

ЗАПОЛНЕНИЕ ПЛАЗМОЙ МАГНИТОСФЕРЫ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД: ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ

Я. Н. Истомин^{a*}, Д. Н. Собынин^{b**}

^a Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 15 сентября 2008 г.

Рассмотрено движение заряженных частиц в вакуумной магнитосфере вращающихся нейтронных звезд, обладающих сильным поверхностным магнитным полем $B \gtrsim 10^{12}$ Гс. Показано, что электроны и позитроны, попадающие в магнитосферу или рожденные в ней, захватываются бессиловой поверхностью $\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = 0$. С помощью уравнения Дирака–Лоренца исследована динамика захвата частиц и их дальнейшего движения вблизи бессиловой поверхности. Определено, что вдали от бессиловой поверхности энергия частиц определяется балансом между мощностью сил ускоряющего электрического поля и интенсивностью изгибного излучения. При захвате частицы начинают совершать адиабатические колебания вдоль силовых линий магнитного поля и одновременно движутся вдоль бессиловой поверхности. Найдены параметры колебаний и траектории движения захваченных частиц. Рассчитаны характерные времена захвата и энергетические потери частиц за счет излучения ими как тормозных, так и изгибных фотонов. Показано, что захват частиц приводит к монотонному возрастанию толщины слоя заряженной плазмы, накапливающейся вблизи бессиловой поверхности. Оценено время заполнения плазмой вакуумной магнитосферы.

PACS: 52.20.Dq, 52.27.Er, 97.60.Gb, 97.60.Jd

1. ВВЕДЕНИЕ

В физике радиопульсаров довольно подробно исследована стационарная структура магнитосферы радиопульсаров. При этом имеется в виду не вакуумная магнитосфера, а магнитосфера, заполненная плотной электрон-позитронной плазмой. Это связано с тем, что радиоизлучение, генерируемое в магнитосфере потоком заряженных частиц, требует для своего объяснения существования механизма производства плотной плазмы. Такой механизм, предложенный Старроком [1] и существенно развитый Рудерманом и Сазерлендом [2], состоит в том, что в сильном магнитном поле у поверхности нейтронной звезды, являющейся радиопульсаром, $B \approx 10^{12}$ Гс, возможно эффективное рождение

электрон-позитронной пары гамма-квантом, имеющим энергию, большую, чем удвоенная масса покоя электрона [3, 4]. В свою очередь, энергичные гамма-кванты излучаются электронами и позитронами при их движении в магнитосфере вдоль силовых линий магнитного поля, имеющих существенную кривизну. Такие фотоны называются изгибными. Процессы излучения фотонов и их поглощения в магнитном поле, сопровождающиеся рождением электрон-позитронных пар, позволяют построить теорию стационарного рождения плазмы в магнитосфере замагниченной вращающейся нейтронной звезды. Однако из наблюдений стационарно работающих радиопульсаров довольно трудно понять, каков механизм генерации радиоизлучения в их магнитосферах, где и как происходит рождение плазмы. Проследить динамику развития излучения на разных частотах было бы очень важно для понимания фи-

*E-mail: istomin@lpi.ru

**E-mail: sobyanin@gmail.com

зических процессов, происходящих в магнитосфере радиопульсаров [5]. Кроме того, в последнее время появилось много наблюдений нестационарно работающих радиопульсаров. Это прежде всего так называемые выключающиеся радиопульсары, у которых радиоизлучение наблюдается только в течение определенного отрезка времени, значительно превышающего период вращения звезды. Так, пульсар PSR B1931+24 «работает» 5–10 дней, затем молчит 20–25 дней [6], а пульсар PSR J1832+0029 «работает» около 300 дней и молчит около 700 дней (см., например, обзор [7]). При этом измерено, что торможение вращения, т. е. потери энергии, существенно различно в периоды работы и молчания. Поскольку мощность радиоизлучения составляет ничтожную часть полных потерь энергии вращения нейтронной звезды, естественно предположить, что молчание связано с прекращением генерации плазмы в магнитосфере. Тогда можно отличить механизм потерь, связанный с излучением магнито-дипольной волны в вакууме (молчание), от механизма потерь, связанного с излучением пульсарного ветра — потока электрон-позитронной плазмы, вытекающей из магнитосферы (работа).

Кроме выключающихся пульсаров давно известна группа так называемых нуллинг-пульсаров (nulling pulsars), у которых также не наблюдается радиоизлучение в течение некоторого времени, но не так регулярно, как у выключающихся, и у которых пока не измерено различие в торможении вращения. Из 23-х пульсаров, исследованных в работе [8], у семи пульсаров доля нуллинга превышает 40 %, а у источников PSR J1502-5653 и PSR J1717-4054 она достигает 95 %.

Еще одна группа нестационарных источников радиоизлучения наблюдается в последнее время — это вращающиеся радиотранзиенты (RRATs), спорадически вспыхивающие радиоисточники, у которых сохраняется фаза следования всплесков и измерены соответствующие периоды, характерные для обычных радиопульсаров [9]. Нет сомнения, что это тоже вращающиеся нейтронные звезды. Тем не менее, природа их активности совершенно не ясна, о чем свидетельствует наличие множества разнородных моделей (см., например, [10–14]).

Все описанные источники демонстрируют, на наш взгляд, нестационарные процессы генерации плазмы в магнитосфере нейтронных звезд. Поэтому важно понять, как происходит заполнение плазмой магнитосферы вращающейся замагниченной нейтронной звезды, что является причиной начала работы радиопульсаров [5]. Начальному исследованию

«зажигания» магнитосферы нейтронных звезд — динамике заполнения магнитосферы электронами и позитронами, рожденными в магнитосфере, посвящена данная работа. В разд. 2 даны электромагнитные поля внутренней вакуумной магнитосферы и описана бессиловая поверхность, где электрическое поле вдоль магнитного поля обращается в нуль. Разделы 3–7 посвящены динамике движения заряженных частиц вблизи бессиловой поверхности и их захвату на эту поверхность. В разд. 8 обсуждается вопрос динамики накопления плазмы во внутренней магнитосфере и оценивается характерное время зажигания.

2. СТРУКТУРА ВАКУУМНОЙ МАГНИТОСФЕРЫ

Нам будет удобно рассматривать электромагнитное поле вокруг нейтронной звезды в сферических координатах r, θ, φ . В качестве полярной оси возьмем ось вращения звезды, определяемую направлением вектора ее угловой скорости Ω . Здесь r — расстояние от центра звезды до данной точки; θ — полярный угол, отсчитываемый от оси вращения; φ — азимутальный угол. Электромагнитное поле вне нейтронной звезды найдено Дойчем [15] и имеет следующий вид: магнитное поле

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{2m}{r^3} \left[\cos \theta \cos \theta_m + \sin \theta \sin \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m) \right], \\ B_\theta &= \frac{m}{r^3} \left[\sin \theta \cos \theta_m - \cos \theta \sin \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m) \right], \\ B_\varphi &= \frac{m}{r^3} \sin \theta_m \sin(\varphi - \varphi_m) \end{aligned} \quad (1)$$

и электрическое

$$\begin{aligned} E_r &= -k \frac{mR^2}{r^4} \left[\left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \right) \cos \theta_m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sin(2\theta) \sin \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m) \right], \\ E_\theta &= -k \frac{mR^2}{r^4} \left[\sin(2\theta) \cos \theta_m + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r^2}{R^2} - \cos(2\theta) \right) \sin \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m) \right], \\ E_\varphi &= k \frac{mR^2}{r^4} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \cos \theta \sin \theta_m \sin(\varphi - \varphi_m). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь θ_m, φ_m — полярный и азимутальный углы магнитной оси, определяемой направлением вектора магнитного дипольного момента \mathbf{m} ; $k = \Omega/c$ — волновое число, соответствующее угловой частоте Ω вращения нейтронной звезды; R — радиус звезды.

Азимутальный угол $\varphi_m = \Omega t$ выбран так, чтобы в момент времени $t = 0$ его значение равнялось нулю. Формулы (1) и (2) верны до тех пор, пока мы рассматриваем электромагнитное поле на расстояниях, значительно меньших радиуса светового цилиндра $R_c = c/\Omega$:

$$(\Omega r_{\perp}/c)^2 \ll 1, \quad (3)$$

где r_{\perp} — расстояние от оси вращения нейтронной звезды до рассматриваемой точки. Нас в первую очередь интересуют области внутренней вакуумной магнитосферы, в которых возможно эффективное однофотонное рождение электрон-позитронных пар. Для пульсаров с характерным поверхностным магнитным полем 10^{12} Гс характерное расстояние, на котором рождение пар еще возможно, имеет порядок $(10-20)R$, поэтому для типичных значений радиуса звезды $R \approx 10$ км и периода ее вращения $P \sim 0.1-1$ с параметр (3) имеет порядок $10^{-5}-10^{-3}$. При таких условиях формулы (1) и (2) дают достаточно точный результат.

Используя формулы (1) и (2) для электромагнитного поля Дойча, нетрудно получить уравнение бессиловой поверхности $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ — поверхности, в каждой точке которой продольное электрическое поле равно нулю:

$$r_{ffs}^2 = R^2 \left(1 - 4 \frac{\cos \theta \cos^2 \theta'}{\sin \theta_m \cos \theta''} \right). \quad (4)$$

Здесь мы ввели углы θ' и θ'' следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta \cos \theta_m + \sin \theta \sin \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m), \\ \cos \theta'' &= -\cos \theta \sin \theta_m + \sin \theta \cos \theta_m \cos(\varphi - \varphi_m). \end{aligned} \quad (5)$$

Понять структуру бессиловой поверхности (4) можно из рис. 1. На нем показаны сечения бессиловой поверхности плоскостью $\varphi - \varphi_m = \{0, \pi\}$, проходящей через ось вращения и магнитную ось, и плоскостью $\varphi - \varphi_m = \{\pi/2, 3\pi/2\}$, также проходящей через ось вращения, но ортогонально предыдущей плоскости, для различных величин угла наклона магнитной оси к оси вращения нейтронной звезды. Представление о трехмерном строении бессиловой поверхности можно получить из рис. 3 (см. далее), на котором изображены траектории движения частиц, лежащие на этой поверхности.

В случае соосного ротатора бессиловая поверхность — это просто экваториальная плоскость $\theta = \theta' = \pi/2$. Для произвольного наклонного ротатора бессиловую поверхность можно разделить на две области. Одна область представляет собой две сводчатые части, примыкающие к поверхности нейтрон-

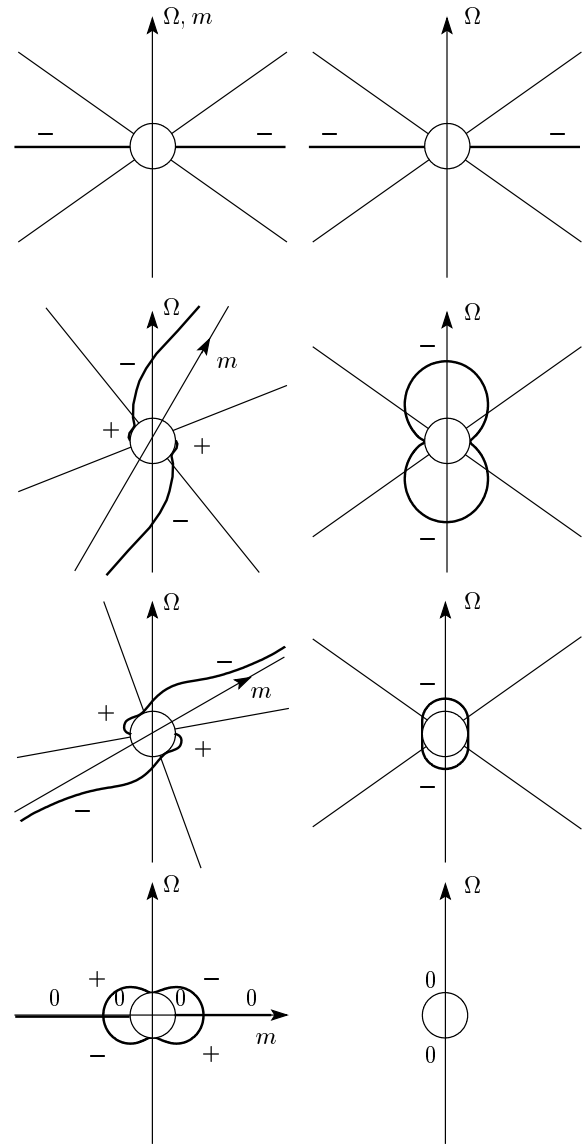


Рис. 1. Сечения бессиловой поверхности плоскостью $\varphi - \varphi_m = \{0, \pi\}$ (слева) и плоскостью $\varphi - \varphi_m = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ (справа) для углов наклона (сверху вниз) $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$. Отмечены знаки накапливающихся зарядов. Для сравнения также показаны сечения $\rho_{GJ} = 0$

ной звезды в точках экватора $\theta = \pi/2$ и магнитного экватора $\theta' = \pi/2$. Во всех точках магнитного экватора бессиловая поверхность касается поверхности нейтронной звезды, что не наблюдается в точках обычного экватора. Вторая область представляет собой поверхность, начинающуюся на магнитном экваторе и уходящую на бесконечность. Для более простого соотнесения данной поверхности с сечениями плоскостью $\varphi - \varphi_m = \{0, \pi\}$ ее удобно представить со-

ставленной из двух открытых листов. Каждый лист одним своим краем примыкает к магнитному экватору и к прямой, проходящей через центр нейтронной звезды ортогонально оси вращения и магнитной оси. Другой край листа уходит на бесконечность, причем так, что для произвольной точки, лежащей на бессиловой поверхности, $\theta'' \rightarrow \pi/2$ при $r \rightarrow \infty$. При больших r лист мало отличается от плоскости $\theta'' = \pi/2$. Однако на относительно малых расстояниях от поверхности звезды отличие становится заметным и над плоскостью $\theta'' = \pi/2$ образуется куполовидная часть, оканчивающаяся на магнитном экваторе. Два листа гладко сшиваются в точках упомянутой выше прямой $\theta = \theta' = \theta'' = \pi/2$, фактически образуя единый лист.

Далее условимся всюду рассматривать только значения угла θ_m , лежащие в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Это не ограничивает общности, потому что ротатор с углом $\chi > \pi/2$ между векторами \mathbf{m} и $\mathbf{\Omega}$ эквивалентен ротатору с углом $\theta_m = \pi - \chi < \pi/2$, причем во всех формулах нужно заменить Ω на $-\Omega$.

3. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Для исследования движения частиц в вакуумной магнитосфере будем пользоваться классическим уравнением Дирака–Лоренца:

$$m_e \ddot{x}^i = \frac{2}{3c^3} e^2 \left[\ddot{x}^i + \frac{1}{c^2} \dot{x}^i \ddot{x}^k \dot{x}_k \right] + F^i, \quad (6)$$

где $x^i = (ct, \mathbf{r}^T)^T$ — контравариантный 4-вектор, содержащий время t и координаты $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ частицы в лабораторной системе отсчета (T — значок транспонирования), m_e — масса частицы, e — заряд частицы, c — скорость света. Точка над 4-вектором означает дифференцирование по собственному времени τ частицы, т. е. времени в сопутствующей ей системе отсчета. Дифференциалы времени dt в лабораторной системе отсчета и собственного времени $d\tau$ частицы связаны соотношением $d\tau = dt/\gamma$, где γ — лоренц-фактор частицы. 4-сила F^i , действующая на частицу, определяется следующим образом: $F^i = eF^{ik} \dot{x}_k/c$, где

$$F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k$$

— тензор электромагнитного поля, а в определении 4-потенциала

$$A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)^T = (\phi, \mathbf{A}^T)^T$$

входят стандартные скалярный ϕ и векторный \mathbf{A} электромагнитные потенциалы.

Перейдем к безразмерным переменным. Будем измерять напряженность и электрического, и магнитного поля в единицах так называемого критического поля $B_c = m_e^2 c^3 / e \hbar \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс, скорость частицы — в единицах скорости света c , заряд частицы — в единицах заряда позитрона e , массу частицы — в единицах массы электрона m_e , энергию частицы — в единицах энергии покоя электрона $m_e c^2$, все расстояния — в единицах комптоновской длины волны электрона $\lambda = \hbar / m_e c \approx 3.86 \cdot 10^{-11}$ см, а все времена — в единицах λ/c . Сразу отметим, что в этих единицах $1000 \text{ км} \approx 2.6 \cdot 10^{18}$ и $1 \text{ с} \approx 7.8 \cdot 10^{20}$.

После описанного выше приведения к безразмерному виду и выделения отдельно скалярной и векторной компонент 4-вектора x^i уравнение Дирака–Лоренца (6) приводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2}{3} \alpha \gamma \left[\frac{d^2 \gamma}{dt^2} - \gamma^3 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 \right] \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{2}{3} \alpha \gamma \left[3 \frac{d\gamma}{dt} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \right] \pm \left[\mathbf{E} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right], \quad (8)$$

где \mathbf{v} — скорость частицы, $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. При исследовании движения позитронов в системе уравнений (7) и (8) следует брать знак «+», а при исследовании движения электронов — знак «−». Из соображений удобства условимся далее всюду писать знак «+», отдельно оговаривая в важных случаях, что изменится, если рассматривать не позитроны, а электроны.

Заряженная частица, рожденная в магнитосфере, будь то электрон или позитрон, будет испытывать действие электрического поля и ускоряться. Легко оценить, через какое время движение частицы станет релятивистским, $\tau_{rel} \approx 1/E_{\parallel}$. Из общего вида формул (1) и (2) видно, как напряженность электрического поля \mathbf{E} связана с напряженностью магнитного поля \mathbf{B} , причем для полей на поверхности звезды выполнено соотношение $E_{surf} \approx R B_{surf} / R_c$. Для типичного поверхностного магнитного поля $B_{surf} \sim 0.01\text{--}0.1$ и отношения радиуса нейтронной звезды к радиусу светового цилиндра $R/R_c \sim 10^{-4}\text{--}10^{-3}$ поверхностное электрическое поле имеет порядок $E_{surf} \sim 10^{-6}\text{--}10^{-4}$, поэтому время перехода частицы в релятивистский режим $\tau_{rel} \sim 10^4\text{--}10^6$. Это означает, что через время порядка $10^{-17}\text{--}10^{-15}$ с частица достигает околосветовой скорости и далее ее движение можно рассмат-

ривать как ультрарелятивистское. При этом частица, очевидно, успеет пролететь расстояние не более 10^4 – 10^6 комптоновских длин волн.

Далее частица будет продолжать ускоряться уже в ультрарелятивистском режиме. Как хорошо известно, частица будет двигаться, вообще говоря, вдоль искривленных силовых линий магнитного поля. Приобретая все большую энергию, частица начинает испускать так называемые изгибные фотоны. Интенсивное изгибное излучение приводит к потере энергии частицы. Возникающая при этом сила радиационного трения и учитывается уравнением Дирака–Лоренца.

С ростом лоренц-фактора γ интенсивность изгибного излучения возрастает, поэтому в конечном итоге частица, достигнув некоторого максимального лоренц-фактора γ_0 , далее не будет испытывать ускорения, поскольку вся энергия, набираемая ей в результате действия электрического поля, будет теряться в результате излучения изгибных фотонов. Чтобы определить γ_0 , нужно найти стационарное решение уравнения (7), положив в нем $d\gamma/dt = d^2\gamma/dt^2 = 0$:

$$\frac{2}{3}\alpha\gamma_0^4 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (9)$$

Уравнение (9) показывает, что в стационарном состоянии вся работа электрического поля над частицей полностью переходит в энергию изгибного излучения. В рассматриваемом случае вектор скорости частицы имеет единичную длину, т. е. $v = 1$, поэтому $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{n}/\rho$, где \mathbf{n} — вектор главной нормали к траектории частицы, ρ — радиус кривизны траектории. Максимальный лоренц-фактор частицы приобретает вид

$$\gamma_0 = \left(\frac{3}{2\alpha} E_{\parallel} \rho^2\right)^{1/4}. \quad (10)$$

Для характерного продольного электрического поля $E_{\parallel} \sim 10^{-4}$ и радиуса кривизны траектории частицы $\rho \approx R \approx 2.6 \cdot 10^{16}$ максимальный лоренц-фактор частицы $\gamma_0 \approx 6 \cdot 10^7$.

Оценим время достижения частицей максимального лоренц-фактора γ_0 — время полного ускорения частицы и перехода ее в квазистационарный режим движения, определяемый условием баланса (9). Искомое время равно $\tau_{st} \approx \gamma_0/E_{\parallel}$. Таким образом, за время порядка $\tau_{st} \sim 10^{12}$ (в размерных единицах 10^{-9} с) частица достигает максимальной энергии и далее движется так, что работа электрического поля над частицей за единицу времени равна полной интенсивности изгибного излучения. При этом частица преодолевает расстояние порядка 10^{12} (в раз-

мерных единицах порядка нескольких десятков сантиметров), которое значительно меньше R , поэтому верно предположение о том, что электрическое поле за время τ_{st} полного ускорения частицы не изменяется. Значит, можно считать, что ускорение электронов и позитронов происходит практически мгновенно и в той точке, где родилась электрон-позитронная пара.

Однако и напряженность электрического поля, и радиус кривизны траектории изменяются при движении частицы, поэтому и лоренц-фактор γ_0 изменяется с течением времени. Это означает, что частица будет подстраиваться, приобретая энергию из-за работы над ней электрического поля, если γ_0 возрастает вдоль траектории, или теряя ее за счет излучения изгибных фотонов, если γ_0 убывает вдоль траектории движения частицы. Теперь важно определить скорость такой подстройки энергии частицы. Если эта скорость значительно превышает скорость изменения γ_0 вдоль траектории, то можно считать, что лоренц-фактор частицы определяется координатами той точки, в которой находится частица, ведь в некоторый фиксированный момент времени само значение γ_0 зависит только от координат рассматриваемой точки, но ни в коем случае не от скорости частицы.

Найдем закон изменения лоренц-фактора γ частицы при приближении к стационарному значению γ_0 . Для этого следует воспользоваться уравнением (7), представив лоренц-фактор частицы в виде суммы стационарного значения γ_0 и некоторого отклонения $\delta\gamma$ от него. Отклонение $\delta\gamma$ следует считать малым, т. е. $\delta\gamma \ll \gamma_0$. Линеаризуя уравнение (7) и избавляясь от самоускоряющегося решения, получаем $\delta\gamma = \delta\gamma_i \exp(-t/\tau_0)$. Таким образом, при отклонении лоренц-фактора частицы на величину $\delta\gamma_i$ от стационарного значения γ_0 лоренц-фактор будет приближаться к γ_0 по экспоненциальному закону с постоянной времени затухания $\tau_0 = 3\rho^2/8\alpha\gamma_0^3$. Для характерных значений радиуса кривизны траектории $\rho \sim 10^{17}$ и лоренц-фактора $\gamma_0 \sim 10^7$ – 10^8 время затухания имеет порядок $\tau_0 \sim 10^{11}$ – 10^{14} (в размерных единицах 10^{-10} – 10^{-7} с). За время τ_0 частица пролетает расстояние $l_0 = \tau_0$ порядка 10^{11} – 10^{14} комптоновских длин волн (т. е. от сантиметров до нескольких десятков метров). Теперь вспомним, что характерные расстояния, на которых изменяются электрическое поле и радиус кривизны магнитных силовых линий, а значит, и стационарный лоренц-фактор γ_0 частицы, имеют порядок R . Из-за того что $l_0 \ll R$, частицы при движении в магнитосфере успевают подстраиваться под изменение величины γ_0 . Итак,

можно считать, что лоренц-фактор частицы полностью определяется ее координатами.

До сих пор мы обсуждали энергетику частиц, пользуясь при этом только уравнением (7). Теперь подробнее исследуем второе уравнение (8) и посмотрим, как это уравнение определяет траекторию частицы. Оценим величину слагаемых, возникающих из-за учета самодействия заряженных частиц, при этом считая, что после рождения прошло время τ_{st} и частица уже полностью ускорилась и перешла в квазистационарный режим движения, определяемый условием (9). Первое слагаемое в уравнении (8), содержащее квадратные скобки, по порядку величины равно $\alpha\gamma_0^2/R^2$. Оно мало по сравнению со вторым, поскольку выполнено условие $\alpha\gamma_0^2/R^2 \ll E$, в чем можно убедиться, взяв типичные значения лоренц-фактора частицы $\gamma_0 \sim 10^8$, радиуса звезды $R \sim 10^{17}$ и электрического поля $E \sim 10^{-4}$. Выполнение этого условия не является, однако, достаточным основанием для отбрасывания членов, учитывающих самодействие. Действительно, член в левой части уравнения (8) по порядку величины равен $\gamma_0/R \sim 10^{-9}$ и также значительно меньше E . Для обоснованного отбрасывания слагаемых, учитывающих влияние поля, создаваемого заряженными частицами, на их собственное движение, необходимо, чтобы эти слагаемые были малы по сравнению с γ_0/R , $\alpha\gamma_0/R \ll 1$. Мы видим, что данное условие всегда выполнено, поэтому движение частиц в вакуумной магнитосфере нейтронной звезды будет описываться уравнением

$$\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{E} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение (11) описывает собственное движение частицы, а ее энергетика определяется уравнением (7), которое в квазистационарном случае сводится к равенству (10).

Полная скорость частицы \mathbf{v} перепишется в виде $\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_c$, где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ — единичный касательный вектор к силовой линии магнитного поля, $\mathbf{v}_e = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ — скорость электрического дрейфа, $\mathbf{v}_c = \gamma \mathbf{b} \times d\mathbf{b}/dt/B$ — скорость центробежного дрейфа.

Оценим по порядку величины дрейфовые скорости \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_c . Скорость электрического дрейфа равна отношению напряженностей электрического и магнитного полей $v_e = E/B$ и имеет порядок $R/R_c \sim 10^{-4}$. Для значений $\gamma \sim 10^8$, $\rho \sim 10^{17}$ и $B \sim 0.01-0.1$ скорость центробежного дрейфа равна $v_c \sim 10^{-8}-10^{-7}$. Таким образом, скорость центробежного дрейфа — величина следующего порядка

малости по сравнению со скоростью электрического дрейфа, поэтому центробежный дрейф не будем учитывать. Итак, будем считать, что $\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{v}_e$ с точностью до членов $o(kr)$ — величин следующего порядка малости (квадратичных и более высокого порядка) по $kr \sim R/R_c$.

Электромагнитное поле, описываемое уравнениями (1) и (2), периодически зависит от времени. Пусть t, r, θ, φ — сферические координаты в лабораторной системе отсчета. Перейдем к новым координатам $t', r', \vartheta', \varphi'$ по формулам $t' = t$, $r' = r$, $\vartheta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \Omega t$. Координаты $t', r', \vartheta', \varphi'$ будем называть координатами во вращающейся системе отсчета. В этих координатах электромагнитное поле зависит только от r', ϑ', φ' , но не от t' . Условимся далее опускать штрихи у переменных в тех случаях, когда ясно, что рассмотрение ведется во вращающейся системе отсчета. Преобразования скорости и ускорения при переходе во вращающуюся систему отсчета имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{tr}, \end{aligned} \quad (12)$$

где \mathbf{v}' — относительная скорость, $\mathbf{v}_{tr} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ — переносная скорость. Формулы (12) верны при условии $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \ll \Omega^2$. Это условие эквивалентно требованию $\dot{P} \ll 1$, которое всегда выполнено, так как по порядку величины $\dot{P} \sim 10^{-15}$. Подставляя выражения (12) в формулу (11), получаем следующее уравнение движения частицы во вращающейся системе отсчета:

$$\gamma \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \mathbf{E} + \mathbf{v}_{tr} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}'(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля, которые определяются соответственно формулами (2) и (1), но после совершения описанной выше замены переменных зависят уже от координат r', ϑ', φ' . При получении формулы (13) мы пренебрегли кориолисовым $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$ и переносным $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{tr}$ ускорениями по сравнению с относительным ускорением $d\mathbf{v}'/dt'$. Это возможно, поскольку относительное ускорение — это главным образом осестремительное ускорение, возникающее из-за движения частиц вдоль искривленных магнитных силовых линий, поэтому $|d\mathbf{v}'/dt'| \sim 1/R$ и по порядку величины составляет 10^{-17} . Кориолисово ускорение по порядку величины равно $|2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'| \sim 1/R_c$, что составляет 10^{-21} . Переносное ускорение еще меньше, потому что переносная скорость v_{tr} заведомо меньше $v' \sim 1$ в рассматриваемых нами областях магнитосферы

$r \lesssim 10R \ll R_c$, где только и возможно эффективное однофотонное рождение пар. Отбрасываемое таким образом слагаемое $\gamma \boldsymbol{\Omega} \times (2\mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr})$, которое присутствовало бы в левой части уравнения (13), малó и по сравнению с напряженностью электрического поля $E \sim 10^{-4}$, так как для $\gamma \sim 10^8$ оно имеет порядок $\gamma/R_c \sim 10^{-13}$. Лоренц-фактор γ в уравнении (13) относится к лабораторной системе отсчета.

Далее будем проводить исследование движения частиц во вращающейся системе отсчета. Нас интересует вопрос, существуют ли области в магнитосфере, в которых возможно накопление первичной плазмы. Найдем положения равновесия — точки, при помещении в любую из которых заряженная частица будет оставаться в ней неограниченно долго. Координаты положений равновесия определяются условиями равенства нулю скорости и ускорения частицы во вращающейся системе отсчета: $\mathbf{v}' = d\mathbf{v}'/dt' = 0$. Подстановка этого условия в формулу (13) приводит к уравнению $\mathbf{E}^{eff} = 0$, где эффективное электрическое поле равно $\mathbf{E}^{eff} = \mathbf{E} + \mathbf{v}_{tr} \times \mathbf{B}$. Его компоненты, которые нетрудно получить из формул (1), (2) с учетом выражения для \mathbf{v}_{tr} , в сферических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} E_r^{eff} &= -kr \left[\frac{R^2}{r^2} B_r \cos \theta + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) B_\theta \sin \theta \right], \\ E_\theta^{eff} &= kr \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[\frac{1}{2} B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta \right], \\ E_\varphi^{eff} &= kr \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) B_\varphi \cos \theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где B_r , B_θ и B_φ определяются формулой (1). Условие $\mathbf{E}^{eff} = 0$ дает следующий набор точек равновесия:

$$\begin{aligned} r = R, \quad \theta = \frac{\pi}{2} & \quad (\text{экватор}), \\ r = R, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} & \quad (\text{магнитный экватор}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_+^2}{R^2} = \frac{3 + \cos \theta_m}{1 - \cos \theta_m} & \quad (\text{открытые листы}), \\ (\theta, \varphi) = \left\{ \left(\frac{\theta_m}{2}, \varphi_m \right), \left(\pi - \frac{\theta_m}{2}, \pi + \varphi_m \right) \right\}, & \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r_-^2}{R^2} = \frac{3 - \cos \theta_m}{1 + \cos \theta_m} & \quad (\text{своды}), \\ (\theta, \varphi) = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_m}{2}, \varphi_m \right), \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_m}{2}, \pi + \varphi_m \right) \right\}. & \quad (17) \end{aligned}$$

Мы видим, что все точки равновесия находятся на бессиловой поверхности (4) и разделяются на две

группы: неизолрированные и изолированные. Неизолрированными точками равновесия являются все точки на экваторе и магнитном экваторе (см. (15)). К этим двум окружностям добавляются еще четыре изолированные точки равновесия: две точки, координаты которых даются формулами (16), находятся на открытых листах бессиловой поверхности, а две другие, определяемые формулами (17), — на ее сводчатых частях, примыкающих своей границей к экватору и магнитному экватору. Все четыре точки лежат в плоскости, проходящей через ось вращения и магнитную ось.

Возникает вопрос об устойчивости найденных положений равновесия. Кроме того, пока не ясен характер траекторий движения частиц вблизи бессиловой поверхности вообще и вблизи положений равновесия в частности. Ответ на этот вопрос мы дадим после детального исследования процессов захвата частиц бессиловой поверхностью.

4. КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ БЕССИЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Количественное исследование движения заряженных частиц вблизи бессиловой поверхности будем проводить во вращающейся системе отсчета, воспользовавшись для этого уравнением (13). Выберем некоторую точку \mathbf{r}_0 на бессиловой поверхности и разложим электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{B} , а также введенное выше эффективное электрическое поле \mathbf{E}^{eff} в окрестности этой точки следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B}_0, \\ \mathbf{E}^{eff} &= \mathbf{E}_0^{eff} + (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^{eff}, \end{aligned} \quad (18)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 и \mathbf{E}_0^{eff} — напряженности полей в точке \mathbf{r}_0 , $\mathbf{x}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ — расстояние от точки \mathbf{r} , в которой мы интересуемся напряженностями полей, до точки \mathbf{r}_0 . Разложения (18) верны, потому что мы рассматриваем движение частицы в малой окрестности точки \mathbf{r}_0 — на расстояниях, которые значительно меньше характерных расстояний изменения полей, так что $x' \ll R$. Прежде чем искать полное решение уравнения (13), сперва найдем какое-нибудь его частное решение. Потребуем, чтобы это частное решение описывало движение частицы с постоянной скоростью $\mathbf{v}'_0 = \text{const}$. Для существования данного решения необходимо одновременное выполнение двух условий:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0^{eff} + \mathbf{v}'_0 \times \mathbf{B}_0 &= 0, \\ (\mathbf{v}'_0 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^{eff} + \mathbf{v}'_0 \times (\mathbf{v}'_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Первое уравнение системы (19) однозначно определяет компоненту скорости \mathbf{v}'_{\perp} , ортогональную направлению магнитного поля, $\mathbf{v}'_{\perp} = \mathbf{E}_0^{eff} \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$, причем продольная компонента v'_{\parallel} все еще произвольна: $\mathbf{v}'_0 = v'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}'_{\perp}$. Приведем компоненты скорости \mathbf{v}'_{\perp} :

$$\begin{aligned} v'_{\perp r} &= \frac{1}{2} \Omega r \sin \theta b_r b_{\varphi} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \\ v'_{\perp \theta} &= \Omega r \left[\cos \theta b_r + \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta b_{\theta} \right] b_{\varphi}, \\ v'_{\perp \varphi} &= -\Omega r \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \left(\frac{1}{2} b_r^2 + b_{\theta}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta b_r b_{\theta} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $b_r, b_{\theta}, b_{\varphi}$ — компоненты единичного вектора \mathbf{b} .

Продольная компонента v'_{\parallel} скорости \mathbf{v}'_0 однозначно определяется вторым уравнением системы (19). Нетрудно получить следующее соотношение:

$$\mathbf{v}'_0 \cdot \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0) = 0. \quad (21)$$

Градиент $\nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0)$ направлен по нормали к бессилово́й поверхности $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, поэтому скорость \mathbf{v}'_0 лежит в касательной плоскости, проведенной через точку \mathbf{r}_0 бессилово́й поверхности.

Таким образом, частное решение, описывающее движение частицы с постоянной скоростью, существует. Поперечная скорость дается выражениями (20), а продольная компонента скорости получается из условия (21) и имеет вид

$$v'_{\parallel} = - \frac{\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0)}{\mathbf{b} \cdot \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0)}.$$

Мы видим, что скорость \mathbf{v}'_0 частицы лежит в касательной плоскости, поэтому частица не может покинуть бессилово́ую поверхность и ее траектория целиком лежит на этой поверхности. От точки к точке скорость будет изменяться и определяться тем же выражением $\mathbf{v}'_0 = v'_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}'_{\perp}$, только в качестве \mathbf{E}_0^{eff} и \mathbf{B}_0 каждый раз следует брать напряженности полей в той точке, где в данный момент времени находится частица.

Полное решение уравнения (13) представляется в виде

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{x}'_1, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1, \quad (22)$$

где \mathbf{x}'_0 и \mathbf{v}'_0 — найденное выше адиабатическое решение. На величины \mathbf{x}'_1 и \mathbf{v}'_1 априори не накладывается

никаких специальных ограничений, кроме малости \mathbf{x}'_1 по сравнению с характерными масштабами изменения электромагнитного поля, равными R . В частности, скорость \mathbf{v}'_1 может быть близка к скорости света. Подстановка равенств (22) в (13) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\mathbf{v}'_1}{dt'} &= (\mathbf{x}'_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}_0^{eff} + \\ &+ \mathbf{v}'_0 \times (\mathbf{x}'_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{B} - \mathbf{v}'_1 (\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (23)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} определяются согласно (18), а входящее в них значение координаты \mathbf{x}' — согласно равенству (22). При выводе уравнения (23) мы использовали условие $v'_0 \ll 1$. Слагаемое $\mathbf{v}'_1 (\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{E})$ сохранено, потому что, вообще говоря, скорость \mathbf{v}'_1 может быть порядка единицы, поэтому рассматриваемое слагаемое по порядку величины может сравниваться с \mathbf{E} .

Для того чтобы получить уравнение для описания колебаний частицы, на величину скорости которой не накладываются специальных ограничений, нужно воспользоваться уравнением (23), положив в нем $\mathbf{v}'_1 \parallel \mathbf{B}$, и записать полученное уравнение в проекции на направление магнитного поля:

$$\gamma \frac{dv'_1}{dt'} = -\omega^2 x'_1 - (v'_1)^2 E_{\parallel}. \quad (24)$$

Здесь ω — частота нерелятивистских колебаний, определяемая формулой

$$\omega^2 = - \frac{\mathbf{b} \cdot \nabla (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0)}{B_0}. \quad (25)$$

Сначала рассмотрим нерелятивистский случай колебаний частицы. При $v'_1 \ll 1$ слагаемое $(v'_1)^2 E_{\parallel}$ становится пренебрежимо малым и $\gamma \approx 1$, поэтому уравнение (24) переходит в обычное уравнение нерелятивистских колебаний с частотой ω . Найдем критерий применимости нерелятивистского приближения. Как видно из формулы (25), характерное значение частоты колебаний $\omega \sim \sqrt{\Omega B}$ или, что одно и то же, $\omega \sim \sqrt{B/R_c}$. Для характерных значений радиуса светового цилиндра $R_c \sim 10^{20}$ (для пульсаров с периодом $P \sim 1$ с) и магнитных полей $B \sim 0.01-0.1$ частота нерелятивистских колебаний по порядку величины равна $\omega \sim 10^{-11}-10^{-10}$ (что соответствует частоте $\nu = \omega/2\pi \sim 1-10$ ГГц в размерных единицах). За время периода колебаний частица пройдет расстояние заведомо меньше $1/\nu$, и максимальная амплитуда нерелятивистских колебаний равна $l_{nro} \approx 1/\omega$. Колебательное движение будет нерелятивистским, если $x'_1 \ll l_{nro}$. Для найденных выше частот ω имеем $l_{nro} \sim 10^{10}-10^{11}$ (0.1–1 см в размерных

единицах). Мы видим, что колебания заряженной частицы около бессиловой поверхности с амплитудой, превышающей 1 см, заведомо являются релятивистскими. Это говорит о том, что основной интерес представляет рассмотрение релятивистского случая колебаний, который и реализуется в действительности.

Пусть теперь скорость v'_1 не мала. Тогда мы должны воспользоваться условием $x'_1 \ll R$ и согласно формуле (25) записать продольное электрическое поле $E_{\parallel} = -\omega^2 x'_1$. После учета равенства $\gamma \approx 1/\sqrt{1 - (v'_1)^2}$ получаем уравнение релятивистских колебаний заряженной частицы около бессиловой поверхности:

$$\frac{dv'_1}{dt'} = -\frac{\omega^2}{\gamma^3} x'_1. \quad (26)$$

Данное уравнение имеет первый интеграл

$$C = \gamma + \frac{\omega^2 (x'_1)^2}{2}. \quad (27)$$

Этот первый интеграл равен максимальному лоренц-фактору γ_{max} , которого достигает заряженная частица при пролете через бессиловую поверхность, т. е. $C = \gamma_{max}$, когда $x'_1 = 0$. Первый интеграл C можно выразить и через амплитуду A колебаний: $C = 1 + \omega^2 A^2/2$.

Для удобства дальнейшего исследования выполним следующие замены переменных:

$$\begin{aligned} \sin \phi_0 &= \frac{\kappa}{a}, & \sin \phi &= \frac{\omega}{\sqrt{2C}} \frac{x'_1}{a}, \\ \kappa &= \sqrt{\frac{C-1}{C+1}}, & a &= \sqrt{\frac{C-1}{C}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда, если ввести функцию

$$R(\phi, \kappa) = E(\phi, \kappa) - \cos^2 \phi_0 F(\phi, \kappa),$$

то связь между ϕ и t дается уравнением

$$t = \frac{\sqrt{2C}}{\omega} \frac{R(\phi, \kappa)}{\sin \phi_0}. \quad (29)$$

Здесь $F(\phi, \kappa)$ и $E(\phi, \kappa)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Сразу можно точно определить период колебаний, заметив, что $\phi = 0$ соответствует положению равновесия, а $\phi = \pi/2$ — точке поворота. Расстояние от положения равновесия $x'_1 = 0$ до точки поворота $x'_1 = A$ частица преодолевает за четверть периода, поэтому

$$T = 4 \frac{\sqrt{2C}}{\omega} \frac{\mathbf{R}(\kappa)}{\sin \phi_0},$$

где $\mathbf{R}(\kappa) = \mathbf{E}(\kappa) - \cos^2 \phi_0 \mathbf{K}(\kappa)$, а $\mathbf{K}(\kappa) = F(\pi/2, \kappa)$ и $\mathbf{E}(\kappa) = E(\pi/2, \kappa)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Точное решение уравнения колебаний (26) запишется в виде

$$x'_1 = A \sin Q \left(\frac{\omega t}{\sqrt{2(C+1)}} \right). \quad (30)$$

Здесь мы ввели функцию $Q(z)$, обратную к функции $R(\phi, \kappa)$, так что $z = R(Q(z), \kappa)$ для любого действительного числа $z \in \mathbb{R}$. Это возможно сделать, потому что функция $R(\phi, \kappa)$ строго возрастает и непрерывно дифференцируема относительно переменной ϕ на всей действительной оси \mathbb{R} при $0 \leq \kappa < 1$, причем $R(\mathbb{R}, \kappa) = \mathbb{R}$. При выполнении этих условий обратная функция $Q(z)$ существует и также является однозначной строго возрастающей непрерывно дифференцируемой на оси \mathbb{R} функцией, так что $Q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. При этом ее производная dQ/dz нигде не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, поскольку это верно для частной производной $\partial R(\phi, \kappa)/\partial \phi$ при всех интересующих нас C из интервала $1 \leq C < \infty$ (это соответствует любым физически возможным значениям лоренц-фактора частицы γ_{max}).

Формулой (30) исчерпывается задача о колебаниях заряженной частицы около бессиловой поверхности при условии отсутствия энергетических потерь на излучение. Асимптотики функции $Q(z)$ при значениях κ , близких к нулю и к единице, имеют вид

$$Q(z) = \begin{cases} 2z, & \kappa = 0, \\ \arcsin(z - 2h(z)) + \pi h(z), & \kappa \rightarrow 1, \end{cases} \quad (31)$$

где принимающая целочисленные значения функция $h(z)$ определяется формулой

$$h(z) = \left[\frac{z+1}{2} \right].$$

Здесь посредством $[y]$ обозначена целая часть действительного числа y . В формуле (31) на z не накладывается никаких ограничений. В нерелятивистском случае колебаний мы должны воспользоваться асимптотикой функции $Q(z)$ при $\kappa = 0$. Как видно из формулы (30), при $C \approx 1$ выполняется равенство $z = \omega t/2$. Тогда сразу получается уравнение гармонических колебаний $x'_1 = A \sin(\omega t)$ с частотой ω . В ультрарелятивистском случае $C \gg 1$, что соответствует $\kappa \rightarrow 1$, и подстановка соответствующей асимптотики функции $Q(z)$ (31) в формулу (30) дает

$$x'_1 = A(-1)^{h(z)} [z - 2h(z)], \quad (32)$$

где $z = t/A$. Данное уравнение описывает пилообразные колебания с амплитудой A и периодом $T = 4A$.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

При колебаниях вблизи бессиловой поверхности заряженная частица будет терять энергию за счет излучения. Исследуем зависимость скорости уменьшения энергии частицы от времени. Энергия частицы характеризуется найденным выше первым интегралом C (см. (27)). Основной интерес для нас представляет изменение энергии в ультрарелятивистском случае, когда $C \gg 1$, ведь в нерелятивистском случае $C \approx 1$ и практически не изменяется.

Обратимся к уравнению Дирака–Лоренца (7). Пользуясь тем, что $v'_1 \approx 1$, получаем

$$\frac{dC}{dt} = \frac{2}{3} \alpha \gamma \left[\frac{d^2 \gamma}{dt^2} - \frac{\gamma^3}{\rho^2} \right]. \quad (33)$$

Скорость уменьшения C не будет постоянна на временах порядка периода движения частицы, потому что она зависит от конкретного значения лоренц-фактора γ частицы, величина которого за четверть периода колебаний, очевидно, существенно меняется от 1 в точке поворота $x'_1 = A$ до $C \gg 1$ в точке $x'_1 = 0$. Тем не менее, это не будет являться препятствием для решения задачи об изменении энергии частицы, если само C мало изменяется за время периода колебаний, $dC/dt \ll C/T$. Выполнение этого адиабатического приближения позволяет аккуратно провести усреднение уравнения (33) по периоду колебаний. При этом мы должны усреднить выражения, зависящие от координаты частицы x'_1 , не формально, а используя явную зависимость $x'_1(t)$ (32) координаты колеблющейся частицы от времени, являющуюся точной при $C \gg 1$.

После усреднения дифференциальное уравнение для C преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{4}{9} \alpha \omega^2 C \left[1 + \frac{64}{105} \frac{C^3}{\omega^2 \rho^2} \right]. \quad (34)$$

При получении уравнения (34) мы пренебрегли второй производной энергии C по времени. Строгое обоснование этого действия можно дать лишь апостериори, потому что для этого необходимо знание некоторых фактов о структуре решения $C(t)$. В силу громоздкости данного обоснования, малоинтересного по сравнению с основными результатами, в данной работе мы его не приводим. С учетом отмеченных оговорок точное решение уравнения (34) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \left[(1 + \varepsilon_0^{-3}) e^{3t/\tau_d} - 1 \right]^{-1/3}, \quad (35)$$

где $\varepsilon(t) = C(t)/C_{curv}$ — нормированный первый интеграл, причем $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ — его значение в начальный момент времени $t = 0$. Здесь мы также ввели величину

$$C_{curv} = \frac{105^{1/3}}{4} (\omega \rho)^{2/3} \approx 1.2 (\omega \rho)^{2/3} \quad (36)$$

и постоянную времени затухания $\tau_d = 9/4 \alpha \omega^2$. Физический смысл констант C_{curv} и τ_d несложно понять, исследовав поведение решения (35) при различных начальных значениях ε_0 . Пусть сначала $\varepsilon_0 \ll 1$. Тогда решение уравнения (34) дается формулой

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\tau_d} \quad (C_0 \ll C_{curv}). \quad (37)$$

Мы видим, что случай $C_0 \ll C_{curv}$ соответствует отбрасыванию в уравнении (34) члена в скобке, пропорционального $(C/C_{curv})^3$. Но это значит, что потери энергии заряженной частицей за счет излучения ею изгибных фотонов малы по сравнению с потерями, обусловленными наличием члена, пропорционального $\gamma d^2 \gamma / dt^2$ в уравнении (33). Эти энергетические потери можно связать с тормозными потерями, обусловленными чистым колебательным движением частицы. Они отличны от нуля, только если энергия частицы изменяется с течением времени. В отличие от них, изгибные потери зависят лишь от радиуса кривизны траектории частицы и от ее энергии. Зависимость интенсивности изгибных потерь от производных энергии заряженной частицы по времени, очевидно, отсутствует. Таким образом, при $C_0 \ll C_{curv}$ энергия частицы убывает по экспоненциальному закону с постоянной времени затухания τ_d , а сами потери происходят в основном за счет тормозного излучения.

Пусть теперь $\varepsilon_0 \gg 1$. Очевидно, в этом случае наибольший интерес представляет поведение C на относительно малых временах t , потому что с течением времени C уменьшается и при достаточно больших временах становится меньше C_{curv} , так что затухание приобретает экспоненциальный характер. При малых временах t имеем

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_p} \right), \quad \tau_p = \frac{\tau_d}{\varepsilon_0^3}, \quad (38)$$

$$C_0 \gg C_{curv}, \quad t \ll \tau_p.$$

Мы видим, что если $C_0 \gg C_{curv}$, то при временах, значительно меньших τ_p , происходит линейное

уменьшение энергии частицы. Когда же t сравнивается с τ_p , затухание становится степенным:

$$\varepsilon(t) = \left(3 \frac{t}{\tau_d}\right)^{-1/3}, \quad C_0 \gg C_{curv}, \quad \tau_p \ll t \ll \tau_d.$$

Здесь проясняется смысл времени τ_p как времени, по прошествии которого уменьшение энергии заряженной частицы, первоначально линейное, приобретает степенной характер. При достижении времен порядка τ_d зависимость снова изменяется и становится экспоненциальной:

$$\varepsilon(t) = e^{-t/\tau_d}, \quad C_0 \gg C_{curv}, \quad t \gtrsim \tau_d. \quad (39)$$

При $C_0 \gg C_{curv}$, в отличие от ранее рассмотренного случая (37), энергетические потери частицы обусловлены, главным образом, излучением ею изгибных фотонов. Этот процесс преобладает на временах $t \lesssim \tau_d$ и имеет степенной характер. При $t \gtrsim \tau_d$ затухание энергии частицы становится экспоненциальным, что говорит о переходе частицы в режим, когда основной вклад в потери энергии дает тормозное излучение, связанное с испытываемым частицей ускорением, обусловленным ее колебательным движением. Ясно, что сам переход происходит на временах порядка τ_d . Мы, однако, сделаем определенное уточнение, найдя с помощью формулы (35) время τ_{curv} , при котором $C = C_{curv}$, т. е. $\varepsilon(\tau_{curv}) = 1$, $\tau_{curv} = \ln 2 \tau_d / 3 \approx 0.23 \tau_d$.

Следует отметить, что τ_{curv} совершенно не зависит от начальной энергии частицы ε_0 . Это говорит о том, что за время τ_{curv} заряженная частица, обладая первоначальной энергией $\varepsilon_0 \gg 1$, пусть даже и очень большой, сбросит большую ее часть. После этого частица будет обладать энергией $\varepsilon = 1$ в момент времени $t = \tau_{curv}$, а далее будет происходить обычное экспоненциальное затухание с постоянной времени τ_d . Неудивительно, что при временах $t \gtrsim \tau_d$ зависимость $\varepsilon(t)$ (см. (39)) также не содержит начальной энергии частицы. Это связано с тем, что τ_{curv} примерно в четыре раза меньше τ_d , а за время τ_{curv} значение ε становится равным единице вне зависимости от ε_0 . При больших временах соотношение $\varepsilon(\tau_{curv}) = 1$ начинает играть роль начального условия для дальнейшего экспоненциального затухания, что и показывает выражение (39).

Все результаты, полученные нами в результате усреднения уравнения (33), верны при выполнении условия адиабатического приближения. Это условие, как следует из уравнения (34), дает верхнее ограничение на амплитуду колебаний заряженной частицы:

$$A \ll A_{max} = \left(\frac{945}{128\alpha}\right)^{1/7} \omega^{-6/7} \rho^{2/7} \approx 2.6 \omega^{-6/7} \rho^{2/7}. \quad (40)$$

Условие адиабатического приближения можно интерпретировать также следующим образом. Период колебаний должен быть заведомо меньше характерного времени затухания энергии заряженной частицы. В качестве такового мы должны взять самое быстрое время изменения энергии, которым в нашем случае является время τ_p перехода к степенному затуханию. Действительно, если записать условие $T \ll \tau_p$, то окажется, что вытекающее из него верхнее ограничение на амплитуду колебаний полностью совпадает с условием (40).

Наконец, рассмотрим энергетические потери заряженной частицы в случае нерелятивистских колебаний, который реализуется, когда амплитуда колебаний в конце концов становится меньше l_{nro} . В этом случае зависимость координаты от времени имеет вид

$$x'_1 = A_0 \exp(-t/\tau_{nro}) \cos \omega t,$$

где A_0 — начальная амплитуда, а постоянная времени затухания равна $\tau_{nro} = 3/\alpha\omega^2$. Как и следовало ожидать, по порядку величины она совпадает с постоянной времени затухания τ_d для ультрарелятивистского случая колебаний.

Оценим теперь по порядку величины все введенные нами выше величины, характеризующие зависимость энергии заряженной частицы, колеблющейся вблизи бессиловой поверхности, от времени. Сначала оценим энергию C_{curv} , $C_{curv} \sim (BR^2/R_c)^{1/3}$. Для характерного поверхностного магнитного поля $B \sim 0.01-0.1$, радиуса нейтронной звезды $R \sim 10^{17}$ и радиуса светового цилиндра $R_c \sim 10^{19}-10^{20}$ (эти величины мы будем всюду использовать для оценок далее) значение C_{curv} по порядку величины равно 10^4 . Также можно ввести соответствующую амплитуду

$$A_{curv} = \sqrt{2C_{curv}}/\omega \sim (RR_c/B)^{1/3}$$

для тех же величин магнитного поля, радиуса нейтронной звезды и радиуса светового цилиндра: $A_{curv} \sim 10^{12}-10^{13}$ (в размерных единицах приблизительно 1 м).

Постоянная времени экспоненциального затухания $\tau_d \sim R_c/\alpha B$ характеризуется значением $10^{22}-10^{24}$ (порядка $10-10^3$ с в размерных единицах). Тот же порядок имеет и время τ_{curv} . Отметим, что время τ_d превышает характерные периоды P вращения пульсаров. Тем не менее, если поля становятся сравнимыми с критическими полями

$V \sim 1$, что имеет место для магнитаров, то время τ_d может быть даже меньше периода вращения нейтронной звезды. Заметим, кстати, что отношение τ_d/P зависит только от величины поверхностного магнитного поля B , но не зависит от P .

Порядок величины времени τ_p не фиксирован столь четко, так как он зависит от начальной энергии частицы ε_0 . Однако диапазон, в котором лежит τ_p , определяется без труда. Верхняя граница дается условием $\varepsilon_0 \gg 1$ или, что то же самое, $C_0 \gg C_{curv}$, когда только и имеет смысл вводить понятие времени τ_p . Это значит, что во всяком случае $\tau_p \ll \tau_d$. Нижнюю границу мы определим, взяв максимально возможное значение энергии C_0 . Очевидно, что это значение заведомо меньше максимального достижимого значения лоренц-фактора γ_0 , которым будет обладать частица вдали от бессиловой поверхности. Пользуясь тем, что $\gamma_0 \sim 10^8$, и полагая $\varepsilon_0 \sim \gamma_0/C_{curv} \sim 10^4$, получим, что непременно выполнено неравенство $\tau_p \gg 10^{-12}\tau_d$. Эта оценка снизу сделана с запасом, потому что в реальности колеблющаяся частица не может обладать энергией $C_{curv} \sim 10^8$. Это связано с тем, что если частица и обладает такой энергией вдали от бессиловой поверхности, то после захвата энергия частицы будет несколько меньше, потому что при приближении к бессиловой поверхности частица потеряет часть энергии.

Найдем также порядок величины верхнего ограничения A_{max} на амплитуду колебаний A , когда еще применимо адиабатическое приближение. Воспользовавшись для этого соотношением (40), получим $A_{max} \sim (R^2 R_c^3 / B^3)^{1/7}$. Таким образом, $A_{max} \sim 10^{13} - 10^{14}$ (порядка нескольких десятков метров в размерных единицах). Этой амплитуде отвечает период колебаний $T_{max} \sim A$, что в размерных единицах соответствует периоду $T_{max} \sim 10^{-8} - 10^{-7}$ с и частоте $\nu \sim 10 - 100$ МГц. С помощью амплитуды A_{max} легко находим максимальную энергию колебаний $C_{max} \sim (BR^4/R_c)^{1/7}$, которая имеет порядок $C_{max} \sim (3 \cdot 10^6) - 10^7$. Это позволяет уточнить нижнюю оценку для времени τ_p . Для этого нужно взять в качестве максимального значения энергии ε_0 отношение $C_{max}/C_{curv} \sim 10^2 - 10^3$. Тогда мы получим уже более реальное нижнее ограничение $\tau_p \gg 10^{-9}\tau_d$.

6. ЗАХВАТ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Выше мы определили, что заряженная частица (электрон или позитрон) вдали от бессиловой по-

верхности движется так, что лоренц-фактор частицы определяется только ее координатами и принимает значение γ_0 (см. (10)). Однако вблизи бессиловой поверхности электрическое поле становится малым и время τ_0 подстройки энергии частицы сравнивается с характерным расстоянием (в безразмерных единицах) изменения поля — в рассматриваемом случае с расстоянием до бессиловой поверхности. Это расстояние l_c определяется самосогласованно из уравнения $\tau_0 = l_c$, причем мы должны выразить продольное электрическое поле $E_{||}$, от которого зависит τ_0 , через то же расстояние l_c , отсчитываемое от бессиловой поверхности вдоль магнитной силовой линии, по которой движется частица. Воспользуемся линейным приближением, полагая, что l_c достаточно мало: $E_{||}(l) = -\omega^2 l$. Здесь мы формально ввели величину $\omega^2 = -dE_{||}/dl$, причем производную $dE_{||}/dl$ следует брать в точке пересечения магнитной силовой линии, вдоль которой движется частица, с бессиловой поверхностью. Легко убедиться, что ω является частотой нерелятивистских колебаний частицы и определяется согласно формуле (25). После этого сразу получаем длину захвата l_c :

$$l_c = \left(\frac{3}{512\alpha} \right)^{1/7} \omega^{-6/7} \rho^{2/7} \approx \omega^{-6/7} \rho^{2/7}.$$

Заметим, что длина захвата с точностью до коэффициента совпадает с максимальной амплитудой колебаний A_{max} (40), определяемой условием адиабатического приближения. Это позволяет понять, как происходит переход от ультрарелятивистского квазистационарного движения частицы вдали от бессиловой поверхности, определяемого условием энергетического баланса (9), к колебательному движению частицы около бессиловой поверхности. Для этого можно обойтись качественными соображениями. Длина захвата l_c почти в три раза меньше амплитуды A_{max} . Это дает нам повод полагать, что при захвате частица почти сразу переходит в режим адиабатических колебаний. Чтобы проверить этот факт, оценим амплитуду захвата A_c — максимальное расстояние, на которое отклонится частица от бессиловой поверхности при пролете сквозь нее. При этом подразумевается, что заряженная частица первоначально родилась вдали от бессиловой поверхности, начала свое движение по направлению к ней и пересекла данную поверхность в первый раз. Рассмотрим частицу, еще не пересекающую бессиловую поверхность, на расстоянии l_c от нее. С одной стороны, мы можем оценить лоренц-фактор γ_c частицы в данной точке с помощью формулы (10), используя соотношение $E_{||}(l) = -\omega^2 l$ и положив $l = l_c$, $\gamma_c = 4\omega^2 l_c^2$. С

другой стороны, мы можем вычислить первый интеграл (27), положив $\gamma = \gamma_c$ и $x'_1 = l_c$: $C = 9\omega^2 l_c^2 / 2$. Воспользовавшись соотношением $C = 1 + \omega^2 A^2 / 2$, имеем $A_c = 3l_c \approx 2.9\omega^{-6/7} \rho^{2/7}$. Мы видим, что амплитуда захвата A_c практически совпадает с максимальной амплитудой адиабатических колебаний A_{max} (40). Следовательно, можно считать, что заряженная частица, пролетев сквозь бессиловую поверхность и отклонившись на расстояние A_c , окажется захваченной и далее начнет совершать колебания в адиабатическом режиме, которые мы детально исследовали выше. Для колебаний с начальной амплитудой A_c время τ_p достигает своего нижнего предела, $\tau_p \sim (10^{-9} - 10^{-7}) \tau_d$.

Для полноты изложения найдем частоту нерелятивистских колебаний ω . Не приводя конкретных вычислений, которые довольно громоздки, выпишем окончательный ответ:

$$\omega^2 = -\frac{km}{R^3} \left(\frac{R}{r_{ffs}}\right)^5 4 \cos \theta \cos \theta' \frac{2 \cos^2 \theta' + 3}{3 \cos^2 \theta' + 1}, \quad (41)$$

где r_{ffs} определяется уравнением бессиловой поверхности (4). Приведем также выражение для радиуса кривизны силовых линий:

$$\rho = \frac{r(1 + 3 \cos^2 \theta')^{3/2}}{3 \sin \theta' (1 + \cos^2 \theta')}. \quad (42)$$

Если требуется вычислить ρ в некоторой точке на бессиловой поверхности, то в этой формуле, естественно, следует положить $r = r_{ffs}$.

Во всем предыдущем изложении мы, как правило, совершенно не акцентировали внимание на том, какая именно частица — электрон или позитрон — колеблется вблизи бессиловой поверхности. Все выражения, полученные выше, предполагали наличие положительного заряда у колеблющейся частицы. Обратимся к формуле (41) для частоты нерелятивистских колебаний. В тех случаях, когда $\omega^2 > 0$, происходят колебания позитрона с частотой ω . Если же формально получается, что $\omega^2 < 0$, то происходят колебания электрона. Частота нерелятивистских колебаний электрона в этом случае, очевидно, равна $\sqrt{-\omega^2}$. Можно сказать, что знак заряда колеблющейся частицы совпадает со знаком ω^2 .

Как следует из формулы (41), частота нерелятивистских колебаний обращается в нуль, только если $\theta = \pi/2$ или $\theta' = \pi/2$. Первое равенство соответствует экватору нейтронной звезды, второе — магнитному экватору. Экватор и магнитный экватор разделяют бессиловую поверхность на области, в каждой из которых могут происходить колебания частиц лишь одного знака. При переходе через линию,

образованную неизолрованными положениями равновесия, знак заряда частиц изменяется. Одновременное выполнение равенств $\theta = \pi/2$ и $\theta' = \pi/2$ определяет прямую, в каждой точке которой также $\omega = 0$. Однако на открытых листах бессиловой поверхности, которые и разделяет данная прямая, знаки колеблющихся зарядов совпадают. Если выполняется неравенство $\theta_m < \pi/2$, то позитроны скапливаются на сводчатых частях бессиловой поверхности, а электроны — на ее открытых листах. Знаки зарядов частиц показаны на рис. 1. Обратим внимание, что ω^2 зависит от волнового числа k , а значит, и от его знака. Если $\theta_m > \pi/2$, то необходимо формально рассмотреть случай, когда угол между осями наклонного ротатора равен $\pi - \theta_m$, но при этом изменить знак угловой скорости Ω . Следовательно, в этом случае знаки зарядов изменятся на противоположные и на сводчатых частях будут скапливаться электроны, а на открытых листах — позитроны.

7. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ НА БЕССИЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Мы видели, что движение частицы, захваченной бессиловой поверхностью, представляет собой сумму дрейфового движения некоторого ведущего центра по бессиловой поверхности и колебательно-го движения частицы около этого ведущего центра. Найдем точные траектории ведущего центра во вращающейся системе отсчета.

Полагая $\mathbf{v}'_0 = v'_0 \mathbf{b} + \mathbf{v}'_\perp$, легко убедиться, что $\mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{E}^{eff} = 0$. Мы видим, что вектор скорости \mathbf{v}'_0 ведущего центра всегда ортогонален эффективному электрическому полю \mathbf{E}^{eff} . Поставим задачу о нахождении уравнения такой поверхности, в каждой точке которой вектор \mathbf{E}^{eff} направлен по нормали к данной поверхности. Если бы существовала такая функция ξ , что $\mathbf{E}^{eff} = \nabla \xi$, то совокупность поверхностей, которым ортогонально векторное поле \mathbf{E}^{eff} , задавалась бы поверхностями уровня функции ξ . Непосредственно интегрируя уравнение $\mathbf{E}^{eff} = \nabla \xi$ и учитывая соотношения (14), можно убедиться, что такая функция существует:

$$\xi = kR^2 \frac{m}{r^3} \left[(\cos \theta_m - \cos \theta \cos \theta') \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} \cos \theta_m \right]. \quad (43)$$

Потенциал ξ определен с точностью до произвольной действительной постоянной, которую мы для краткости не пишем. Уравнение поверхностей, которым ортогонально векторное поле \mathbf{E}^{eff} , имеет вид

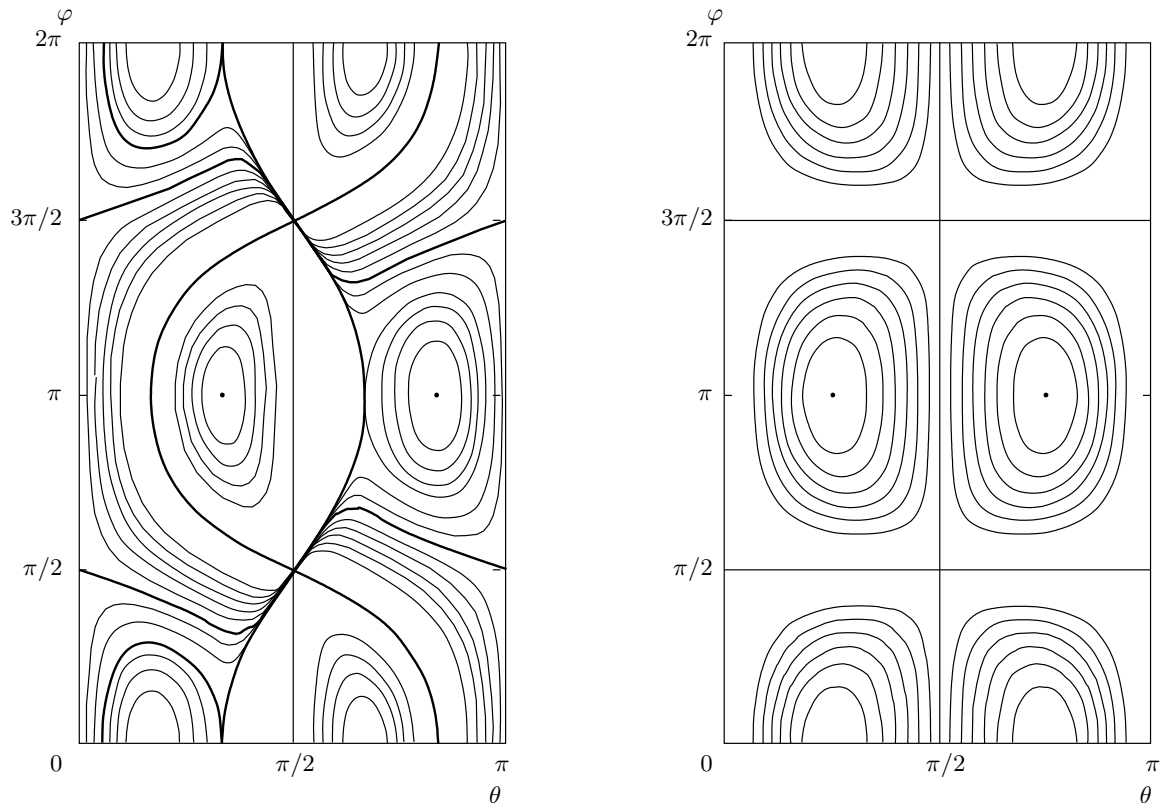


Рис. 2. Фазовый портрет траекторий заряженных частиц на бессиловой поверхности в координатах θ, φ во вращающейся системе отсчета для случаев наклонного ротатора с углом наклона $\pi/3$ (слева) и ортогонального ротатора (справа)

$\xi = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} = \text{const}$ — произвольное действительное число.

Задача нахождения траекторий ведущего центра сводится к отысканию пересечения бессиловой поверхности (4) и совокупности эквипотенциальных поверхностей $\xi = \mathcal{C}$. Введем функцию

$$\zeta(\theta, \varphi) = \xi(r_{ffs}(\theta, \varphi), \theta, \varphi) \frac{R}{km},$$

где $r_{ffs}(\theta, \varphi)$ определяется уравнением бессиловой поверхности (4), а потенциал ξ — формулой (43). Тогда искомые траектории в неявном виде задаются уравнением $\zeta(\theta, \varphi) = \mathcal{C}$, где, как и ранее, \mathcal{C} является произвольным действительным числом, при котором, конечно, уравнение имеет решения.

На рис. 2 показан фазовый портрет траекторий в угловых координатах θ, φ на поверхности во вращающейся системе отсчета для случаев наклонного и ортогонального ротатора. Здесь и далее мы полагаем, что азимутальный угол, соответствующий магнитной оси, равен нулю. Мы видим, что не существует протяженных траекторий, имеющих своим нача-

лом и концом точки на магнитном экваторе. Это отличается от результата Джексона [16]. В его работе утверждалось, что часть траекторий на бессиловой поверхности незаряженного ортогонального ротатора оканчивается на магнитном экваторе, вследствие чего существует возвратное дрейфовое движение на поверхность звезды, выметающее захваченные частицы. Это могло бы являться препятствием для образования бессиловой магнитосферы. Но Джексон полагал, что скорость частицы в некоторой точке бессиловой поверхности равна проекции дрейфовой скорости на касательную плоскость в данной точке. Выше мы выяснили, что это не так.

Трехмерное изображение траекторий ведущего центра на бессиловой поверхности для случая наклонного ротатора дано на рис. 3. Введем для дальнейшего удобства потенциалы изолированных положений равновесия

$$\zeta_{\pm} = \mp \frac{1}{3} \frac{(1 \mp \cos \theta_m)^{3/2}}{(3 \pm \cos \theta_m)^{1/2}}$$

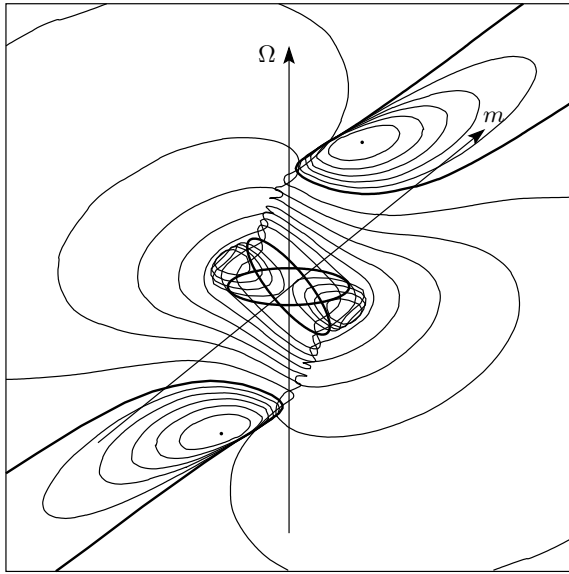


Рис. 3. Траектории заряженных частиц на бессиловой поверхности во вращающейся системе отсчета для случая наклонного ротатора с углом наклона $\pi/3$. Жирными линиями показаны экватор, магнитный экватор и сепаратрисы

и поверхностный потенциал $\zeta_R = (2/3) \cos \theta_m$. На куполообразных частях бессиловой поверхности траектории имеют вид замкнутых циклов, окружающих положение равновесия. Самому положению равновесия соответствует потенциал ζ_- , а совокупности циклов — интервал изменения потенциала $\zeta_R < \zeta < \zeta_-$. Положения равновесия на экваторе и магнитном экваторе характеризуются поверхностным потенциалом ζ_R . На каждом из двух открытых листов в фазовом портрете можно выделить две различные области. Первая область аналогична области на сводах и также состоит из замкнутых циклов, окружающих положение равновесия. Положению равновесия соответствует потенциал ζ_+ , а совокупности циклов — интервал изменения потенциала $\zeta_+ < \zeta < 0$. Однако сами циклы с приближением ζ к нулю все более вытягиваются, стремясь уйти на бесконечность. Сепаратрисе соответствует потенциал $\zeta = 0$. Сепаратриса представляет собой разомкнутую траекторию, уходящую на бесконечность, но при этом охватывающую положение равновесия. Вторая область на каждом из открытых листов образована совокупностью траекторий, которым соответствует потенциал $0 < \zeta < \zeta_R$. Ни одна из этих траекторий не лежит целиком на одном листе. Как видно на рис. 3, все траектории переходят с одного листа на другой, пересекая прямую $\theta = \theta' = \pi/2$

и замыкаясь вокруг нейтронной звезды. При стремлении ζ к ζ_R эти траектории все ближе подходят к магнитному экватору.

Направление траекторий нетрудно определить с помощью формулы (20). В полупространстве $\cos \theta > 0$ на сводчатой части бессиловой поверхности и на открытом листе внутри сепаратрисы $\zeta = 0$ движение по траекториям происходит по часовой стрелке, если смотреть извне (подразумевается, что луч зрения, пересекающий бессиловую поверхность, направлен вдоль радиуса к центру звезды). В полупространстве $\cos \theta < 0$ на сводчатой части бессиловой поверхности и на открытом листе внутри сепаратрисы движение по траекториям происходит против часовой стрелки, если смотреть извне. На открытых листах вне сепаратрис (для траекторий, пересекающих прямую $\theta = \theta' = \pi/2$) движение идет из полупространства $\sin \varphi < 0$ в полупространство $\sin \varphi > 0$, когда $\cos \theta > 0$, и из полупространства $\sin \varphi > 0$ в полупространство $\sin \varphi < 0$, когда $\cos \theta < 0$. Все сказанное выше относится к случаю $\theta_m < \pi/2$. Если угол наклона ротатора $\chi > \pi/2$, то нужно рассмотреть ротатор с углом наклона $\theta_m = \pi - \chi$, его полярную ось, от которой отсчитываются все полярные углы, направить противоположно вектору Ω и в формуле (20) сменить знак Ω . На рис. 3 это соответствует смене направления вектора Ω . Очевидно, направление всех траекторий изменится на противоположное.

Итак, все траектории ведущего центра на бессиловой поверхности являются замкнутыми и лежащими в конечной области, кроме сепаратрисы $\zeta = 0$. При движении заряженной частицы вдоль траектории изменяется электромагнитное поле, а следовательно, и параметры колебаний частицы. Однако ведущий центр движется с дрейфовыми скоростями порядка 10^{-4} , а частота колебаний частицы даже в случае ультррелятивистских колебаний превышает 10 МГц, поэтому за период колебаний частица преодолевает расстояние порядка нескольких миллиметров, что значительно меньше R . Вследствие этого, изменение параметров колебаний частицы при движении по бессиловой поверхности происходит адиабатически. Важно отметить, что знак ω^2 не изменяется при движении вдоль траектории (см. обсуждение после формулы (42)). Значит, если частица попала на бессиловую поверхность, то покинуть ее она уже не может, потому что, во-первых, траектория ведущего центра замкнута и, во-вторых, неустойчивость колебаний частицы вдоль магнитного поля не развивается благодаря постоянству знака ω^2 .

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Динамику движения электронов и позитронов во внутренней вакуумной магнитосфере нейтронной звезды можно представить следующим образом. Заряженная частица, рожденная вдали от бессиловой поверхности, за время $\tau_{rel} \sim 10^{-17}-10^{-15}$ с достигает релятивистской скорости и за время $\tau_{st} \sim 10^{-9}$ с переходит в квазистационарный режим движения, преодолев расстояние порядка 10–100 см. Тогда лоренц-фактор частицы $\gamma_0 \sim 10^7-10^8$ (10) полностью определяется условием баланса между мощностью сил ускоряющего электрического поля, имеющего величину $E_{\parallel}/B_c \sim 10^{-6}-10^{-4}$ (здесь мы восстанавливаем размерность величин), и интенсивностью изгибного излучения. При этом частица движется практически вдоль силовой линии магнитного поля, потому что скорость электрического дрейфа $v_e/c \sim 10^{-4}$, а скорость центробежного дрейфа еще меньше. При движении вдоль траектории радиус кривизны ρ и продольное электрическое поле E_{\parallel} медленно изменяются, приводя к подстройке лоренц-фактора частицы γ_0 . Время подстройки достаточно мало, $\tau_0 \sim 10^{-10}-10^{-7}$ с, и за это время частица преодолевает расстояние порядка 1 см–100 м, его верхний предел достигается вблизи бессиловой поверхности. Данное расстояние значительно меньше радиуса звезды, поэтому лоренц-фактор частицы фактически определяется координатами частицы. При приближении заряженной частицы к бессиловой поверхности условие квазистационарности нарушается, и частица пролетает сквозь бессиловую поверхность, имея в точке перехода лоренц-фактор порядка $C_{max} \sim 10^6-10^7$. После пересечения бессиловой поверхности частица отклоняется на расстояние $A_c \sim A_{max} \sim 10-100$ м (40). Далее частица начинает совершать адиабатические ультрарелятивистские колебания с частотой $\nu \sim 10-100$ МГц. За счет потерь энергии на излучение колебания затухают и их частота растет. Энергия колебаний убывает сначала линейно, а через время $\tau_p \sim 10^{-8}-10^{-4}$ с (см. (38)) начинается затухание по степенному закону за счет изгибных потерь. На временах порядка $\tau_{curv} \sim \tau_d \sim 10-1000$ с затухание приобретает экспоненциальный характер с постоянной времени τ_d , причем основной вклад в энергетические потери начинает давать тормозное излучение. При смене режима затухания частица обладает лоренц-фактором $C_{curv} \sim 10^4$ (36), а амплитуда колебаний $A_{curv} \sim 1$ м. Далее ультрарелятивистские колебания частицы продолжают экспоненциально затухать и при достижении амплитуды $l_{nro} \sim 1$ см ко-

лебания становятся нерелятивистскими и гармоническими, а их частота равна $\nu \sim 1-10$ ГГц. Одновременно с колебательным движением частица совершает регулярное движение по бессиловой поверхности (см. рис. 3), причем траектория движения ведущего центра во вращающейся системе отсчета, как правило, замкнута, а его скорость порядка дрейфовой скорости.

Оценим скорость накопления электрон-позитронной плазмы на бессиловой поверхности. До этого мы рассматривали ситуацию, когда заряженные частицы — электроны и позитроны — двигались в заданном электромагнитном поле, играя роль пробных зарядов. Так можно считать лишь до тех пор, пока плотность заряда в магнитосфере значительно меньше плотности Гольдрайха–Джулиана $\rho_{GJ} = -\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}/2\pi c$. Но скорость рождения пар в магнитосфере постоянна, поэтому с течением времени частицы все более скапливаются на бессиловой поверхности. Следовательно, за некоторое конечное время в вакуумной магнитосфере появятся области вблизи бессиловой поверхности, в которых плотность заряда будет уже сравнима с ρ_{GJ} . В конечном итоге вся магнитосфера заполнится плазмой.

Исследуем начальную стадию процесса перестройки магнитосферы из вакуумного состояния в состояние, заполненное плазмой. Выберем произвольную точку \mathbf{r}_0 бессиловой поверхности и рассмотрим некоторую малую площадку на этой поверхности, содержащую данную точку. Размеры площадки предполагаются малыми по сравнению с R , поэтому сама площадка является практически плоской. С течением времени на данной площадке накапливаются заряженные частицы, образуя симметричный зарядовый слой. Мы будем рассматривать накопление плазмы только при достаточно малых временах, когда толщина формирующегося зарядового слоя значительно меньше R . В этом случае плотность плазмы заметно отлична от нуля лишь вблизи бессиловой поверхности, поэтому глобальной перестройки магнитосферы еще не происходит. В силу этого формулы (1) и (2) задают внешнее электромагнитное поле, в котором находится зарядовый слой. Найдем собственное электрическое поле слоя на некотором расстоянии z от бессиловой поверхности:

$$E_l = 4\pi\alpha \int_0^z \rho_e(z') dz', \quad (44)$$

где $\rho_e(z')$ — объемная плотность заряда на расстоянии z' от бессиловой поверхности, а расстояние z

не превышает h — расстояния от бессиловой поверхности до границы слоя. Здесь существенно, что зарядовый слой симметричен, т. е. $\rho_e(-z') = \rho_e(z')$. Для обеспечения равновесного состояния данного слоя необходимо, чтобы каждая заряженная частица, принадлежащая слою, не испытывала ускорения вдоль магнитных силовых линий. Иначе говоря, внешнее продольное электрическое поле должно полностью компенсироваться проекцией собственного электрического поля слоя (44) на направление магнитного поля. Если ввести угол ψ между нормалью к бессиловой поверхности и направлением магнитного поля, то

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{B |\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})|}.$$

Тогда для произвольного l выполняется соотношение

$$4\pi\alpha \cos \psi \int_0^{l \cos \psi} \rho_e(z') dz' = \omega^2 l. \quad (45)$$

Дифференцируя обе части этого равенства по l , получаем, что $\rho_e = \omega^2/4\pi\alpha \cos^2 \psi$. Таким образом, плотность заряда ρ_e в слое вовсе не зависит от расстояния от бессиловой поверхности. Напомним, что мы измеряем плотность заряда в единицах e/λ^3 . Она определяется только квадратом частоты нерелятивистских колебаний ω^2 и углом ψ , значения которых берутся в точке \mathbf{r}_0 , вокруг которой мы рассматриваем малую площадку бессиловой поверхности. Знак плотности заряда ρ_e совпадает со знаком ω^2 , что согласуется с нашими выводами после формулы (42). Вообще говоря, ρ_e не совпадает с ρ_{GJ} . Это проистекает из того факта, что если бы плотность заряда в слое всюду равнялась плотности Гольдрайха–Джулиана, то все частицы в слое испытывали бы полную коротацию, а значит, были бы неподвижны во вращающейся системе отсчета. В слое равно нулю лишь продольное электрическое поле, но его поперечная компонента отлична от нуля, потому что собственное электрическое поле слоя не обязательно ведет к обнулению поперечной компоненты внешнего поля. Например, в точке \mathbf{r}_0 ввиду равенства нулю собственного электрического поля зарядового слоя полное электрическое поле имеет только поперечную компоненту, которая вызывает дрейф заряженных частиц по бессиловой поверхности вдоль изображенных на рис. 3 траекторий. Значит, формирующийся зарядовый слой составлен из дифференциально текущих токов на бессиловой поверхности.

Итак, с течением времени вблизи бессиловой поверхности формируется зарядовый слой, толщина h которого является функцией точки \mathbf{r}_0 и времени t , прошедшего с начала заполнения магнитосферы плазмой. Важно отметить, что в величину плотности заряда ρ_e в каждой точке бессиловой поверхности вносят вклад только заряды того же знака, что и сама плотность ρ_e . Благодаря этому на начальной стадии заполнения заряды в слое полностью разделены в соответствии с выводами после формулы (42). Следовательно, плотность числа частиц n_e по модулю равна плотности плазмы: $n_e = |\rho_e|$. В каждой точке бессиловой поверхности введем плотность тока частиц $j = dN/dS dt$, в безразмерных единицах совпадающую с модулем плотности электрического тока. Тогда уравнение для нахождения толщины зарядового слоя имеет вид $\partial h/\partial t = j/n_e$. Оно может быть использовано для оценки времени заполнения всей вакуумной магнитосферы электрон-позитронной плазмой. Когда толщина зарядового слоя h станет сравнимой с величиной характерного размера внутренней магнитосферы, т. е. радиуса звезды R , произойдет существенная перестройка всей магнитосферы. Тогда время заполнения τ_f равно $\tau_f = Rn_{GJ}/j$. Здесь мы учли, что плотность плазмы в слое приблизительно равна плотности Гольдрайха–Джулиана, $n_e \approx n_{GJ}$. Величина плотности потока частиц, попадающих на бессиловую поверхность, определяется механизмом рождения пар в магнитосфере. Гамма-кванты, производящие электрон-позитронные пары в магнитном поле магнитосферы, могут попадать в магнитосферу извне, как космический фон, а также производиться из мягких тепловых фотонов, излучаемых поверхностью звезды, комптоновски рассеянных энергичными частицами. Основной вопрос, который здесь возникает, состоит в том, сколько пар может произвести один фотон с энергией, большей 1 МэВ. Поскольку рождающиеся электроны и позитроны очень быстро разгоняются до энергий γ_0 (10), происходит цепное размножение пар. Количество рожденных пар на один первичный фотон экспоненциально зависит от характерного размера внутренней магнитосферы, $\exp \mu$, где $\mu = R/\ell$. Здесь ℓ — суммарная длина пробегов энергичной частицы относительно генерации изгибного фотона и его пробега относительно рождения пары. Из исследования процессов стационарного рождения плазмы в полярной магнитосфере известно [17], что длина пробега ℓ составляет величину порядка 100 метров. Это означает, что коэффициент размножения может достигать гигантских величин порядка $\exp 100 \approx 10^{43}$. Однако ввиду

наличия экспоненциального фактора этот вопрос в случае вакуумной магнитосферы требует отдельного тщательного исследования, что выходит за рамки данной статьи. Большой коэффициент размножения пар может компенсировать малость потока фотонов космического фона. Согласно наблюдениям [18, 19] диффузный фон j_{ph} галактических фотонов, имеющих энергию, большую 1 МэВ, составляет величину порядка $10^{-3} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Ввиду этого отношение $j_{ph}/cn_{GJ} \approx 10^{-25}$ очень мало, но оно не препятствует быстрому заполнению электрон-позитронной плазмой магнитосферы пульсара при достаточно большом коэффициенте размножения пар.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-02-00749-а) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-1738.2008.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Sturrock, *Astrophys. J.* **164**, 529 (1971).
2. M. A. Ruderman and P. G. Sutherland, *Astrophys. J.* **196**, 51 (1975).
3. Н. П. Клепиков, *ЖЭТФ* **26**, 19 (1954).
4. T. Erber, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 626 (1966).
5. A. V. Gurevich and Ya. N. Istomin, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **377**, 1663 (2007).
6. M. Kramer, A. G. Lyne, J. T. O'Brien et al., *Science* **312**, 549 (2006).
7. M. Kramer, *40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars, and More*, ed. by C. G. Bassa, Z. Wang, A. Cumming, and V. M. Caspi, Melville, New York, AIP Conf. Proc. **983**, 11 (2008).
8. N. Wang, R. N. Manchester, and S. Johnston, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **377**, 1383 (2007).
9. M. A. McLaughlin, A. G. Lyne, D. R. Lorimer et al., *Nature* **439**, 817 (2006).
10. W. W. Zhu and R. X. Xu, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **365**, L16 (2006).
11. B. Zhang, J. Gil, and J. Dyks, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **374**, 1103 (2007).
12. X.-D. Li, *Astrophys. J.* **646**, L139 (2006).
13. D. Lomiashvili, G. Machabeli, and I. Malov, arXiv:0709.2019.
14. R. Ouyed, D. Leahy, B. Niebergal et al., arXiv:0802.3929.
15. A. J. Deutsch, *Ann. Astrophys.* **18**, 1 (1955).
16. E. A. Jackson, *Astrophys. J.* **222**, 675 (1978).
17. А. В. Гуревич, Я. Н. Истомин, *ЖЭТФ* **89**, 3 (1985).
18. A. W. Strong, R. Diehl, H. Halloin et al., *Astron. Astrophys.* **444**, 495 (2005).
19. P. Sizun, P. Cassé, and S. Schanne, *Phys. Rev. D* **74**, 063514 (2006).