

МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ЭХО ЛОШМИДТА И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В КВАНТОВОЙ ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ПЛОТНЫМ ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

В. А. Бендерский^{a,}, Л. Н. Гак^a, Е. И. Кац^{b,c}*

^a *Институт проблем химической физики Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^b *Институт теоретической физики им Л. Д. Ландау
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^c *Institut Laue-Langevin
38042, Grenoble Cedex 9, France*

Поступила в редакцию 27 июля 2008 г.

Динамическая задача для системы, связанной с резервуаром, обладающим плотным дискретным спектром, решена аналитически при двух упрощающих условиях, предложенных Цванцигом [15]: спектр резервуара эквидистантен и матричные элементы связи системы со всеми уровнями резервуара одинаковы. Постановка задачи моделирует условия экспериментального изучения колебательной релаксации выделенного колебания (системы), взаимодействующего с колебательным спектром наночастицы (резервуаром). Показано, что в каждом цикле возврата возникает эхо Лошмидта, число компонент которого равно номеру цикла. При критическом номере цикла компоненты соседних циклов перемешиваются, так что динамика системы из регулярной превращается в подобную стохастической: сколь угодно малое огрубление результатов измерений или неопределенность начальных условий, существующие в любой реальной системе, вызывают потерю взаимно однозначного соответствия между дискретным спектром собственных значений и эволюцией системы и потерю инвариантности к обращению времени. Обсуждается связь перемешивания циклов с запутыванием траекторий и перекрыванием резонансов в классических системах с перемешиванием. Свойства модели согласуются с многообразием кинетических режимов колебательной релаксации (от экспоненциального спада до иррегулярных слабо затухающих осцилляций), найденным в различных объектах, общим для которых является среднее расстояние между ближайшими уровнями порядка $1\text{--}10\text{ см}^{-1}$, когда циклы возврата расположены в области $10^{-13}\text{--}10^{-11}$ с, изучаемой методами фемтосекундной спектроскопии.

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Vf, 03.65.Yz

1. ВВЕДЕНИЕ

Современная фемтосекундная спектроскопия обнаружила, что колебательная релаксация (распад первоначально приготовленного возбужденного состояния выбранного колебания, населенность которого регистрируется как функция времени), как правило, имеет вид иррегулярных осцилляций, вместо ожидаемого экспоненциального спада. Необычная кинетика релаксации наблюдалась в весьма разнообразных объектах, от простых молекул вблизи порога

диссоциации [1–3] до больших фотохромных молекул в биологических структурах [4–7] и на границах раздела [7, 8].

Указанный эффект не находит своего объяснения в моделях системы (наблюдаемого колебания в данном случае), взаимодействующей с резервуаром (совокупностью других колебаний) при дополнительном предположении, что спектр резервуара непрерывен. Эти детально изученные модели предсказывают переход от когерентных осцилляций к экспоненциальному распаду с увеличением силы связи системы с резервуаром [9–12]. Чтобы объяс-

*E-mail: bender@icp.ac.ru

нить возникновение осцилляций, были предложены также полуэмпирические модели, в которых предполагалось, что система взаимодействует помимо резервуара с непрерывным спектром, с одним-двумя слабо затухающими колебаниями [7, 13]. Однако эти модели также не позволили объяснить возникновение иррегулярных релаксационных колебаний. Общим для изученных систем является дискретность колебательного спектра. В области частот нормальных колебаний $300\text{--}3000\text{ см}^{-1}$ расположено порядка $10^2\text{--}10^3$ уровней при среднем расстоянии между ближайшими уровнями $\bar{\nu}$ порядка 10 см^{-1} . Это общее свойство указанных выше разнообразных объектов заставляет предположить, что сложная кинетика релаксации обусловлена дискретностью колебательного спектра резервуара, поскольку последняя создает циклы возврата с периодом $T \approx \bar{\nu}^{-1}$. При указанном значении $\bar{\nu}$ период циклов лежит в области фемтосекундных измерений, так что именно дискретность спектра может быть причиной наблюдаемого эффекта.

В настоящей работе, исходя из этого предположения, мы рассмотрим динамическую модель системы, связанной с дискретным спектром. Такая задача, к нашему удивлению, оказалась до сих пор нерешенной. Ее решение полезно по двум причинам. Во-первых, как уже сказано выше, экспериментально обнаруженные характеристики колебательной релаксации не объясняются в рамках существующих моделей резервуара с непрерывным спектром. Во-вторых, дискретные колебательные спектры являются общим свойством наночастиц, динамические свойства которых интересны для многих приложений. В кратком сообщении [14] мы рассмотрели динамику модели Цванцига [15] (эквидистантный спектр резервуара, одинаковые матричные элементы взаимодействия системы со всеми состояниями резервуара) и показали, что 1) в циклах возврата происходит синхронизация обратных переходов из резервуара в систему, вызывающая многокомпонентное эхо Лошмидта в виде цуга нерегулярных осцилляций, 2) синхронизация обратных переходов разрушается с ростом номера цикла, вызывая уширение эхо и рост числа его компонент, 3) существует критический номер цикла, при котором компоненты эхо различных циклов перемешиваются. В данной статье изложено полное решение динамической задачи. Особое внимание уделено не рассмотренному в [14] сопоставлению квантовой эволюции с классической динамикой.

Статья организована следующим образом: разд. 2 посвящен обоснованию выбора модели,

разд. 3 — решению динамической задачи, разд. 4 — эволюции системы, разд. 5 — моделям перемешивания. Результаты обсуждаются в разд. 6. Статья дополнена приложениями, в которых рассмотрены формула суммирования Пуассона и связь амплитуд циклов возврата с полиномами Лагерра и их асимптотики.

2. ВЫБОР МОДЕЛИ

Расталкивание уровней одинаковой симметрии приводит к образованию в плотном спектре последовательностей уровней, близких к эквидистантным. Эта идея, выдвинутая еще фон Нейманом [16], широко использовалась в статистической теории ядерных реакций [17, 18] (см. также современные обзоры [19–21]) и получила обоснование в теории случайных матриц [22], где было доказано, что локальные свойства системы с плотным спектром зависят не от детальной структуры спектра, а от распределения интервалов между ближайшими уровнями. Предложенное Вигнером [17] универсальное распределение

$$\rho(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right) \quad (2.1)$$

многократно использовалось для описания различных ансамблей с дискретным спектром. Развитие в теории случайных матриц представления применимы к интересующим нас плотным колебательным спектрам, где следует ожидать, что релаксация наблюдаемого колебания как локальное свойство преимущественно зависит от усредненных характеристик колебательного резервуара. Чтобы выбрать модель резервуара, мы просмотрели колебательные спектры высокого разрешения ряда больших молекул и нашли, что распределения интервалов между соседними уровнями приблизительно одинаковы. Укажем на два репрезентативных примера. Прогрессия поперечных колебаний метиленовых цепочек является функцией одного параметра — разности фаз колебаний соседних CH_2 -фрагментов и имеет близкий к эквидистантному спектр в области $700\text{--}1140\text{ см}^{-1}$ с интервалом между соседними частотами 22 см^{-1} [23]. Такие цепочки составляют каркас фосфолипидных молекул, входящих в состав многих биомембран, в спектрах которых также наблюдаются эквидистантные прогрессии [24–26]. Второй пример: колебательный спектр молекулы фуллерена C_{70} [27] и его изменение при внедрении в фуллерен молекулы метана CH_4 [28], деформационное колебание которой с частотой 1526 см^{-1} взаи-

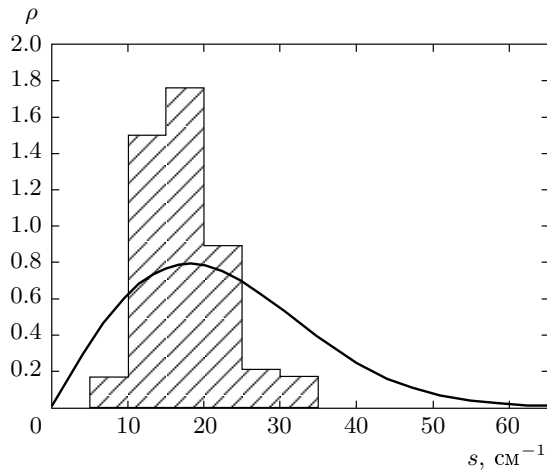


Рис. 1. Распределение интервалов между соседними колебательными уровнями в спектре молекулы фуллерена C_{70} в области $1180\text{--}1580\text{ см}^{-1}$, где расположены 24 уровня. Указано относительное число уровней в интервалах в 5 см^{-1} . Для сравнения показано распределение Вигнера

действует с совокупностью колебаний C_{70} в области $1180\text{--}1580\text{ см}^{-1}$, где расположены 24 уровня. В чистом фуллерене среднее расстояние между ближайшими уровнями $\bar{s} = 17.7\text{ см}^{-1}$. Для 20 уровней из 24 значения s лежат в интервале от 11 до 25 см^{-1} . Узкое распределение интервалов сохраняется в спектре C_{70} с внедренным CH_4 . Внедрение вызывает сдвиги уровней в окрестности деформационного колебания примеси на $10\text{--}20\text{ см}^{-1}$, т. е. константы связи наблюдаемого колебания примеси с колебаниями фуллерена (резервуара) $C \approx \Delta\Omega/\bar{s}$ близки к единице. Таким образом, распределение уровней в плотном спектре ближе к эквидистантному, чем к распределению Вигнера (рис. 1). Распределение констант связи, судя по сдвигам уровней, также является достаточно узким. Эти данные обосновывают выбор модели Цванцига как стартовой точки в настоящей работе.

3. МОДЕЛЬ ЦВАНЦИГА

3.1. Зависящие от времени амплитуды

Переходы, наблюдаемые в экспериментах с использованием фемтосекундной спектроскопии, ограничены областью спектра, содержащей только основное и одно возбужденное состояние. Оптический переход из основного состояния создает возбужденное состояние наблюдаемого колебания,

и его релаксация обусловлена передачей энергии одному из колебаний резервуара, т. е. двойными диполь-дипольными переходами (деактивацией системы и возбуждением одного из колебаний резервуара). Гамильтониан, описывающий эти переходы, является суммой гамильтонианов системы, резервуара и их взаимодействия

$$H = \varepsilon_s^0 b_s^\dagger b_s + \sum_n \varepsilon_n^0 b_n^\dagger b_n + \sum_n C_n (b_s^\dagger b_n + b_s b_n^\dagger), \quad (3.1)$$

где b_s^\dagger, b_n^\dagger — операторы рождения возбужденных состояний системы и резервуара, b_s, b_n — операторы их уничтожения с переходом в основное состояние. В базисе собственных функций невзаимодействующих системы и резервуара $\Phi_s, \{\Phi_n\}$ матрица гамильтониана (3.1) обладает главной диагональю собственных значений несвязанных системы и резервуара $\varepsilon_s^0, \{\varepsilon_n^0\}$ и одним ненулевым столбцом и одной ненулевой строкой матричных элементов связи $\{C_n\}$. Секулярное уравнение имеет вид

$$F(\varepsilon) = \varepsilon - \sum_n \frac{C_n^2}{\varepsilon - \varepsilon_n^0} = 0, \quad (3.2)$$

где ε_s^0 и среднее расстояние между уровнями ε_n^0 приняты соответственно за нуль и единицу отсчета энергии. Уравнение (3.2) имеет один корень в каждом интервале $[\varepsilon_n^0, \varepsilon_{n+1}^0]$. Если распределение интервалов является таким узким, что $\varepsilon_n^0 = n + x_n, |x_n| < 1/2$, то корни векового уравнения (3.2) имеют вид

$$\varepsilon_n = n + \phi(n), \quad |\phi(n)| < 1, \quad (3.3)$$

где функция $\phi(n)$ характеризует сдвиг уровней резервуара в результате взаимодействия. Уравнение (3.2) типично для задачи малых знаменателей, характеризующих резонансы. При сильной связи происходит перекрывание множества резонансов. Классический аналог такой системы является хаотическим (см., например, [29, 30]). Таким образом, рассматриваемая ниже задача относится к классу известных задач о проявлениях классического хаоса в детерминированных (т. е. обладающих дискретным спектром собственных значений) квантовых системах (см., например, [31–33]). Зависящая от времени волновая функция системы является суперпозицией собственных функций несвязанных системы и резервуара с зависящими от времени амплитудами

$$\Psi_s(t) = a_s(t)\Phi_s + \sum_n a_n(t)\Phi_n. \quad (3.4)$$

Уравнения движения Гейзенберга для амплитуд,

$$\begin{aligned} i\dot{a}_s &= \sum_n C_n a_n, & i\dot{a}_n &= \varepsilon_n^0 a_n + C_n a_s, \\ a_s(0) &= 1, & a_n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

и начальные условия описывают эволюцию возбужденного состояния системы, приготовленного в момент времени $t = 0$. Преобразование Лапласа для амплитуды системы имеет вид

$$\tilde{a}_s(p) = \left(p + \sum_n \frac{C_n^2}{p + i\varepsilon_n^0} \right)^{-1}. \quad (3.6)$$

Обратное преобразование позволяет представить амплитуду системы в виде суммы вычетов в простых полюсах $p_n = i\varepsilon_n$, являющихся корнями секулярного уравнения (3.2):

$$a_s(t) = \sum_{\{\varepsilon_n\}} \frac{\exp i\varepsilon t}{dF/d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_n}. \quad (3.7)$$

С помощью обобщенной формулы суммирования Пуассона, вывод которой дан в Приложении I, соотношение (3.7) переписывается в виде суммы парциальных амплитуд циклов возврата:

$$a_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_s^{(k)}(t - 2k\pi), \quad (3.8)$$

где

$$a_s^{(k)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)^{-1} \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^{-1} \times \exp(i\varepsilon\tau) \exp(i2k\pi\phi(\varepsilon)), \quad (3.9)$$

x — непрерывная переменная, целые значения которой нумеруют собственные значения, $\phi(\varepsilon)$ — функция сдвига, введенная соотношением (3.3).

Соотношения (3.7) и (3.8) эквивалентны, но представляют амплитуду системы в виде двух различных разложений — по нормальным модам и по парциальным амплитудам циклов возврата. Хотя суммы обоих бесконечных рядов равны, их конечные суммы различны, что, как мы увидим ниже, приводит к потере и инвариантности при обращении времени, и взаимно однозначного соответствия между спектром собственных значений и долговременной эволюцией.

3.2. Модель Цванцига

Для модели Цванцига

$$\varepsilon_n^0 = n, \quad C_n = C, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.10)$$

ряд в уравнении (3.2) суммируется и оно принимает вид

$$F(\varepsilon) = \varepsilon - \pi C^2 \operatorname{ctg} \pi\varepsilon, \quad (3.11)$$

где для упрощения последующих формул предположено, что уровень резервуара $n = 0$ находится в резонансе с системой. Отсутствие резонанса принципиально не меняет последующие результаты. Соотношение (3.7) преобразуется к виду

$$a_s(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\varepsilon_n t)}{1 + \pi^2 C^2 + (\varepsilon_n/C)^2}. \quad (3.12)$$

Из соотношения (A.6) следует

$$a_s^{(k)}(t - 2k\pi) = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{(\varepsilon + i\pi C^2)^{k-1}}{(\varepsilon - i\pi C^2)^{k+1}} \exp(i\varepsilon(t - 2k\pi)). \quad (3.13)$$

Поскольку $t \geq 0$, сумма включает только ограниченное число парциальных амплитуд с номерами циклов $0 \leq k \leq [t/2\pi]$ ([...] означает целую часть числа). Если $k = 0$, то подынтегральное выражение (3.13) имеет два полюса $-\varepsilon = \pm i\pi C^2$. Однако только положительный полюс расположен внутри контура интегрирования, включающего действительную ось и полуокружность большого радиуса в верхней полуплоскости, на которой подынтегральное выражение обращается в нуль. Если $k < 0$, то существует только отрицательный полюс, лежащий вне указанного контура, так что область $k < 0$ не дает вклада в $a_s(t)$. Если $k > [t/2\pi]$, то контур интегрирования расположен в нижней полуплоскости и не содержит полюса $\varepsilon = i\pi C^2$; $a_s^{(k)}$ отличны от нуля только при $t \geq 2k\pi$ и, следовательно, содержат θ -функции от $t - 2k\pi$.

В начальном цикле $k = 0$ происходит экспоненциальный распад системы с константой скорости Γ :

$$a_s^{(0)}(t) = \exp(-\Gamma t), \quad \Gamma = \pi C^2. \quad (3.14)$$

Чтобы показать, что соотношение (3.14) не противоречит начальным условиям $a_n(0) = 0$, перепишем уравнения (3.5) в виде

$$\dot{a}_s(t) = iC^2 \sum_n \int_0^t a_s(t') \exp(-in(t-t')) dt'. \quad (3.15)$$

Правая часть уравнения (3.15) сингулярна и при $t \rightarrow +0$ равна $-\Gamma a_s(t)$. Следует также отметить, что изменение порядка интегрирования и суммирования, обычно используемое при выводе золотого правила Ферми (см., например, [34, 35]), приводит к неправильному значению: $-2\Gamma a_s(t)$. Причина ошибки в том, что полюс суммы расположен внутри описанного выше контура, а при суммировании под зна-

ком интеграла полюса слагаемых лежат на действительной оси, являющейся границей контура, и сумма вычетов в них вдвое меньше, чем для полюсов внутри контура. При изменении порядка суммирования и интегрирования не воспроизводится тонкая структура эха Лошмидта в циклах $k \geq 1$. Таким образом, приближенный расчет константы скорости методом золотого правила, в котором не учитывается сдвиг уровней резервуара, неприменим для модели Цванцига. Вычисляя вычет в полюсе $(k + 1)$ -ого порядка $\varepsilon = i\pi C^2$, выражаем интеграл (3.13) через ортонормированные функции полиномов Лагерра [36, 37], свойства которых описаны в Приложении II:

$$a_s^{(k)}(\tau_k) = f_k(\tau_k) - f_{k-1}(\tau_k), \quad k \geq 1, \quad (3.16)$$

где $f_k(\tau)$ определены соотношением (Б.1), τ_k — локальное время в k -ом цикле:

$$\tau_k = 2\pi C^2(t - 2k\pi). \quad (3.17)$$

Формула суммирования Пуассона заменяет дискретное множество полюсов на действительной оси, являющихся собственными значениями, одним полюсом на мнимой оси, характеризующим вероятность распада начального квазистационарного состояния [38]. Замена действительных собственных значений комплексными обычно рассматривается как причина возникновения необратимости системы, связанной с непрерывным спектром резервуара (см., например, [39, 40]). Эквивалентность соотношений (3.7) и (3.8) доказывает, что такой переход происходит в дискретном спектре при такой плотности состояний, когда вероятность перехода становится больше расстояния между ближайшими уровнями. Появление экспоненциального распада при выполнении этого условия описано ранее в динамике асимметричного двухъямного потенциала [41]. Если в пределе слабой связи ($\pi C^2 \ll 1$) доминируют когерентные переходы между резонансными состояниями системы и резервуара $n = 0$, период которых $2\pi/C$ включает много циклов, то при сильной связи ($\pi C^2 \gg 1$) система переходит в достаточно большое число состояний $|n| < \pi C^2$ и их интерференция подавляет обратные переходы в систему вплоть до конца цикла $k = 0$, так что вместо когерентных осцилляций происходит экспоненциальный распад.

В непрерывном спектре, когда период цикла возврата бесконечен, соотношение (3.14) полностью описывает необратимую эволюцию системы. Напротив, в дискретном спектре в последующих циклах возникает эхо Лошмидта, обусловленное синхронизацией обратных переходов из резервуара в систему.

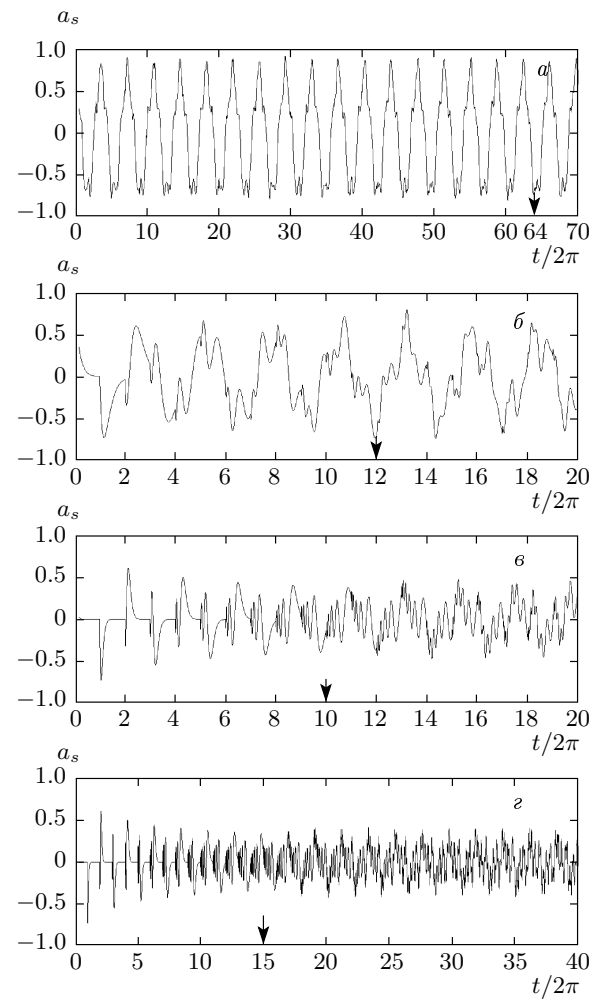


Рис. 2. Эволюция амплитуды системы после начального приготовления $a_s(0) = 1$ при различной силе связи; $C^2 = 0.1, 0.3, 1.0, 1.5$ соответственно на рис. а, б, в, г. Критические номера циклов, при которых происходит перемешивание компонент эха Лошмидта соседних циклов, указаны стрелками

Тонкая структура эха возникает, потому что обмен резервуара и системы происходит в различные моменты времени, обусловленные фазовыми сдвигами (отклонениями собственных значений уравнения (3.2) от целых чисел). Соотношения (3.12) и (3.13) являются точным решением динамической задачи для модели Цванцига. Зависимости $a_s(t)$ при различной силе связи представлены на рис. 2. Основные особенности циклов возврата — увеличение полной ширины и числа компонент эха с ростом номера цикла и, как следствие, перекрывание циклов с номерами, превышающими критическое значение, — непо-

средственно следуют из свойств полиномов Лагерра [36]; k -я парциальная амплитуда содержит k компонент, расположенных в области осцилляций шириной $4k$. Компоненты соседних циклов перекрываются, когда ширина области осцилляций равна периоду цикла $4\pi\Gamma$, что определяет критический номер цикла

$$k_c = \pi^2 C^2. \tag{3.18}$$

При $k < k_c$ циклы не перекрываются и наблюдается хорошо разрешенное эхо. При $k > k_c$ структура эхо усложняется из-за перемешивания компонент циклов с различными номерами.

4. ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ

4.1. Уравнение движения

Уравнения движения (3.5) эквивалентны интегральному уравнению типа свертки, в котором ядром является гребенка Дирака:

$$\dot{a}_s = -C^2 \int_0^t a_s(t') F(t-t') dt', \tag{4.1}$$

$$F(t) = \sum_n \exp(-int) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k\pi).$$

Уравнение (4.1) можно переписать в виде уравнения Ланжевена (вынужденных гармонических колебаний с трением)

$$\ddot{a}_s + C^2 \int_0^t \dot{a}_s(t') G(t-t') dt' + C^2 a_s = -C^2 G(t), \tag{4.2}$$

$$G(t) = F(t) - 1.$$

Уравнение (4.2) выявляет особенности эволюции в плотном дискретном спектре. Переходы на резонансный уровень $n = 0$ вызывают когерентные осцилляции с частотой, равной матричному элементу C , а переходы на множество нерезонансных уровней $n \neq 0$ создают трение и вынуждающую силу. В модели Цванцига вынуждающая сила имеет вид периодических δ -импульсов с частотой циклов возврата. Различие между моделью Цванцига и широко изучаемыми моделями одномерных систем, возбуждаемых периодическими толчками [30, 33, 42, 43], связано с тем, что трение (интегральный член в уравнении (4.2)) само зависит от состояния системы. Чтобы пояснить это различие, перепишем уравнение движения в форме, непосредственно следующей из уравнения (3.12):

$$\ddot{a}_s - (C^2 + \Gamma^2) a_s = -2C^2 \sum_n \cos(\varepsilon_n t). \tag{4.3}$$

Из уравнения (4.3) видно, что вынуждающая сила обладает бесконечно большим числом периодов из-за неэквидистантности спектра собственных значений ε_n .

Тригонометрический ряд в правой части уравнения (4.3) можно представить в виде суммы парциальных сил, снова применив формулу суммирования Пуассона и вычислив вычет в полюсе k -го порядка $\varepsilon = i\pi C^2$:

$$\ddot{a}_s - \Gamma^2 a_s = -4\Gamma^2 F_s(t),$$

$$F_s(t) = \sum_{k=1}^{[t/2\pi]} F_s^{(k)}(\tau_k), \tag{4.4}$$

где

$$F_s^{(0)} = 0,$$

$$F_s^{(k)}(\tau_k) = -\frac{\tau_k}{k} (f_k(\tau_k) - f_{k-1}(\tau_k)). \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) показывает, что в k -ом цикле на систему воздействует k -компонентная вынуждающая сила.

4.2. Законы сохранения для парциальных амплитуд

Условие нормировки квазистационарных состояний, предложенное Зельдовичем [38], учитывает непрерывность потока, уходящего из этого состояния. Это условие справедливо для экспоненциального распада системы в начальном цикле (3.14):

$$-\Gamma^{-1} \dot{a}_s^{(0)}(0) = \Gamma \int_0^{\infty} a_s^{(0)}(t) dt =$$

$$= 2\Gamma \int_0^{\infty} (a_s^{(0)}(t))^2 dt = 1. \tag{4.6}$$

Среднее значение парциальной амплитуды за цикл имеет вид

$$\langle a_s^{(k)} \rangle_k = -\frac{\pi}{2kk_c} \int_0^{4k_c} a_s^{(k)}(\tau_k) d\tau_k. \tag{4.7}$$

Для циклов $1 < k < k_c$ верхний предел расположен в области монотонности полиномов Лагерра и интеграл (4.7) равен разности табличного интеграла в бесконечных пределах и поправки, которую можно оценить методом перевала с помощью соотношений (B.1) и (B.2)

$$\langle a_s^{(k)} \rangle_k = (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k_c} + R_k, \tag{4.8}$$

где

$$R_k = \frac{\pi}{2kk_c} \int_{4k_c}^{\infty} a_s^{(k)}(x) dx \approx \frac{\pi}{2kk_c} \left(1 - \frac{k}{k_c}\right)^{-1/2} a_s^{(k)}(4k_c). \quad (4.9)$$

Соотношения (4.9) и (В.1) показывают, что поправка возрастает с ростом k , оставаясь экспоненциально малой при $k \leq k_c - 2$, и становится одного порядка с основным членом при $k = k_c - 1$. Аналогичный расчет для усредненного за период квадрата парциальной амплитуды приводит к соотношению

$$\left\langle \left(a_s^{(k)} \right)^2 \right\rangle_k = \Gamma^{-1} - O(\exp(-4k_c)), \quad 1 \leq k \leq k_c - 2. \quad (4.10)$$

Таким образом, интегралы от парциальной амплитуды (с точностью до знака) и ее квадрата не зависят от номера цикла. Изменение знака первого из интегралов обусловлено изменением фазы на π (переворотом) при каждом акте обмена между системой и резервуаром. Интегралы (4.10) при $k \geq 1$ вдвое больше, чем в начальном цикле, где отсутствуют обратные переходы из резервуара в систему.

Поток из системы в резервуар в начале каждого цикла также не зависит от его номера:

$$\dot{a}_s^{(k)}(0) = -\frac{2\Gamma}{k} L_{k-1}^1(0) = -2\Gamma. \quad (4.11)$$

Усредненная за период цикла вынуждающая сила изменяет знак в каждом цикле, а ее усредненный квадрат возрастает пропорционально номеру цикла

$$\left\langle F_s^{(k)} \right\rangle_k = (1 + (-1)^{k-1}) \frac{1}{2\Gamma}, \quad \left\langle \left(F_s^{(k)} \right)^2 \right\rangle_k = \frac{k}{2\Gamma}. \quad (4.12)$$

4.3. Канонические переменные и траектории

В силу ортогональности функций несвязанных системы и резервуара Ψ_s , $\{\Psi_n\}$ полное функциональное пространство является произведением $2D$ -подпространств каждой из координат

$$Q(\Psi_s, \{\Psi_n\}) = Q_s \otimes \prod_n Q_n. \quad (4.13)$$

Поскольку поток из системы в резервуар равен

$$\dot{a}_s(t) = -iC \sum_n a_n(t), \quad (4.14)$$

пространство Q_s определяют $a_s(t)$, $\dot{a}_s(t)$, образующие канонически сопряженную пару с характеристической функцией

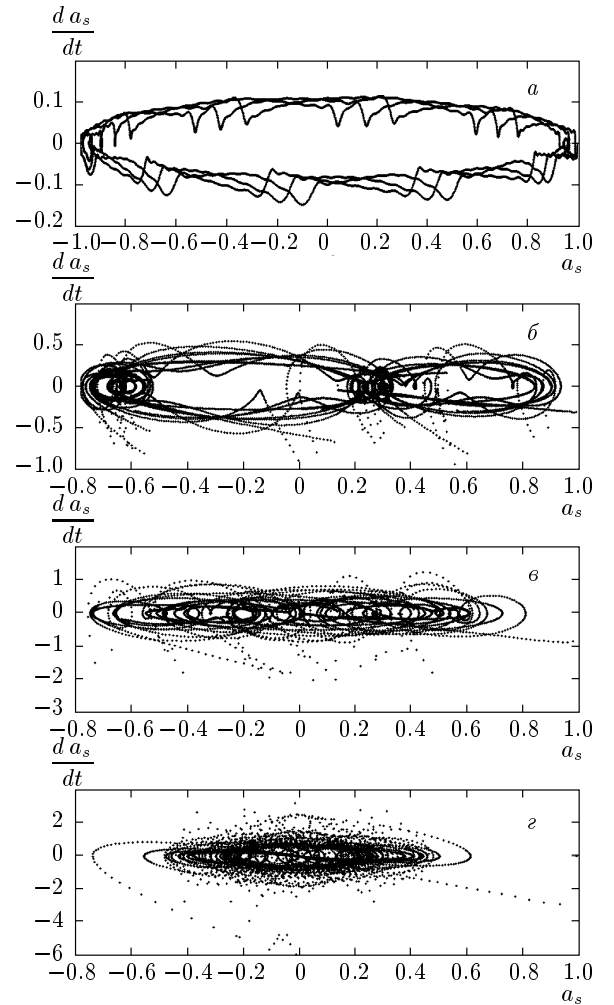


Рис. 3. Траектории системы в плоскости (a_s, \dot{a}_s) при различной силе связи; $C^2 = 0.01, 0.1, 0.3, 1.0$ соответственно на рис. а, б, в, г. На рис. 3а приведены траектории первых трех периодов когерентных осцилляций. На рис. б, в, г указаны траектории для периода времени, включающего соответственно 32, 20 и 20 начальных циклов возврата

$$L = \frac{1}{2} \dot{a}_s^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 a_s^2 - 2\Gamma a_s F_s(t), \quad (4.15)$$

подчиняющейся уравнению Лагранжа для вынужденных колебаний:

$$\frac{\partial L}{\partial a_s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_s} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Интегрируя уравнения (4.16), находим, что усредненное за период цикла значение лагранжиана не зависит от номера цикла:

$$\langle L^k \rangle_k = 2\Gamma, \quad k < k_c. \quad (4.17)$$

Траектории движения в плоскости $a_s(t)$, $\dot{a}_s(t)$ в начальных циклах характеризуют соответственно

почти периодическое (траектории расположены в окрестности замкнутой орбиты) и условно периодическое (траектории плотно заполняют доступную область) движения при слабой и сильной связи (рис. 3). При $C \ll 1$ траектория имеет вид эллипса, соответствующего когерентным колебаниям с частотой C , на котором возникают толчки, обусловленные переходами в нерезонансные состояния резервуара. Когда периоды когерентных осцилляций и циклов возврата рационально независимы, толчки распределяются по всей траектории, концентрируясь в окрестности точек $\dot{a}_s = 0$, где система проводит наибольшее время (рис. 3а). С ростом силы связи траекторию характеризует множество периодов, соответствующих обмену системы с состояниями $|n| \leq \Gamma$, число которых и их вклад возрастают с ростом Γ . На рис. 3б показана траектория для $C^2 = 0.1$, когда система взаимодействует с тремя состояниями $n = 0, \pm 1$ и резонансный эллипс разбивается на два. Число седловых точек возрастает при $C^2 = 0.3$ (рис. 3в). При $C^2 = 1.0$ в интервале $[-\Gamma, \Gamma]$ расположены 7 состояний резервуара, связь с которыми создают траектории, плотно заполняющие эллипс (рис. 3г). Запутывание траекторий в областях пересечений эллипсов, окружающих седловые точки, напоминает образование стохастического слоя в окрестности сепаратрис в классических динамических системах [30].

4.4. Мультиплеты эха Лешмидта в неперекрывающихся циклах

В цикле $k = 0$ система полностью передает населенность состояниям резервуара. В начале цикла $k = 1$ обратные переходы из этих состояний частично восстанавливают населенность системы (до $\max |a_s|^2 \approx 0.46$). К концу цикла система вновь опустошается. Поскольку обмен приводит к дополнительным сдвигам фазы, в начале цикла $k = 2$ амплитуды состояний резервуара состоят из двух составляющих с различными фазами, и их обмен с системой приводит к двухкомпонентному эхо. Первую компоненту создает та часть населенности, которая осталась от цикла $k = 0$, а вторая возникла после обмена в цикле $k = 1$. Аналогично, в конце каждого последующего цикла амплитуды состояний резервуара разбиваются на k составляющих с различными фазами по числу предыдущих циклов. Таким образом, многокомпонентность эха Лешмидта обусловлена различием фаз двух составляющих населенности (сохраняющейся в резервуаре и возвращающейся в него после обмена с системой), что близко напоми-

нает возникновение геометрической фазы [44] (см. также [45]).

Будем нумеровать компоненты в k -ом цикле дополнительным индексом $l = 1, 2, \dots, k$, их интенсивности равны значениям парциальных амплитуд в точках экстремумов

$$A_{kl} = a_s^{(k)}(\tau_{kl}^*), \quad \tau_{kl}^* = 2\pi C^2(t_{kl}^* - 2k\pi). \quad (4.18)$$

Расположение и интенсивности компонент в циклах возврата представлены в таблице. Из соотношения (В.4) следует, что времена наиболее интенсивных компонент A_{kk} (глобальных экстремумов амплитуды) увеличиваются, а модули A_{kk} уменьшаются с ростом номера цикла:

$$\tau_{kk}^* \approx 4k \left(1 - (2k)^{-2/3}\right), \quad |A_{kk}| \propto k^{-1/3}. \quad (4.19)$$

Полуширина локального экстремума (между точками с половинной амплитудой) увеличивается пропорционально $k^{1/3}$. Локальные экстремумы парциальных амплитуд расположены в точках $\tau_{kl}^* \propto \pi^2 l^2 / k$. С ростом номера цикла эхо уширяется, постепенно заполняя весь период. Интенсивность компонент в k -ом мультиплете A_{kl} ($l = 1, \dots, k$) возрастает с ростом l , а интенсивности компонент разных циклов с одинаковыми значениями $k - l = 1, 2, \dots, k - 1$ слабо зависят от k .

4.5. Перекрывающиеся циклы

При сильном перекрывании циклов ($k \gg k_c$) верхний предел расположен в области осцилляций, где справедливо соотношение (В.3), и интеграл (4.7) снова сводится к табличному:

$$\begin{aligned} \langle a_s^{(k)} \rangle_k &\approx 8\pi \sqrt{\frac{k_c}{k}} \int_0^1 x^2 J_1(4x\sqrt{kk_c}) dx = \\ &= \frac{2\pi}{k} J_2(4\sqrt{kk_c}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

С помощью асимптотического разложения функций Бесселя находим

$$\begin{aligned} \langle a_s^{(k)} \rangle_k &\approx (2\pi)^{1/2} k^{-5/4} k_c^{-1/4} \times \\ &\times \cos\left(4\sqrt{kk_c} - 5\pi/4\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Соотношение (4.21) показывает, что усредненные за цикл парциальные амплитуды перекрывающихся циклов являются быстро осциллирующими функциями номера цикла. Период осцилляций, равный примерно $\pi\sqrt{kk_c}$, растет с увеличением k . Зависимость периода от номера цикла показывает, что эволюция является нелинейным процессом. Вследствие

Таблица. Положение и интенсивности компонент эха Лошмидта в циклах возврата (верхнее и нижнее числа в каждой клетке — соответственно значения $(2\pi)^{-1}(t_{kl}^*)$ и $a_s(t_{kl}^*)$), $C^2 = 1.5$

1	0.035 -0.736									
2	0.012 -0.321	0.088 0.618								
3	0.008 -0.211	0.046 0.340	0.148 -0.552							
4	0.008 -0.151	0.033 0.245	0.090 -0.334	0.208 0.508						
5	0.004 -0.122	0.026 0.193	0.068 -0.253	0.138 0.323	0.268 -0.475					
6	0.004 -0.103	0.023 0.159	0.055 -0.205	0.109 0.252	0.188 -0.313	0.331 0.449				
7	0.003 -0.088	0.019 0.136	0.048 -0.173	0.089 0.210	0.153 -0.249	0.239 0.303	0.395 -0.429			
8	0.003 -0.077	0.015 0.117	0.041 -0.151	0.076 0.179	0.127 -0.210	0.197 0.245	0.296 -0.294	0.458 0.411		
9	0.002 -0.067	0.015 0.105	0.037 -0.132	0.069 0.158	0.110 -0.183	0.171 0.209	0.244 -0.241	0.349 0.286	0.524 -0.396	
10	0.002 -0.059	0.014 0.090	0.034 -0.118	0.062 0.140	0.100 -0.162	0.148 0.184	0.212 -0.207	0.295 0.237	0.406 -0.278	0.587 0.384

перекрывания образуется множество комбинационных частот и их интерференция вызывает стохастичность суммарной амплитуды.

В интервале $2k_c \geq k \geq k_c + 1$ перекрываются два соседних цикла:

$$\langle a_s \rangle_k = \frac{\pi}{2k_c} \int_0^\infty a_s^{(k-1)}(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2k_c} \int_0^{4k_c} (a_s^{(k)}(\tau) - a_s^{(k-1)}(\tau)) d\tau - \frac{\pi}{2k_c} \int_{8k_c}^\infty a_s^{(k-1)}(\tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Первый интеграл с точностью до знака не зависит от k . Второй интеграл по области осцилляций находится с помощью соотношения (В.3), а третий интеграл, экспоненциально мал. Результат имеет вид

$$\langle a_s \rangle_k \approx (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k_c} + 4\pi^{1/2} k_c^{1/4} k^{-7/4} \times \cos\left(4\sqrt{kk_c} - \frac{3\pi}{4}\right), \quad 2k_c \geq k \geq k_c + 1. \quad (4.23)$$

Аналогично проводится расчет для последующих интервалов:

$$\langle a_s \rangle_k \approx (-1)^k \frac{2\pi}{k_c} + \frac{4\pi}{k} \sqrt{\frac{k_c}{k}} \times \left(2J_1\left(4\sqrt{kk_c}\right) + J_1\left(4\sqrt{2kk_c}\right)\right) \quad \text{при } 3k_c \geq k \geq 2k_c + 1, \quad (4.24)$$

$$\langle a_s \rangle_k \approx (-1)^k \frac{2\pi}{k_c} + \frac{4\pi}{k} \sqrt{\frac{k_c}{k}} \times \left(3J_1\left(4\sqrt{kk_c}\right) + 2J_1\left(4\sqrt{2kk_c}\right) + J_1\left(8\sqrt{kk_c}\right)\right) \quad \text{при } 4k_c \geq k \geq 3k_c + 1.$$

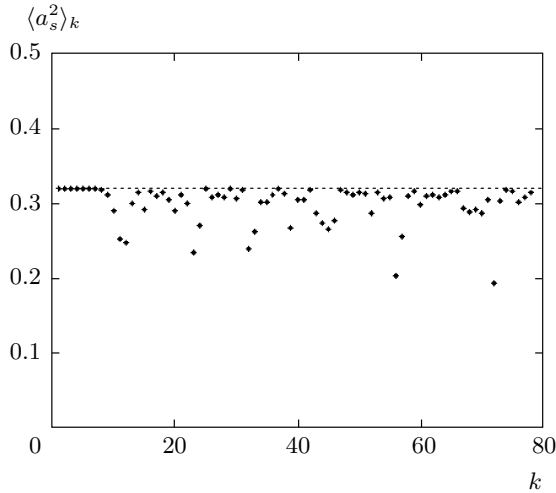


Рис. 4. Сохранение интеграла от квадрата амплитуды системы для перекрывающихся циклов; $C^2 = 1.0$. Пунктирная горизонтальная линия $\langle a_s^2 \rangle_k = \Gamma^{-1}$

Соотношения (4.23) и (4.24) показывают, что парциальные амплитуды, помимо постоянной по модулю составляющей, содержат составляющие, осциллирующие с рационально независимыми периодами, равными примерно $\pi\sqrt{nk/k_c}$, $n = 1, 2, \dots$ и определяемыми числом перекрывающихся циклов.

В интервале $2k_c \geq k \geq k_c + 1$ усредненный за период квадрат суммарной амплитуды находится с помощью соотношений (B.1) и (B.3):

$$\langle (a_s)^2 \rangle_k \approx \frac{\pi}{k_c} - \frac{2}{k^2} \sqrt{\frac{k_c}{k}} \sin\left(8\sqrt{kk_c}\right), \quad (4.25)$$

$$2k_c \geq k \geq k_c + 1.$$

Из сравнения соотношений (4.10) и (4.25) следует, что среднее значение квадрата амплитуды за цикл одинаково для перекрывающихся и неперекрывающихся циклов с точностью до малых осциллирующих отклонений, которые максимальны на концах интервалов. Результаты численного расчета, представленные на рис. 4, показывают, что усредненный за цикл квадрат суммарной амплитуды постоянен с той же точностью и при перекрывании трех-четырех циклов.

Усредненный за цикл лагранжиан (4.15) также остается приблизительно постоянным при $k > k_c$ с отклонениями от постоянного значения (4.17) с той же периодичностью. Если при $k < k_c$ усредненный за период квадрат парциальной вынуждающей силы возрастает пропорционально номеру цикла (см. соотношение (4.12)), для перекрывающихся циклов

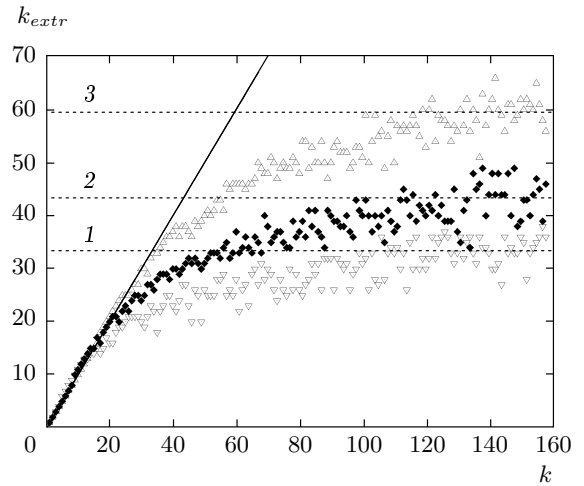


Рис. 5. Зависимость числа экстремумов амплитуды системы в цикле от его номера. Прямая $N_{extr} = k$ соответствует росту числа экстремумов в неперекрывающемся цикле. Предельные значения, равные $2k_c$ для перекрывающихся циклов, показаны штриховыми линиями; $C^2 = 1.0, 1.5, 2.5$ соответствуют прямым 1, 2, 3

он становится приблизительно постоянным и равным $k_c/2\Gamma = \pi/2$. Постоянство вынуждающей силы означает, что процесс обмена системы и резервуара при $k \gg k_c$ становится стационарным. Стационарность процесса подтверждает постоянство числа экстремумов за цикл. Если для неперекрывающихся циклов число экстремумов за цикл равно его номеру, при $k \gg k_c$ оно слабо изменяется относительно постоянного предела, равного примерно $2k_c$ (рис. 5). Этот предел соответствует среднему изменению геометрической фазы $\phi_{n+1} - \phi_n \approx (2k_c)^{-1}$ для собственных значений в области полуширины лоренциана, где $\varepsilon_n \approx n \approx \Gamma$. Флуктуации относительно этого среднего уменьшаются с ростом C^2 .

4.6. Убывание корреляций

В качестве величины, характеризующей изменение динамики системы при перекрывании циклов возврата, введем усредненные за k -ый цикл корреляционные функции для амплитуд циклов k_1 и k_2 :

$$R(k_1, k_2) = \int_0^{2\pi} a_s(t + 4k_1\pi) a_s(t + 4k_2\pi) dt. \quad (4.26)$$

При $k_1, k_2 \ll k_c$, как следует из соотношения (B.1), перекрывание парциальных амплитуд и, следовательно, $R(k_1, k_2)$ экспоненциально малы:

$$R(k_1, k_2) \propto \exp(-2k_c|k_1 - k_2|), \quad (4.27)$$

т. е. корреляции не зависят от номера цикла и экспоненциально уменьшаются с характеристическим временем $(2k_c)^{-1}$. Для перекрывающихся циклов коррелятор (4.26) равен разности интегралов (Б.5):

$$\begin{aligned} R_{n_1 n_2}^{(k)} &= \langle a_s^{(k-n_1)} a_s^{(k-n_2)} \rangle_k = \\ &= I_{n_1+1, n_2+1}^{(k)} - I_{n_1+1, n_2}^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Интегралы (Б.5) не малы при выполнении неравенств (Б.8). Для интервала $2k_c \geq k \geq k_c + 1$ имеем $s = 0.1$, так что

$$R_{11}^{(k)} \approx \frac{8\pi k_c}{(k-1)^2} (f_{k-2}(4k_c))^2. \quad (4.29)$$

Используя асимптотическое разложение функций $f_k(z)$ в области осцилляций, находим, что коррелятор (4.29) — осциллирующая функция k , уменьшающаяся пропорционально $k^{-5/2}$. В интервале $3k_c \geq k \geq 2k_c + 1$ аналогично ведут себя корреляторы $R_{12}^{(k)}$ и $R_{22}^{(k)}$.

Таким образом, для перекрывающихся циклов справедливы следующие закономерности:

- 1) полное число экстремумов суммарной амплитуды за цикл равно $2k_c$,
- 2) среднее значение квадрата амплитуды равно Γ^{-1} ,
- 3) усредненный за цикл квадрат вынуждающей силы равен $\pi/2$,
- 4) характер убывания корреляций превращается из экспоненциального в осциллирующий со степенным затуханием, зависящим от разности номеров циклов.

Эти свойства показывают, что в области $k \gg k_c$ возникает стационарное состояние сильно связанных системы и резервуара, в котором амплитуду системы характеризуют флуктуации с частотами порядка k_c^{-1} , постоянная среднеквадратичная амплитуда $\Gamma^{-1/2}$ и медленный неэкспоненциальный характер убывания корреляций.

4.7. Режимы эволюции

В пределе слабой связи доминируют гармонические колебания амплитуды с частотой $C \ll 1$, обусловленные когерентными переходами между уровнем системы и резонансным уровнем резервуара $n = 0$. Период когерентных колебаний содержит C^{-1} циклов возврата. Амплитуда когерентных колебаний уменьшается с ростом силы связи, а сингулярная составляющая, обусловленная переходами

в другие состояния резервуара, возрастает. Для начальных циклов инкременты (3.3) малы: $\phi_n \approx C^2/n$, $n \geq 1$ и ими можно пренебречь, если $k \leq C^{-2}$ и $C^2 t/n \ll 1$:

$$\begin{aligned} a_s(t) &\approx \frac{2}{2 + \pi^2 C^2} \cos \frac{C}{1 + \pi^2 C^2} t + \frac{\pi^2 C^2}{2 + \pi^2 C^2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{[t/2\pi]} \exp(-\pi C^2(t - 2k\pi)) \theta(t - 2k\pi). \end{aligned} \quad (4.30)$$

В согласии с соотношением (4.30) амплитуды когерентных осцилляций и наиболее интенсивной компоненты эха сопоставимы при силе связи $C^2 \approx \pi^{-1}$ (рис. 2б). В области слабой связи с ростом C интенсивность эха увеличивается, а когерентная составляющая уменьшается. Критический номер цикла, при котором происходит перемешивание, определяется условием, когда общая длительность циклов с инкрементом затухания πC^2 становится равной периоду осцилляций $2\pi/C$:

$$k_c^{(1)} \approx 2C^{-3}. \quad (4.31)$$

В пределе сильной связи когерентные осцилляции исчезают и компоненты эха Лошмидта перекрываются при критическом номере цикла, определяемом условием

$$k_c^{(2)} = k_c = \pi^2 C^2. \quad (4.32)$$

Таким образом, существуют три режима эволюции (рис. 6): в области слабой связи I доминируют когерентные осцилляции, в области сильной связи II наблюдается многокомпонентное эхо Лошмидта, а в области III циклы перемешиваются. Переход I–II происходит при условии $\Gamma = 1$, известном для непрерывного спектра как критерий необратимости [35]. С учетом циклов возврата это условие более правильно назвать условием потери когерентности [14, 41]. Если в области I движение системы близко к эргодическому (в нем доминирует одна частота), то в области II движение становится условно периодическим и как всякое движение с рационально независимыми частотами — неэргодическим, состоящим из эргодических компонент (см., например, [46, 47]). Переход I–III аналогичен переходу от эргодической системы к перемешивающейся, известному для классических систем [30, 42]. При переходе II–III условно периодическое движение превращается в перемешивающееся. Рисунок 7 показывает, что в пределах сильной и слабой связей перемешивание не происходит ($k_c^{(1)}$ и $k_c^{(2)}$ неограниченно возрастают), область регулярно движения обладает наименьшей длительностью

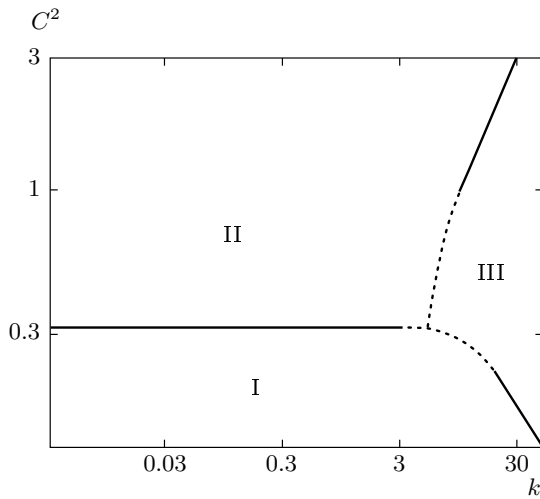


Рис. 6. Области различных кинетических режимов эволюции амплитуды системы. I — область когерентных осцилляций, II — область многокомпонентного эха Лешмида в циклах возврата, III — область перекрытия циклов возврата. Штриховыми кривыми показаны линии переходов I–III и II–III в промежуточной области константы связи, отклоняющиеся от определяемых соотношениями (4.31) и (4.32) и соответствующие предельным значениям N_{extr} , показанным на рис. 5

при промежуточной связи, где $\Gamma \approx 1$ и критический номер цикла минимален. В окрестности критической точки ($0.2 \leq C^2 \leq 1$) зависимости критических номеров от C отклоняются от зависимостей определяемых соотношениями (4.31) и (4.32), так что значения $k_c^{(1)}$ и $k_c^{(2)}$ на рис. 6 определены по числу экстремумов в цикле, которое указано на рис. 5. Области II и III и переходная область между ними видны на графике корреляционной матрицы (рис. 7).

5. МЕХАНИЗМ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

5.1. Перемешивание в последовательности нулей парциальных амплитуд

Для неперекрывающихся циклов отображение интервала времени $\Delta\tau_k$ в k -ом цикле полностью определяется его прообразом $\Delta\tau_{k-1}$, т. е. для построения $a_s(t)$ достаточно знания $a_s(t - 2\pi)$. Однако при сильном перекрытии циклов отображение зависит от большого числа предыдущих интервалов. Чтобы построить отображение при $k \approx \Gamma \gg 1$, преобразуем соотношение (3.16), пользуясь соотношением (B.3):

$$a_s^{(k)}(\tau_k) \propto \pi^{-1/2} \tau_k^{-1/4} k^{-3/4} \times \sin\left(2\sqrt{k\tau_k} - \pi/4\right), \quad 0 \leq \tau_k \leq 4k \quad (5.1)$$

и найдем число нулей парциальной амплитуды $a_s^{(k')}$, попадающих в k -ый единичный интервал времени ($0 \leq \tau_k \leq 4\pi^2 C^2 = 4k_c$):

$$N_{k'}(k) \approx \frac{4}{\pi} \sqrt{k'k_c} \left(\sqrt{k - k' + 1} - \sqrt{k - k'}\right). \quad (5.2)$$

Суммируя вклады всех перекрывающихся циклов, находим полное число нулей парциальных амплитуд за цикл:

$$N(k) \approx \frac{4}{\pi} k, \quad \frac{k}{k_c} \gg 1. \quad (5.3)$$

Из соотношения (5.4) следует, что число нулей парциальных амплитуд за цикл при сильном перекрытии остается пропорциональным k , как и для неперекрывающихся циклов, но лишь незначительная часть этих нулей ($\sqrt{k_c/k}$) относится к k -ому циклу, а все остальные нули принадлежат множеству предыдущих циклов. Это означает, что вследствие перекрытия интервал между ближайшими нулями определяется не k -ым циклом, а совокупностью предыдущих. Если в k -ом цикле соседние нули принадлежат циклам k' и k'' , то интервал между этими нулями возрастает в следующем цикле $\Delta t_{k+1}(k', k'') > \Delta t_k(k', k'')$, причем в $(k + 1)$ -цикле внутри этого интервала содержится хотя бы еще один нуль. Таким образом, в отличие от не зависящего от k числа экстремумов суммарной амплитуды (см. рис. 5), число нулей составляющих ее парциальных амплитуд в цикле при сильном перекрытии остается пропорциональным k и для перекрывающихся циклов. Пользуясь асимптотическим соотношением (5.1), находим наименьшее значение нуля предыдущего цикла $(k - l)$, попадающее в цикл k :

$$\tau_{kl}^{(0)} = \left\{ \frac{\pi^2}{8} k_c (k - l)^2 - \frac{1}{8} \right\}, \quad (5.4)$$

где $\{ \}$ означает дробную часть числа. Последовательность нулей (5.4) плотно заполняет начало цикла, когда $k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$, как и случайные последовательности (типа разложения числа $0 < x < 1$ в цепную дробь и кратных поворотов), рассматриваемые в теории чисел как модели перемешивания [30, 42, 47]. Аналогичные последовательности можно построить и для нулей, следующих за наименьшим.

Таким образом, перекрытие циклов создает динамическую систему, которая в результате быстрых флуктуаций возвращается бесконечно много раз в любую окрестность заданной точки, никогда

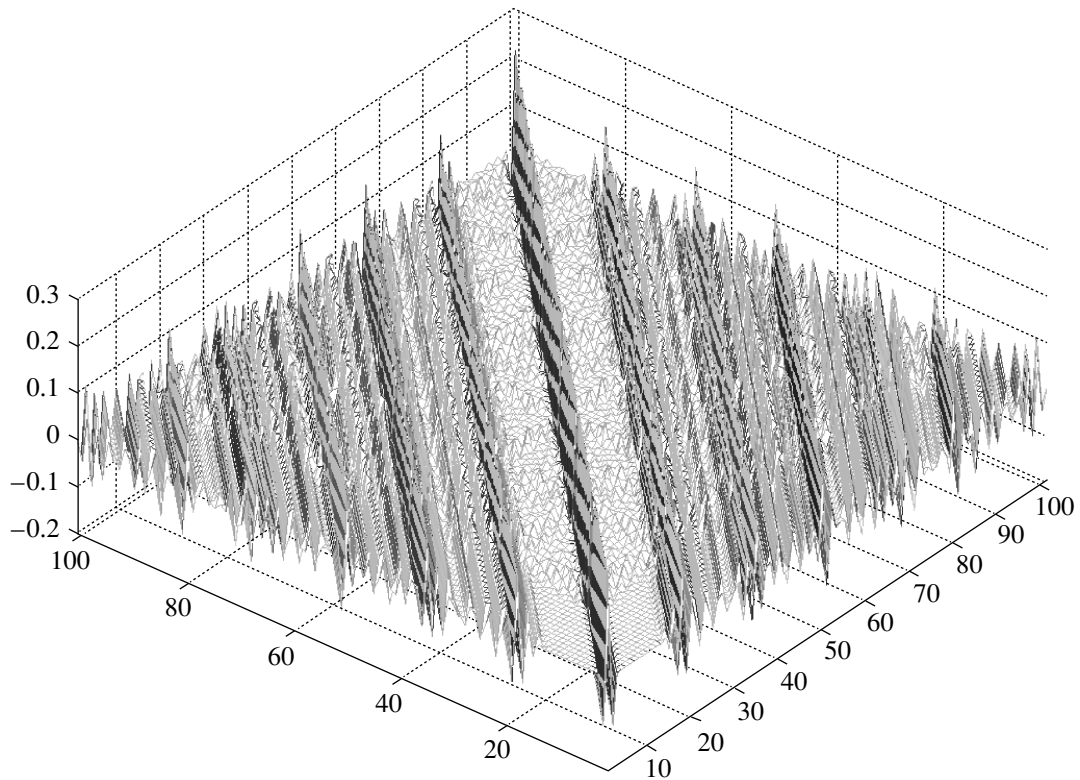


Рис. 7. График корреляционной матрицы

не повторяясь точно. Вынуждающая сила, возникающая при перемешивании парциальных вынуждающих сил, обладает теми же свойствами, что суммарная амплитуда.

Траектории, приведенные на рис. 2, и рассмотренная выше случайная последовательность нулей парциальных амплитуд соответствуют определению динамической системы с перемешиванием [46, 47]. В обзоре [48] подчеркивается, что поведение многих детерминированных динамических систем подобно случайному и допускает также статистическое описание. Одним из примеров являются системы с большими и быстрыми флуктуациями. Приведенные выше характеристики модели Цванцига, найденные с помощью аналитических и численных расчетов, показывают, что эту модель можно рассматривать как пример детерминированной системы, долговременная эволюция которой подобна случайной.

5.3. Огрубление спектра при усеченном преобразовании Фурье

Огрубление временной эволюции означает, что, начиная с определенного номера цикла K , измери-

тельный прибор не воспроизводит $a_s(t)$. Если отбросить результаты измерений в более далеких циклах $k \geq K$, то обратное усеченное преобразование Фурье способно воспроизводить спектр собственных значений с ошибками. Преобразование Фурье для парциальных амплитуд (3.16) непосредственно следует из преобразования Лапласа для полиномов Лагерра (Б.9):

$$\tilde{a}_s^{(k)}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} a_s^{(k)}(t) \exp(-i\varepsilon t) dt = (-1)^k \frac{\Gamma}{\varepsilon^2 + \Gamma^2} \times \exp\left(-i2k\pi\left(\varepsilon - \pi^{-1} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{\varepsilon}\right)\right), \quad k \geq 1. \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) показывает, что спектр собственных частот воспроизводят не парциальные амплитуды в отдельности, а только их частичная сумма, равная

$$A_s^{(K)} = \sum_{k=0}^K a_s^{(k)} = \frac{\Gamma}{\varepsilon^2 + \Gamma^2} \frac{\sin Ku(\varepsilon)}{\sin \pi u(\varepsilon)}, \quad (5.6)$$

$$u(\varepsilon) = \left(\varepsilon - \pi^{-1} \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{\varepsilon}\right).$$

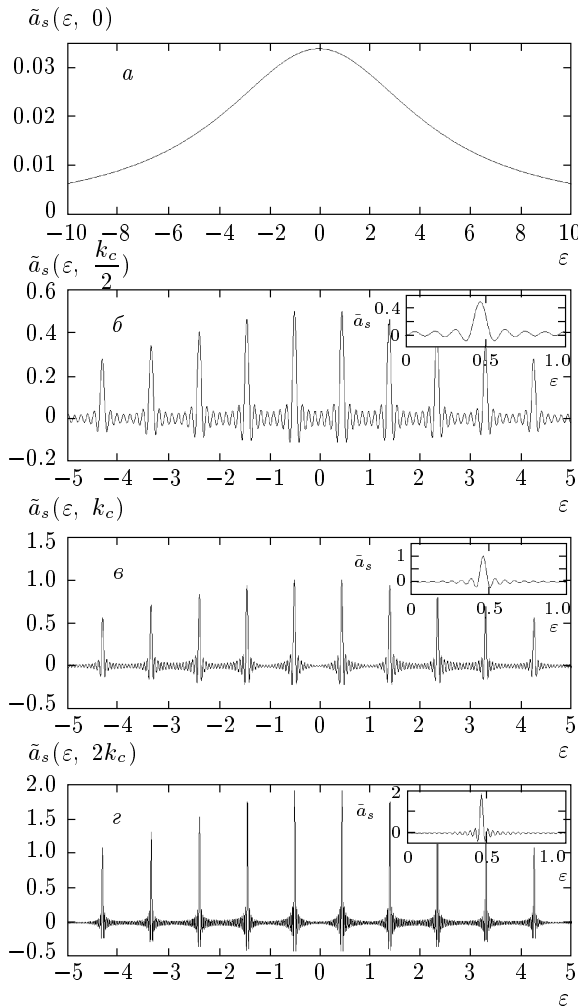


Рис. 8. Спектральная функция, найденная преобразованием Фурье амплитуды системы в конечном числе циклов возврата $K + 1$; $K = 0, k_c, 2k_c, 3k_c$ соответствуют рис. а, б, в, г; $C^2 = 15$

Когда $K \rightarrow \infty$, сумма парциальных амплитуд превращается в сумму δ -пигов на собственных частотах. При конечных значениях K δ -функции заменяются функциями отсчетов $\text{sin } Ku/Ku$ (см., например, [49]), ширина которых равна K^{-1} . Поскольку обмен между системой и резервуаром становится стационарным при $k \gg k_c$, измерительный прибор воспроизводит стационарную эволюцию системы при условии

$$K \geq k_c. \tag{5.7}$$

Спектры, полученные с помощью частичных сумм (5.6), показаны на рис. 8. Осциллирующие составляющие спектральной функции появляются при $k \geq 1$. При $K \approx k_c/2$ основные максимумы спектральной функции отвечают собственным значениям. С рос-

том K уменьшаются ширины пиков и расширяется область разрешенного спектра. Условие (5.7) показывает, что измерению эха Лошмидта только для неперекрывающихся циклов соответствует замена действительных собственных значений комплексными, для которых время распада равно Γ^{-1} .

5.4. Реконструкция собственных функций по парциальным амплитудам

Обратный оператор эволюции, отвечающий инверсии времени $t \rightarrow -t$, позволяет восстановить начальную функцию $\psi(0)$, если известна $\psi(t)$:

$$\psi(0) = U^{-1}(t)\psi(t). \tag{5.8}$$

Соотношение (5.8) означает, что инвариантность системы с дискретным спектром по отношению к обращению времени нарушается, если функция $\psi(t)$ (т.е. связанная с ней наблюдаемая, например, вероятность выживания $|\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2$) не может быть точно измерена. По мере роста номера цикла при $k \gg k_c$ для измерения быстро флуктуирующих парциальных амплитуд требуется все более точный измерительный прибор. Когда точность измерений соответствующих наблюдаемых становится недостаточной, парциальные амплитуды воспроизводятся в виде

$$\bar{a}_s^{(k)}(t) = a_s^{(k)}(t) + \delta a_s^{(k)}(t), \quad k \geq K, \tag{5.9}$$

где $\delta a_s^{(k)}$ — случайная составляющая (шум). Волновая функция, в которой амплитуды удовлетворяют соотношению (5.9), согласуется с начальной функцией, только если обратную матрицу эволюции заменить случайной матрицей с элементами:

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + \delta \varepsilon_n. \tag{5.10}$$

Это обоснование введения случайных матриц аналогично аргументации Вигнера–Дайсона [17, 18] для плотных дискретных спектров. Отличие лишь в том, что в ядерных реакциях сами собственные значения известны с конечной точностью, а в рассматриваемой динамической задаче с конечной точностью измеряются амплитуды зависящей от времени волновой функции. Если теория случайных матриц утверждает, что собственные значения энергии нельзя точно измерить, то огрубление результатов динамических измерений делает невозможным измерение амплитуд в далеких циклах возврата. Таким образом, устанавливается соответствие между случайным распределением парциальных амплитуд

и случайной матрицей гамильтониана: если флуктуирующие составляющие парциальных амплитуд обладают гауссовым распределением, то соответствующая матрица гамильтониана описывает ортогональный гауссов ансамбль [22]. Данные рис. 8 согласуются с основным утверждением теории случайных матриц, что локальные свойства системы определяются усредненными характеристиками спектра, а не его детальной структурой. Аналогично, многокомпонентное эхо Лошмидта как локальное динамическое свойство системы зависит от усредненных параметров типа πC^2 , $k_c^{(1)}$, $k_c^{(2)}$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Эволюцию модели Цванцига в режиме перемешивающихся циклов можно рассматривать как стационарный случайный процесс, характеризуемый большими быстрыми флуктуациями. В результате перемешивания нулей парциальных амплитуд и уменьшения интервалов между ними амплитуда системы становится чувствительной к малым изменениям времени, т.е. в области $k \gg k_c$ функцию $a_s(t)$ можно рассматривать как случайную. Перемешивание нулей при одновременном уменьшении интервалов между ними приводит к потере детерминированности при сколь угодно малом огрублении масштаба измерения наблюдаемых. Система после огрубления теряет как обратимость во времени (начальную волновую функцию нельзя восстановить по долговременному изменению огрубленной амплитуды), так и взаимно-однозначное соответствие между динамикой и спектром собственных значений. Парадокс в том, что для сохранения детерминированности при долговременной эволюции требуется точно знать все более быстро осциллирующую амплитуду $a_s(t)$ во все меньших временных интервалах (порядка $O(1/k)$), что невозможно из-за конечной точности измерений. Хотя само по себе перемешивание циклов не приводит к хаосу, хаос в режиме III, как и обычная неопределенность в квантовой механике [39, 50], возникает за счет взаимодействия системы с измерительным прибором.

В наночастицах имеется и внутренний механизм огрубления, связанный с другими колебаниями. Например, эквидистантная прогрессия в молекуле фуллерена C_{70} содержит 24 нормальных колебания, а их полное число составляет 204. В конденсированной фазе к внутримолекулярным колебаниям добавляются межмолекулярные. Вся эта совокупность колебаний образует дополнительный резервуар с непре-

рывным спектром. Взаимодействие системы и основного резервуара с этим дополнительным резервуаром приводит к тому, что состояния системы и резервуара обладают конечной скоростью распада. Условие (5.7) показывает, что рассмотренные выше свойства модели Цванцига сохраняются, если время распада, обусловленного обоими огрублениями, превышает k_c^{-1} .

Отметим аналогию между перекрыванием резонансов, вызывающим динамический хаос в классической механике [29, 30], и перекрыванием циклов, вызывающим стохастичность квантовой модели Цванцига. Критерий перекрывания нелинейных резонансов рассматривался также как причина возникновения нерегулярных спектров в квантовых системах [26, 36, 51]. Отличие рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр модели Цванцига остается регулярным, а стохастичность проявляется в динамике эволюции. Как указано во Введении, средние расстояния между соседними уровнями порядка $10\text{--}30 \text{ см}^{-1}$ типичны для колебательных спектров многих наночастиц. Поскольку этим расстояниям соответствуют периоды циклов возврата 1–3 пс, эти циклы можно обнаружить экспериментально. Более того, результаты настоящей работы показывают, что многочисленные наблюдения неэкспоненциальной кинетики колебательной релаксации методами субпикосекундной спектроскопии могут быть объяснены возникновением эха Лошмидта.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Дж. Джортнера, В. Х. Миллера, С. П. Новикова и Я. Г. Синая за полезное обсуждение. Мы благодарны Л. А. Фальковскому, которому принадлежит вывод формул (3.8), (3.13), (3.14), (3.18), (4.10), (4.32), (A.6) и построение рис. 2a–г, а также Е. В. Ветошкину и В. А. Дубовицкому за помощь в составлении программы численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формула суммирования Пуассона

Если тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi kx) \quad (\text{A.1})$$

умножить на функцию $f(x)$ и проинтегрировать в бесконечных пределах, получим формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i2\pi kx) dx. \quad (\text{A.2})$$

Используя свойство δ -функции,

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|df/dx|_{f(x)=0}}, \quad (\text{A.3})$$

где $\{x_n\}$ — совокупность корней уравнения $f(x) = 0$, соотношение (A.1) можно обобщить для любой мероморфной функции, имеющей простые полюса в каждом интервале $[n, n + 1/2]$:

$$\begin{aligned} \sum_{\{x_n\}} \delta(f(x)) &= \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i2k\pi(x - x_n)) |df/dx|_{f(x)=0}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Спектральная функция плотного дискретного спектра, не имеющего вырожденных состояний, удовлетворяет указанным условиям. Интегрируя обе части равенства (A.3) получаем соотношение (3.9) основного текста. В этом соотношении сингулярным является второй сомножитель в подынтегральном выражении справа, так что совокупность полюсов спектральной функции, т. е. собственных значений, заменяется совокупностью полюсов этого выражения.

В модели Цванцига спектральная функция имеет вид

$$\tilde{a}_s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \pi C^2 \operatorname{ctg} \pi \varepsilon}, \quad (\text{A.5})$$

т. е.

$$\exp(i2k\pi\varepsilon) \left| \frac{d\varepsilon}{dx} \right| = \left(\frac{\varepsilon - i\pi C^2}{\varepsilon + i\pi C^2} \right)^{k-1}. \quad (\text{A.6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Свойства парциальных амплитуд

Функции полиномов Лагерра

$$f_k(x) = e^{-x/2} L_k(x) \theta(x) \quad (\text{B.1})$$

образуют ортонормированный базис

$$\int_0^{\infty} f_k(x) f_{k'}(x) dx = \delta_{kk'}. \quad (\text{B.2})$$

Поскольку

$$-xL_{k-1}^1 = x \frac{dL_k}{dx} = k(L_k - L_{k-1}), \quad (\text{B.3})$$

парциальные амплитуды можно представить в виде суммы функций (B.1):

$$\begin{aligned} a_s^{(k)}(x) &= -\frac{x}{k} e^{-x/2} L_{k-1}^1(x) \theta(x) = \\ &= e^{-x/2} (L_k(x) - L_{k-1}(x)) \times \\ &\quad \times \theta(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Вспомогательные интегралы

$$\begin{aligned} I_{n_1 n_2}^{(k)} &= \frac{\pi}{2k_c} \int_0^{\infty} a_s^{(k-n_1)} (\tau + 4n_1 k_c) \times \\ &\quad \times a_s^{(k-n_2)} (\tau + 4n_2 k_c) d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

находятся с помощью соотношений (B.2), (B.4), теоремы сложения для полиномов Лагерра

$$L_{k'-1}^1(x+a) = \sum_{n=0}^{k'-1} L_n(x) L_{k'-1-n}(a)$$

и рекуррентного соотношения

$$xL_n(x) = (2n+1)L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) - nL_{n-1}(x).$$

Интегралы $I_{0n}^{(k)}$ не зависят от k и отличны от нуля только при $n = 0, 1$:

$$I_{0n}^{(k)} = \begin{cases} \pi/k_c, & n = 0, \\ \exp(-2k_c)\pi/2k_c, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

При $n_1, n_2 \neq 0$ интегралы (B.5) имеют вид конечных сумм от $f_{n_1}(4n_1 k_c) f_{n_2}(4n_2 k_c)$:

$$\begin{aligned} I_{n_1 n_2}^{(k)} &= \frac{8\pi k_c n_1 n_2}{(k-n_1)(k-n_2)} \sum_{s=0}^{k-1-n_2} f_{k-n_1-s}(4n_1 k_c) \times \\ &\quad \times f_{k-n_2-s}(4n_2 k_c) + O(k_c^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

При $k \gg 1, k_c \gg 1$ слагаемые в суммах (B.7) экспоненциально малы, когда значения аргумента $4n_{1(2)} k_c$ больше индексов, так что достаточно учесть слагаемые, удовлетворяющие условиям

$$n_1 \leq n_2 \leq n^* = \left[\frac{k}{k_c} \right] + 1, \quad 0 \leq s \leq n^* - n_2, \quad (\text{B.8})$$

где n^* — число перекрывающихся циклов при заданном значении k .

Преобразование Лапласа парциальных амплитуд следует из соотношения (B.4):

$$\tilde{f}_k(p) = \frac{(p-1/2)^k}{(p+1/2)^{k+1}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\tilde{a}_s^{(k)}(p) = -\frac{(p-1/2)^{k-1}}{(p+1/2)^{k+1}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Асимптотики парциальных амплитуд циклов с большими номерами

Для асимптотик функций (Б.1) в области монотонности $x > 4k$ справедливо соотношение [36]:

$$e^{-x/2} L_{k-1}^1(x) \approx (-1)^{k-1} e^{-U} (2 \operatorname{ch} \theta)^{-1} \times (4\pi k \operatorname{sh} 2\theta)^{-1/2} (1 + O(1/k \operatorname{sh} 2\theta)),$$

где

$$\operatorname{ch} \theta = \sqrt{\frac{x}{4k}}, \quad U = k(\operatorname{sh} 2\theta - 2\theta),$$

из которого следует

$$a_s^{(k)}(x) \approx (-1)^k \frac{2}{\sqrt{k\pi}} \exp\left(-\frac{x}{2} \sqrt{1-4k/x}\right) \left(\frac{x}{4k}\right)^k \times \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k}{x}}\right)^{2k}, \quad x > k \gg 1. \quad (\text{B.1})$$

Соотношение (B.1) показывает, что с приближением к максимуму $x_m = 4k$, расположенному на границе области монотонности, показатель экспоненты быстро уменьшается. Если $x/4k \gg 1$, так что $\sqrt{1-4k/x} \approx 1 - 2k/x$, соотношение (B.1) можно упростить, воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-z+1/2} e^z;$$

$$a_s^{(k)}(x) \propto (-1)^k \frac{x^k}{k!} e^{-x/2}, \quad x \gg 4k. \quad (\text{B.2})$$

Соотношение (B.2) означает замену полинома Лагерра его слагаемым с наибольшей степенью. Как следует из таблицы, соотношение (B.2) удовлетворительно воспроизводит экстремумы парциальных амплитуд.

Хотя в области осцилляций $0 < x < 4k$ существуют более точные асимптотики, требованиям задачи удовлетворяет простое соотношение

$$a_s^{(k)}(x) \propto \sqrt{\frac{x}{k}} J_1(\sqrt{4kx}) + O(k^{-5/4}), \quad (\text{B.3})$$

$$x \ll k.$$

Чтобы оценить его точность, сравним его разложение в степенной ряд с разложением парциальной амплитуды:

$$a_s^{(k)}(x) = x \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \right) \times \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(k-1)!}{(n+1)!(k-1-n)!} x^n \right),$$

$$\sqrt{\frac{x}{k}} J_1(\sqrt{4kx}) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} k^n x^n.$$

Коэффициенты при x^n в верхнем ряду, равные

$$\frac{k^n}{n!(n+1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right),$$

совпадают с коэффициентами в нижнем ряду с точностью $O(k^{-2})$.

В окрестности точки перехода $x \approx 4k$ парциальные амплитуды связаны с функциями Эйри соотношением

$$a_s^{(k)}(x) \approx (-1)^k 2^{2/3} k^{-1/3} (1 + 2^{-8/3} k^{-2/3} u) \times \operatorname{Ai}(u), \quad u = (16k)^{-1/3} (x - 4k), \quad (\text{B.4})$$

которое можно рассматривать, как «квазиклассическое приближение», поскольку большие значения номера цикла соответствуют большим квантовым числам. Соотношение (B.4) аппроксимирует амплитуду области ее глобального экстремума, расположенного при $u_m \approx -1.020$, где $\max |a_s^{(k)}| \approx 0.537(4/k)^{-1/3}(1 - (16k)^{-2/3})$. Из соотношения (B.4) следует, что полуширина глобального экстремума эха Лошмидта возрастает с номером цикла пропорционально $k^{1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Schinke, *Photodissociation Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
2. M. Joeux, S. C. Farantos, and R. Schinke. *J. Phys. Chem. A* **106**, 5407 (2002).
3. M. Ben-Nun and T. J. Martinez, *Chem. Phys. Lett.* **298**, 57 (1998).
4. T. Vreven, F. Bernardi, M. Caravelli, M. Olivucci, M. Robb, and H. B. Schlegel, *J. Amer. Chem. Soc.* **119**, 1267 (1997).
5. M. Ben-Nun, F. Molnar, H. Lu, J. C. Phillips, T. J. Martinez, and K. Schulten, *Farad. Discuss.* **110**, 447 (1998).
6. S. Hayashi, E. Tajkhorshid, and K. Schulten, *Biophys. J.* **85**, 1440 (2003).
7. C. J. Fesko, J. D. Eaves, J. J. Loparo, A. Tokmakoff, and P. L. Geissler, *Science* **301**, 1698 (2003).

8. A. V. Benderskii and K. B. Eisenthal, *J. Phys. Chem. A* **106**, 7482 (2002).
9. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and M. Zwirger, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987).
10. U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Scientific, Singapore (1999).
11. V. A. Benderskii, D. E. Makarov, and C. A. Wight, *Chemical Dynamics at Low Temperatures*, J. Wiley, New York (1994).
12. L. H. Yu and C. P. Sun, *Phys. Rev. A* **49**, 592 (1994).
13. S. Roy and B. Bagchi, *J. Chem. Phys.* **99**, 9938 (1993).
14. V. A. Benderskii, L. A. Falkovsky, and E. I. Kats, *ЖЭТФ* **86**, 249 (2007).
15. R. Zwanzig, *Lecture Notes in Theoret. Phys.* **3**, 106 (1960).
16. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton (1955).
17. E. P. Wigner, *SIAM Rev.* **9**, 1 (1967).
18. F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140, 157, 166, 1191, 1199 (1962).
19. O. Bohigas, S. Tomsovic, and D. Ulmo, *Phys. Rep.* **223**, 43 (1993).
20. V. K. B. Kota, *Phys. Rep.* **347**, 223 (2001).
21. T. Papenbrock and H. A. Weidenmuller, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 997 (2007).
22. M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, New York (1968).
23. R. C. Snyder, *J. Molec. Spectr.* **4**, 411 (1960).
24. T. Ishioka, W. Yan, H. L. Strauss, and R. G. Snyder, *Spectrochimica Acta A* **59**, 671 (2003).
25. K. R. Rodriguez, S. Shah, S. M. Williams, and S. Teeters-Kennedy, *J. Chem. Phys.* **121**, 8671 (2004).
26. S. M. Williams, K. R. Rodriguez, S. Shannon-Kennedy, S. Shah, T. M. Rogers, A. D. Stafford, and J. V. Goe, *Nanotechnology* **15**, 495 (2004).
27. V. Schettino, H. Prigolini, and G. Cardini, *J. Phys. Chem. A* **106**, 1815 (2002).
28. O. P. Charkin, N. M. Klimenko, D. O. Charkin, A. M. Mebel, and S. H. Lin, *Russian J. Inorg. Chem.* **51**, 1 (2006).
29. B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979).
30. G. M. Zaslavsky, *Chaos in Dynamical Systems*, Harwood, New York (1985).
31. M. V. Berry, in *Chaotic Behavior in Deterministic Systems*, ed. by G. Cassati, Plenum Press, New York (1985).
32. F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Berlin (1990).
33. F. M. Izrailev, *Phys. Rep.* **196**, 299 (1990).
34. W. Weisskopf and E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930).
35. M. Bixon and J. Jortner, *Mol. Phys.* **17**, 109 (1969).
36. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2. McGraw Hill, New York (1953).
37. <http://mathworld.wolfram.com/LaguerrePolynomial.html>.
38. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **39**, 776 (1960).
39. I. Prigogin and T. Y. Petrovsky, *Adv. Chem. Phys.* **99**, 1 (1997); *Resonances, Instability and Irreversibility*, ed. by I. Prigogin and S. A. Rice, J. Wiley, New York (1985).
40. W. H. Zurek, *Phys. Rev. D* **26**, 1862 (1982).
41. V. A. Benderskii and E. I. Kats, *Phys. Rev. E* **62**, 036217 (2002).
42. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, J. Wiley, New York (1989).
43. M. E. Flatte and M. Holthaus, *Ann. Phys.* **245**, 299 (1996).
44. Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
45. M. V. Berry, in *Geometric Phase in Physics*, ed. by A. Shapere and F. Wilczek, World Scientific, Singapore (1991).
46. Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Guilford (1977).
47. А. М. Вишик, И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, *Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления т. 2*, ВИНТИ, Москва (1985).
48. S. Luzzatto, arXiv:math.DS/0409085.
49. G. W. Stroke, *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Academic Press, New York (1966).
50. P. Grigolini, *Quantum Mechanical Irreversibility*, World Scientific, Singapore (1993).
51. G. P. Berman and G. M. Zaslavsky, *Phys. Lett. A* **61**, 295 (1977).