

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ РАЗБАВЛЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛУПРОВОДНИКА

Е. З. Мейлихов, Р. М. Фарзетдинова*

*Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 ноября 2009 г.

Теоретически рассматривается ферромагнетизм магнитных примесных атомов, расположенных в барьерных областях различных гетероструктур — одиночном гетеропереходе, одиночной квантовой яме, двойной квантовой яме, сверхрешетке. Косвенное магнитное взаимодействие примесей осуществляется через носители заряда, локализованные в квазидвумерных каналах проводимости этих структур, за счет «провисания» волновой функции носителей заряда в барьерные области. Волновые функции, аналитически определяемые в рамках модели треугольного потенциала, оказываются практически такими же, как при «точном» численном расчете (совместное решение уравнений Пуассона и Шредингера). Найдены соответствующие температуры Кюри, которые в структурах на основе $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ могут, согласно расчету, достигать примерно 500 К.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди существенных препятствий на пути развития полупроводниковой спинтроники есть два принципиальных — отсутствие полупроводниковых материалов и структур, которые 1) были бы ферромагнитны при высокой (комнатной) температуре и 2) обладали бы достаточно высокой подвижностью носителей заряда. В этой связи перспективными представляются гетероструктуры на основе магнитных полупроводников с удаленным легированием и гибридные структуры ферромагнитный металл/полупроводник, магнитные свойства которых в значительной степени определяются высокотемпературным ферромагнетизмом входящего в их состав металла [1].

В настоящей работе теоретически исследуется только первая из перечисленных возможностей (вторая рассматривалась нами в работе [2]). Пионерской в этом направлении была работа [3], в которой изучались магнитные свойства квантовой ямы с односторонним легированием $\text{CdMgZnTe(N)}/\text{CdTe(Mn)}/\text{CdMgZnTe}$. Ферромагнетизм в этой системе связывался с косвенным взаимодействием спинов марганца по механизму Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida

(RKKY) [4]. Измеренная температура Кюри была низка (около 2 К) и согласовывалась с моделью среднего поля. В работе [5] рассматривался ферромагнетизм в гетероструктуре $\text{CdMgTe}/\text{CdTe}/\text{CdTe(Mn)}/\text{CdTe}/\text{CdMgTe}$, в которой слой CdTe(Mn) , содержащий магнитные ионы марганца, находился внутри «немагнитной» квантовой ямы. Расчет температуры Кюри также проводился в рамках теории среднего поля, причем носители заряда (дырки) считались двумерными, а неоднородность их волновой функции в направлении, перпендикулярном плоскости канала, не принималась во внимание. Расчеты показали, что при оптимальных параметрах системы температура Кюри может достигать 5 К. В работе [6] исследовались две структуры на основе магнитного полупроводника GaAs(Mn) — одиночный гетеропереход $\text{GaAs(Mn)}/\text{GaAlAs(Be)}$ и квантовая яма $\text{GaAlAs}/\text{GaAs(Mn)}/\text{GaAlAs(Be)}$, немагнитные части которых содержали легирующий слой бериллия, поставляющий дополнительные носители заряда (дырки) в квазидвумерный канал проводимости в магнитной части структуры. Таким образом удалось поднять температуру Кюри приблизительно до 100 К.

Во всех цитированных выше работах магнитные ионы находились «внутри» проводящего канала, что существенно уменьшало подвижность носи-

*E-mail: meilikhov@imp.kiae.ru

телей. В связи с этим появился интерес к системам, в которых проводящий канал и легирующая примесь разделены в пространстве. По этому пути пошли авторы работы [7], использовавшие гетероструктуру $\text{AlGaAs}(\text{Be})/\text{GaAs}/\delta\text{-Mn}/\text{GaAs}$, в которой δ -слой Mn отделялся от плоскости гетероперехода нелегированным GaAs-слоем (спейсером) толщиной $\Delta = 0 - 10$ нм, и применялось дополнительное легирование бериллием. В такой системе ферромагнетизм наблюдался (при $\Delta = 3$ нм) вплоть до $T_C \approx 170$ К. В более поздней работе [8] тех же авторов эту температуру удалось поднять до величины $T_C \approx 250$ К, что, по-видимому, является рекордно высоким значением температуры Кюри для разбавленного магнитного полупроводника GaAs(Mn).

В работе [9] была построена теория ферромагнетизма в квантовых ямах с магнитным разбавленным полупроводником, возникающего за счет косвенного взаимодействия магнитных примесей через квазидвумерные дырки с квантованными уровнями энергии. Предполагалось, что магнитные примеси расположены внутри квантовой ямы шириной d . При этом, однако, не учитывалось то важное обстоятельство, что когда примеси и носители не разделены в пространстве, средняя длина ℓ пробега носителей в яме становится настолько малой, что условие квантования ($\ell\lambda_F \gtrsim d^2$) нарушается (λ_F — де-Бройлевская длина волны носителей заряда). Действительно, при типичной величине подвижности носителей заряда в пленках из разбавленного магнитного полупроводника GaAs(Mn) порядка $10 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ [10] приведенное неравенство выполняется только для ямы, ширина которой не превышает примерно 10 \AA . В противном случае из-за сильного столкновительного уширения квантованием энергетических уровней носителей в таких пленках можно пренебречь и считать их эффективно трехмерными.

Ситуация принципиально меняется, когда используется так называемое одностороннее, или удаленное легирование (remote doping), при котором примеси и носители расположены по разные стороны гетероперехода. При этом подвижность носителей возрастает на 2–3 порядка по сравнению с предыдущим случаем и их действительно можно считать двумерными, а уровни их энергии квантованными. Системы такого рода не только обладают ферромагнетизмом, но позволяют наблюдать шумниковские осцилляции сопротивления и квантовый эффект Холла — явления, требующие высокой подвижности носителей [11].

Именно этот случай рассматривается в настоящей работе, где исследуются процессы, приводящие

к ферромагнетизму в структурах с разбавленными магнитными полупроводниками, в которых магнитные примеси и квазидвумерные носители заряда, обеспечивающие их взаимодействие, разделены в пространстве.

Для определенности будем рассматривать ферромагнетизм в разбавленном магнитном полупроводнике GaAs(Mn). Однако большая часть полученных выводов справедлива и для других материалов. В тех частях структуры (например, сверхрешетки GaAs(Mn)/GaInAs), которым соответствует большее значение ширины ε_g запрещенной зоны, расположен слой электрически активных магнитных примесей (например, примесей марганца, которые в GaAs являются мелкими акцепторами). В результате перехода части зарядов с уровней примесных атомов в соответствующую зону тех частей структуры, которые характеризуются меньшим значением ε_g , в последних вблизи плоскостей гетеропереходов образуется двумерный газ носителей (для акцепторных примесей — газ дырок) с поверхностной концентрацией N_s . Несмотря на пространственное удаление магнитных примесей от этих двумерных каналов, между примесями может возникнуть косвенное взаимодействие (например, типа RKKY), приводящее к их магнитному упорядочению. В работе [2] показано, что соответствующая температура Кюри, например, для системы GaInAs/GaAs/GaInAs(Mn) может, согласно оценке, приближаться к 300 К.

В настоящей работе рассмотрение той же проблемы распространяется на случай, когда примесный слой располагается в барьере между двумя квантовыми ямами в двухъямной системе или между потенциальными ямами сверхрешетки — периодической системы одинаковых ям (см. рис. 1). В таких конфигурациях, как показано ниже, температура магнитного упорядочения может быть еще выше.

2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ СТРУКТУР С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЯМАМИ

Определяющий волновую функцию носителей заряда потенциал $U(z)$ зависит не только от геометрии и состава системы, но и от электрического поля, которое связано с пространственным зарядом, возникающим при переходе носителей заряда (находящихся вне ямы) с примесей в расположенный в яме проводящий канал. В первом приближении профиль ямы становится треугольным, а наклон ее дна определяется встроенным электрическим полем $\mathcal{E} = (4\pi/\kappa_0)eN_s$, где N_s — поверхностная плотность

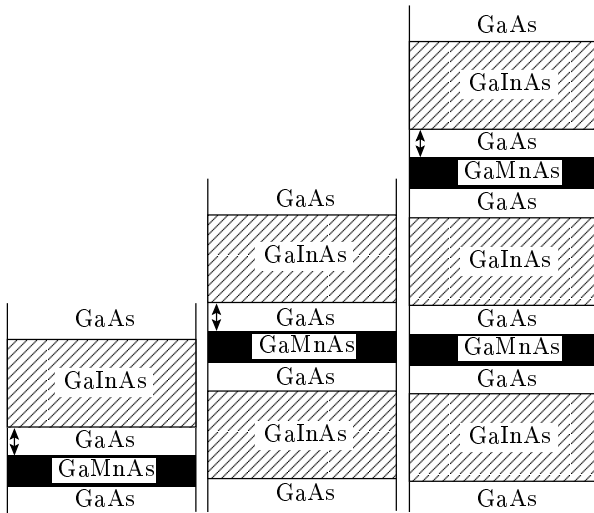


Рис. 1. Схематическое представление рассматриваемых структур. Слева направо: одиночная яма, двойная яма, сверхрешетка

заряда в яме, $\kappa_0 \sim 10$ — диэлектрическая постоянная. В симметричной системе (двойная яма или сверхрешетка) максимальное отклонение формы потенциала от прямоугольной достигается в ее середине и составляет $\Delta U \approx \varepsilon(a/2) \approx (2\pi/\kappa_0)eN_s a$. Этот «перекося» мал по сравнению с глубиной ямы U_0 при условии $\Delta U \ll U_0$, или $U_0 \gg (2\pi/\kappa_0)eN_s a$. Для ямы шириной $a \sim 10a_0$ (a_0 — постоянная решетки) и концентрации носителей в канале $N_s = 10^{12} \text{ см}^{-2}$ приведенное условие дает $U_0 \gtrsim 10$ мэВ, что всегда выполняется в практически интересных случаях. При этом возникает соблазн пренебречь таким «перекосям» и по-прежнему считать яму прямоугольной. Ниже показано, что делать этого нельзя, поскольку волновая функция вне ямы (в области барьера), как раз и определяющая взаимодействие между магнитными примесями, весьма чувствительна к таким искажениям. Считать квантовые ямы прямоугольными можно лишь при качественном анализе различных систем с целью выявления наиболее «выгодной» из них. Для более же точного описания их свойств необходимо уже учитывать треугольность ямы.

Ниже будем рассматривать только ситуации, когда заселен лишь самый нижний из энергетических уровней в яме.

2.1. Одиночная прямоугольная яма

Для последующего сравнения рассмотрим сначала одиночную яму глубиной U_0 и шириной a , которая образована, например, слоем GaAs, заключен-

ным между двумя более широкозонными слоями $\text{Ga}_{1-y}\text{Al}_y\text{As}$, один из которых легирован атомами Mn. Свободные носители заряда, полностью или частично поставляемые примесями, сосредоточены в квазидвумерном проводящем канале внутри потенциальной ямы. В такой системе косвенное взаимодействие магнитных примесей Mn осуществляется за счет «провисания» волновых функций электронов, сосредоточенных, в основном, внутри потенциальной ямы, в область барьера. Это при благоприятных условиях и ведет к их магнитному упорядочению.

Для одиночной прямоугольной ямы энергия E нижнего уровня дается наименьшим корнем уравнения [12]

$$\text{tg} \frac{\alpha a}{2} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (1)$$

где $\alpha(E) = \sqrt{2m^*E/\hbar^2}$, $\beta(E) = \sqrt{2m^*(U_0 - E)/\hbar^2}$. Волновая функция носителей заряда в яме, расположенной в области $-a < z < 0$, определяется соотношениями

$$\psi(z) = A \begin{cases} e^{\beta(z+a)}, & -\infty < z < -a, \\ \psi_a(z) = \frac{\cos[\alpha(z + a/2)]}{\cos(\alpha a/2)}, & -a < z < 0, \\ \psi_b(z) = e^{-\beta z}, & 0 < z < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Для кристалла с периодом решетки a_0 удобно ввести приведенную глубину ямы $u = 2m^*a_0^2U_0/\hbar^2$. На рис. 2 для примера представлена волновая функция (2) носителей заряда в одиночной яме с параметрами $u = 0.36$, $a = 10a_0$ (кривая 1QW), которая понадобится нам для сопоставления свойств такой структуры со свойствами других систем с аналогичными ямами (двойной ямы и сверхрешетки).

2.2. Двойная прямоугольная яма

Рассмотрим теперь систему из двух ям, расположенных, соответственно, в областях $-a < z < 0$, $b < z < a + b$ и разделенных барьером шириной b (в области $0 < z < b$). Энергия E ее нижнего уровня определяется уравнением [13]

$$\text{th} \frac{\beta b}{2} = \frac{(\alpha/\beta) \sin(\alpha a) - \cos(\alpha a)}{(\beta/\alpha) \sin(\alpha a) + \cos(\alpha a)}, \quad (3)$$

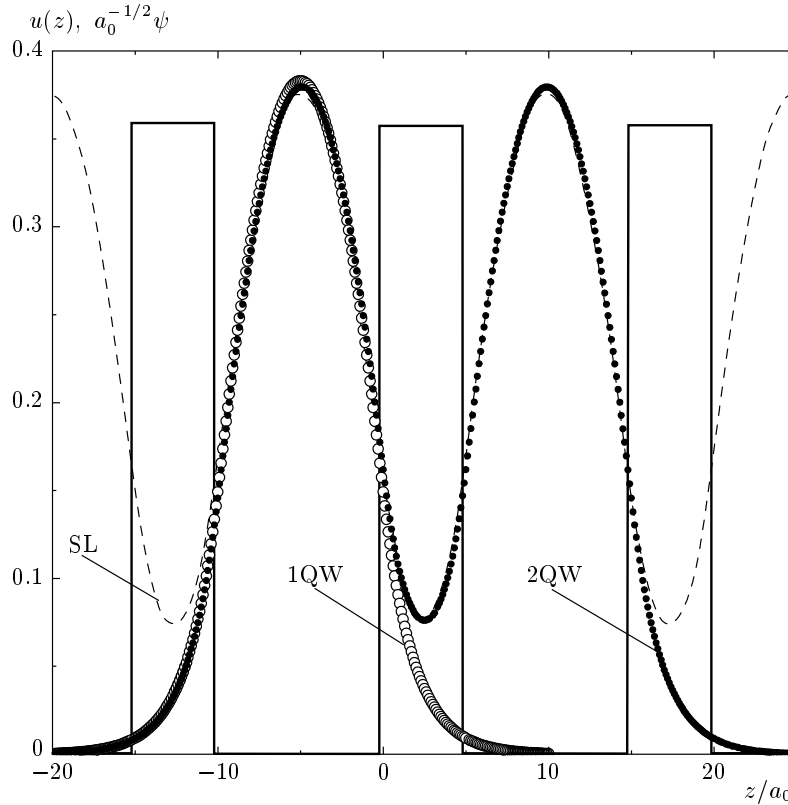


Рис. 2. Волновые функции носителей заряда в структурах с прямоугольными ямами (1QW — одиночная яма, 2QW — двойная яма, SL — сверхрешетка). Параметры структур: $u = 0.36$, $a = 10a_0$, $b = 5a_0$

а волновая функция носителей имеет вид

$$\psi(z) = A \begin{cases} \alpha \exp(\beta(z+a)), & -\infty < z < -a, \\ \psi_a(z) = \alpha \cos[\alpha(z+a)] + \beta \sin[\alpha(z+a)], & -a < z < 0, \\ \psi_b(z) = [\alpha \cos(\alpha a) + \beta \sin(\alpha a)] \times \\ \times \left(\frac{\text{ch}[\beta(z-b/2)]}{\text{ch}(\beta b/2)} \right), & 0 < z < b, \\ \alpha \cos[\alpha(z-a-b)] - \beta \sin[\alpha(z-a-b)], & b < z < a+b, \\ \alpha \exp(-\beta[z-(a+b)]), & a+b < z < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Волновая функция (4) носителей заряда в двойной яме с параметрами $u = 0.36$, $a = 10a_0$, $b = 5a_0$ показана на рис. 2 (кривая 2QW).

2.3. Сверхрешетка с прямоугольными ямами

Рассмотрим, наконец, композиционную сверхрешетку, которая состоит из потенциальных ям шириной a , разделенных барьерами шириной b , внутри которых располагаются магнитные примеси. Уровни энергии и волновые функции электронов в подобной системе найдены в классической работе Кронига–Пенни [14]. Дисперсионное соотношение, определяющее зависимость $E(k_z)$ энергии электронов от продольного волнового вектора k_z (параллельного оси z — направлению роста сверхрешетки), имеет вид

$$\cos(k_z d) = \text{ch}(\beta b) \cos(\alpha a) + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \text{sh}(\beta b) \sin(\alpha a), \quad (5)$$

где $d = a + b$.

Различные решения E_n ($n = 1, 2, \dots$) этого уравнения при заданном значении k_z соответствуют различным энергетическим минизонам. Далее будем рассматривать только ситуацию, когда заселена лишь самая нижняя из них ($n = 1$). Тогда

энергии E_{1min} и E_{1max} , отвечающие дну и потолку этой низшей зоны, являются наименьшими корнями уравнения (5) соответственно при $k_z = 0$ и $k_z = \pi/d$. Волновые функции электронов с этими энергиями определяются простыми соотношениями [15]

$$\psi_a(z) = A \frac{\cos[\alpha(z + a/2)]}{\cos(\alpha a/2)},$$

$$\psi_b(z) = A \begin{cases} \frac{\text{ch}[\beta(z - b/2)]}{\text{ch}[\beta b/2]}, & k_z = 0, \\ -\frac{\text{sh}[\beta(z - b/2)]}{\text{sh}[\beta b/2]}, & k_z = \pi/d, \end{cases} \quad (6)$$

из которых первое справедливо внутри потенциальной ямы (область $-a < z < 0$), а второе — под барьером (область $0 < z < b$).

Нормировочный множитель A определяется условием

$$A^2 \left[\int_{-a}^0 \psi_a(z) \psi_a^*(z) dz + \int_0^b \psi_b(z) \psi_b^*(z) dz \right] = 1. \quad (7)$$

Волновые функции $\psi_a(z)$, $\psi_b(z)$ состояний, рассматриваемых внутри минизоны ($0 < k_z < \pi/d$), имеют более сложный вид:

$$\begin{aligned} \psi_a(z) &= A (\cos(\alpha z) + \beta P \sin(\alpha z)), \\ \psi_b(z) &= A (\text{ch}(\beta z) + \alpha P \text{sh}(\alpha z)), \\ P &= \frac{e^{ik_z d} \cos(\alpha a) - \text{ch}(\beta b)}{\alpha \text{sh}(\beta b) + \beta e^{ik_z d} \sin(\alpha a)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Численный расчет с использованием соотношений (5), (8) показывает, что если $a \sim b$, то с небольшой погрешностью (не более 1%) для $\psi_a(z)$ можно использовать простое соотношение (6), а $\psi_b(z)$ вычислять (с погрешностью порядка 10%) с помощью (простого по структуре) интерполяционного соотношения

$$|\psi_b(z)|^2 = A^2 \left[\cos^2 \left(\frac{k_z d}{2} \right) \left(\frac{\text{ch}[\beta(z - b/2)]}{\text{ch}(\beta b/2)} \right)^2 + \sin^2 \left(\frac{k_z d}{2} \right) \left(\frac{\text{sh}[\beta(z - b/2)]}{\text{sh}(\beta b/2)} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Тем не менее поверхностная плотность N_s носителей заряда в двумерных структурах обычно не превышает 10^{12} см^{-2} [16], так что $k_z \sim N_s^{1/2} \lesssim 10^6 \text{ см}^{-1}$. Поэтому $k_z \ll \pi/d$ для всех структур с периодом $d \lesssim 10^{-6} \text{ см} \approx 20a_0$, а значит, волновые функции всех носителей почти одинаковы и определяются соотношениями (6). В этом приближении носители заряда «почти двумерны».

Рассчитанная в этом приближении волновая функция носителей заряда в сверхрешетке с параметрами, аналогичными тем, которые использовались при рассмотрении двойной ямы (см. выше), представлена на рис. 2 (кривая SL).

Волновые функции носителей в яме во всех трех системах слабо отличаются друг от друга. В то же время, волновые функции в области барьера существенно различны, причем на рис. 2 видно, что наибольшей амплитудой обладает подбарьерная волновая функция носителей в двойной яме. Более существенное провисание волновой функции в области, где сосредоточены магнитные примеси, должно в этом случае способствовать усилению их взаимодействия, приводящего к магнитному упорядочению, и в конечном счете — к повышению температуры Кюри. Расчет подтверждает это предположение — наиболее высокой температурой Кюри, действительно, обладает двухъямная структура (см. ниже).

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИМЕСЕЙ

Пусть в истинно двумерном случае, когда примеси со спинами \mathbf{S}_i , \mathbf{S}_k расположены в плоскости двумерного канала проводимости, энергия их взаимодействия равна

$$J_{ik} = -I_0 \phi(r_{ik}) \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k, \quad (10)$$

где r_{ik} — расстояние между примесями. Характерная энергия взаимодействия I_0 и функция $\phi(r_{ik})$ определяются конкретным механизмом взаимодействия (через двумерный газ носителей заряда) и, например, для РККУ-взаимодействия имеют вид [17]

$$\begin{aligned} I_0 &= J_{pd}^2 \frac{m^* a_0^2}{4\pi \hbar^2}, \quad \phi(r_{ik}) = (k_F a_0)^2 [J_0(k_F r_{ik}) \times \\ &\times N_0(k_F r_{ik}) + J_1(k_F r_{ik}) N_1(k_F r_{ik})] e^{-r_{ik}/\ell}, \end{aligned} \quad (11)$$

где J_{pd} — энергия p - d -взаимодействия, $k_F = (\pi N_s)^{1/2}$ — фермиевский волновой вектор носителей, J_n и N_n — функции Бесселя (при этом $I_0 \approx 0.1 \text{ эВ}$ [18]). Что касается экспоненциального фактора, то он учитывает затухание взаимодействия (с характерной длиной ℓ) за счет рассеяния носителей [19]. В однородном разбавленном магнитном полупроводнике $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ с актуальной концентрацией примесей $x \approx 0.05$ подвижность дырок довольно мала: $\mu_h \sim 10 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ [10], что соответствует их средней длине пробега вдоль ямы $\ell \equiv \ell_0 \sim a_0$.

В рассматриваемом квазидвумерном случае косвенное взаимодействие магнитных примесей, расположенных в области барьера, осуществляется за счет провисания волновых функций носителей из квазидвумерных каналов проводимости (в квантовых ямах) в подбарьерные области. Таким образом, имеется трехзвенная «цепочка» взаимодействий: 1) взаимодействие примесь $i \leftrightarrow$ канал + 2) «передача» взаимодействия вдоль квазидвумерного канала + 3) взаимодействие канал \leftrightarrow примесь k . Каждому из них соответствует свой фактор в суммарном выражении для энергии взаимодействия примесей [5]:

$$J_{ik} = -I_0 \frac{\psi_b^2(z_i)}{\psi_{max}^2} \frac{\langle \psi_a^2 \rangle}{\psi_{max}^2} \phi(r_{ik}) \frac{\psi_b^2(z_k)}{\psi_{max}^2} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_k. \quad (12)$$

Множитель в (12), пропорциональный среднему значению

$$\langle \psi_a^2 \rangle = \frac{1}{a} \int_{-a}^0 \psi_a^2(z) dz$$

квадрата волновой функции в яме, появляется в связи с тем, что эта функция не двумерна, а лишь квазидвумерна (зависит от z).

Пространственное разделение примесей и носителей заряда в рассматриваемых структурах приводит, с одной стороны, к ослаблению косвенного взаимодействия примесей, а с другой стороны — к увеличению длины пробега носителей, способствующему росту этого взаимодействия. Если магнитные примеси расположены в барьерной части структуры, образуя однородный слой толщиной L , отделенный от ямы нелегированной прослойкой (спейсером) толщиной Δ (см. рис. 1), длина ℓ пробега носителей увеличивается (по сравнению с ее значением ℓ_0 для случая, когда примеси располагаются внутри ямы) в отношении $\langle \psi_a^2 \rangle / \langle \psi_L^2 \rangle$ [20], где

$$\langle \psi_L^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{\Delta}^{\Delta+L} \psi_b^2(z) dz$$

— среднее значение квадрата волновой функции в примесном слое толщиной

$$\ell = \ell_0 \langle \psi_a^2 \rangle / \langle \psi_L^2 \rangle. \quad (13)$$

Соответствующий рост подвижности носителей может быть очень существенным. Так, в работе [10] он составил два-три порядка, что позволило наблюдать шубниковские осцилляции проводимости и квантовый эффект Холла в двумерном канале одноямной

структуры с концентрацией удаленных от канала магнитных примесей $x \approx 0.05$.

Таким образом, удаленное легирование способствует повышению подвижности носителей заряда, и, как следствие, росту энергии косвенного взаимодействия магнитных примесей.

Введем цилиндрическую систему координат с прежним началом отсчета оси z , в которой радиус-вектор \mathbf{r} параллелен плоскости перехода. В рамках теории среднего поля будем характеризовать возникающее в системе примесей магнитное упорядочение величиной приведенной локальной намагниченности $j = j(z, r)$, которая совпадает со степенью поляризации примесей и заключена в пределах $-1 < j < 1$. В пренебрежении кристаллической и поверхностной анизотропией, геометрическая анизотропия и симметрия системы приводят к тому, что локальная намагниченность везде направлена вдоль плоскости примесного слоя и зависит только от z : $j = j(z)$.

В континуальном приближении суммарное эффективное поле $H(h)$, которое действует на примесь k , находящуюся в точке $z = h, \rho = 0$, со стороны всех окружающих ее примесей ($i \neq k$), равно

$$\begin{aligned} \mu H(h) = \sum_{i \neq k} J_{ik} \approx -2\pi n_\mu S^2 I_0 \frac{\langle \psi_a^2 \rangle}{\psi_{max}^2} \frac{\psi_b^2(h)}{\psi_{max}^2} \times \\ \times \int_{r_{min}}^{\infty} \phi(r) r dr \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^2(z)}{\psi_{max}^2} j(z) dz, \quad (14) \end{aligned}$$

где ψ_{max} — максимальное значение волновой функции в яме, μ и n_μ — соответственно магнитный момент и концентрация магнитных примесей. Учтено, что расстояние между примесями не может быть меньше некоторого минимального расстояния, которое для атомов марганца, замещающих атомы галлия в решетке GaAs, равно $r_{min} = a_0 \sqrt{2}$, где $a_0 = 5.7 \text{ \AA}$ — сторона кубической ячейки. Введем функцию

$$\Phi(k_F, \ell) = -\frac{\pi}{a_0^2} \int_{r_{min}}^{\infty} \phi(r) r dr, \quad (15)$$

графики которой, например, для РККУ-взаимодействия (11) представлены на рис. 3. Тогда (14) принимает вид

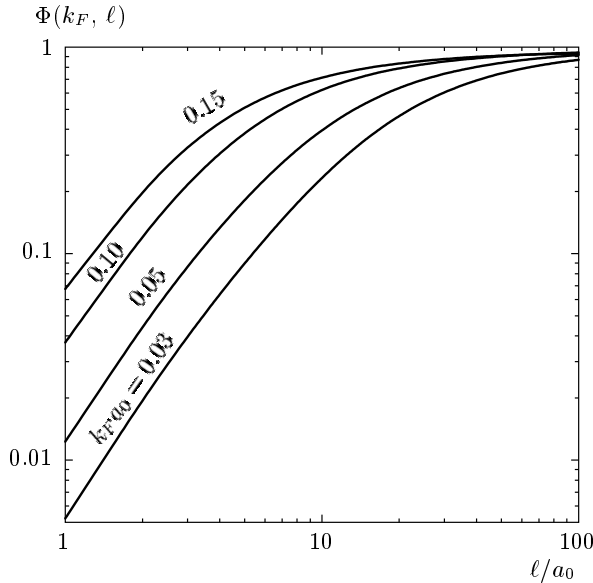


Рис. 3. Функция $\Phi(k_F, \ell)$ для РKKY-взаимодействия (11)

$$\mu H(h) = 2n_\mu a_0^3 S^2 I_0 \Phi(k_F, \ell) \frac{\langle \psi_a^2 \rangle}{\psi_{max}^2} \times \left[\frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^2(z)}{\psi_{max}^2} j(z) dz \right] \frac{\psi_b^2(h)}{\psi_{max}^2}. \quad (16)$$

В теории среднего поля намагниченность в точке $z = h$ связана с определяемым соотношением (14) полным эффективным полем $\mu H(h)$:

$$j(h) = B_S \left[\frac{\mu H(h)}{kT} \right] = B_S \left[\frac{C(h)}{\tau} \left(\frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^2(z)}{\psi_{max}^2} j(z) dz \right) \right], \quad (17)$$

где B_S — функция Бриллюэна для спина S , $\tau = kT/I_0$ — приведенная температура, $C(h) = C_0 \psi_b^2(h)/\psi_{max}^2$, $C_0 = 2n_\mu a_0^3 S^2 [\langle \psi_a^2 \rangle / \psi_{max}^2] \times \Phi(k_F, \ell)$.

Решение этого нелинейного интегрального уравнения имеет вид

$$j(h) = B_S [\gamma C(h)], \quad (18)$$

где параметр γ определяется самосогласованным образом путем подстановки функции (18) в соотношение (17). Такая подстановка приводит к уравнению

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^2(z)}{\psi_{max}^2} B_S [\gamma C(z)] dz. \quad (19)$$

Вблизи температуры, близкой к температуре Кюри, намагниченность мала ($j \rightarrow 0$). Согласно уравнению (18) это возможно только при $\gamma \rightarrow 0$. Используя разложение $B_S(x) = b_1 x - b_3 x^3 + \dots$, в котором $b_1 = (S + 1)/3S$, $b_3 > 0$, находим решение уравнения (19):

$$\gamma^2 = \frac{b_1}{b_3 C_0^2} \left(\frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^4(z)}{\psi_{max}^4} dz - \frac{\tau}{b_1 C_0} \right) \times \left(\frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^8(z)}{\psi_{max}^8} dz \right)^{-1}. \quad (20)$$

При $\gamma = 0$ оно дает температуру Кюри

$$\tau_C = b_1 C_0 \frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^4(z)}{\psi_{max}^4} dz = \tau_0 \Phi(k_F, \ell) \frac{\langle \psi_a^2 \rangle}{\psi_{max}^2} \frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^4(z)}{\psi_{max}^4} dz, \quad (21)$$

где $\tau_0 = (2/3) n_\mu a_0^3 S(S + 1)$, а аргумент функции $\Phi(k_F, \ell)$ находится с помощью соотношения (13). Для спина $S = 5/2$ (ионы Mn, замещающие Ga в GaMnAs [21]) и $n_\mu a_0^3 \approx 0.15$ (при концентрации Mn $x = 0.05$) $\tau_0 \approx 1$.

Формула (21) — основной результат работы. Для вычисления температуры Кюри в той или иной структуре необходимо найти средние значения

$$\frac{1}{a_0} \int_{z=\Delta}^{\Delta+L} \frac{\psi_b^4(z)}{\psi_{max}^4} dz$$

и $\langle \psi_L^2 \rangle$ (см. (13)) биквадрата и квадрата волновой функции $\psi_b(z)$ в слое примесей, расположенных в барьерной части структуры, и среднее значение $\langle \psi_a^2 \rangle / \psi_{max}^2$ квадрата волновой функции в яме. В принципе, соответствующие интегралы легко вычисляются, но получающиеся для них функциональные выражения довольно громоздки. Так, например, для сверхрешетки с однородно легированной магнитными примесями барьерной областью получаем

$$\tau_C = \tau_0 F(\alpha, \beta), \quad F(\alpha, \beta) = \frac{\Phi(k_F, \ell)}{32\beta a_0} \left[\frac{\cos(\alpha a/2)}{\text{ch}(\beta b/2)} \right]^4 \times \left(1 + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right) (6\beta b + 8 \text{sh}(\beta b) + \text{sh}(2\beta b)), \quad (22)$$

а для сверхрешетки с примесным δ -слоем в барьере находим

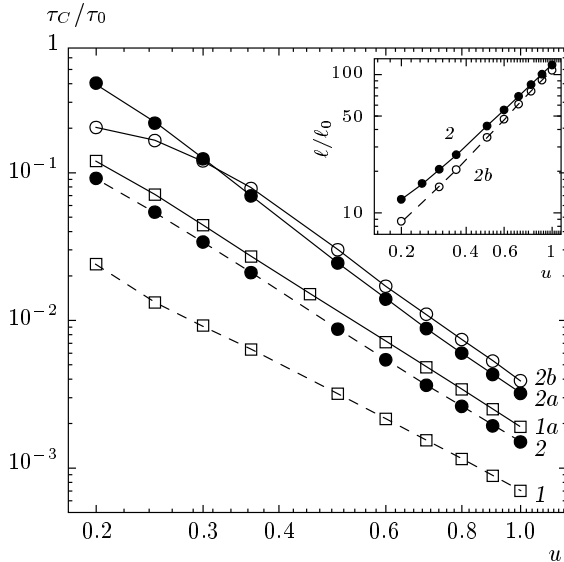


Рис. 4. Температура Кюри рассматриваемых структур с магнитными примесями, однородно распределенными в барьерной области ($L = b$). Две нижние кривые — структуры с прямоугольными ямами (1 — одиночная яма, 2 — двойная яма и сверхрешетка), три верхние кривые — структуры с треугольными ямами (1a — одиночный гетеропереход и одиночная яма, 2a — двойная яма, 2b — сверхрешетка). Параметры структур: $u = 0.36$, $a = 10a_0$, $b = 5a_0$, $qa_0 = 0.25$, $k_F a_0 = 0.1$, $\ell_0 = 3a_0$. На вставке: длина пробега носителей в каналах проводимости сверхрешеток с удаленным легированием

$$\begin{aligned} \tau_C &= \tau_\delta F_\delta(\alpha, \beta, \Delta), \quad F_\delta(\alpha, \beta, \Delta) = \\ &= \frac{1}{2} \Phi(k_F, \ell) \left(1 + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{\cos(\alpha a/2) \operatorname{ch}[\beta(\Delta - b/2)]}{\operatorname{ch}(\beta b/2)} \right\}^4, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{2\beta L}{a} \ell_0 \operatorname{ch}^2 \frac{\beta b}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} \right) \times \\ &\times \{ 2\beta L + \operatorname{sh} \beta(b - 2\Delta) - \operatorname{sh} \beta[(b - 2(\Delta + L))] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

$\tau_\delta = (2/3)n_\delta a_0^2 S(S + 1)$, n_δ — двумерная концентрация примесей в δ -слое.

В качестве иллюстрации найдем с помощью соотношения (21) температуру Кюри для гетероструктур, волновые функции которых представлены на рис. 1, для случая, когда магнитные примеси однородно распределены в области барьера ($L = b$). Глубина ямы выбрана равной $u = 0.36$, чему соответствует $U_0 = 70$ мэВ, а фермиевский волновой вектор носителей в канале положен равным

$k_F a_0 = 0.1$, что соответствует их двумерной концентрации $N_s = (k_F a_0)^2 / 2\pi a_0^2 \approx 8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Результаты расчетов представлены на рис. 4 (две нижние кривые), в подписи к которому указаны принятые при этом параметры структур.

Видно, что более высокой температурой Кюри обладают двухъямные структуры. Она достигает величины $\tau_C \approx 0.1\tau_0$, что при $I_0 \sim 0.1$ эВ дает $T_C \sim 100$ К. Как видно на вставке рис. 4, в такой структуре длина пробега носителей (а значит, и подвижность) на один-два порядка выше, чем в однородном разбавленном магнитном полупроводнике.

Посмотрим теперь, изменится ли полученный результат, если учесть непрямоугольность квантовых ям.

4. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ СТРУКТУР С НЕПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЯМАМИ

4.1. Одиночный гетеропереход и одиночная треугольная яма

Задача о магнитных свойствах гетероструктуры, состоящей из двух различных полупроводников (например, GaAs и GaInAs), один из которых (GaAs) разбавлен атомами марганца, рассматривалась нами ранее [2]. Противоположные по знаку заряды ионизованных примесей и подвижных двумерных носителей в яме формируют электрическое поле \mathcal{E} , которое направлено вдоль нормали (ось z) к плоскости гетероперехода и делает потенциал структуры пространственно-неоднородным: $U = U(z)$.

Точное самосогласованное определение потенциала $U(z)$ и волновых функций подвижных носителей заряда требует совместного решения уравнений Шредингера и Пуассона, которое обычно находится численными итерационными методами [20] (соответствующие расчеты могут быть проведены с помощью публично доступных пакетов [22]). Однако наша задача состоит в получении простых аналитических выражений, описывающих магнитные свойства рассматриваемой системы. В связи с этим мы будем использовать модель гетероструктуры, в которой и дно ямы, и вершина барьера являются треугольными. Соответствующее выражение для потенциальной энергии носителей имеет вид ($z = 0$, как и прежде, соответствует правому краю ямы, магнитные примеси расположены в области $z > 0$)

$$U(z) = \begin{cases} -ze\mathcal{E}, & z < 0, \\ U_0 - ze\mathcal{E}, & z > 0. \end{cases} \quad (25)$$

По-прежнему предполагаем, что плотность носителей в канале не очень велика, так что заселенным оказывается лишь нижний энергетический уровень, а эффективная ширина ямы настолько мала, что смещением подзон легких и тяжелых носителей (дырок) можно пренебречь. Наклон дна ямы определяется электрическим полем $\mathcal{E} \approx (4\pi/\kappa_0)eN_s$, создаваемым находящимися в ней зарядами.

Волновая функция носителей, находящихся на нижнем энергетическом уровне E , вблизи гетероперехода $z = 0$ имеет вид [2]

$$\psi_{HJ}(z) = \begin{cases} \text{Ai}(-qz - \varepsilon/q^2 a_0^2), & z < 0, \\ \frac{\text{Ai}(-\varepsilon/q^2 a_0^2)}{\text{Bi}(-\varepsilon/q^2 a_0^2 + u/q^2 a_0^2)} \times \\ \times \text{Bi}\left(-qz - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right), & z > 0, \end{cases} \quad (26)$$

где $\text{Ai}(z)$, $\text{Bi}(z)$ — функции Эйри,

$$u \equiv \frac{2m^* a_0^2 U_0}{\hbar^2}, \quad \varepsilon \equiv \frac{2m^* a_0^2 E}{\hbar^2}, \quad q \equiv \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} e\mathcal{E}\right)^{1/3}, \quad (27)$$

ε — корень уравнения

$$\text{Ai}\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right) \text{Bi}'\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right) - \text{Ai}'\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right) \text{Bi}\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right) = 0, \quad (28)$$

коэффициент C находится из условия нормировки.

Описываемые соотношением (26) волновые функции $\psi_{HJ}(z)$ приведены на рис. 5. Они заметно отличны от нуля лишь в области, примыкающей к гетерогранице. Это известный эффект смещения волновой функции к краю прямоугольной ямы [13]. С уменьшением глубины ямы, а также с ростом поверхностной концентрации носителей (чему соответствует увеличение параметра qa_0)¹⁾ максимум волновой функции все более приближается к границе, что, естественно, способствует усилению косвенного обмена и росту температуры Кюри в рассматриваемой системе.

Чтобы оценить, насколько близки результаты расчета волновой функции в рамках описанной

¹⁾ Простая оценка при $N_s \gtrsim 10^{11} \text{ см}^{-2}$ дает $qa_0 = (2a_0/a_B)^{1/3} (N_s a_0^2)^{1/3} \approx (N_s a_0^2)^{1/3} \approx 0.2 (a_B)^{1/3} = 4\pi\hbar^2 \kappa / m^* e^2$ — боровский радиус в полупроводнике).

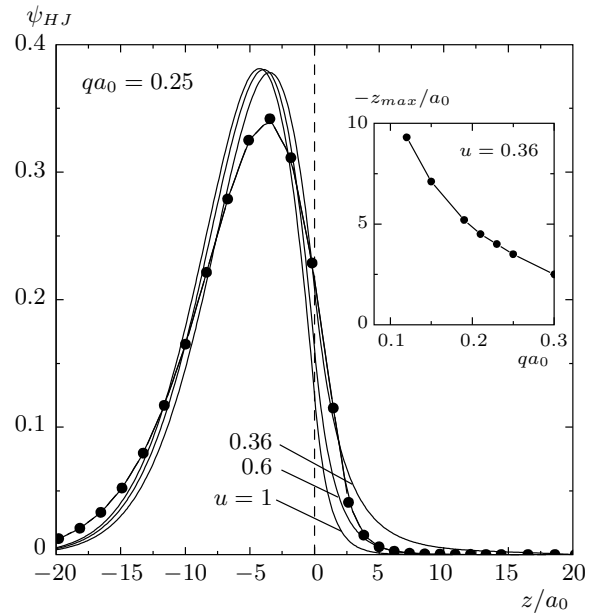


Рис. 5. Волновые функции носителей заряда вблизи плоскости одиночного гетероперехода с разрывом зон $u = 0.36, 0.6, 1$ при $qa_0 = 0.25$. Темные точки — волновая функция, найденная путем совместного численного решения уравнений Шредингера и Пуассона, для структуры с $u = 0.36$. На вставке: положение максимума волновой функции при различных значениях параметра qa_0

«треугольной» модели, к «точным» результатам, на рис. 5 приведена волновая функция, найденная путем совместного численного решения уравнений Шредингера и Пуассона с помощью вычислительного пакета [22]. Этот расчет относится к структуре с $u = 0.36$ и концентрацией примесей в барьере, соответствующей значению $qa_0 = 0.25$. Видно, что принятая модель не приводит к большим ошибкам.

Проведенное выше рассмотрение в равной мере относится и к гетероструктуре, состоящей из одиночной квантовой ямы (например, гетероструктуре GaAs/GaInAs/GaMnAs), в одной из барьерных областей которой расположен (отделенный спейсером от ямы) слой атомов марганца. Следует учесть, однако, что максимум волновой функции может находиться лишь в той половине ямы, со стороны которой располагаются магнитные примеси-акцепторы, т. е. должно быть $|z_{max}| < a/2$. В то же время, из вставки рис. 5 следует $|z_{max}| \approx 1/qa_0$, что приводит к требованию $a \gtrsim 2/qa_0 \approx 10a_0$.

4.2. Двойная непрямоугольная яма

Рассмотрим теперь две ямы, разделенные барьером шириной b , внутри которого находится слой магнитных примесей. Соответствующее выражение для потенциальной энергии носителей имеет вид ($z = 0$, как и прежде, соответствует правому краю ямы, магнитные примеси расположены в области $0 < z < b$)

$$U(z) = \begin{cases} -ze\mathcal{E}, & z < 0, \\ U_0 - ze\mathcal{E}, & 0 < z < b/2, \\ U_0 + (z - b)e\mathcal{E}, & b/2 < z < b, \\ (z - b)e\mathcal{E}, & z > b. \end{cases} \quad (29)$$

Волновая функция носителей симметрична относительно средней плоскости $z = b/2$ и имеет вид

$$\psi_{2QW}(z) = \begin{cases} C_1 \text{Ai}(-qz - \varepsilon/q^2 a_0^2), & z < 0, \\ C_2 \text{Ai}\left(-qz - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right) + \\ + C_3 \text{Bi}\left(-qz - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right), & 0 < z < b/2, \end{cases} \quad (30)$$

где ε — корень уравнения

$$\frac{A_1}{A'_1} = \frac{A_3 B'_4 - A'_4 B_3}{A'_3 B'_4 - A'_4 B'_3}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv A_1(\varepsilon) = \text{Ai}\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right), \\ A_3 &\equiv A_3(\varepsilon) = \text{Ai}\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right), \\ B_3 &\equiv B_3(\varepsilon) = \text{Bi}\left(-\frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right), \\ A_4 &\equiv A_4(\varepsilon) = \text{Ai}\left(-\frac{qb}{2} - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right), \\ B_4 &\equiv B_4(\varepsilon) = \text{Bi}\left(-\frac{qb}{2} - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} + \frac{u}{q^2 a_0^2}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

«штрих» означает дифференцирование по ε . Коэффициенты

$$C_1, \quad C_2 = C_1 \frac{A_1 B'_4}{A_3 B'_4 - A'_4 B_3}, \quad C_3 = -C_2 \frac{A'_4}{B'_4} \quad (33)$$

находятся из условия нормировки.

На рис. 6 приведены волновые функции носителей заряда в непрямоугольных двойных ямах различной глубины с встроенным электрическим полем \mathcal{E} , соответствующим значению $qa_0 = 0.25$. Там же для сравнения показана волновая функция в двойной прямоугольной яме глубиной $u = 0.36$. Видно, что значение последней во внутреннем барьере существенно ниже, чем в первом случае.

Описываемые соотношением (30) волновые функции $\psi_{2QW}(z)$ приведены также на рис. 7. Сравнивая их с волновыми функциями одиночной ямы, замечаем, что среднее значение $\psi_{2QW}(z)$ в барьере ($0 < z < b = 5a_0$) существенно выше, что, естественно, должно привести к повышению температуры Кюри.

4.3. Сверхрешетка

Рассмотрим сверхрешетку, состоящую, как и прежде, из периодически повторяющихся потенциальных ям шириной a , разделенных барьерами шириной b , внутри которых располагаются магнитные примеси. Однако учтем теперь, что поле пространственного заряда искажает дно каждой ямы и вершину каждого барьера. В первом приближении они приобретают треугольную форму (симметричную относительно соответственно средней плоскости ямы или барьера), причем дно изгибается вверх, а вершина — вниз. Соответствующее выражение для потенциальной энергии носителей имеет вид

$$U(z) = \begin{cases} (z + a)e\mathcal{E}, & -a < z < a/2, \\ -ze\mathcal{E}, & -a/2 < z < 0, \\ U_0 - ze\mathcal{E}, & 0 < z < b/2, \\ U_0 + (z - b)e\mathcal{E}, & b/2 < z < b \end{cases} \quad (34)$$

(яма, как и прежде, расположена в области $-a < z < 0$, а барьер — в области $0 < z < b$).

Волновые функции симметричны относительно плоскостей $z = a/2$ и $z = b/2$, периодичны (с периодом $a + b$) и имеют вид

$$\psi_{SL}(z) = \begin{cases} C_1 \text{Ai}\left[-q(z + a) - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right] + \\ + C_2 \text{Bi}\left[-q(z + a) - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right], & -a < z < -a/2, \\ C_1 \text{Ai}\left(-qz - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right) + \\ + C_2 \text{Bi}\left(-qz - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2}\right), & -a/2 < z < 0, \\ C_3 \text{Ai}\left(-qz - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right) + \\ + C_4 \text{Bi}\left(-qz - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right), & 0 < z < b/2, \\ C_3 \text{Ai}\left[-q(z - b) - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right] + \\ + C_4 \text{Bi}\left[-q(z - b) - \frac{\varepsilon - u}{q^2 a_0^2}\right], & 0 < z < b/2. \end{cases} \quad (35)$$

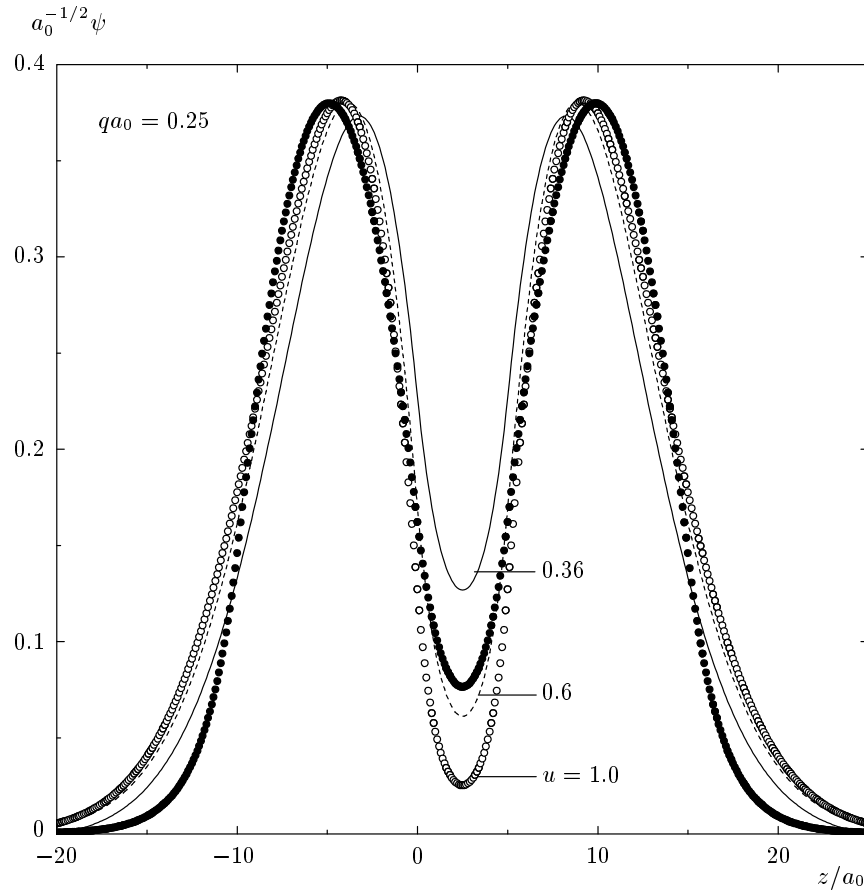


Рис. 6. Волновые функции носителей заряда в непрямоугольных ямах различной глубины с $qa_0 = 0.25$ и в двойной прямоугольной яме глубиной $u = 0.36$ (третья кривая снизу). Параметры структур: $a = 10a_0$, $b = 5a_0$

Условия шивки приводят к уравнению

$$\frac{A_1 B_2' - A_2' B_1}{A_1' B_2 - A_2 B_1'} = \frac{A_3 B_4' - A_4' B_3}{A_3' B_4 - A_4 B_3'} \quad (36)$$

определяющему энергию ε уровней в такой системе. Здесь

$$\begin{aligned} A_2 &\equiv A_2(\varepsilon) = \text{Ai} \left(-qa/2 - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} \right), \\ B_2 &\equiv B_2(\varepsilon) = \text{Bi} \left(-\frac{qa}{2} - \frac{\varepsilon}{q^2 a_0^2} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Коэффициенты

$$\begin{aligned} C_1, \quad C_2 &= -C_1 \frac{A_2'}{B_2'}, \\ C_3 &= C_1 \frac{A_1 B_2' - A_2' B_1}{A_3 B_4' - A_4' B_3} \frac{B_4'}{B_2'}, \quad C_4 = -C_3 \frac{A_4'}{B_4'} \end{aligned} \quad (38)$$

находятся из условия нормировки.

Волновые функции различных структур с непрямоугольными ямами глубиной $u = 0.36$ представле-

ны на рис. 7. Значения волновых функций в барьерах сверхрешетки и во внутренней части двойной ямы практически совпадают, а значение волновой функции одиночной ямы внутри барьера существенно ниже. Это означает возможность существенного повышения температуры Кюри при использовании структур более сложных, чем одиночная яма.

Найденные с помощью соотношения (21) температуры Кюри для различных гетероструктур с непрямоугольными ямами приведены на рис. 4 (три верхние кривые) для случая, когда магнитные примеси однородно распределены в области барьера. Видно, что все эти структуры характеризуются гораздо более высокими температурами Кюри, чем их прямоугольные аналоги. Согласно расчетам возможно достижение значений $\tau_C \approx 0.5\tau_0$, что при $I_0 \sim 0.1$ эВ дает $T_C \approx 500$ К. Насколько это реально, могут показать соответствующие эксперименты.

Таким образом, следует ожидать, что магнитные примеси в рассмотренных полупроводниковых

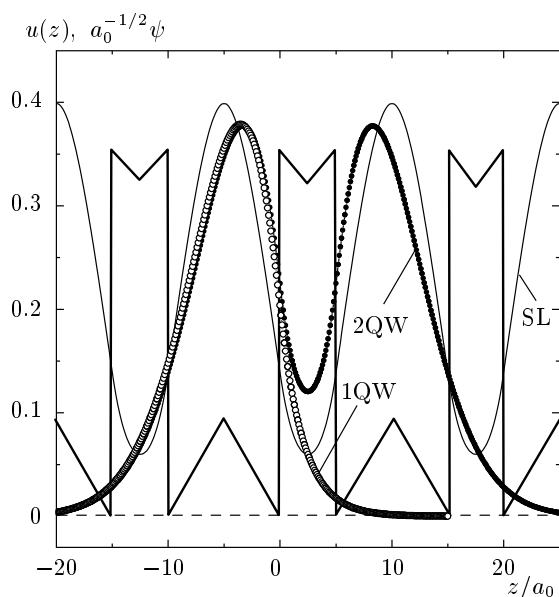


Рис. 7. Волновые функции носителей заряда в структурах с прямоугольными ямами глубиной $u = 0.36$. Параметры структур: $a = 10a_0$, $b = 5a_0$, $qa_0 = 0.25$

гетероструктурах с удаленным легированием будут магнитно-упорядочены при повышенных температурах. Поскольку это сопровождается спиновой поляризацией носителей заряда [24], обеспечивающих косвенное взаимодействие примесей, подобные структуры могут представлять интерес в качестве базовых элементов спинтроники.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 09-02-00579, 09-02-92675-инд-а, 09-07-12151-офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Maccerozzi, M. Sperl, G. Pannacione, J. Minár, S. Polesya, H. Ebert, U. Wurstbauer, M. Hochstrasser, G. Rossi, G. Woltersdorf, W. Wegscheider, and C. H. Back, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 267201 (2008).
2. Е. З. Мейлихов, Р. М. Фарзетдинова, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 568 (2008).
3. A. Haury, A. Wasiela, A. Arnoult, J. Cibert, S. Tatarenko, T. Dietl, and Y. Merle d'Aubigné, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 511 (1997).
4. Д. Маттис, *Теория магнетизма*, Мир, Москва (1967).

5. M. A. Boselli, I. C. da Cunha Lima, and A. Ghazali, *J. Appl. Phys.* **85**, 5944 (1999); **87**, 6439 (2000).
6. T. Wojtowicz, W. L. Lim, X. Liu, M. Dobrowolska, J. K. Furdyna, K. M. Yu, W. Walukiewicz, I. Vurgaftman, and J. R. Meyer, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 4220 (2003).
7. A. M. Nazmul, S. Sugahara, and M. Tanaka, *Phys. Rev. B* **67**, 241308(R) (2003).
8. A. M. Nazmul, T. Amemiya, Y. Shuto, S. Sugahara, and M. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 017201 (2005).
9. Byoung-hak Lee, T. Jungwirth, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **61**, 15606 (2000).
10. R. Moriya and H. Munekata, *J. Appl. Phys.* **93**, 4603 (2003).
11. М. А. Панков, Б. А. Аронзон, В. В. Рыльков, А. Б. Давыдов, Е. З. Мейлихов, Р. М. Фарзетдинова, Э. М. Пашаев, М. А. Чуев, И. А. Субботин, И. А. Лихачев, Б. Н. Звонков, А. В. Лашкул, Р. Лайхо, *ЖЭТФ* **136**, 346 (2009).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, Москва (1963).
13. E. O'Reilly, *Quantum Theory of Solids*, CRC Press (2002).
14. R. D. Kronig and W. G. Penny, *Proc. Roy. Soc. London* **130**, 499 (1931).
15. Hung-Sik Cho and P. R. Prucnal, *Phys. Rev. B* **36**, 3237 (1987).
16. F. Stern, *Sol. St. Comm.* **21**, 163 (1977).
17. D. N. Aristov, *Phys. Rev. B* **55**, 8064 (1997).
18. D. J. Priour, Jr., E. H. Hwang, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 037201 (2005).
19. P. G. de Gennes, *J. Phys. Radium* **23**, 630 (1962).
20. T. Ando, A. Fowler, and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, (1984).
21. T. C. Schulthess, W. M. Temmerman, Z. Szotek, A. Svane, and L. Petit, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 165207 (2007).
22. <http://www.nextnano.de/>;
<http://www.nd.edu/gsnider/>.
23. P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures*, Wiley (2005).
24. Е. З. Мейлихов, Р. М. Фарзетдинова, *ЖЭТФ* **136**, 324 (2009).