

# ДИСПЕРСИЯ НЕЙТРИНО В ЗАРЯДОВО-СИММЕТРИЧНОЙ ПЛАЗМЕ

*М. С. Андреев, Н. В. Михеев\*, Е. Н. Нарынская\*\**

*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
150000, Ярославль, Россия*

Поступила в редакцию 7 августа 2009 г.

Исследовано влияние зарядово-симметричной замагниченной плазмы на дисперсию нейтрино. Получено общее выражение для вклада замагниченной плазмы в дополнительную энергию нейтрино. Подробно рассмотрены физические условия слабо замагниченной, относительно слабо и сильно замагниченной плазмы. Показано, что результат для дополнительной энергии нейтрино в случае промежуточных магнитных полей существенно отличается от результатов, представленных в литературе ранее.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Физика элементарных частиц в плотной плазме в присутствии внешнего электромагнитного поля является предметом активных обсуждений на протяжении нескольких последних десятилетий. Интерес к исследованиям такого рода обусловлен, с одной стороны, возможными астрофизическими и космологическими приложениями, поскольку одновременно обе компоненты активной среды — плазма и внешнее магнитное поле — могли бы присутствовать в астрофизических объектах, а так же в условиях ранней Вселенной. С другой стороны, исследования квантовых процессов во внешней активной среде несомненно представляют интерес с точки зрения фундаментальной физики частиц, так как совместное влияние плотной плазмы и электромагнитного поля может не только повлиять на свойства самих частиц, но и существенно изменить их кинематику, открывая процессы, запрещенные в вакууме. Влияние магнитных полей становится особенно существенным в случае «сильных полей», когда напряженность магнитного поля становится сравнимой или даже значительно превосходит критическое значение поля для электрона<sup>1)</sup>

$$B_e = m_e^2/e = 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс.}$$

В лабораторных условиях такие поля пока не

\*E-mail: mikheev@uniyar.ac.ru

\*\*E-mail: elenan@uniyar.ac.ru

<sup>1)</sup> Мы используем естественную систему единиц, в которой  $c = \hbar = 1$ ,  $e > 0$  — элементарный заряд.

достижимы. Однако по современным представлениям поля такого и даже большего масштаба могли бы существовать в некоторых астрофизических объектах. Например, при взрыве сверхновой величина магнитного поля, развиваемого при коллапсе ядра звезды, достигает значений  $10^{13}$ – $10^{14}$  Гс, учет вращения звезды может увеличить это магнитное поле на дополнительный фактор  $10^3$ – $10^4$  [1, 2]. Механизмы генерации таких магнитных полей, напряженностью вплоть до  $10^{15}$ – $10^{17}$  Гс, в настоящее время широко обсуждаются [3–8].

Одним из актуальных вопросов физики элементарных частиц во внешней среде является вопрос о влиянии внешней активной среды на дисперсионные свойства нейтрино. Анализ такого влияния основывается на вычислении собственно-энергетического оператора нейтрино  $\Sigma(p)$  в замагниченной плазме, из которого, в частности, можно извлечь и закон дисперсии нейтрино. Следует отметить, что вычисление оператора  $\Sigma(p)$  проводилось ранее в целом ряде работ, см., например, [9–13].

В частности, дополнительная энергия электронного нейтрино в зарядово-симметричной слабо замагниченной плазме в физических условиях

$$m_W^2 \gg T^2 \gg eB \gg m_e^2 \quad (1)$$

описывается выражением

$$\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = -\frac{7\sqrt{2}G_F\pi^2T^4}{45}\left(\frac{1}{m_Z^2} + \frac{2}{m_W^2}\right) + \frac{\sqrt{2}G_FT^2eB}{3m_W^2}\cos\phi + \frac{\sqrt{2}G_F(\epsilon B)^2}{6\pi^2m_W^2} \times \ln\left(\frac{T^2}{m_e^2}\right)\sin^2\phi. \quad (2)$$

Здесь  $E$  и  $\mathbf{p}$  — энергия и импульс нейтрино,  $m_e, m_Z, m_W$  — массы электрона,  $Z$ -бозона и  $W$ -бозона,  $T$  — температура плазмы,  $\phi$  — угол между направлением магнитного поля  $\mathbf{B}$  и вектором импульса  $\mathbf{p}$ . Первое слагаемое в выражении (2) описывает дополнительную энергию нейтрино в плазме без магнитного поля [9], а второе [10] и третье [11] слагаемые обусловлены одновременным присутствием плазмы и магнитного поля. Как видно из выражения (2), слагаемое, пропорциональное квадрату напряженности магнитного поля, содержит усиление логарифмическим фактором  $\ln(T^2/m_e^2)$ , что в физических условиях (1), вообще говоря, вызывает сомнения. Действительно, в условиях (1) вклад в энергию нейтрино определяется плазменными электронами и позитронами, заселяющими высшие уровни Ландау. Энергия таких электронов и позитронов на  $n$ -м уровне Ландау выражается формулой

$$\omega_n = \sqrt{m_e^2 + k_3^2 + 2eBn}, \quad n \gg 1. \quad (3)$$

Поскольку в предполагаемых условиях масса электрона является самым маленьким параметром задачи, в выражении для энергии (3) ею можно пренебречь, поэтому маловероятно, чтобы масса электрона присутствовала в окончательном ответе в главном приближении. Таким образом, представляет интерес независимое вычисление дисперсии нейтрино в замагниченной плазме.

Данная статья посвящена исследованию влияния зарядово-симметричной замагниченной плазмы на дисперсию нейтрино в присутствии внешнего магнитного поля. В разд. 2 вычисляется общее выражение для собственно-энергетического оператора нейтрино  $\Sigma(p)$ . В разд. 3 подробно анализируется дисперсия нейтрино в физических условиях слабо замагниченной плазмы, относительно слабо замагниченной плазмы и сильно замагниченной плазмы. В Приложении представлены результаты вычисления матрицы плотности плазменного электрона.

## 2. СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НЕЙТРИНО В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Для того чтобы получить выражение для собственно-энергетического оператора нейтрино  $\Sigma(p)$ , необходимо рассмотреть процесс рассеяния нейтрино вперед, амплитуда которого связана с оператором  $\Sigma(p)$  следующим соотношением:

$$M_{(\nu \rightarrow \nu)} = -\bar{U}(p)\Sigma(p)U(p). \quad (4)$$

Изменение энергии нейтрино, обусловленное его рассеянием вперед в среде, может быть выражено через амплитуду этого процесса

$$\Delta E = -\frac{M_{(\nu \rightarrow \nu)}}{2E} = \frac{1}{4E} \text{Sp} \{((p\gamma) + m_\nu)(1 + (s\gamma)\gamma_5)\Sigma(p)\}, \quad (5)$$

где  $E = \sqrt{p_3^2 + m_\nu^2}$  — энергия нейтрино в вакууме,  $m_\nu$  — масса нейтрино,  $s^\mu$  — 4-вектор спина нейтрино. Здесь и далее у 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:  $(p\gamma) = (p_\mu\gamma^\mu)$ .

Общий вид оператора  $\Sigma(p)$  может быть представлен с помощью различных параметризаций, однако в присутствии плазмы и однородного магнитного поля оператор  $\Sigma(p)$  содержит три независимые структуры, поэтому в замагниченной плазме в качестве параметризации массового оператора нейтрино удобно выбрать следующую:

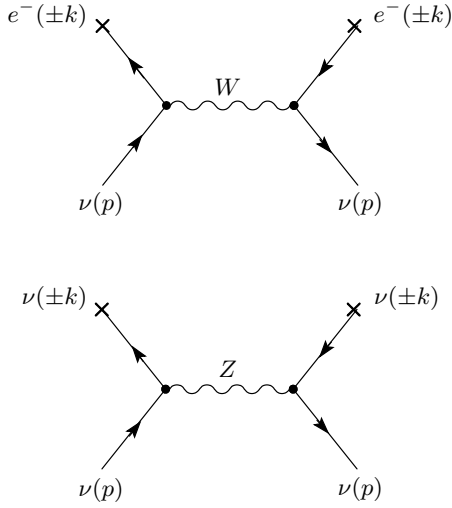
$$\Sigma(p) = (A(p\gamma) + B(u\gamma) + C(p\tilde{\varphi}\gamma))L. \quad (6)$$

Здесь  $A, B, C$  — численные коэффициенты,  $u^\mu$  — 4-вектор среды,  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}/B$  — приведенный к безразмерному виду дуальный тензор внешнего магнитного поля,  $L = (1 + \gamma_5)/2$ . При такой параметризации коэффициенты  $A, B, C$  имеют простой физический смысл. Действительно, зная связь дополнительной энергии нейтрино с амплитудой его рассеяния вперед и подставляя  $\Sigma(p)$  в виде (6) в выражение (5) для ультрарелятивистского нейтрино, получаем

$$\Delta E \approx B\frac{1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi})}{2} - C\frac{m_\nu}{2B}(\mathbf{B} \cdot [\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{n}]]), \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении импульса нейтрино,  $\boldsymbol{\xi}$  — удвоенный вектор среднего спина нейтрино. В выражении (7) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату массы нейтрино.

Таким образом, задача нахождения дополнительной энергии, приобретаемой нейтрино в процессе



Диаграммы Фейнмана, описывающие процесс рассеяния нейтрино вперед в замагниченной плазме

рассеяния вперед в замагниченной плазме, сводится к вычислению параметров  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ .

Слагаемое, пропорциональное массе нейтрино в первой степени, соответствует дополнительной энергии нейтрино, обусловленной магнитным моментом нейтрино  $\mu_\nu$ ,

$$\mu_\nu = \frac{Cm_\nu}{2B}.$$

Следовательно, можно говорить, что параметр  $\mathcal{C}$  определяет дополнительный магнитный момент нейтрино в замагниченной плазме.

Из выражения (7) видно, что в случае левого безмассового нейтрино дополнительная энергия нейтрино в среде определяется только параметром  $\mathcal{B}$ :

$$\Delta E = \mathcal{B}.$$

Поскольку дополнительная энергия нейтрино, будучи физической величиной, является калибровочно инвариантной, вычисления будем проводить в унитарной калибровке, удобство которой состоит в том, что в ней отсутствует вклад скалярных бозонов. В этой калибровке амплитуда процесса рассеяния  $\nu \rightarrow \nu$  в замагниченной плазме может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$M_{(\nu \rightarrow \nu)} = M_{(\nu \rightarrow \nu)}^W + M_{(\nu \rightarrow \nu)}^Z, \quad (8)$$

где первое слагаемое соответствует амплитуде рассеяния нейтрино вперед на плазменных электронах и позитронах среды через W-бозон, второе слагаемое обусловлено процессом перехода  $\nu \rightarrow \nu$  через Z-бозон (см. рисунок). Процесс рассеяния нейтрино

вперед на плазменных нейтрино, изображенный на второй диаграмме, не чувствителен к присутствию внешнего магнитного поля, его вклад в дополнительную энергию нейтрино исследовался ранее и был получен в работе [9]:

$$\frac{\Delta E^Z}{|\mathbf{p}|} = -\frac{7\sqrt{2}G_F\pi^2T^4}{45m_Z^2}. \quad (9)$$

Отметим, что на рисунке не приведены диаграммы, в которых 4-импульс промежуточного Z-бозона равен нулю. Это связано с тем, что такие диаграммы дают только локальный вклад, который равен нулю в зарядово-симметричной плазме.

Таким образом, наша задача сводится к вычислению вклада замагниченной плазмы в дополнительную энергию нейтрино, обусловленного обменом W-бозоном.

### 3. ВКЛАД ЗАМАГНИЧЕННОЙ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПЛАЗМЫ В СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НЕЙТРИНО

В этом разделе мы вычисляем плазменный вклад в собственно-энергетический оператор нейтрино, обусловленный процессом рассеяния нейтрино вперед на электронах и позитронах среды.

Процесс рассеяния, соответствующий первой диаграмме, обусловлен лагранжианом

$$L = \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Psi_{\nu_e}) W_\alpha + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \Psi_e) W_\alpha^*. \quad (10)$$

Здесь  $\Psi_e, \Psi_{\nu_e}, W_\alpha$  — квантованные поля электрона, нейтрино и W-бозона,  $g$  — константа электрослабого взаимодействия в Стандартной Модели.

S-матричный элемент процесса рассеяния нейтрино вперед на плазменных электронах следует из лагранжиана (10):

$$S_{\nu_e^- \rightarrow \nu_e^-}^W = \frac{g^2}{8} \sum_n \int \frac{d^4x d^4x'}{\sqrt{2EV} \sqrt{2E'V}} \times \exp(i(p x' - p' x)) \times \bar{U}(p') Q_\alpha R_n(x, x') Q_\beta U(p) G_{\beta\alpha}^W(x', x), \quad (11)$$

где  $V = L_1 L_2 L_3$  — нормировочный объем,  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  и  $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$  — 4-импульсы начального и конечного нейтрино,  $U(p)$  — биспинорная амплитуда нейтрино,  $Q_\alpha = \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)$ ,  $G_{\beta\alpha}^W(x', x)$  — пропагатор W-бозона в магнитном поле,  $R_n(x, x')$  —

матрица плотности плазменного электрона с фиксированным номером уровня Ландау  $n$  <sup>2)</sup>:

$$R_n(x, x') = \sum_s \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} L_2 L_3 f(\omega_n) \psi_e(x) \bar{\psi}_e(x'). \quad (12)$$

Здесь  $\psi_e(x)$  — решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле,

$$\omega_n = \sqrt{k_3^2 + 2eBn + m_e^2}$$

— энергия электрона на  $n$ -м уровне Ландау,  $L_2, L_3$  — вспомогательные параметры, определяющие нормировочный объем  $V = L_1 L_2 L_3$ ,  $k_3$  — кинетический импульс вдоль третьей оси,  $k_2$  — обобщенный импульс, определяющий положение  $x_0 = -k_2/eB$  центра гауссова пакета на первой оси,  $f(\omega_n)$  — функция распределения электронов, учитывающая наличие плазмы. В системе покоя плазмы она имеет вид

$$f(\omega) = [\exp((\omega_n - \mu)/T) + 1]^{-1},$$

где  $\mu$  — химический потенциал плазмы, а  $T$  — ее температура.

Подробное вычисление функции  $R_n(x, x')$  представлено в Приложении. В постоянном однородном магнитном поле она может быть приведена к виду

$$R_n(x, x') = \exp(-i\Phi(x', x)) \times (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} \exp(-ik(x - x')) \times [(\hat{k}_{\parallel} + m_e)(L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2\hat{k}_{\perp} L_{n-1}^1(2u)], \quad (13)$$

$$\Phi(x', x) = \frac{eB}{2}(x_1 + x'_1)(x_2 - x'_2). \quad (14)$$

Здесь формально введен 4-вектор  $k^\mu = (\omega_n, \mathbf{k})$ , при этом

$$\hat{k}_{\parallel} = (k\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\gamma) = \omega_n\gamma_0 - k_3\gamma_3,$$

$$\hat{k}_{\perp} = (k\varphi\varphi\gamma) = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2, \quad \varphi_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}}{B},$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}}{2}$$

— безразмерные тензор и дуальный тензор внешнего магнитного поля, соответственно,

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_1\gamma_2)$$

<sup>2)</sup>Мы проводим вычисления в калибровке  $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$ , магнитное поле направлено вдоль третьей оси  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ .

— проекционные операторы,  $u = k_{\perp}^2/eB$ ,  $L_n^{n'}(u)$  — присоединенные полиномы Лагерра, нормированные условием

$$\int_0^\infty e^{-u} u^k L_n^k(u) L_m^k(u) du = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm}.$$

Пропагатор W-бозона  $G_{\beta\alpha}^W(x', x)$  в общем случае может быть представлен в виде

$$G_{\beta\alpha}^W(x', x) = \exp(i\Phi(x', x)) \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \exp(-iq(x' - x)) G_{\beta\alpha}^W(q), \quad (15)$$

где  $G_{\beta\alpha}^W(q)$  — фурье-образ трансляционно инвариантной части пропагатора W-бозона. Явный вид фазы определяется выбором потенциала, и в выбранной калибровке  $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$  она описывается выражением (14).

После подстановки функции  $R_n(x, x')$  в виде (13), пропагатора W-бозона (15) в выражение (11) и интегрирования по 4-координатам, S-матричный элемент процесса  $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$  может быть приведен к виду

$$S_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W = \frac{g^2(2\pi)^4 \delta^4(p - p')}{8\sqrt{2EV}\sqrt{2E'V}} \times \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} G_{\beta\alpha}^W(k - p) \times \bar{U}(p) Q_\alpha[\hat{k}_{\parallel}(L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2\hat{k}_{\perp} L_{n-1}^1(2u)] Q_\beta U(p). \quad (16)$$

В S-матричном элементе выделилась четырехмерная  $\delta$ -функция, соответствующая закону сохранения энергии и импульса. Поэтому можно воспользоваться стандартной связью S-матричного элемента и инвариантной амплитуды перехода [14]:

$$S_{if} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - q')}{2\omega V} M_{if} \quad (17)$$

и выделить инвариантную амплитуду процесса рассеяния нейтрино на плазменных электронах в виде

$$M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W = \frac{-ig^2}{8} \times \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} G_{\beta\alpha}^W(k - p) \times \bar{U}(p) Q_\alpha[\hat{k}_{\parallel}(L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2\hat{k}_{\perp} L_{n-1}^1(2u)] Q_\beta U(p). \quad (18)$$

Вычисление амплитуды  $M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W$ , соответствующей процессу рассеяния нейтрино на позитронах плазмы, полностью аналогично вычислению амплитуды  $M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W$ . Как оказалось, в зарядово-симметричной плазме результат для амплитуды перехода  $M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W$  отличается от (18) общим знаком и заменой  $k_\mu \rightarrow -k_\mu$  в аргументе пропагатора W-бозона.

С учетом когерентного рассеяния на всех плазменных электронах и позитронах для амплитуды процесса рассеяния  $\nu e \rightarrow \nu e$  в замагниченной плазме получаем:

$$\begin{aligned} M_{\nu e \rightarrow \nu e}^W &= M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W + M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W = \\ &= \frac{-ig^2}{8} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} \times \\ &\times e^{-u} (G_{\beta\alpha}^W(k-p) - G_{\beta\alpha}^W(-k-p)) \times \\ &\times \bar{U}(p) Q_\alpha [\hat{k}_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\ &+ 2\hat{k}_\perp L_{n-1}^1(2u)] Q_\beta U(p). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя выражение для амплитуды (4), найдем вклад плазменных электронов и позитронов в собственно-энергетический оператор нейтрино

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) &= \frac{ig^2}{8} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} \times \\ &\times e^{-u} (G_{\beta\alpha}^W(k-p) - G_{\beta\alpha}^W(-k-p)) \times \\ &\times Q_\alpha [\hat{k}_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\ &+ 2\hat{k}_\perp L_{n-1}^1(2u)] Q_\beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Фурье-образ пропагатора W-бозона в унитарной калибровке имеет достаточно громоздкий вид. В рассматриваемых физических условиях, когда масса W-бозона является самым большим физическим параметром задачи, фурье-образ пропагатора может быть представлен в виде разложения по обратным степеням массы W-бозона:

$$\begin{aligned} G_{\beta\alpha}^W(q) &\approx \frac{ig_{\beta\alpha}}{m_W^2} - \frac{3eF_{\beta\alpha}}{2m_W^4} - \\ &- \frac{iq_{\beta}q_{\alpha}}{m_W^4} + \frac{iq_{\beta}^2g_{\beta\alpha}}{m_W^4} + O\left(\frac{1}{m_W^6}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь первое и второе слагаемые, не зависящие от импульса, обуславливают вклад в локальном пределе, который в зарядово-симметричной плазме оказывается равным нулю [9], что явно видно из выражения (21). Третье и четвертое слагаемые учитывают нелокальность взаимодействия. Как показывает анализ, третье слагаемое в (21) дает вклад только в

параметр  $\mathcal{A}$  и, следовательно, не дает вклада в дополнительную энергию нейтрино.

Подставляя в выражение (20) пропагатор W-бозона в виде (21) и опуская в нем слагаемые, не дающие вклада в дополнительную энергию нейтрино, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) &= \frac{g^2 g_{\alpha\beta}}{2m_W^4} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} (pk) e^{-u} \times \\ &\times Q_\alpha [\hat{k}_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2\hat{k}_\perp L_{n-1}^1(2u)] Q_\beta. \end{aligned}$$

Переходя в этом выражении к интегрированию по переменной  $u = k_\perp^2/eB$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k = \pi eB \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_0^{\infty} du,$$

и выполняя интегрирование по переменной  $u$  с использованием соотношений

$$\int_0^{\infty} du e^{-u} L_n(2u) = (-1)^n,$$

$$2uL_{n-1}^1(2u) = n(L_{n-1}(2u) - L_n(2u)),$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) &= \frac{g^2 eB}{2\pi^2 m_W^4} \sum_{n=0}^{\prime} \int \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} \times \\ &\times \left\{ (p\gamma) eBn - (p\tilde{\varphi}\gamma) \left( \frac{k\tilde{\varphi}p}{\omega_n E} (k_3^2 - eBn) - \delta_{n0} \omega_n^2 \right) - \right. \\ &- (u\gamma) \left( E(\omega_n^2 + eBn) + \frac{p_3^2}{E^2} (k_3^2 - eBn) - \right. \\ &\left. \left. - \delta_{n0} p_3 (k_3^2 + \omega_n^2) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\delta_{n0}$  — символ Кронекера, отличный от нуля только для основного уровня Ландау, сумма по уровням Ландау (со штрихом) определена следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\prime} F(n) = \frac{1}{2} F(n=0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n).$$

Сравнивая результат (22) с параметризацией (6), находим вклад в дополнительную энергию нейтрино, обусловленный его рассеянием вперед на электронах и позитронах замагниченной плазмы:

$$\begin{aligned} B^W &= -\frac{2\sqrt{2}G_F eBE}{\pi^2 m_W^2} \sum_{n=0}^{\prime} \int \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} \times \\ &\times (\omega_n^2 + eBn + \cos^2 \phi (k_3^2 - eBn) - \\ &- \delta_{n0} \cos \phi (k_3^2 + \omega_n^2)), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\phi$  — угол между направлением магнитного поля и вектором импульса нейтрино.

Выражение (23) является основным результатом нашей работы. Далее мы рассмотрим некоторые предельные случаи, которые могут представлять интерес с точки зрения возможных астрофизических приложений.

#### 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ НЕЙТРИНО В ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

Общее выражение для дополнительной энергии нейтрино в зарядово-симметричной замагниченной плазме получается суммированием вкладов от процессов, обусловленных обменом Z-бозоном и W-бозоном и может быть представлено в виде однократного интеграла:

$$\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = -\frac{7\sqrt{2}G_F\pi^2T^4}{45m_Z^2} - \frac{2\sqrt{2}G_FeB}{\pi^2m_W^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} (\omega_n^2 + eBn + \cos^2\phi(k_3^2 - eBn) - \delta_{n0} \cos\phi(k_3^2 + \omega_n^2)). \quad (24)$$

Следует отметить, что выражение (24) описывает вклад замагниченной плазмы в дополнительную энергию нейтрино. Для того чтобы получить полное выражение для энергии нейтрино в замагниченной плазме необходимо к результату (24) прибавить чисто полевой вклад, который был вычислен в работе [13].

Интеграл в выражении (24) может быть вычислен в некоторых предельных случаях, рассмотренных ниже.

**1. Предел слабого магнитного поля, когда напряженность магнитного поля является самым малым физическим параметром задачи**

$$T^2 \gg m_e^2 \gg eB. \quad (25)$$

Дополнительная энергия нейтрино в такой слабо замагниченной плазме может быть приведена к виду

$$\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{2}G_F}{3m_W^2} \left[ -\frac{7\pi^2T^4}{15} \left( 2 + \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) + T^2eB \cos\phi + \frac{(eB)^2}{2\pi^2} \times \left\{ \sin^2\phi \left( \ln \left( \frac{T^2}{m_e^2} \right) + 0.635 \right) - 1 \right\} \right]. \quad (26)$$

Выражение (26) содержит логарифмический фактор с массой электрона  $m_e$ , однако в рассматриваемых физических условиях (25) масса электрона не является самым малым параметром, следовательно, нельзя исследовать дополнительную энергию нейтрино (26) в пределе  $m_e \rightarrow 0$ .

**2. Предел относительно слабого магнитного поля, когда напряженность поля является малой на масштабе физических параметров среды, но в то же время существенно превышает критическое значение поля для электрона:**

$$T^2 \gg eB \gg m_e^2. \quad (27)$$

Такая физическая ситуация могла бы реализоваться, например, в ядре сверхновой после коллапса, где температура плазмы  $T \approx 70m_e$  [15]. Подставляя это значение в условия (27), получаем

$$\frac{T^2}{m_e^2} \approx 5 \cdot 10^3 \gg \frac{B}{B_e} \gg 1. \quad (28)$$

Откуда видно, что даже магнитные поля напряженностью до  $B \sim 10^{15}-10^{16}$  Гс удовлетворяют условию (27) и, следовательно, могут рассматриваться как «относительно слабые».

В физических условиях (27) возбуждается большое число уровней Ландау. В этом пределе для дополнительной энергии нейтрино находим

$$\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = \frac{\sqrt{2}G_F}{3m_W^2} \left[ -\frac{7\pi^2T^4}{15} \left( 2 + \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) + T^2eB \cos\phi + \frac{(eB)^2}{2\pi^2} \times \left\{ \sin^2\phi \left( \ln \left( \frac{T^2}{eB} \right) + 2.93 \right) - 1 \right\} \right]. \quad (29)$$

Как видно из выражения (29), в физических условиях (27) дополнительная энергия нейтрино не содержит инфракрасной расходимости в пределе  $m_e \rightarrow 0$  в отличие от [11].

**3. Предел сильного магнитного поля, соответствующий физической ситуации, когда из всех физических параметров, характеризующих замагниченную плазму, самым большим параметром является напряженность магнитного поля:**

$$eB \gg T^2, m_e^2. \quad (30)$$

В условиях (30) плазменные электроны и позитроны занимают преимущественно основной уровень Ландау.

В пределе сильно замагниченной плазмы для дополнительной энергии нейтрино имеем

$$\frac{\Delta E}{|p|} = -\frac{\sqrt{2}G_F}{3m_W^2} \left[ \frac{7\pi^2 T^4 m_W^2}{15m_Z^2} + \frac{T^2 eB}{2} (1 - \cos \phi)^2 + 3(eB)^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{T^2}{2eB}\right)^{1/4} \times \right. \\ \left. \times (3 - \cos^2 \phi) \exp\left(-\frac{\sqrt{2eB}}{T}\right) \right]. \quad (31)$$

Здесь второе слагаемое обусловлено вкладом основного уровня Ландау, третье слагаемое — вкладом первого уровня Ландау.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовано влияние зарядово-симметричной замагниченной плазмы на дисперсию нейтрино. Изменение энергии нейтрино в замагниченной плазме может быть выражено через амплитуду процесса рассеяния нейтрино вперед на плазменных электронах (позитронах) и на нейтрино (антинейтрино) среды.

Получено общее выражение для вклада зарядово-симметричной замагниченной плазмы в энергию нейтрино в физических условиях, когда масса  $W$ -бозона является самым большим физическим параметром задачи. Рассмотрены предельные физические условия, представляющие интерес с точки зрения возможных астрофизических приложений полученных результатов.

В частности, показано, что в пределе слабо магнитного поля дополнительная энергия нейтрино содержит логарифм с массой электрона. Это однако не приводит к расходимости всего выражения при  $m_e \rightarrow 0$ , поскольку в условиях слабо замагниченной плазмы,  $T^2 \gg m_e^2 \gg eB$ , самым малым физическим параметром является напряженность магнитного поля, а не масса электрона, и устремлять массу электрона к нулю при ненулевой напряженности магнитного поля нельзя.

Исследована дисперсия нейтрино в условиях промежуточного магнитного поля, когда магнитное поле, являясь малым по сравнению с температурой плазмы, тем не менее достаточно велико на масштабе массы электрона,  $T^2 \gg m_e^2$ . Показано, что плазменный вклад в энергию нейтрино в таких условиях не содержит инфракрасной расходимости в пределе  $m_e \rightarrow 0$  в отличие от результатов, представленных в литературе ранее [11].

Рассмотрен предел сильного магнитного поля, когда напряженность магнитного поля является доминирующим физическим параметром среды,  $eB \gg T^2, m_e^2$ . В таких физических условиях плазменные электроны и позитроны заселяют преимущественно основной уровень Ландау. В представленном выражении для дополнительной энергии нейтрино выделен вклад основного уровня Ландау, а также удержан вклад первого уровня Ландау.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

При исследовании квантовых процессов в замагниченной плазме иногда возникает необходимость в вычислении матрицы плотности плазменного электрона, просуммированной по всем квантовым состояниям кроме номера уровня Ландау. В данном Приложении представлены вычисления этой матрицы, определенной выражением (12).

Волновые функции электрона в выбранной калибровке могут быть записаны в виде [14]

$$\psi_e(x) = \frac{u_s(\xi) \exp(-i(\omega_n x_0 - k_2 x_2 - k_3 x_3))}{\sqrt{2\omega_n(\omega_n + m_e)L_2 L_3}}, \quad (32)$$

где биспинорные амплитуды, соответствующие двум проекциям спина на направление магнитного поля  $s = \pm 1$ , имеют вид

$$u_{s=-1}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m_e)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2eBn}V_{n-1}(\xi) \\ -k_3 V_n(\xi) \end{pmatrix}, \\ u_{s=+1}(\xi) = \begin{pmatrix} (\omega_n + m_e)V_{n-1}(\xi) \\ 0 \\ k_3 V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2eBn}V_n(\xi) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$V_n(\xi) = \frac{(eB)^{1/4}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

$H_n(\xi)$  — полиномы Эрмита,  $\xi$  — безразмерная координата:

$$\xi = \sqrt{eB}(x_1 + k_2/eB).$$

Отметим, что функция  $V_n(\xi)$  при отрицательных значениях индекса  $n$  полагается равной нулю.

Подставляя явный вид волновых функций (32) в выражение для матрицы плотности (12), можно привести его к виду

$$R_n(x, x') = \exp(-i\Phi(x', x)) \times \sum_s R_{n\parallel}(Z_{\parallel})R_{n\perp}(Z_{\perp}), \quad (33)$$

где введена 4-координата  $Z_{\mu} = x_{\mu} - x'_{\mu}$ , а также следующие функции:

$$\begin{aligned} \Phi(x', x) &= \frac{eB}{2}(x_1 + x'_1)(x_2 - x'_2), \\ R_{n\parallel}(Z_{\parallel}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{\omega_n(\omega_n + m_e)} f(\omega_n) \exp(-i(kZ)_{\parallel}), \\ R_{n\perp}(Z_{\perp}) &= \frac{\sqrt{eB}}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi - \sqrt{eB}Z_1) \times \\ &\times \exp\left(-i\sqrt{eB}\left(\frac{\sqrt{eB}Z_1Z_2}{2} - \xi Z_2\right)\right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} (Zk)_{\parallel} &= (Z\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}k) = Z_0\omega_n - Z_3k_3, \\ \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}/2, \quad \varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B \end{aligned}$$

— безразмерные дуальный тензор и тензор внешнего магнитного поля, соответственно.

Функцию  $R_{n\perp}(Z_{\perp})$  как функцию двух переменных  $Z_1, Z_2$  можно разложить в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} R_{n\perp}(Z_{\perp}) &= \int \frac{d^2k_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp(i(kZ)_{\perp}) R_{n\perp}(k_{\perp}), \\ R_{n\perp}(k_{\perp}) &= \int d^2z_{\perp} \exp(-i(kZ)_{\perp}) R_{n\perp}(Z_{\perp}), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$(Zk)_{\perp} = (Z\varphi\varphi k) = Z_1k_1 + Z_2k_2.$$

Выполняя интегрирование функции  $R_{n\perp}(k_{\perp})$  по координатам  $Z_1, Z_2$  и подставляя результат в (33), получаем

$$\begin{aligned} R_n(x, x') &= \frac{\exp(-i\Phi(x', x))}{\sqrt{eB}(2\pi)^3} \int \frac{d^3k f(\omega_n)}{\omega_n(\omega_n + m_e)} \times \\ &\times \exp(-i(kZ)) \exp\left(\frac{2ik_1k_2}{eB}\right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{2ik_1\xi}{\sqrt{eB}}\right) \sum_s u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi'), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\xi' = \frac{2k_2}{\sqrt{eB}} - \xi.$$

После несложных, хотя и несколько громоздких вычислений с учетом суммирования по спиновым состояниям начального и конечного электронов, занимающих один и тот же уровень Ландау с номером

$n$ , произведение биспинорных амплитуд может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \sum_s u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi') &= (\omega_n + m_e) \times \\ &\times [(\hat{k}_{\parallel} + m_e)(\Pi_+ V_{n-1}(\xi) V_{n-1}(\xi') + \Pi_- V_n(\xi) V_n(\xi')) - \\ &- \sqrt{2eBn}(\Pi_+ \gamma_2 V_{n-1}(\xi) V_n(\xi') + \\ &+ \Pi_- \gamma_2 V_n(\xi) V_{n-1}(\xi'))]. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$\hat{k}_{\parallel} = (k\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\gamma) = \omega_n\gamma_0 - k_3\gamma_3,$$

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_1\gamma_2)$$

— проекционные операторы.

Интеграл по переменной  $\xi$  в выражении (35) может быть вычислен с помощью формулы

$$\begin{aligned} J_{n,n'} &= \frac{e^{iab/2}}{\sqrt{eB}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ia\xi} V_n(\xi) V_{n'}(b - \xi) = \\ &= (-1)^{n'} e^{-i(n-n')\varphi} F_{n',n}(x), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

$$F_{n',n}(x) = \sqrt{\frac{n!}{n'}} x^{(n-n')/2} e^{-x/2} L_{n'-n'}^{n-n'}(x),$$

а присоединенные полиномы Лагерра определены следующим образом:

$$L_k^l(x) = \frac{e^x x^{-l}}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^{k+l}).$$

Окончательно, матрица плотности электрона может быть приведена к виду трехкратного интеграла, удобному для дальнейшего использования:

$$\begin{aligned} R_n(x, x') &= \exp(-i\Phi(x', x)) \times \\ &\times (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} \exp(-ik(x - x')) \times \\ &\times [(\hat{k}_{\parallel} + m_e)(L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\ &+ 2\hat{k}_{\perp} L_{n-1}^1(2u)], \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$u = k_{\perp}^2/eB,$$

$$\hat{k}_{\perp} = (k\varphi\varphi\gamma) = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2.$$



Выражение (38) может быть использовано при исследовании квантовых процессов в плазме в присутствии магнитного поля произвольной напряженности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (грант № НШ-497.2008.2), Министерства образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/510) и РФФИ (грант № 07-02-00285-а).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Бисноватый-Коган, *Астрон. журн.* **47**, 813 (1970).
2. Г. С. Бисноватый-Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции*, Наука, Москва (1989).
3. М. Ruderman, *Neutron Stars: Theory and Observation*, ed. by J. Ventura and D. Pines, Kluwer Academic Publ., Dordrecht (1991).
4. С. Thompson and R. C. Duncan, *Astrophys. J.* **408**, 194 (1993).
5. G. S. Bisnovaty-Kogan, *Astron. Astrophys. Trans.* **3**, 287 (1993).
6. M. Bocquet et al., *Astron. and Astrophys.* **301**, 757 (1995).
7. S. Akiyama, J. C. Wheeler, D. L. Meier, and I. Lichtenstand, *Astrophys. J.* **584**, 954 (2003).
8. N. V. Ardeljan, G. S. Bisnovaty-Kogan, and S. G. Moiseenko, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **359**, 333 (2005).
9. D. Notzold and G. Raffelt, *Nucl. Phys. B* **307**, 924 (1988).
10. P. Elmfors, D. Grasso, and G. Raffelt, *Nucl. Phys. B* **479**, 3 (1996).
11. A. Erdas, G. W. Kim, and T. H. Lee, *Phys. Rev. D* **58**, 085016 (1998).
12. E. Elizalde, E. J. Ferrer, and V. de la Incera, *Phys. Rev. D* **70**, 043012 (2004).
13. A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev, G. G. Raffelt, and L. A. Vassilevskaya, *Phys. Rev. D* **73**, 023001 (2006).
14. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1981).
15. G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, University of Chicago Press (1996).