

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕРЦАЮЩЕЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ

*В. В. Учайкин\**, *Р. Т. Сибатов\*\**

*Ульяновский государственный университет  
432970, Ульяновск, Россия*

Поступила в редакцию 21 марта 2009 г.

Мерцание одиночных молекул и нанокристаллов рассматривается как бинарный случайный процесс восстановления с двумя состояниями: *on* (излучающее) и *off* (не излучающее). Длительности пребывания в *on*- или *off*-состояниях могут быть распределены по степенному или по экспоненциальному законам. С помощью дробного обобщения экспоненциальной функции дано единое описание процесса мерцания для обоих типов распределений. На основе бинарной модели получено уравнение для плотности распределения  $p(t_{on}|t)$  суммарного времени свечения за время наблюдения  $t$ . Для случая степенного мерцания оно содержит производные дробных порядков  $\alpha$  и  $\beta$ , совпадающих с показателями степенных *on*-, *off*-распределений. В пределе  $\alpha = \beta = 1$  распределения переходят в экспоненциальные, а дробно-дифференциальное уравнение — в уравнение с производными целых порядков. Решения этих уравнений выражены через дробно-устойчивые распределения. Пуассоновское преобразование плотности  $p(t_{on}|t)$  приводит к распределению числа испущенных фотонов и определяет статистику счета. Показано, что временная зависимость параметра Манделя в асимптотике больших времен является степенной:  $M(t) \propto t^\gamma$ . Определена зависимость  $\gamma(\alpha, \beta)$  на плоскости  $(\alpha, \beta)$ . При анализе относительных флуктуаций времени свечения было выяснено, что они убывают только в случаях  $\alpha = \beta = 1$  и  $\alpha < \beta$ . При всех остальных соотношениях  $\alpha$  и  $\beta$  относительные флуктуации в асимптотике возрастают по степенному закону либо стремятся к постоянной величине. Аналитические расчеты хорошо согласуются с результатами моделирования методом Монте-Карло.

PACS: 78.67.Bf

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Мерцание (прерывистый характер) флуоресценции наблюдается для одиночных молекул и нанокристаллов (квантовых точек): *on*-состояния, в которых наблюдается флуоресценция, чередуются с *off*-состояниями, в которых излучение отсутствует [1]. Эксперименты показывают, что длительности пребывания в каждом из этих состояний  $T_{on}, T_{off}$  являются случайными величинами, распределения вероятностей которых могут характеризоваться как показательным законом

$$\Psi(t) \equiv P(T > t) = \exp(-ct), \quad t > 0, \quad (1)$$

(преимущественно для одиночных молекул), так и асимптотически степенным

$$\Psi(t) \propto t^{-\nu}, \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \nu < 1 \quad (2)$$

(для нанокристаллов). Если мерцание одиночных молекул находит правдоподобное объяснение в рамках трехуровневой модели (см. [1]), то единой точки зрения на физический механизм мерцания нанокристаллов еще нет. Существует несколько моделей для квантовых точек [2–11]. Эфрос и Розен [4] объяснили мерцание флуоресценции на основе модели оже-ионизации квантовых точек с последующей нейтрализацией. Однако эта модель приводит к экспоненциальному распределению *on*- и *off*-интервалов по длительности. В качестве возможных механизмов, приводящих к степенному распределению интервалов, предлагаются термически активируемая ионизация [5], модель туннелирования через флуктуирующие барьеры [5], резонансное туннелирование между ядром и заряженными локализованными состояниями [6] и др. (подробнее см. [1, 8, 10]).

\*E-mail: uchaikin@sv.uven.ru

\*\*E-mail: ren\_sib@bk.ru

Ситуация осложняется тем, что показатели  $\nu$  практически не изменяются при варьировании условий эксперимента: температуры, интенсивности излучения лазера, размеров квантовых точек. Для уяснения физики явления необходимо привлекать более тонкие статистические характеристики наблюдаемого процесса, чем просто показатели  $\nu$ .

В силу стохастического характера мерцания экспериментально полученная информация с неизбежностью должна быть интерпретирована на основе модели случайного процесса. В качестве исходной модели в работе [2] предложено простейшее обобщение процесса восстановления с заданными распределениями независимых времен пребывания в каждом из двух состояний. Известно, что случайные величины, распределенные по закону (2), имеют бесконечные средние значения. Это приводит, в частности, к тому, что флуктуации счета фотонов мерцающей флуоресценции нанокристаллов не убывают со временем. Кроме того, параметры, используемые для описания статистических свойств процесса, могут применяться в случае экспоненциальных оп-, off-распределений и быть неверными для случая степенных распределений. Например, при определении коэффициента корреляции между последовательными длительностями оп- и off-состояний авторы работы [3] пользовались формулой

$$R = \frac{\sum_j (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_k (Y_k - \bar{Y})^2}},$$

которую применять нельзя, поскольку статистика, определяемая этой формулой, из-за расходимости математических ожиданий вообще не является оценкой коэффициента корреляции.

В настоящей работе сделан шаг к унификации статистического описания степенного и экспоненциального характеров мерцания на основе дробного обобщения экспоненциальной функции

$$\Psi(t) = E_\nu(-c^\nu t^\nu),$$

где

$$E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n + 1)}$$

— функция Миттаг-Леффлера [12]. Выбор дробных экспонент для моделирования длительностей интервалов обусловлен тем, что при  $\nu < 1$  они имеют «тяжелые» степенные хвосты,

$$E_\nu(-c^\nu t^\nu) \sim \frac{(ct)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad 0 < \nu < 1, \quad t \gg c^{-1},$$

а при  $\nu = 1$  превращаются в обычные экспоненты:

$$E_1(-ct) = \exp(-ct).$$

В результате такого выбора интегральные уравнения теории восстановления превращаются в дифференциальные уравнения дробного порядка, решения которых выражаются через дробно-устойчивые распределения. При  $\nu = 1$  дробно-дифференциальные уравнения переходят в уравнения первого порядка, описывающие экспоненциальное мерцание.

Исследование флуктуаций числа счета фотонов в случае  $\alpha = \beta < 1$  [2] показало, что параметр Манделя возрастает пропорционально времени, т. е. флуктуации не убывают со временем. Сохраняется ли это свойство процесса при  $\alpha \neq \beta$ ? Существует ли в этом случае предельное распределение числа счета фотонов и какой вид оно имеет? Новая техника расчета, основанная на дробно-дифференциальном исчислении, позволяет ответить на эти вопросы.

## 2. ДРОБНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Стандартный пуассоновский процесс можно определить как процесс восстановления, для которого случайные времена между событиями восстановления имеют экспоненциальное распределение:

$$\psi(t) \equiv -\frac{d\Psi(t)}{dt} = ce^{-ct}.$$

В работе [13] введен дробный пуассоновский процесс порядка  $\nu \in (0, 1]$  интенсивности  $c^\nu$  как процесс восстановления с плотностью распределения времени ожидания  $\psi_\nu(t)$ , характеризуемой образом Лапласа

$$\hat{\psi}_\nu(s) = L\{\psi_\nu(t)\}(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} \psi_\nu(t) dt = \frac{c^\nu}{c^\nu + s^\nu}.$$

Будучи переписано в виде

$$s^\nu \hat{\psi}_\nu(s) + c^\nu \hat{\psi}_\nu(s) = c^\nu,$$

это выражение представляет собой преобразованное по Лапласу дифференциальное уравнение дробного порядка  $\nu \in (0, 1]$ :

$${}_0D_t^\nu \psi_\nu(t) + c^\nu \psi_\nu(t) = c^\nu \delta(t). \quad (3)$$

При  $\nu = 1$  оно превращается в обыкновенное уравнение первого порядка для экспоненциальной плотности  $\psi_1(t) = ce^{-ct}$  и может быть записано в виде однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -c\psi_1(t) \quad (4)$$

с начальным условием  $\psi_1(0) = \mu$ . Формула (2) показывает, что скорость изменения функции  $\psi_1$  в данный момент зависит только от ее значения в этот момент времени; никакой информации о предыстории процесса, описываемого этой функцией, при этом не требуется. Чтобы получить аналогичное соотношение из дробно-дифференциального уравнения (1), подействуем на него оператором  ${}_0D_t^{1-\nu}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_\nu}{dt} &= c^\nu {}_0D_t^{1-\nu} [\psi_\nu(t) + \delta(t)] = \\ &= \frac{c^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \psi_\nu(\tau) d\tau + t^{\nu-1} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Отличие нового соотношения (5) от предыдущего (4) в том, что оно связывает скорость изменения функции  $\psi_\nu$  в момент  $t$  со всей ее предысторией, сложившейся в интервале  $(0, t)$ : имеет место феномен памяти, о котором много пишут в последнее время.

Решение уравнения (3) можно представить в двух формах [14]. Первая имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_\nu(t) &= -\frac{d}{dt} P(T > t), \\ P(T > t) &= E_\nu(-c^\nu t^\nu), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n + 1)}$$

— функция Миттаг-Леффлера, вторая —

$$\psi_\nu(t) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-x} \chi_\nu \left( \frac{ct}{x} \right) dx, \quad (7)$$

где

$$\chi_\nu(\xi) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi[\xi^\nu + \xi^{-\nu} + 2\cos(\nu\pi)]}.$$

В работе [15], решение (6) выражено через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$\psi_\nu(t) = c^\nu t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-c^\nu t^\nu),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

В частном случае имеем

$$\psi_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{c}{\pi t}} - ce^{ct} \operatorname{Erfc}(\sqrt{ct}),$$

где

$$\operatorname{Erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-z^2} dz$$

— дополнительная функция ошибок.

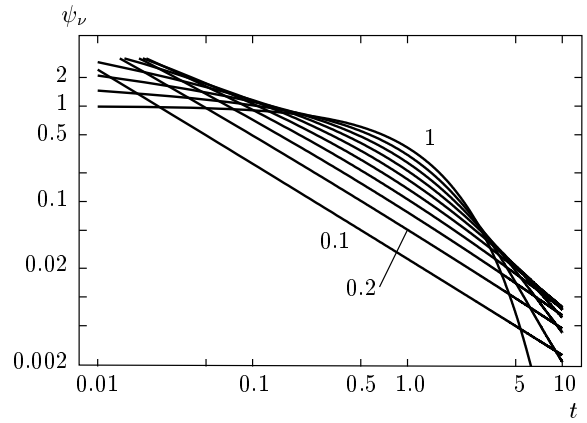


Рис. 1. Плотности распределения времен ожидания для дробного пуассоновского процесса

Вторая форма (7) легко позволяет найти асимптотические выражения для малых и больших времен:

$$\psi_\nu(t) \sim \frac{c^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}, \quad t \rightarrow 0, \quad (8)$$

$$\psi_\nu(t) \sim \frac{\nu c^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} t^{-\nu-1}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Форма (7) также удобна для численного расчета плотностей  $\psi_\nu(t)$  (см. рис. 1).

Таким образом, при  $\nu = 1$  зависимость плотности  $\psi_\nu(t)$  превращается в обычную экспоненту, и дробный пуассоновский процесс — в стандартный пуассоновский процесс. При  $\nu \neq 1$  дробная экспонента характеризуется степенными асимптотиками в области больших и малых значений аргумента.

Далее будем считать, что времена ожидания  $T_{on}$  и  $T_{off}$  распределены соответственно с плотностями

$$\psi_{on}(t) = c_{on}^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c_{on}^\alpha t^\alpha), \quad (10)$$

$$\psi_{off}(t) = c_{off}^\beta t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-c_{off}^\beta t^\beta),$$

Трансформанты Лапласа этих функций имеют вид

$$\hat{\psi}_{on}(s) = \frac{1}{1 + (s/c_{on})^\alpha}, \quad (11)$$

$$\hat{\psi}_{off}(s) = \frac{1}{1 + (s/c_{off})^\beta}, \quad \alpha, \beta \leq 1.$$

### 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССА

Характерной особенностью процессов восстановления, в отличие от марковских процессов, является способность отображать память случайного процесса, которая теряется лишь в отдельные случайные моменты времени — моменты восстановления [16]. В рассматриваемой задаче с двумя состояниями такие моменты можно связать с переходами из одного состояния в другое. Наблюдение за процессом начнем с одного из таких моментов; с вероятностью  $\varepsilon_{on}$  это будет переход  $off \rightarrow on$ , с вероятностью  $\varepsilon_{off} = 1 - \varepsilon_{on}$  — переход  $on \rightarrow off$ . Суммарное время излучения квантовой точки в заданном интервале  $(0, t)$  является случайной величиной; плотность ее распределения обозначим через  $p_{on}(t_{on}|t)$ . Пусть  $f_{on \rightarrow off}(t_{on}, t) dt_{on} dt$  — среднее число переходов из on-состояния в off-состояние в прямоугольнике  $(t_{on}, t_{on} + dt_{on}) \times (t, t + dt)$ , а  $f_{off \rightarrow on}(t_{on}, t) dt_{on} dt$  — число переходов из off-состояния в on-состояние в прямоугольнике  $(t_{on}, t_{on} + dt_{on}) \times (t, t + dt)$ . Распределение времени излучения выражается через плотности переходов соотношением

$$p_{on}(t_{on}|t) = \int_0^{t_{on}} f_{off \rightarrow on}(t_{on} - t', t - t') \Psi_{on}(t') dt' + \int_0^t f_{on \rightarrow off}(t_{on}, t - t') \Psi_{off}(t') dt', \quad (12)$$

где

$$\Psi_{on,off}(t) = \int_t^\infty \psi_{on,off}(t') dt'$$

— вероятность того, что случайное время ожидания в указанном состоянии превысит значение  $t$ . Сама же плотности переходов связаны системой интегральных уравнений

$$f_{on \rightarrow off}(t_{on}, t) = \int_0^{t_{on}} f_{off \rightarrow on}(t_{on} - t', t - t') \times \psi_{on}(t') dt' + \varepsilon_{off} \delta(t_{on}) \delta(t), \quad (13)$$

$$f_{off \rightarrow on}(t_{on}, t) = \int_0^t f_{on \rightarrow off}(t_{on}, t - t') \psi_{off}(t') dt' + \varepsilon_{on} \delta(t_{on}) \delta(t), \quad (14)$$

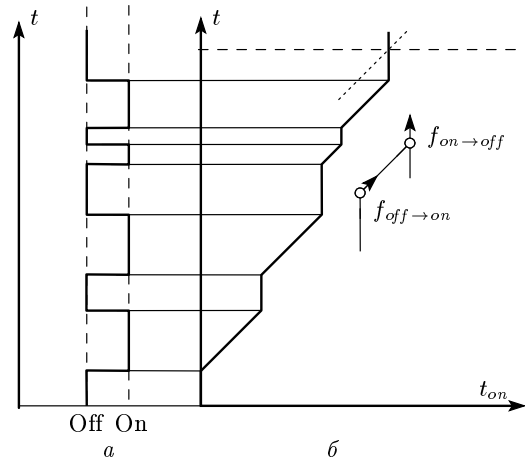


Рис. 2. Схематическое изображение траекторий процесса

легко выводимых из рассмотрения случайных траекторий процесса в переменных  $t_{on}, t$  (рис. 2).

Применив двойное преобразование Лапласа (по переменным  $t$  и  $t_{on}$ )

$$\tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \int_0^\infty dt_{on} \int_0^\infty dt \exp(-s_{on} t_{on} - st) p_{on}(t_{on}|t)$$

к системе интегральных уравнений (12)–(14), получаем

$$\tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \tilde{f}_{off \rightarrow on}(s_{on}, s) \hat{\Psi}_{on}(s + s_{on}) + \tilde{f}_{on \rightarrow off}(s_{on}, s) \hat{\Psi}_{off}(s),$$

$$\tilde{f}_{on \rightarrow off}(s_{on}, s) = \tilde{f}_{off \rightarrow on}(s_{on}, s) \hat{\psi}_{on}(s + s_{on}) + \varepsilon_{off},$$

$$\tilde{f}_{off \rightarrow on}(s_{on}, s) = \tilde{f}_{on \rightarrow off}(s_{on}, s) \hat{\psi}_{off}(s) + \varepsilon_{on}.$$

Таким образом, двойное (т. е. по двум переменным) преобразование Лапласа позволило свести систему интегральных уравнений к системе трех простых алгебраических уравнений. Разрешая эту систему, приходим к трансформантам для частот переходов

$$\tilde{f}_{on \rightarrow off}(s_{on}, s) = \frac{\varepsilon_{on} \hat{\psi}_{on}(s + s_{on}) + \varepsilon_{off}}{1 - \hat{\psi}_{on}(s + s_{on}) \hat{\psi}_{off}(s)},$$

$$\tilde{f}_{off \rightarrow on}(s_{on}, s) = \frac{\varepsilon_{off} \hat{\psi}_{off}(s) + \varepsilon_{on}}{1 - \hat{\psi}_{on}(s + s_{on}) \hat{\psi}_{off}(s)},$$

и выражению для трансформанты искомой плотности:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) &= \frac{\varepsilon_{off}\widehat{\psi}_{off}(s) + \varepsilon_{on}}{1 - \widehat{\psi}_{on}(s + s_{on})\widehat{\psi}_{off}(s)} \times \\ &\times \frac{1 - \widehat{\psi}_{on}(s + s_{on})}{s + s_{on}} + \frac{\varepsilon_{on}\widehat{\psi}_{on}(s + s_{on}) + \varepsilon_{off}}{1 - \widehat{\psi}_{on}(s + s_{on})\widehat{\psi}_{off}(s)} \times \\ &\times \frac{1 - \widehat{\psi}_{off}(s)}{s}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее выражение с точностью до обозначений совпадает с результатом, полученным в работе [2] для характеристической функции плотности распределения интенсивности макроскопической флуоресценции. В работе [2] эта трансформанта используется для асимптотического анализа парамет-

ра Манделя. Мы, обратив трансформанту с помощью дробно-устойчивых распределений, получим в явном виде выражение для самой асимптотической плотности распределения  $p_{on}(t_{on}|t)$ . Кроме этого покажем, что эта плотность удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению.

#### 4. ПЕРЕХОД К ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Подставляя трансформанты (11) в выражение (15), имеем

$$\tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \frac{c_{on}^{-\alpha}(s + s_{on})^{\alpha-1} + c_{off}^{-\beta}s^{\beta-1} + c_{on}^{-\alpha}c_{off}^{-\beta}s^{\beta}(s + s_{on})^{\alpha} [\varepsilon_{on}(s + s_{on})^{-1} + \varepsilon_{off}s^{-1}]}{c_{on}^{-\alpha}(s + s_{on})^{\alpha} + c_{off}^{-\beta}s^{\beta} + c_{on}^{-\alpha}c_{off}^{-\beta}(s + s_{on})^{\alpha}s^{\beta}}. \quad (16)$$

При  $\alpha = 1$  и  $\beta = 1$  получаем результат для случая экспоненциальных распределений он- и офф-интервалов:

$$\tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \frac{1 + C + c_{on}^{-1}(s + \varepsilon_{off}s_{on})}{s + C(s + s_{on}) + c_{on}^{-1}(s + s_{on})s}.$$

Перепишем соотношение (16) в виде

$$\begin{aligned} s^{\beta} \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) + C(s + s_{on})^{\alpha} \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) + \\ + c_{on}^{-\alpha}(s + s_{on})^{\alpha}s^{\beta} \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \\ = C(s + s_{on})^{\alpha-1} + s^{\beta-1} + c_{on}^{-\alpha}s^{\beta}(s + s_{on})^{\alpha} \times \\ \times [\varepsilon_{on}(s + s_{on})^{-1} + \varepsilon_{off}s^{-1}]. \end{aligned}$$

Здесь  $C = c_{off}^{\beta}/c_{on}^{\alpha}$ . Осуществляя двойное обратное преобразование Лапласа и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} ds \int_{\Gamma'} ds_{on} \times \\ \times \exp(st + s_{on}t_{on})(s + s_{on})^{\alpha} \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = \frac{1}{2\pi i} \times \\ \times \int_{\Gamma} ds \exp(st) [\exp(-st_{on}) {}_0D_{t_{on}}^{\alpha} \exp(st_{on}) \widehat{p}_{on}(t_{on}|s)] = \\ = T_t^{-t_{on}} {}_0D_{t_{on}}^{\alpha} T_t^{t_{on}} p_{on}(t_{on}|t), \end{aligned}$$

где  $T_t^a$  — оператор сдвига по координате  $t$  на величину  $a$ :

$$T_t^a p_{on}(t_{on}|t) = p_{on}(t_{on}|t + a),$$

приходим к дробно-дифференциальному уравнению

для плотности распределения суммарной длительности он-интервалов:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\beta} p_{on}(t_{on}|t) + C T_t^{-t_{on}} {}_0D_{t_{on}}^{\alpha} T_t^{t_{on}} p_{on}(t_{on}|t) + \\ + c_{on}^{-\alpha} {}_0D_t^{\beta} T_t^{-t_{on}} {}_0D_{t_{on}}^{\alpha} T_t^{t_{on}} p_{on}(t_{on}|t) = \\ = C\delta(t - t_{on}) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \delta(t_{on}) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} - \\ - \frac{c_{on}^{-\alpha}t_{on}^{-\alpha}(t - t_{on})^{-\beta}}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} \left( \frac{\alpha\varepsilon_{off}}{t_{on}} + \frac{\beta\varepsilon_{on}}{t - t_{on}} \right). \end{aligned}$$

Здесь

$${}_0D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}} d\tau$$

— дробная производная Римана–Лиувилля (см., например, [12, 17]). Впервые дробные производные в теории мерцающей флуоресценции применялись в работах [18, 19].

Предположим, что процесс мерцания изучается с момента перехода из off-состояния в он-состояние. Тогда  $\varepsilon_{on} = 1$  и  $\varepsilon_{off} = 0$ . Из тауберовой теоремы (см., например, [20]) следует, что выражение (16) в асимптотике больших времен ( $t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}$ ) имеет вид

$$\tilde{p}_{on}(s_{on}|s) \sim \frac{C(s + s_{on})^{\alpha-1} + s^{\beta-1}}{C(s + s_{on})^{\alpha} + s^{\beta}}. \quad (17)$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$[C(s + s_{on})^{\alpha} + s^{\beta}] \tilde{p}_{on}(s_{on}|s) = C(s + s_{on})^{\alpha-1} + s^{\beta-1}.$$

Осуществляя двойное обратное преобразование Лапласа, приходим к асимптотическому дробно-дифференциальному уравнению для плотности распределения суммарной длительности оп-интервалов:

$${}_0D_t^\beta p_{on}(t_{on}|t) + C T_t^{-t_{on}} {}_0D_{t_{on}}^\alpha T_t^{t_{on}} p_{on}(t_{on}|t) = C \delta(t - t_{on}) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \delta(t_{on}) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}. \quad (18)$$

**5. РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ДРОБНО-УСТОЙЧИВЫЕ ПЛОТНОСТИ**

Известно (см., например, [21]), что выражение

$$\frac{s^{\beta-1}}{Cs_{on}^\alpha + s^\beta}$$

является двойным преобразованием Лапласа одно-сторонней дробно-устойчивой плотности:

$$L_s^{-1} L_{s_{on}}^{-1} \left\{ \frac{s^{\beta-1}}{Cs_{on}^\alpha + s^\beta} \right\} = (Ct^\beta)^{-1/\alpha} q^{(\alpha,\beta)} \left( t_{on}(Ct^\beta)^{-1/\alpha} \right),$$

где  $q^{(\alpha,\beta)}(t)$  — дробно-устойчивая плотность, выражаемая через односторонние устойчивые плотности  $g^{(\alpha)}(t)$  и  $g^{(\beta)}(t)$  [21, 22]:

$$q^{(\alpha,\beta)}(t) = \int_0^\infty d\tau g^{(\beta)}(\tau) g^{(\alpha)}(t\tau^{\beta/\alpha}) \tau^{\beta/\alpha}.$$

Находя оригинал трансформанты (17)

$$p(t_{on}|t) = [C(t - t_{on})^\beta]^{-1/\alpha} \times q^{(\alpha,\beta)} \left( t_{on}[C(t - t_{on})^\beta]^{-1/\alpha} \right) + (C^{-1}t_{on}^\alpha)^{-1/\beta} q^{(\beta,\alpha)} \left( (t - t_{on})(C^{-1}t_{on}^\alpha)^{-1/\beta} \right) \quad (19)$$

и учитывая соотношение для функций дробно-устойчивых распределений

$$Q^{(\alpha,\beta)} \left( \xi(C\tau^\beta)^{-1/\alpha} \right) = 1 - Q^{(\beta,\alpha)} \left( \tau(C^{-1}\xi^\alpha)^{-1/\beta} \right),$$

запишем решение в виде

$$p_{on}(t_{on}|t) = \left[ 1 + \frac{\alpha(t - t_{on})}{\beta t_{on}} \right] (C^{-1}t_{on}^\alpha)^{-1/\beta} \times q^{(\beta,\alpha)} \left( (t - t_{on})(C^{-1}t_{on}^\alpha)^{-1/\beta} \right). \quad (20)$$

В частном случае  $\alpha = \beta$ , применяя свойство П.8 дробно-устойчивых плотностей (см. Приложение),

получаем плотность распределения Ламперти [23], которое используется для описания неэргодических процессов в работе [24]:

$$p(t_{on}|t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \times \frac{t t_{on}^{\alpha-1} (t - t_{on})^{\alpha-1}}{C(t - t_{on})^{2\alpha} + C^{-1}t_{on}^{2\alpha} + 2t_{on}^\alpha (t - t_{on})^\alpha \cos(\pi\alpha)}.$$

Распределение числа излученных фотонов определяется формулой

$$P(n, t) = \int_0^t dt_{on} P(n, t_{on}) p_{on}(t_{on}|t). \quad (21)$$

В модели, рассматриваемой в работе [2],  $P(n, t_{on}) \propto t_{on}$ .

В случае, если случайные оп-интервалы имеют конечное математическое ожидание, распределение (20) примет вид ( $\alpha \rightarrow 1, g^{(\alpha)}(t) \rightarrow \delta(t - 1)$ )

$$p_{on}(t_{on}|t) = \left( 1 + \frac{t - t_{on}}{\beta t_{on}} \right) \times (C^{-1}t_{on})^{-1/\beta} g^{(\beta)} \left( (t - t_{on})(C^{-1}t_{on})^{-1/\beta} \right). \quad (22)$$

Если  $\beta \rightarrow 1$ , то

$$p_{on}(t_{on}|t) = \left[ 1 + \frac{t_{on}}{\alpha(t - t_{on})} \right] C^{-1/\alpha} (t - t_{on})^{-1/\alpha} \times g^{(\alpha)} \left( C^{-1/\alpha} t_{on} (t - t_{on})^{-1/\alpha} \right). \quad (23)$$

Аналитические решения хорошо согласуются с результатами численного моделирования процесса методом Монте-Карло (см. рис. 3). Процесс при моделировании начинался с перехода из оп- в off-состояние или с перехода из off- в оп-состояние с равными вероятностями 1/2. Затем поочередно моделировались методом Монте-Карло случайные оп- и off-интервалы согласно алгоритму, предложенному в работе [14]. Этот алгоритм позволяет генерировать случайные величины, распределенные с плотностью в виде дробной экспоненты. Одна траектория с разверткой по времени реализовывалась до тех пор, пока сумма оп- и off-интервалов не превышала времени наблюдения. Для каждой траектории вычислялось суммарное время свечения. После моделирования ансамбля траекторий бинарного процесса восстановления рассчитывалось распределение суммарного времени свечения.

Напомним, что формула (17) является асимптотической (т. е. предполагается, что  $t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}$ ). Если ассоциировать процесс со случайными блужда-

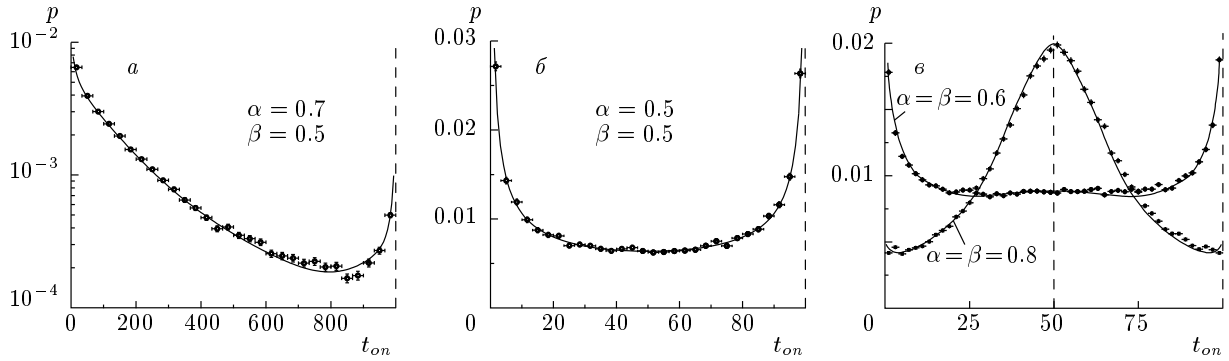


Рис. 3. Сравнение с результатами моделирования методом Монте-Карло.  $C = 1, t = 1000$  (а), 100 (б, в)

ниями (рис. 2), то интерпретировать распределение можно на основании представления о конкуренции двух режимов: диффузионного и баллистического [21, 25]. При  $\alpha < \beta$  имеет место субдиффузионный режим. В случае, если  $\alpha < \beta$ , наблюдается супердиффузионное поведение, преобладает баллистический режим. Когда  $\alpha = \beta < 1$ , плотность распределения суммарной длительности оп-интервалов имеет особенности вблизи обеих границ (рис. 4).

**6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СЧЕТА ФОТОНОВ**

Предположим, что излучение мерцающей квантовой точки, находящейся в оп-состоянии (оп-излучение), подчиняется пуассоновской статистике. Распределение числа фотонов, испущенных наночастицей за время  $t$ , в этом случае имеет вид

$$P(n, t) = \int_0^t \frac{(\mu t_{on})^n}{n!} \exp(-\mu t_{on}) p_{on}(t_{on}|t) dt_{on}.$$

Последнее выражение представляет собой преобразование Пуассона плотности распределения оп-времени. Параметр Манделя в этом случае равен

$$M = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(n, t) - \left( \sum_{n=1}^{\infty} n P(n, t) \right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n P(n, t)} - 1 = \mu \frac{\langle t_{on}^2 \rangle - \langle t_{on} \rangle^2}{\langle t_{on} \rangle}. \quad (24)$$

Воспользуемся выражением (17) для трансформанты Лапласа плотности распределения  $p(t_{on}|t)$ , чтобы найти первый и второй моменты суммарного времени излучения за время наблюдения  $t$ . По известным формулам первый и второй моменты случайной величины определяются через первую и вторую производные образа Лапласа. Пусть  $m_1(t) = \langle t_{on} \rangle$  и  $m_2(t) = \langle t_{on}^2 \rangle$ ,

$$\hat{m}_1(s) = - \left. \frac{\partial p(s_{on}|s)}{\partial s_{on}} \right|_{s_{on}=0},$$

$$\hat{m}_2(s) = \left. \frac{\partial^2 p(s_{on}|s)}{\partial s_{on}^2} \right|_{s_{on}=0}.$$

Подставляя в последние формулы выражение (17), получаем соотношения для трансформант Лапласа первого и второго моментов:

$$\hat{m}_1(s) = \frac{C^2 s^{2\alpha-1} + C s^{\alpha+\beta-1}}{s(C s^\alpha + s^\beta)^2},$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{2C(1-\alpha)s^{\alpha+2\beta-1} + 2C^3 s^{3\alpha-1} + 2(2-\alpha)C^2 s^{2\alpha+\beta-1}}{s^2(C s^\alpha + s^\beta)^3},$$

которые будем использовать для анализа асимптотического поведения параметра Манделя при больших временах. Согласно тауберовой теореме (подробнее см. [20]), поведение трансформанты Лапласа при малых значениях переменной Лапласа  $s$  определяет поведение функции-оригинала при больших временах  $t$ .

В случае, когда  $\alpha = \beta$ , имеем

$$\hat{m}_1(s) = \frac{C}{C+1} s^{-2}, \quad \hat{m}_2(s) = \frac{2(1-\alpha+C)C}{(C+1)^2} s^{-3},$$

$$m_1(t) = \langle t_{on} \rangle = \frac{C}{C+1} t,$$

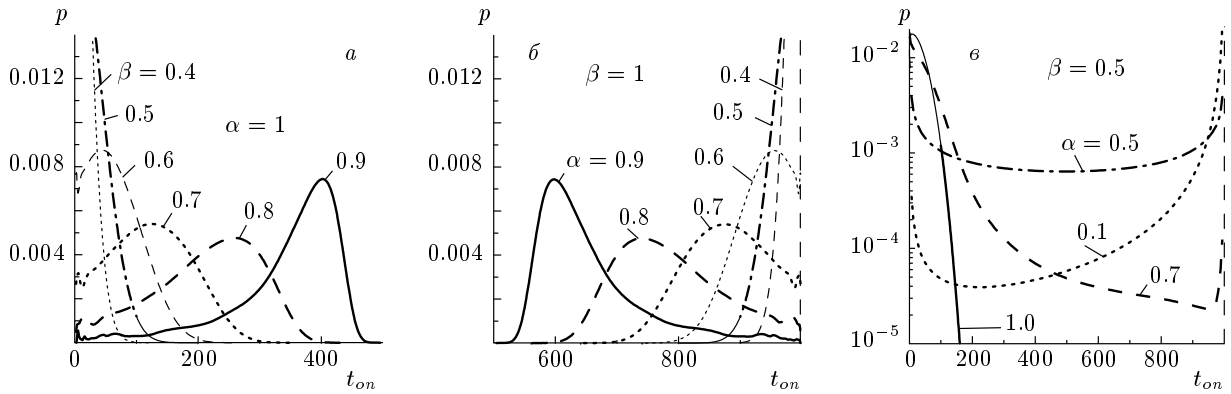


Рис. 4. Асимптотические распределения суммарной длительности свечения за время  $t = 1000$  при  $C = 1$ : а — on-интервалы распределены по экспоненциальному закону, off-интервалы — по степенному с показателем  $\beta < 1$ , б — off-интервалы распределены по экспоненциальному закону, on-интервалы — по степенному с  $\alpha < 1$ , в — off-интервалы распределены по степенному закону с  $\beta = 0.5$ , on-интервалы — с  $\alpha < 1$

$$m_2(t) = \langle t_{on}^2 \rangle = \frac{C(1-\alpha) + C^2}{(C+1)^2} t^2,$$

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1+C} \mu t. \tag{25}$$

При  $\beta < \alpha \neq 1$

$$M(t) \sim \frac{2(1-\alpha)}{2+\beta-\alpha} \mu t, \quad t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}, \tag{26}$$

при  $\beta < \alpha = 1$

$$M(t) \sim C \left[ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \right] \mu t^\beta, \tag{27}$$

$$t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}.$$

Для  $\beta > \alpha$

$$M(t) \sim \frac{2C^{-1}(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta+3)} \mu t^{\alpha-\beta+1}, \quad t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}. \tag{28}$$

В работе [2] параметр Манделя анализировался для случая  $\alpha = \beta$ . Авторы [2] получили, что для  $\alpha = \beta < 1$  параметр Манделя возрастает пропорционально времени. Как видно из формул (25)–(28), асимптотическая зависимость параметра Манделя от времени является степенной:

$$M(t) \propto t^\gamma, \quad t \gg c_{on}^{-1}, c_{off}^{-1}. \tag{29}$$

Показатель  $\gamma$  является функцией  $\alpha$  и  $\beta$ . Значения, которые может принимать  $\gamma$ , представлены на диаграмме (рис. 5). Как видно из диаграммы, во всех случаях, кроме одного ( $\alpha = \beta = 1$ ), параметр Манделя увеличивается со временем. В случаях  $\beta > \alpha$

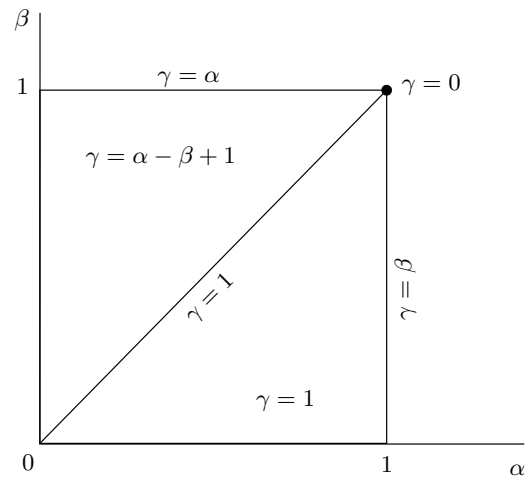


Рис. 5. Показатель  $\gamma$  для различных значений  $\alpha$  и  $\beta$

и  $\alpha = 1$  эта зависимость является сублинейной, в случае  $\beta \leq \alpha \neq 1$  параметр Манделя в асимптотике больших времен растет пропорционально времени. Степенная зависимость (29) подтверждается численными расчетами в рамках моделирования методом Монте-Карло (рис. 6).

Для анализа флуктуаций часто используется параметр, представляющий собой отношение дисперсии к квадрату математического ожидания. В нашем случае для времени свечения имеем



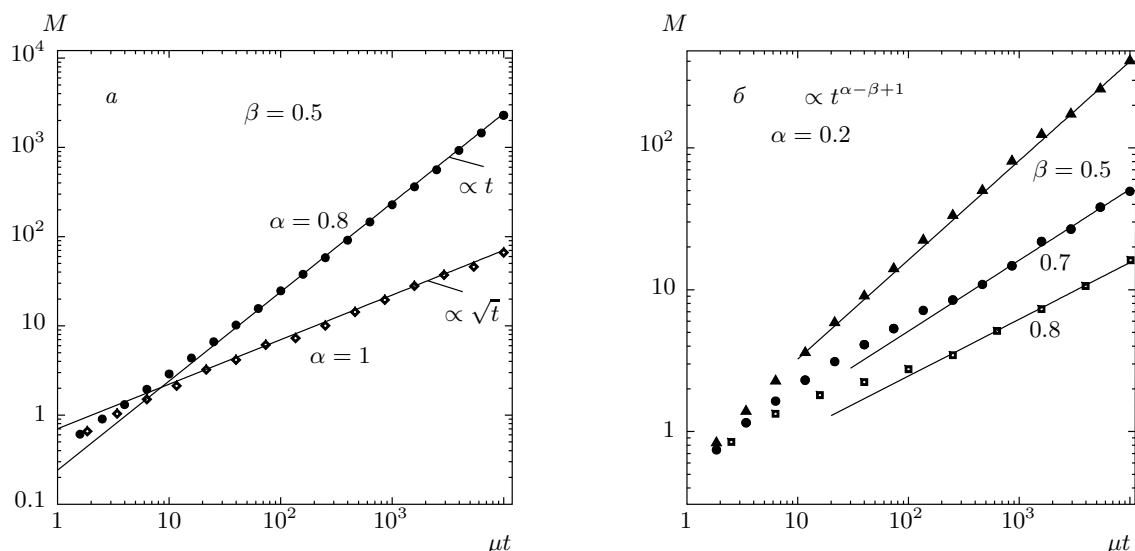


Рис. 6. Зависимости параметра Мандела от времени в случаях  $\alpha > \beta$  (а) и  $\alpha < \beta$  (б). Линии — степенные зависимости (29), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло

$$\delta_{on} = \frac{\langle t_{on}^2 \rangle - \langle t_{on} \rangle^2}{\langle t_{on} \rangle^2} \propto \begin{cases} t^{\alpha-\beta}, & \alpha < 1, \beta \leq 1, \\ t^0, & \beta < \alpha = 1, \\ t^{-1}, & \alpha = \beta = 1. \end{cases} \quad t \gg c_{on}^{-1}.$$

Из последней формулы видно, что если  $\beta < \alpha < 1$ , то  $\delta_{on}$  увеличивается со временем, в случае  $\alpha = \beta < 1$  и в случае  $\beta < \alpha = 1$  относительные флуктуации стремятся к постоянной величине. При  $\alpha = \beta = 1$  параметр  $\delta_{on}$  уменьшается обратно пропорционально времени. Наиболее интересная область, как нам представляется,  $\beta > \alpha$ . При таком соотношении относительные флуктуации времени свечения убывают, хотя и медленнее, чем в случае  $\alpha = \beta = 1$ .

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги этой работы, отметим, что именно введение дробного обобщения экспоненты позволило получить единое описание процесса мерцания как для экспоненциальных, так и для степенных распределений on- и off-интервалов. На основе этой модели выведено уравнение для  $p(t_{on}|t)$ . Для случая степенного мерцания оно содержит производные дробных порядков  $\alpha$  и  $\beta$ , совпадающих с показателями степенных on-, и off-распределений. При стремлении  $\alpha$  и  $\beta$  к единице распределения переходят в экспоненциальные, а дробно-дифференциальное

уравнение переходит в уравнение с производными целых порядков. Рассчитаны плотности распределения  $p(t_{on}|t)$  эффективного времени свечения в аналитическом виде и выражены через дробно-устойчивые распределения. Плотность  $p(t_{on}|t)$  связана пуассоновским преобразованием с распределением числа испущенных фотонов и определяет статистику счета.

В отличие от работы [2], в которой рассматривается случай  $\alpha = \beta$ , в нашей работе получены результаты для более общего случая  $\alpha \neq \beta$ . Вычислен параметр Мандела и распределение суммарного времени свечения. Параметр Мандела указывает на то, что статистика излучения мерцающих квантовых точек является суперпуассоновской. При анализе относительных флуктуаций времени свечения было выяснено, что они убывают только в случаях  $\alpha = \beta = 1$  и  $\alpha < \beta$ . При всех остальных соотношениях  $\alpha$  и  $\beta$  относительные флуктуации в асимптотике переходят на степенной режим возрастания, либо стремятся к постоянной величине.

Авторы благодарны РФФИ (грант №07-01-00517) и фонду «Династия» за финансовую поддержку. Один из авторов (В. В. У.) благодарен фонду Deutsche Forschungsgemeinschaft (SA 861/8-1) за финансовую поддержку и администрации Института прикладного анализа и стохастики им. К. Вейерштрасса за гостеприимство и хорошие условия работы.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Дробно-устойчивые распределения**

**П.1.** Пусть  $S(\alpha_1, \theta_1)$  и  $S(\alpha_2, \theta_2)$  взаимно независимые, устойчивые случайные величины, представленные в форме С (подробнее см. [22]). Случайная величина

$$Y(\alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \mu) \stackrel{d}{=} S(\alpha_1, \theta_1) / [S(\alpha_2, \theta_2)]^{(\mu)},$$

где

$$S^{(\mu)} = |S|^\mu \operatorname{sign} S, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

и соответствующая плотность

$$\begin{aligned} p_Y(x; \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \mu) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(xy^{(\mu)}; \alpha_1, \theta_1) g(y; \alpha_2, \theta_2) |y|^\mu dy \end{aligned}$$

названы дробно-устойчивыми.

Дробно-устойчивые случайные величины встречаются в литературе нередко. В частности, величина

$$Y(2, \alpha, 0, 1, -1/2) = S(2, 0) \sqrt{S(\alpha, 1)}, \quad \alpha < 1,$$

называется субгауссовой, в более общем случае,

$$Y(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1, -1/\alpha_1) = S(\alpha_1, 0) [S(\alpha_2, 1)]^{1/\alpha_1},$$

$$0 < \alpha_1 \leq 2, \quad \alpha_2 < 1,$$

говорят о субустойчивой случайной величине. Известны следующие соотношения:

$$Y(2, 2, 0, 0, 1) \stackrel{d}{=} S(1, 0),$$

$$Y(\alpha_1, \alpha/\alpha_1, 0, 1, -1/\alpha_1) \stackrel{d}{=} S(\alpha, 0),$$

$$Y(1, 1, 1, 0, 1) \stackrel{d}{=} S(1, 0).$$

$$Y(\alpha, 1, \theta, 1, \mu) \stackrel{d}{=} S(\alpha, 0).$$

Распределение случайной величины

$$Z(\alpha, \omega, \theta) = S(\alpha, \theta) / [S(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}, \quad \omega < 1,$$

полученное Котульским [26] в качестве асимптотического решения проблемы Монтролла–Вейсса,

$$\begin{aligned} q(x; \alpha, \omega, \theta) &\equiv p(x; \alpha, \omega, \theta, 1, \omega/\alpha) = \\ &= \int_0^\infty g(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) g(y; \omega, 1) y^{\omega/\alpha} dy, \end{aligned}$$

тоже принадлежит к классу дробно-устойчивых.

Термин «дробно-устойчивые распределения» был введен в работе [27], их свойства были изучены в работах [28–30]. Перечислим основные из них.

**П.2.** Если  $0 < \alpha < 1$  и  $\theta = 1$ , то плотность  $q(x; \alpha, \omega, 1)$  принимает неотрицательные значения только на положительной полуоси.

**П.3.** Имеет место следующее свойство инверсии:

$$q(-x; \alpha, \omega, \theta) = q(x; \alpha, \omega, -\theta).$$

Если  $\theta = 0$ , то

$$q(-x; \alpha, \omega, 0) = q(x; \alpha, \omega, 0),$$

т.е. дробно-устойчивая плотность с  $\theta = 0$  симметрична по отношению к началу координат.

**П.4.** Согласно свойству инверсии, достаточно рассмотреть класс дробно-устойчивых плотностей для всех значений  $\alpha, \omega$  и  $\theta$  только на положительной полуоси. Это позволяет ввести одностороннее преобразование Меллина

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^\infty x^s q(x; \alpha, \omega, \theta) dx, \quad -1 < \operatorname{Re} s < \alpha,$$

которое, ввиду специфических особенностей дробно-устойчивых случайных величин, является намного более удобным инструментом для анализа, чем традиционная характеристическая функция. Применяя это преобразование и используя выражение для преобразования Меллина устойчивой плотности

$$\bar{g}(s; \alpha, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = \frac{1+\theta}{2},$$

получаем

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1+s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)\Gamma(1+\omega s/\alpha)}.$$

**П.5.** Дробно-устойчивое распределение имеет моменты всех порядков, только если  $\alpha = 2$ . В этом случае область значений  $\theta$  вырождается в  $\theta = 0$ , распределение становится симметричным, нечетные моменты исчезают, а четные моменты

$$\begin{aligned} m^{(2n)}(2, \omega, 0) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} q(x; 2, \omega, 0) dx = \\ &= \frac{4^n n! \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n\omega+1)}. \end{aligned}$$

При  $1 < \alpha < 2$  второй и высшие моменты бесконечны, при  $\alpha \leq 1$  первый момент бесконечен.

**П.6.** В начале координат мы имеем

$$q(0; \alpha, \omega, \theta) = \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha) \Gamma(1 - 1/\alpha)}{\pi \Gamma(1 - \omega/\alpha)} \cos \frac{\theta\pi}{2}$$

и

$$Q(0; \alpha, \omega, \theta) \equiv \int_{-\infty}^0 q(0; \alpha, \omega, \theta) = \frac{1 - \theta}{2}.$$

Отметим, что функция  $q(x; \alpha, \omega, \theta)$  имеет интегрируемую особенность в начале координат при  $\alpha \leq 1$  и  $\omega < 1$ .

**П.7.** При  $\omega \rightarrow 1$  плотности  $q(x; \alpha, \omega, \theta)$  переходят в устойчивые —  $g(x; \alpha, \theta)$ .

**П.8.** Если  $\alpha = \omega$ , то дробно-устойчивая плотность представляется в элементарном виде:

$$q(x; \alpha, \alpha, 1) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi x (x^\alpha + x^{-\alpha} + 2 \cos(\pi\alpha))}.$$

**П.9.** Если  $\omega < 1$  и  $\theta > 0$ , то

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) \sim \frac{g(x; \alpha, \theta)}{\Gamma(1 + \omega)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

т. е. хвосты дробно-устойчивых плотностей такие же тяжелые (в терминах их степенного поведения), как и у соответствующих им устойчивых плотностей.

**П.10.** При  $\alpha = 2$  дробно-устойчивая плотность может быть представлена в терминах односторонней устойчивой плотности с помощью соотношения

$$q(x; 2, \omega, 0) = \frac{1}{\omega |x|^{1+2/\omega}} g_{\omega/2,1}(|x|^{-2/\omega}).$$

**П.11.** В работе [29] были получены характеристические функции дробно-устойчивых распределений:

$$\tilde{q}(k; \alpha, \omega, \theta) = E_\omega(-\psi(k; \alpha, \theta)),$$

где

$$E_\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + n\omega)}$$

— функция Миттаг-Леффлера,

$$\psi(k; \alpha, \theta) = -|k|^\alpha \exp\{-i\alpha\theta(\pi/2)\text{sign}k\}.$$

В той же работе получены обратно-степенные ряды для дробно-устойчивых плотностей при  $\alpha < 1$ :

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(n\alpha\rho)\Gamma(1 - n\alpha\rho)\Gamma(1 + n\omega)} x^{-n\alpha-1}.$$

**П.12.** Одномерные дробно-устойчивые плотности могут быть естественным образом обобщены на многомерный случай [30],

$$q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega, \Gamma) = \int_0^\infty g_d(\mathbf{x}y^{\omega/\alpha}; \alpha, \Gamma) g_1(y; \omega, 1) y^{d\omega/\alpha} dy,$$

для описания распределения случайного вектора

$$\mathbf{Z}_d(\alpha, \omega, \Gamma) \equiv \mathbf{S}_d(\alpha, \Gamma) / [S_1(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Осадько, УФН **176**, 23 (2006).
2. Y. Jung, E. Barkai, and R. J. Silbey, Chem. Phys. **284**, 181 (2002).
3. F. D. Stefani, X. Zhong, W. Knoll, M. Han, and M. Kreiter, New J. Phys. **7**, 197 (2005).
4. A. L. Efros and M. Rosen, Phys. Rev. Lett. **78**, 1110 (1997).
5. M. Kuno, D. P. Fromm, H. F. Hamann, A. Gallagher, and D. J. Nesbitt, J. Chem. Phys. **115**, 1028 (2001).
6. K. T. Shimizu, R. G. Neuhauser, C. A. Leatherdale, S. A. Empedocles, W. K. Woo, and M. G. Bawendi, Phys. Rev. B **63**, 205316 (2001).
7. S. A. Empedocles and M. G. Bawendi, J. Phys. Chem. B **103**, 1826 (1999).
8. J. Tang and R. A. Marcus, J. Chem. Phys. **123**, 054704 (2005).
9. G. Margolin and E. Barkai, J. Chem. Phys. **121**, 1566 (2004).
10. P. A. Frantsuzov and R. A. Marcus, Phys. Rev. **72**, 155321 (2005).
11. И. С. Осадько, Письма в ЖЭТФ **79**, 522 (2004).
12. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск (2008).
13. O. N. Repin and A. I. Saichev, Radiophys. Quant. Electr. **43**, 738 (2000).
14. V. V. Uchaikin, D. O. Cahoy, and R. T. Sibatov, Int. J. Bifurcation and Chaos **18**, 2717 (2008).
15. N. Laskin, Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. **8**, 201 (2003).
16. Д. П. Кокс, В. Л. Смит, *Теория восстановления*, Советское радио, Москва (1967).

17. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
18. R. T. Sibatov and V. V. Uchaikin, *Труды VII Международной конф. «Химия твердого тела и современные микро- и нанотехнологии*, Кисловодск–Ставрополь, СевКавГТУ (2007), с. 91.
19. В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов, в монографии В. В. Учайкина *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск (2008), с. 401–412.
20. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Мир, Москва (1967).
21. В. В. Учайкин, УФН **173**, 847 (2003).
22. V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*, VSP, Utrecht, The Netherlands (1999).
23. J. Lamperti, Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 380 (1958).
24. G. Bel and E. Barkai, Phys. Rev. Lett. **94**, 240602 (2005).
25. В. В. Учайкин, ЖЭТФ **115**, 2113 (1999).
26. M. Kotulski, J. Stat. Phys. **81**, 777 (1995).
27. V. Kolokoltsov, V. Yu. Korolev, and V. V. Uchaikin, J. Math. Sci. **105**, 2569 (2001).
28. V. Uchaikin, Int. J. Theor. Phys. **39**, 2087 (2000).
29. V. Uchaikin, Physica A **305**, 205 (2002).
30. V. Uchaikin, Nottingham Trent Univ. Preprint № 12 (2002).