\hat{d} \neq 0$ — коэффициент нелинейности. Уравнение (5.2) описывает эволюцию пакета слабоустойчивых длинных волн в окрестности порога неустой-

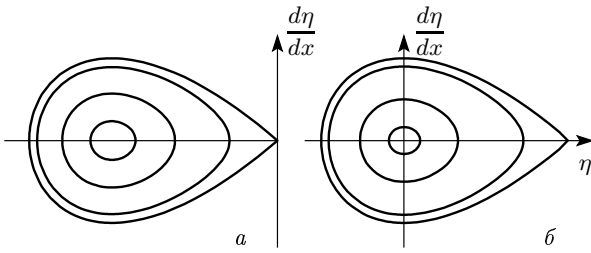


Рис. 5. Фазовые портреты (ограниченные решения) уравнения (5.4), (5.14): докритический (а) и надкритический (б) случаи

чивости. Масштабными преобразованиями это уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \hat{\gamma}u - u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \hat{\gamma} = \mp 1. \quad (5.3)$$

В надкритическом случае ($\hat{\gamma} = 1$) уравнение (5.3) представляет собой широко известное уравнение КПП [11]. В докритическом случае ($\hat{\gamma} = -1$) уравнение (5.3) сводится к уравнению КПП преобразованием $u \rightarrow u - 1$.

На рис. 5 изображены фазовые портреты уравнения

$$\ddot{u} = -\hat{\gamma}u + u^2, \quad (5.4)$$

описывающего стационарные режимы в окрестности порога неустойчивости, соответственно при $\hat{\gamma} = \mp 1$ (точка означает дифференцирование по ξ).

Из рис. 5 видно, что в окрестности порога неустойчивости имеются две точки равновесия динамической системы, эквивалентной (5.4), которые отвечают однородным течениям. В докритической области ($\hat{\gamma} = -1$) решение $u = 0$ является устойчивым, а решение $u = -1$ — неустойчивым. В надкритической области решение $u = 0$ неустойчиво, а решение $u = 1$ является устойчивым. Таким образом, при переходе через порог неустойчивости происходит общий сдвиг состояний равновесия, описывающих однородные течения, на постоянную величину, равную единице для безразмерного уравнения (5.3). При этом экспоненциальный рост положительного возмущения неустойчивого однородного состояния подавляется нелинейностью, в результате чего возмущенное динамически неустойчивое положение равновесия с течением времени стремится к положению равновесия, отвечающему устойчивому однородному течению. Если неустойчивое однородное состояние подвергается неположительным возмущениям, то эти возмущения неограниченно растут с

течением времени в область слева от неустойчивой точки равновесия.

5.1. Течения с диффузией пара

Для $H < 1/2$ реализуется другой сценарий возникновения неустойчивости. Рисунок 6а иллюстрирует устойчивое состояние, когда маргинальное состояние (3.7) пусто, т.е. кривая $\zeta = f(K)$ не пересекается с прямой $\zeta = \Delta$. Если давление P_0 уменьшается, прямая $\zeta = \Delta$ сдвигается вверх, в то время как минимум кривой $\zeta = f(K)$ — вниз. Маргинальная устойчивость достигается в момент, когда имеется точка пересечения при $K = 0$. Второй корень уравнения (2.14) неустойчив (рис. 6б), но, когда P_0 уменьшается, прямая движется вниз, в то время как кривая — вверх. В результате, второй корень достигает порога неустойчивости одновременно с первым корнем и они совпадают на границе устойчивости. Момент маргинальной устойчивости (когда прямая $\zeta = \Delta$ касается графика функции $\zeta = f(K)$ в плоскости (K, ζ) при $K = 0$) в плоскости (K, Σ) проиллюстрирован на рис. 6в.

Раскладывая левую часть уравнения (3.7) в окрестности нуля и пренебрегая членами высшего порядка, получим критерий перехода при $K = 0$:

$$\frac{H^2}{(1-H)^2} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) совпадает с условием (2.16) слияния корней решения основного уравнения и кратный корень отвечает маргинальному множеству в пространстве параметров. Когда величина Δ далее увеличивается, вещественные решения квадратного уравнения (2.14) исчезают. Это означает, что не существует стационарных основных режимов с поверхностью фазового перехода в рассматриваемой области параметров.

Таким образом, переход возможен для положительных фронтов $H < 1/2$. Из условий устойчивости $\Delta < 1$ ($f(0) > \Delta$) следует, что корень H_s , отвечающий верхнему положению фронта (напомним, что ось z направлена вниз), неустойчив для всех $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$. Корень H_l , который отвечает нижнему положению фронта, линейно устойчив в области $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где

$$\mathcal{D}_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \mid 0 < \alpha < 1/4\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \mid 1/4 < \alpha < 1/2 \cap 0 < \beta < 1/2 - \alpha\}.$$

Корень H_l становится неустойчивым за счет рассматриваемого перехода на границе Γ_2 ,

$$\Gamma_2 = \{(\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < 1/4, \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 1\}.$$

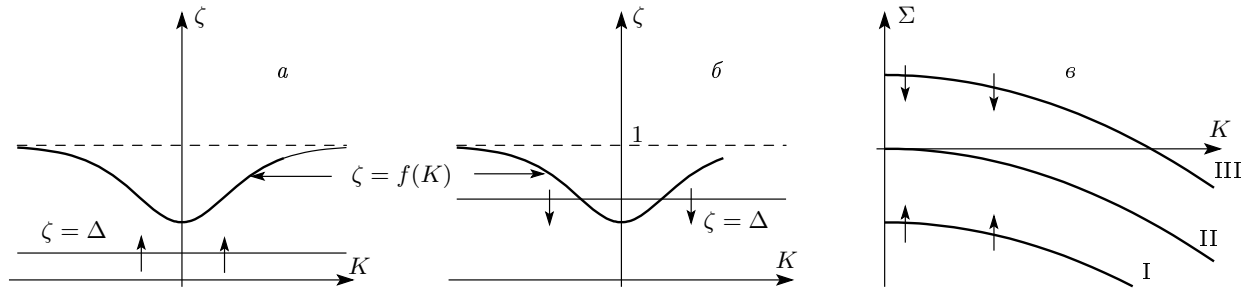


Рис. 6. Случай $H < 1/2$. Сравнительное положение прямой $\zeta = \Delta$ и графика $\zeta = f(K)$ для устойчивого $H = H_l$ (а) и неустойчивого $H = H_s$ (б) фронтов. Эскизы дисперсионных кривых $\Sigma = \Sigma(K)$ (в) для устойчивого $H = H_l$ (I), маргинального (II) и неустойчивого $H = H_s$ (III) фронтов. Вертикальные стрелки обозначают тенденцию стремления к маргинальному состоянию на пути к неустойчивости

5.1.1. Вывод уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова

В этом пункте сосредоточимся на случае длинноволновой неустойчивости при $K = 0$, т.е. для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_2$ вблизи границы Γ_2 . Выводится уравнение, описывающее вторичные структуры, которые являются бифуркациями из основного состояния (2.13) в малой окрестности порога неустойчивости. Принимая во внимание длинноволновую природу неустойчивости, определим два безразмерных параметра χ и ε :

$$\chi = L^2/\hat{\lambda}^2, \quad \varepsilon = \hat{\eta}_a/L,$$

где $\hat{\lambda}$ и $\hat{\eta}_a$ — характеристические значения длины волны и амплитуды. Определим безразмерные переменные (сохраняя прежние обозначения) как

$$x \rightarrow \hat{\lambda}x, \quad t \rightarrow \frac{L^2}{D}t, \quad \eta \rightarrow \hat{\eta}_a\eta, \quad z \rightarrow Lz.$$

Уравнения (2.5), (2.6) теперь переписываются в следующем безразмерном виде ($\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{xx}^2 = \partial^2/\partial x^2$ и т.д.):

$$(\chi\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2)P = 0, \quad \partial_t\nu = (\varepsilon\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2)\nu. \quad (5.6)$$

В дальнейшем положим

$$P = P_{st} + P', \quad \nu = \nu_{st}^s + \nu',$$

где P', ν' — соответственно возмущения давления и влажности в областях с низкой проницаемостью, насыщенных водой и смесью воздуха с паром.

Запишем в виде ряда выражения для давления и

влажности по вертикальной координате z в окрестности $z = H$ в обеих областях:

$$\begin{aligned} P &= P_a + P_c + P' + \\ &+ \left(\frac{P_a + P_c - P_0}{H} + \partial_z P' \right) (z - H) + \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{zz}^2 P' (z - H)^2 + \frac{1}{6} \partial_{zzz}^3 P' (z - H)^3 + \dots, \quad (5.7) \\ \nu &= \nu_* + \nu' + \left(\frac{\nu_a - \nu_*}{1 - H} + \partial_z \nu' \right) (z - H) + \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{zz}^2 \nu' (z - H)^2 + \frac{1}{6} \partial_{zzz}^3 \nu' (z - H)^3 + \dots \end{aligned}$$

Подставим выражения (5.7) для давления в граничные условия (2.10) при $z = 0$ и выражения для влажности в граничные условия на границе $z = 1$. Получим

$$\begin{aligned} \partial_z P' &= \frac{P'}{H} + \frac{1}{2} \partial_{zz}^2 P' H - \frac{1}{6} \partial_{zzz}^3 P' H^2 + \dots, \\ \partial_z \nu' &= -\frac{\nu'}{1 - H} - \frac{1}{2} \partial_{zz}^2 \nu' (1 - H) - \\ &- \frac{1}{6} \partial_{zzz}^3 \nu' (1 - H)^2 - \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее выразим производные по z через производные по x из уравнений (5.6):

$$\begin{aligned} \partial_{zz}^2 P' &= -\chi \partial_{xx}^2 P', \\ \partial_{zzz}^3 P' &= -\chi \partial_{xx} (\partial_z P'), \dots, \\ \partial_{zz}^2 \nu' &= (\partial_t - \chi \partial_{xx}^2) \nu', \\ \partial_{zzz}^3 \nu' &= (\partial_t - \chi \partial_{xx}^2) \partial_z \nu', \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8) и разрешая получившиеся уравнения относительно χ , получим

$$\begin{aligned} \partial_z P' &= \frac{P'}{H} - \frac{\chi H}{3} \partial_{xx}^2 P' - \dots, \\ \partial_z \nu' &= -\frac{\nu'}{1 - H} - \frac{1 - H}{3} (\partial_t - \chi \partial_{xx}^2) \nu' - \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из граничных условий (2.7), (2.8), используя формулу (5.10), получим асимптотические выражения для приращений давления и влажности на возмущенной поверхности раздела:

$$P' = -\frac{P_a + P_c - P_0}{H} \varepsilon \eta + \frac{P_a + P_c - P_0}{H^2} \varepsilon^2 \eta^2 - \dots, \quad (5.11)$$

$$\nu' = -\frac{\nu_a - \nu_*}{1 - H} \varepsilon \eta - \frac{\nu_1 - \nu_*}{(1 - H)^2} \varepsilon^2 \eta^2 - \dots$$

Подставляя выражения (5.10), (5.11) в приведенный к безразмерному виду закон сохранения (2.9) и полагая $\chi = \varepsilon$, получим окончательно уравнение (2.14) при ε^0 , нуль при ε , и уравнение

$$c_0 \partial_\tau \eta = c_1 \eta + c_2 \partial_{xx} \eta + c_3 \eta^2, \quad \tau = \varepsilon t \quad (5.12)$$

при ε^2 . Здесь

$$c_0 = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\nu_a - \nu_*}{3} > 0,$$

$$c_1 = \varepsilon^{-1} \left(\frac{k}{D \mu_w m} \frac{P_a + P_c - P_0}{H^2} + \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\nu_a - \nu_*}{(1 - H)^2} \right),$$

$$c_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{k}{D \mu_w m} (P_a + P_c - P_0) + \frac{\rho_a}{\rho_w} (\nu_a - \nu_*) \right) > 0,$$

$$c_3 = -\left(\frac{k}{D \mu_w m} \frac{P_a + P_c - P_0}{H^3} + \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\nu_* - \nu_a}{(1 - H)^3} \right) < 0.$$

Коэффициент $c_1 \sim 1$ в окрестности маргинальной устойчивости: условие $\varepsilon = 0$ отвечает условию маргинальной устойчивости обсуждаемого перехода, которое совпадает с критерием (5.5).

5.1.2. Эволюция возмущений

Рассматриваемое уравнение (5.12) может быть сведено к форме уравнения КПП (5.2) при помощи использования подходящего преобразования (прежние обозначения сохраняются для масштабированных переменных):

$$\partial_\tau \eta = \hat{\gamma} \eta - \eta^2 + \partial_{xx}^2 \eta, \quad (5.13)$$

где $\hat{\gamma} = \text{sign}(c_1)$.

На рис. 5 представлены фазовые портреты стационарного уравнения

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\hat{\gamma} \eta + \eta^2. \quad (5.14)$$

Это уравнение описывает стационарные режимы (не обязательно горизонтально-однородные) в некоторой окрестности порога неустойчивости для $\hat{\gamma} = \mp 1$.

Из рис. 5 можно видеть, что в окрестности порога неустойчивости имеются две точки равновесия динамической системы, эквивалентной (5.14). Эти точки отвечают основным режимам, представляющим собой горизонтально-однородные течения. В докритической области ($\hat{\gamma} = -1$) решение $\eta = 0$ является устойчивым, в то время как решение $\eta = -1$ — неустойчиво. В надкритической области решение $\eta = 0$ неустойчиво, в то время как решение $\eta = 1$ устойчиво. Следовательно, переход сопровождается сдвигом устойчивых состояний, описывающих основные режимы, на постоянную величину, равную единице для безразмерного уравнения (5.13). Ясно, что для нашей задачи случай $\hat{\gamma} = 1$ сводится к рассмотрению фронта $H = H_s$ как основного решения, рассматриваемого на предмет устойчивости, т. е. к возмущению его в области параметров, докритической для устойчивого фронта H_l .

Легко видеть, что в уравнении (5.13) экспоненциальный рост положительного возмущения неустойчивого основного состояния подавляется нелинейностью. В результате возмущенное динамически неустойчивое положение равновесия эволюционирует к устойчивому положению равновесия. Если неустойчивое положение равновесия подвергается неположительному возмущению, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx < 0, \quad (5.15)$$

эти возмущения растут со временем. Это следует из результата применения леммы Гронуолла–Беллмана к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx < \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx,$$

которое, в свою очередь, следует из однократного интегрирования (5.13) для $\hat{\gamma} = 1$.

Поскольку меньший корень (2.14) H_s неустойчив и больший корень H_l устойчив относительно длинноволновых возмущений, имеет место конфигурация положения поверхностей раздела, изображенная на рис. 7. Положительные возмущения неустойчивой верхней поверхности раздела (напомним, что ось z направлена вниз, как на рис. 1), эволюционируют в устойчивую нижнюю поверхность. Возмущения, удовлетворяющие условию (5.15), растут в область выше неустойчивой поверхности раздела (рис. 7). Поведение этих возмущений показывает либо стабилизацию системы на нижней поверхности раздела, либо тенденцию проникновения смеси воздух–пар в

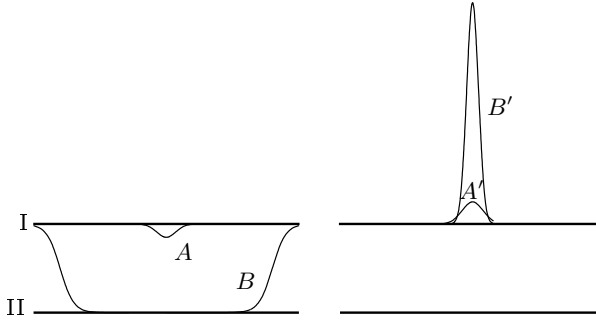


Рис. 7. Схематическое изображение развития возмущений неустойчивой поверхности раздела (I) в окрестности порога неустойчивости. *A* — начальное возмущение, сконцентрированное между устойчивой (II) и неустойчивой поверхностями раздела, *B* — эволюция *A* по прошествии некоторого времени; *A'* — начальное возмущение, удовлетворяющее условию (5.15), *B'* — его эволюция

область, занятую водой, когда параметры системы изменяются около критического значения перед порогом неустойчивости фронта $H = H_l$.

5.2. Течения в геотермальных системах

Для режимов с $H > 1/2$, т. е. $\min[(1 - H)/H, 1] = (1 - H)/H$, переход к неустойчивости имеет место при $1/f(K)_1 = (1 - H)/H$ или при

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \frac{1 - 2H}{H} \left(\frac{\omega_v H}{1 - H} \Gamma_4 R - \omega_w \Gamma_0 \right) = 0,$$

$$\sigma_1 = \omega_v R (\Gamma_4 + \Gamma_5) + \omega_w (\Gamma_0 + \Gamma_3) + \omega_w \omega_v \frac{B}{T_0} \frac{mq\rho_w R}{\lambda T_0} \Gamma \Gamma_1,$$

($\sigma_1 = 0$ соответствует переходу к неустойчивости при бесконечных волновых числах) [17]. Это равенство достигается при нулевых волновых числах κ . Дисперсионная кривая, соответствующая неустойчивому состоянию $\sigma = \sigma(\kappa)$, изображена на рис. 4 [17].

Возникновение неустойчивости режимов с $H < 1/2$, т. е. $\max[(1 - H)/H, 1] = (1 - H)/H$, имеет место при $1/f(K)_2 = (1 - H)/H$. Последнее равенство эквивалентно $\sigma_2 = 0$. Этот переход иллюстрируется рис. 6. В следующем пункте рассмотрим его подробнее.

5.2.1. Уравнение

Колмогорова – Петровского – Пискунова

В работе [21] выведено уравнение КПП для случая течений в геотермальной системе:

$$\delta \partial_\tau \eta = \tilde{\alpha} \eta + \tilde{\beta} \partial_{xx} \eta + \tilde{\gamma} \eta^2, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\alpha} = -\frac{\rho_w m \mu_w \sigma_2}{D} \varepsilon,$$

$$\tilde{\gamma} = -\gamma_P - \frac{P_0 B \Gamma}{T_0^2} \gamma_T, \quad \delta = \delta_P + \frac{P_0 B \Gamma}{T_0^2} \delta_T,$$

$$\tilde{\beta} = -\beta_P - \frac{P_0 B \Gamma}{T_0^2} \beta_T - \frac{P_* B}{T_*^2 H} \alpha_T - \frac{\alpha_P}{H} + \frac{B P_*}{T_*} \left(\frac{\alpha_T}{T_*} + \frac{T_* - T_0}{H T_*} \right)^2 + \frac{1}{2} P_* \left(\frac{\alpha_P}{P_*} + \frac{P_* - P_0}{H P_*} \right)^2,$$

$$\alpha_P = k \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v P_0 \Gamma_1}{(1 - H) D},$$

$$\beta_P = -k \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v P_0 \Gamma_1}{(1 - H)^2} \left[k \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{H(1 - H)} - 1 \right],$$

$$\gamma_P = k \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v P_0 \Gamma_1}{3D} \left\{ -(1 - H) + \frac{1}{D} \left[k \frac{\mu_w}{\mu_v} \rho_v (1 - H) + k \rho_w H \right] \frac{1}{1 - H} \right\},$$

$$\alpha_T = k \frac{q \rho_w \alpha_P}{\lambda \mu_w} (1 - H) + T_0 \Gamma_2 H,$$

$$\beta_T = \frac{T_0 \Gamma_2 H}{1 - H} + k \frac{q \rho_w}{\mu_w \lambda} \beta_P (1 - H) - \frac{\alpha_T}{1 - H},$$

$$\gamma_T = \frac{\alpha_T}{3} H (1 - H) - \frac{H(1 - H)^2}{3} T_0 \Gamma_2 + k \frac{q \rho_w}{\mu_w \lambda} (1 - H) \gamma_P - k \frac{q \rho_w}{\mu_w \lambda} H^2 (1 - H) \frac{\alpha_P}{3},$$

$$\delta_T = \frac{m a q \rho_w}{\lambda} H (1 - H) - \frac{H(1 - H)}{3} \alpha_T + \frac{H(1 - H)^2}{3} T_0 \Gamma_2 + k \frac{q \rho_w}{\mu_w \lambda} (1 - H) \delta_P,$$

$$\delta_P = -\frac{m a \mu_w}{\rho_w} \rho_v D, \quad D = k \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{1 - H} + k \frac{\rho_w}{H}.$$

Коэффициент σ_2 пропорционален ε в окрестности порога неустойчивости, так как условие $\sigma_2 = 0$ отвечает нейтральной устойчивости для рассматриваемого типа перехода [17].

5.2.2. Пример

В качестве примера рассмотрим геотермальную систему при следующих значениях физических параметров: $m = 0.2$, $\mu_w = 1.48 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $\mu_v = 1.59 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho_w = 888.66$ кг/м³, $\rho_v = 4.82$ кг/м³, $q = 2 \cdot 10^6$ Дж/кг, $C = 2 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, $\lambda = 2$ Вт/м·К, $g = 9.8$ м/с², $L = 300$ м, $T_0 = 450$ К, $T^0 = 500$ К, $P_a = 10^5$ Па, $P_0 = 10^6$ Па, $P^0 = 2 \cdot 10^6$ Па. Будем менять значение проницаемости k на интервале $I = \{3.2 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2, 3.5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2\}$.

В правой граничной точке интервала I уравнение (2.22) имеет три корня, один из них находится в окрестности единицы, а два остальных — в окрестности точки 0.1 (рис. 8). Расстояние между меньшими корнями уменьшается при уменьшении значения проницаемости k . При $k = k_0 \approx 3.368 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ эти корни совпадают и перестают существовать при $k > k_0$. Условие совпадения корней очевидным образом тождественно условию перехода к неустойчивости, которое имеет вид $\tilde{\alpha} = 0$ в (5.16) (или, что то же самое, $\sigma_2 = 0$). Другие коэффициенты уравнения (5.16) при $k = k_0$ равны $\tilde{\beta}/\delta \approx 6.93$, $\tilde{\gamma}/\delta \approx -200.04$.

Таким образом, в случае течения, описываемого данным примером, меньший корень H_s уравнения (2.22) неустойчив, в то время как средний корень H_l устойчив и положение поверхностей фазового перехода именно такое, какое изображено на рис. 5. Положительное возмущение положения верхней неустойчивой поверхности (напомним, что ось z направлена вниз, рис. 1) с течением времени стремится к положению нижней устойчивой поверхно-

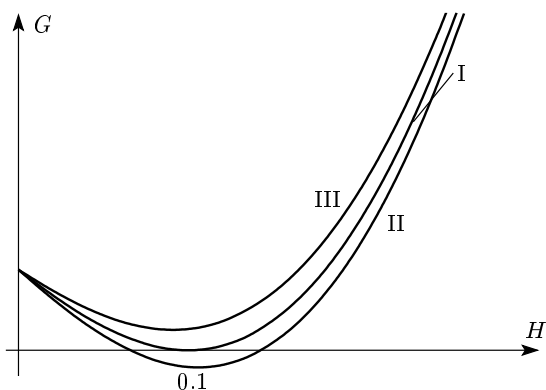


Рис. 8. Возникновение (исчезновение) пары меньших корней уравнения (2.22) при изменении проницаемости k : $k = k_0 \approx 3.368003234 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ (кривая I), $k = 3.2 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ (кривая III), $k = 3.5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ (кривая II)

сти. Возмущение, удовлетворяющее условию (5.15), растет в область выше неустойчивой поверхности раздела (рис. 7). Поведение этих возмущений демонстрирует тенденцию проникновения пара в область, занятую водой, когда параметры изменяются вблизи критических значений в области устойчивости нижней поверхности.

Значения коэффициентов в уравнении (5.16) для некоторых значений проницаемости k , близких к k_0 , приведены в таблице (слева от соответствующего значения k даны величины для устойчивого корня (2.22), справа — для неустойчивого). Из таблицы видно, что коэффициенты при $\partial_{xx}^2 \eta$ и η^2 меняются незначительно и могут быть приняты равными критическим по крайней мере для данного диапазона изменения проницаемости.

При максимальном значении проницаемости k , приведенном в таблице, например, имеем $H_l - H_s \approx 0.00692$. То же значение с точностью до пятого знака получаем для разности положений равновесия из уравнения (5.16). При переходе к размерным переменным имеем $h_l - h_s \approx 2.07$ м для данного значения проницаемости.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Предметом обсуждения в настоящей статье являются новые типы перехода к неустойчивости, которые характеризуются наиболее неустойчивой модой, соответствующей бесконечно большому и нулевому волновому числу. Обсуждаемые переходы проиллюстрированы при помощи двух примеров течений с поверхностью фазового перехода в пористой среде, когда более тяжелая фаза (вода) находится над более легкой (смесью воздуха с паром или паром).

Коротковолновая неустойчивость, по-видимому, носит искусственный характер и может быть исключена из рассмотрения модели. Одним из предположений, почему она имеет место, служит тот факт, что для очень коротких волн поверхность раздела между жидкостью и паром нельзя рассматривать, как собственно поверхность раздела между водой и паром. Как и в стратифицированной жидкости со сдвигом скоростей, когда всегда присутствует коротковолновая неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, поверхность контакта превращают в зону смеси двух жидкостей [22]. В нашем случае, зоной контакта является зона смеси воды и пара с ярко выраженным конвективным переносом тепла (см., например, [23]).

Данные типы переходов к неустойчивости впервые обсуждались для достаточно сложных многопа-

Таблица

№	α/δ	β/δ	γ/δ	H_l	$k \cdot 10^{16}, \text{ м}^2$	H_s	γ/δ	β/δ	α/δ
1	-0.114	-200.64	6.97	1.004	3.37801	0.0996	6.90	-199.47	0.114
2	-0.436	-202.34	7.05	0.101	3.3681	0.099	6.82	-197.9	0.427
3	-0.771	-204.2	7.2	0.102	3.3683	0.098	6.73	-196.4	0.742
4	-1.44	-207	7.3	0.104	3.369	0.097	6.58	-193.60	1.34

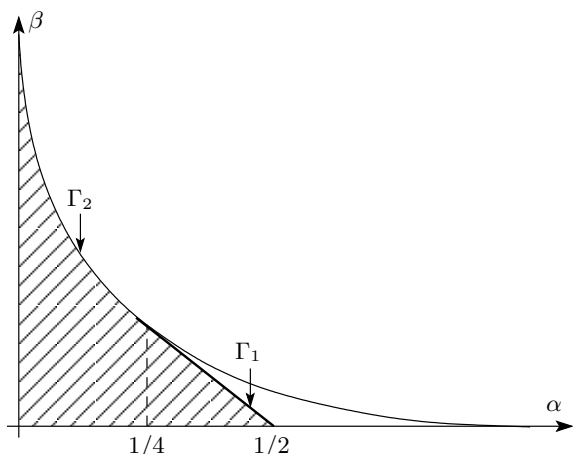


Рис. 9. Область \mathcal{D} существования корней H_s, H_l для $\alpha > 0$. Корень H_l устойчив в заштрихованной области \mathcal{D}_0 ; он становится неустойчивым на границе $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$: на Γ_1 через переход $K = \infty$, на Γ_2 через переход $K = 0$

раметрических моделей геотермальных систем, которые в той или иной мере рассматриваются в данной статье [16, 17]. Поэтому формулируется простая физическая модель (первый пример), допускающая полный анализ в замкнутой аналитической форме. Что касается последнего случая, то наш подход позволяет дать простое, но информативное описание явления, которое отражает естественную физику процесса.

Показано, что исчезновение основного режима, подлежащего анализу на устойчивость, совпадает с его маргинальной устойчивостью. Этот факт влечет за собой «катастрофическую» перестройку системы в целом, рассматриваемое основное течение никуда не переходит в окрестности самого себя и, следовательно, изменяется существенно, быстро развиваясь в нестационарный режим. В соответствии с этим, рассматриваемый переход имеет место под действием механизма, отличного от экспоненциального роста нормальных мод и соответствует катастрофи-

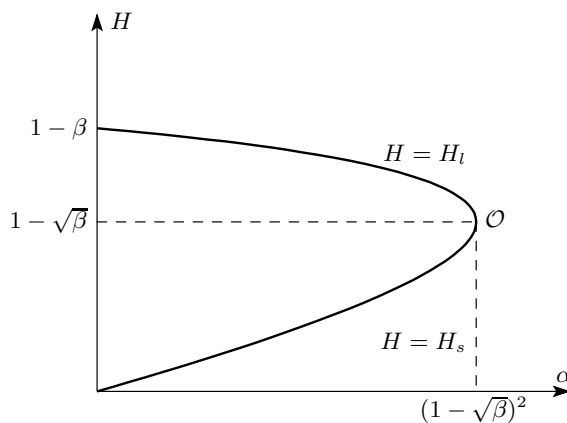


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма зависимости H от α при фиксированном β в (2.11); $H = H_l$ — устойчивая ветвь, $H = H_s$ — неустойчивая ветвь, O — точка поворота

ческому сценарию развитию неустойчивости, когда основной режим исчезает.

Следовательно, критерий устойчивости (3.7) дает два возможных пути развития неустойчивости. Первый имеет место при бесконечных волновых числах, отвечает условию $\Delta = 1$ и возможен только для положений фронтов $H > 1/2$. Второй переход имеет место при нулевых волновых числах, соответствует критерию $f(0) = \Delta$ и возможен для положения фронтов $H < 1/2$. Из условий устойчивости $\Delta < 1, f(0) > \Delta$ (см. рис. 2а,б и 6а,б) следует, что корень H_s , отвечающий верхнему положению фронта, неустойчив для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$. Корень H_l , который отвечает нижнему положению фронта, линейно устойчив в области $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где

$$\mathcal{D}_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \mid 0 < \alpha < 1/4\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \mid 1/4 < \alpha < 1/2 \cap 0 < \beta < 1/2 - \alpha\}.$$

Однако этот корень линейно неустойчив в области $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ (рис. 9). Компоненты границы $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где H_l становится неустойчивым, выражаются формулами

$$\Gamma_1 = \{(\alpha, \beta) \mid 1/4 < \alpha < 1/2, \alpha + \beta = 1/2\},$$

$$\Gamma_2 = \{(\alpha, \beta) \mid 0 < \alpha < 1/4, \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 1\}.$$

Корень H_I становится неустойчивым через переход $K = \infty$ на Γ_1 , в то время как он становится неустойчивым через переход $K = 0$ на границе Γ_2 (рис. 9).

Установлено, что в окрестности порога неустойчивости для перехода через $K = 0$, существуют в точности два основных течения, отвечающих различным расположениям поверхностей фазового перехода. Один из этих режимов устойчив, в то время как другой неустойчив. На пороге неустойчивости имеет место совпадение этих двух фронтов. Бифуркационная диаграмма для этого случая приведена на рис. 10. Видно, что имеет место поворот, это типично для докритических бифуркаций, следовательно, одна ветвь решения устойчива, а другая — докритически неустойчива. Тем не менее, в анализируемом случае невозможно продолжить решение, теряющее устойчивость (ветвь $H = H_I$) через точку поворота \mathcal{O} (рис. 10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Дразин, *Введение в теорию гидродинамической устойчивости*, Физматлит, Москва (2005).
2. A. C. Newell and J. A. Whitehead, *J. Fluid. Mech.*, **38**, 279 (1969).
3. R. C. DiPrima, W. Echaus, and L. A. Segel, *J. Fluid Mech.* **49**, 705 (1971).
4. W. Ekhaus, in *Proc. 2nd Int. Conf. Industrial and Appl. Math., ICIAM-91*, Washington (1991).
5. K. Stewartson and J. T. Stuart, *J. Fluid Mech.* **48**, 529 (1971).
6. G. Iooss and A. Mielke, *J. Nonlinear Sci.* **1**, 107 (1991).
7. M. Renardy, *Adv. Math.* **3**, 384 (1982).
8. S. Gauthier, A. Games, and G. Iooss, *Europhys. Lett.* **13**, 117 (1990).
9. D. S. Cohen, F. C. Hoppensteadt, and R. M. Miura, *SIAM J. Appl. Math.* **33**, 217 (1977).
10. G. Iooss and A. Mielke, *Z. Angew. Math. Phys.* **43**, 125 (1992).
11. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, *Бюллетень МГУ. Математика и механика* **1(6)**, 1 (1937).
12. M. Bramson, *Mém. Amer. Math. Soc.* **44**, (1983).
13. K. Kirchgässner, *J. Diff. Equ.* **96**, 256 (1992).
14. В. Ж. Аренс, А. П. Дмитриев, Ю. Д. Дядькин, *Теплофизические аспекты освоения ресурсов недр*, Недра, Ленинград (1988).
15. А. Т. Ильичев, Г. Г. Цыпкин, *Изв. АН, сер. МЖГ*, № 1, 96 (2007).
16. G. Tsyupkin and A. Il'ichev, *Transp. Porous Media* **55**, 183 (2004).
17. А. Т. Il'ichev and G. G. Tsyupkin, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **24**, 491 (2005).
18. D. R. Lide, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, Boca-Raton: New-York, Washington (2001–2002).
19. М. П. Вукалович, *Термодинамические свойства воды и водяного пара*, Машгиз, Москва (1955).
20. А. Т. Ильичев, Г. Г. Цыпкин, *ДАН* **416**, 192 (2007).
21. А. Т. Ильичев, В. Е. Одинцова, *Изв. АН, сер. МЖГ*, № 1, 110 (2008).
22. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математическое моделирование распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, Изд-во Сибирского отд. РАН, Новосибирск (2000).
23. J. E. Eastwood and T. J. T. Spanos, *Transp. Porous Media* **14**, 1 (1994).