

## ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ В МОДЕЛЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

*С. О. Алексеев<sup>a\*</sup>, Д. А. Стародубцева<sup>b\*\*</sup>*

*<sup>a</sup> Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Уральский государственный университет им. А. М. Горького  
620083, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 4 июня 2010 г.

Проведено исследование уравнений геодезических для предложенного в работе [1] решения типа «черная дыра» в модели Рэндал – Сандрума с одной браной. Решение, являясь обобщением метрики Шварцшильда, имеет структуру типа структуры Рейсснера – Нордстрема, причем вместо электрического заряда выступает «приливной заряд». После исследования поведения геодезических показано, что данное решение не противоречит наблюдательным данным, не предсказывая появления каких-либо принципиально новых эффектов. Более точное ограничение на значения «приливно-го заряда» получается из анализа круговых орбит.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Невозможность прямого квантования общей теории относительности (ОТО), как это было сделано с электродинамикой, приводит к серьезным проблемам при попытках построения единой теории всех физических взаимодействий. С одной стороны, мы имеем ОТО, которая полностью описывает современные экспериментальные и наблюдательные данные, давая основу для понимания Вселенной на больших масштабах. С другой стороны, квантовая механика дает понимание мира на микроскопических масштабах. К сожалению, эти две теории на данный момент несовместимы из-за неперенормируемости ОТО. Гравитационное взаимодействие становится значимым лишь для энергий порядка  $10^{19}$  ГэВ, поэтому роль гравитационного взаимодействия в современной экспериментальной физике очень мала и в квантовом описании можно не учитывать гравитацию. Учет квантовых эффектов в гравитации принципиален для понимания Большого Взрыва, ранних стадий эволюции Вселенной, механизма испарения черных дыр.

Не до конца решен вопрос о последних стадиях

хокинговского испарения черных дыр [2–4]. Исследование этих вопросов требует создания обобщенной теории гравитации, которой может быть теория струн в ее низкоэнергетическом пределе. В процессе перехода к низкоэнергетическому приближению возникает так называемая модель «мира на бране», основная идея которой состоит в том, что наш мир есть четырехмерная гиперповерхность (брана), вложенная в объемлющее многомерное пространство. Вещество и поля локализованы на бране, и только гравитация может распространяться во всем многомерном пространстве. Такие модели примечательны тем, что в них разрешается проблема иерархии: почему характерный энергетический масштаб гравитационного взаимодействия настолько отличается от энергетических масштабов других взаимодействий. При этом четырехмерный планковский масштаб перестает быть фундаментальной характеристикой, а становится лишь характеристикой эффективной [5–7]. Истинно фундаментальной характеристикой становится многомерный планковский масштаб, связанный с четырехмерным через свойства и характерный размер дополнительных измерений. В моделях «мира на бране» фундаментальный планковский масштаб может изменяться с  $10^{19}$  ГэВ до энергий порядка  $10^3$  ГэВ, делая поиски эксперимен-

\*E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

\*\*E-mail: starodubceva\_d@bk.ru

тальных эффектов от дополнительных измерений более перспективными.

Цель данной работы — исследовать свойства решения типа «черная дыра», полученного в [1] в рамках модели с некомпактными дополнительными измерениями, и проверить ограничения на значения параметров решения, при которых не будет противоречий с существующими астрофизическими данными.

## 2. РЕШЕНИЕ ТИПА «ЧЕРНАЯ ДЫРА»

В контексте модели «мира на бране» возникают новые решения типа «черная дыра», необычные свойства которых связаны с наличием дополнительных измерений. Исследование гравитационного коллапса на бране проведено в работах [8, 9]. В работе [1] получено одно из первых локализованных на бране решений типа «черная дыра» в контексте модели Рэндал–Сандрума с однойбраной (модель RS2)<sup>1)</sup>. В этой работе рассмотрены пятимерные уравнения поля:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{AB} = \\ = \tilde{\kappa}^2 \left( -\tilde{\Lambda} \tilde{g}_{AB} + \delta(\chi) (-\lambda \delta_A^\mu \delta_B^\nu g_{\mu\nu} + \delta_A^\mu \delta_B^\nu T_{\mu\nu}) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины с тильдой относятся к пятимерному пространству, пятимерные величины обозначаются большими латинскими буквами, четырехмерные — малыми греческими. Здесь  $\tilde{G}_{AB}$  — тензор Эйнштейна,  $\tilde{\kappa}^2 = 8\pi/\tilde{M}_{pl}^3$ ,  $\tilde{M}_{pl}$  — многомерная масса Планка,  $\lambda$  — натяжение браны,  $\tilde{\Lambda}$  — многомерная космологическая постоянная,  $g_{\mu\nu}$  — индуцированная метрика на бране,  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса на бране. Брана расположена в точке  $\chi = 0$ , где  $\chi$  — координата дополнительного измерения. Соответствующие уравнения гравитационного поля на бране содержат члены, несущие вклад дополнительных измерений [1]:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + \tilde{\kappa}^4 S_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где  $\kappa^2 = 8\pi/M_{pl}^2$ ,  $S_{\mu\nu}$  — квадратная комбинация тензора энергии-импульса,  $\mathcal{E}_{\mu\nu}$  — проекция на брану пятимерного тензора Вейля. Так как рассматривается

вакуумное решение, после дополнительных преобразований уравнения принимают вид

$$R_{\mu\nu} = -\mathcal{E}_{\mu\nu}, \quad R_\mu{}^\mu = 0 = \mathcal{E}_\mu{}^\mu, \quad \nabla^\mu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0.$$

Решение на бране получается для метрики, удовлетворяющей уравнениям (2). Метрика имеет вид [1]

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3)$$

где

$$\Delta(r) = 1 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \quad (4)$$

$\alpha$  и  $\beta$  — константы. Эта метрика математически имеет вид метрики Рейсснера–Нордстрема, где  $\alpha = -2M/M_{pl}^2$ ,  $M$  — масса, а  $\beta = q/\tilde{M}_{pl}^2$ ,  $q$  — «приливной заряд», возникающий из тензора Вейля дополнительного измерения, проекция которого на брану формально отождествляется с тензором энергии-импульса, т. е. приливной заряд — это «отпечаток» на бране гравитационного поля дополнительного пространства. В данной метрике возникают два решения типа «черная дыра». Одно — классическое решение типа Рейсснера–Нордстрема с двумя горизонтами. Данный тип решения соответствует  $\beta > 0$ . Другое решение — новый тип черных дыр, — соответствует  $\beta < 0$  (такая возможность отсутствует в классической ОТО). Решение при  $\beta < 0$  имеет один горизонт,

$$r_h = \frac{M}{M_{pl}^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - q \frac{M_{pl}^4}{M^2 M_{pl}^2}} \right], \quad (5)$$

меньшую температуру и большую энтропию по сравнению со шварцшильдовским случаем. Гравитационный потенциал в метрике Шварцшильда

$$\Phi = -\frac{M}{M_{pl}^2 r}$$

переходит в потенциал

$$\Phi = -\frac{M}{M_{pl}^2 r} + \frac{q}{2\tilde{M}_{pl}^2 r^2}. \quad (6)$$

Авторы работы [1] показали, что случай  $q < 0$  физически более естественный, чем случай  $q > 0$ . Для  $q < 0$  эффективная плотность энергии на бране отрицательна, так же, как и плотность энергии гравитационного поля изолированного массивного источника в ньютоновской теории. Сингулярность для отрицательных  $q$  пространственно-подобна (как в

<sup>1)</sup> Когда данная работа была уже полностью подготовлена к печати, появилось еще одно решение для описания черной дыры в модели RS2 в работе [10]. В этой же работе даны разъяснения причин появления в работах [11, 12] предположения о невозможности существования подобного решения.

шварцшильдовском случае), тогда как положительные значения  $q$  ведут к времени-подобной сингулярности, качественно меняя природу ОТО. Авторы работы [1] предлагают следующее ограничение на «приливной заряд»  $q$ , исходя из требования, чтобы поправочный член в гравитационном потенциале был много меньше классического шварцшильдовского члена (на масштабах солнечных масс и радиусов):

$$|q| \ll 2 \left( \frac{\widetilde{M}_{pl}}{M_{pl}} \right)^2 M_{\odot} R_{\odot}, \quad (7)$$

где фундаментальная масса Планка  $\widetilde{M}_{pl}$  связана с ее эффективной величиной  $M_{pl}$  как [1]

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{\widetilde{M}_{pl}^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \widetilde{M}_{pl},$$

$M_{\odot}$  и  $R_{\odot}$  — масса и радиус Солнца. Ограничение (7) оставляет возможность для достаточно больших по модулю величин «приливногo заряда», способных повлиять на геометрию в масштабе звездных масс.

Цель данной работы — найти решения уравнений геодезических в метрике (3), провести сравнение с геодезическими метрики Шварцшильда. Решение Рейсснера–Нордстрема неустойчиво, так как макроскопический электрический заряд черной дыры быстро нейтрализуется окружающим веществом. Заряд в рассматриваемой метрике имеет геометрическую природу, следовательно, данное решение не подвержено тому типу неустойчивости, который характерен для решения Рейсснера–Нордстрема. Метрика типа Рейсснера–Нордстрема исследована для положительных значений заряда (в классической метрике Рейсснера–Нордстрема параметру  $\beta$  соответствует квадрат электрического заряда). Однако отрицательные значения параметра, соответствующие обсуждаемому типу заряда, ранее не рассматривались из-за отсутствия возможности для  $q < 0$  в классической ОТО. Это позволяет ожидать появления новых эффектов, которые могут быть доступны для наблюдения.

### 3. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Обсудим уравнения движения пробных частиц, не конкретизируя знак  $\beta$ . Проведем вывод уравнений, следуя [13], и сравним случаи  $\beta = 0$  и  $\beta \neq 0$ . Уравнения геодезических могут быть получены из лагранжиана:

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}, \quad (8)$$

где  $\tau$  — некоторый аффинный параметр на геодезической. Для времени-подобных геодезических ( $ds^2 > 0$ )  $\tau$  можно отождествить с собственным временем. При переходе к новой переменной  $u = 1/r$  уравнения принимают вид

$$\frac{d}{d\tau} t(\tau) - \frac{r(\tau)^2 E}{r(\tau)^2 + \alpha r(\tau) + \beta} = 0, \quad (9)$$

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} - \frac{\alpha u + \beta u^2}{L^2} - (u^2 + \alpha u^3 + \beta u^4), \quad (10)$$

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \frac{1}{u^2 L^2}, \quad (11)$$

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{E}{L^2(u^2 + \alpha u^3 + \beta u^4)}. \quad (12)$$

Данная система уравнений задает времени-подобные геодезические, давая возможность определить обратный радиус  $u$ , координатное время  $t$  и собственное время  $\tau$  в зависимости от угла  $\phi$ .

## 4. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОРБИТЫ

### 4.1. Времени-подобные геодезические

Рассмотрим случай, когда значение радиальной координаты  $r$  вдоль геодезической ограничено сверху. В этом случае  $E^2 < 1$ . Значениям  $E^2 > 1$  соответствуют неограниченные орбиты. Перепишем уравнение (10) в виде

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = f(u). \quad (13)$$

Из (10) видно, что для шварцшильдовского случая  $\beta = 0$  функция  $f(u)$  представляет собой полином третьего порядка относительно  $u$ , т. е. имеет, в общем случае, три корня (см. рис. 1), тогда как для  $\beta \neq 0$  эта функция представляет собой полином четвертого порядка.

Различные пары значений  $E^2$  и  $L$  допускают существование пяти различных случаев. В работе [13] Чандрасекар вводит понятия орбит первого и второго рода. Орбиты первого рода осциллируют между двумя конечными значениями радиуса (примером является область между корнями  $u_1$  и  $u_2$  функции  $f(u)$ , см. рис. 1). Орбиты второго рода, начинаясь

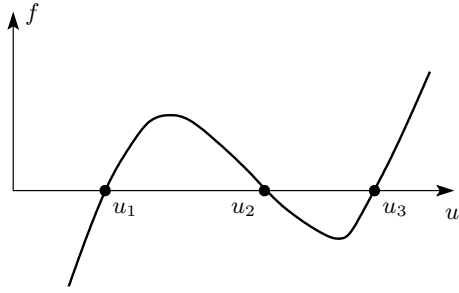


Рис. 1. Вид функции  $f(u)$  для  $\beta = 0$

на некотором расстоянии в апоцентре (область правее точки  $u_3$  на рис. 1), заканчиваются в сингулярности. Орбиты первого рода — это релятивистский аналог орбит Кеплера, орбиты второго рода не имеют аналогов в теории геодезических для метрик Шварцшильда и Рейсснера – Нордстрема.

Принципиальное отличие в случае уравнения четвертого порядка состоит в том, что функция  $f(u)$  может иметь в общем случае еще один корень (а также еще один экстремум). Кроме того, при  $r \rightarrow -\infty$  меняется асимптотика  $f(u)$ , т. е. левая ветка графика оказывается направленной вверх, а не вниз, что, в принципе, может привести к существованию еще одного класса орбит, связанных с точкой  $u_4$  (см. рис. 2).

Такое возможно, если все корни уравнения  $f(u) = 0$  положительны. Рассмотрим  $f(u)$  в виде

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)\beta, \quad (14)$$

и будем считать, что все корни положительные. Раскрыв скобки и сравнив с уравнением (10), получим

$$-u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (15)$$

Таким образом, мы пришли к противоречию, так как  $\alpha/\beta > 0$ . Следовательно, как минимум один корень всегда будет отрицательным, а значит, наличие  $\beta$  не приводит к появлению нового класса орбит. Заметим, что этот результат не зависит от  $L$  и  $E$ , а, значит, справедлив и для неограниченных орбит. Рассмотрим отличие от геометрии Шварцшильда на примере круговых орбит и радиальных геодезических, ведь, несмотря на свою простоту, эти частные случаи уравнений движения иллюстрируют важные свойства пространства-времени.

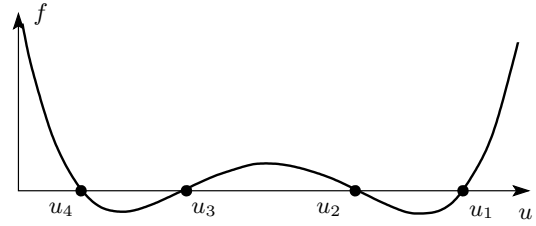


Рис. 2. Вид функции  $f(u)$  в случае  $\beta \neq 0$

### 4.2. Радиальные геодезические

Радиальные геодезические соответствуют нулевому моменту количества движения:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \Delta. \quad (16)$$

Рассмотрим траектории частиц, начинающих движение из апоцентра, находящегося на некотором конечном расстоянии от центра в состоянии покоя, и падающих к центру. Из условия  $r = r_i$  при  $\dot{r} = 0$  имеем

$$r_i^{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta(1 - E^2)}}{2(1 - E^2)}, \quad (17)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 E}{r^2 + \alpha r + \beta}. \quad (18)$$

Для ограниченных орбит положительным является лишь одно значение  $r_i$ , соответствующее знаку «+» (дискриминант в выражении (17) для  $E^2 < 1$  и  $\beta < 0$  оказывается больше  $\alpha^2$ , таким образом, второе слагаемое в числителе оказывается по модулю больше  $\alpha$ ). Это значение больше, чем соответствующее значение  $r_i^{sch}$  в шварцшильдовской геометрии,

$$r_i^{sch} = -\frac{\alpha}{1 - E^2}. \quad (19)$$

Для расчета собственного времени достижения сингулярности в уравнениях (17) и (18) перейдем к переменной  $\eta$  следующим образом:

$$r = r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad (20)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = -r_i \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (21)$$

Таким образом,  $\eta = 0$  при  $r = r_i$  и  $\eta = \pi$  при  $r = 0$  (в сингулярности), получаем

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{-(1-E^2)r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) - 2\alpha r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) - 4\beta}{r_i^2 \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}. \quad (22)$$

Комбинируя это выражение с уравнением (21), получим

$$\left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)^2 = \frac{r_i^4 \cos^6\left(\frac{\eta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right)}{-(1-E^2)r_i^2 \cos^4\left(\frac{\eta}{2}\right) - \alpha r_i \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) - 2\beta}. \quad (23)$$

Сделаем еще одну замену переменных, введя переменную  $x = \cos^2(\eta/2)$  ( $x$  изменяется от 1 до 0). Тогда получим уравнение

$$\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 = \frac{r_i^4 x^2}{-(1-E^2)r_i^2 x^2 - \alpha r_i x - 2\beta}. \quad (24)$$

Так как мы рассматриваем частицы, падающие к центру, то

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{r_i^2 x}{\sqrt{-(1-E^2)r_i^2 x^2 - \alpha r_i x - 2\beta}}. \quad (25)$$

После интегрирования получаем

$$\tau = \frac{\sqrt{-(1-E^2)r_i^2 x^2 - \alpha r_i x - 2\beta}}{(1-E^2)} - \frac{\alpha}{2(1-E^2)^{3/2}} \arcsin\left[-\frac{2(1-E^2)r_i x + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8\beta(1-E^2)}}\right] - \tau_1, \quad (26)$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{-(1-E^2)r_i^2 - \alpha r_i - 2\beta}}{1-E^2} - \frac{\alpha}{2(1-E^2)^{3/2}} \arcsin\left[-\frac{2(1-E^2)r_i + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8\beta(1-E^2)}}\right]. \quad (27)$$

Константа интегрирования  $\tau_1$  введена для того, чтобы выполнялось условие  $\tau = 0$  при  $\eta = 0$  в начальной точке. Рассмотрим предел  $\beta \rightarrow 0$  и учтем, что в этом случае выполняется (19). Тогда получим собственное время достижения сингулярности такое же, как в шварцшильдовской геометрии:

$$\tau_0 = \left(-\frac{r_i^3}{4\alpha}\right)^{1/2} \pi. \quad (28)$$

Учитывая (9) и (25), а также то, что в (25)  $r = r_i x$ , для координатного времени  $t$  запишем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-Er^3}{(r^2 + \alpha r + \beta)\sqrt{-(1-E^2)r^2 - \alpha r - 2\beta}}. \quad (29)$$

Уравнение

$$r^2 + \alpha r + \beta = 0$$

имеет корни

$$r_1 = r_h, \quad r_2 = -r_h - \alpha,$$

где  $r_h$  — радиус горизонта, так что

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-Er^3}{\sqrt{-(1-E^2)r^2 - \alpha r - 2\beta}(2r_h + \alpha)} \times \left(\frac{1}{r - r_h} - \frac{1}{r + r_h + \alpha}\right). \quad (30)$$

Интеграл от  $r_i$  до  $r_h$  от этого выражения расходится по признаку сравнения с гиперболой (подынтегральная функция больше гиперболы  $1/(r - r_h)$  на участке интегрирования, а интеграл от  $1/(r - r_h)$  расходится). Таким образом, координатное время достижения горизонта частицей оказывается бесконечным, как и в шварцшильдовском случае. Значит наличие «приливного заряда» приводит лишь к количественным изменениям: увеличению начального расстояния  $r_i$  и изменению выражения для собственного времени.

### 4.3. Круговые орбиты

Значения энергии  $E$  и момента количества движения  $L$  для круговой орбиты можно найти из следующих соотношений [13]:

$$f'(u) = -\frac{\alpha + 2\beta}{L^2} - 2u - 3\alpha u^2 - 4\beta u^3 = 0, \quad (31)$$

$$f(u) = \frac{E^2 - 1}{L^2} - \frac{\alpha u + \beta u^2}{L^2} - u^2 - \alpha u^3 - \beta u^4 = 0. \quad (32)$$

Таким образом, на круговой орбите радиуса  $r_c = 1/u_c$  имеем

$$E^2 = \frac{2(1 + \alpha u_c + \beta u_c^2)}{2 + 3\alpha u_c + \beta u_c^2}, \quad (33)$$

$$L^2 = \frac{-\alpha - 2\beta u_c}{u_c(2 + 3\alpha u_c + 4\beta u_c^2)}. \quad (34)$$

Значения  $E^2$  и  $L^2$  в пределе  $\beta \rightarrow 0$  соответствуют геометрии Шварцшильда. Для ненулевого  $\beta$  значение  $L^2$ , при прочих равных параметрах, оказывается больше. Для отрицательных  $\beta$  числитель в  $L^2$  возрастает, а знаменатель уменьшается. Из уравнений (33) и (34) следует неравенство (условие  $E^2 > 0$ ,  $L^2 > 0$ )

$$2 + 3\alpha u_c + 4\beta u_c^2 > 0. \quad (35)$$

Соответственно, при  $\beta < 0$  неравенство (35) можно переписать как

$$0 < u_c < \frac{-3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 32\beta}}{8\beta}, \quad (36)$$

$$\frac{-3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 32\beta}}{4} < r_c < \infty. \quad (37)$$

При  $\beta = 0$  неравенство (35) переходит в условие для круговых орбит шварцшильдовской метрики

$$r_c > -3\alpha/2.$$

Если  $E$  и  $L$  имеют значения (33), (34), соответственно, то уравнение (10) запишется в виде

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -(u - u_c)^2 \left[ \beta u^2 + (\alpha + 2u_c\beta)u + \left( u_c\beta + \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{1}{L^2 u_c^2} \right) \right) u_c \right]. \quad (38)$$

Это уравнение допускает, помимо круговой орбиты  $r_c = 1/u_c$ , еще и орбиту, определяемую уравнением

$$\phi = \pm \int du (u - u_c)^{-1} \left[ \beta u^2 + (\alpha + 2u_c\beta)u + \left( u_c\beta + \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{1}{L^2 u_c^2} \right) \right) u_c \right]^{-1/2}. \quad (39)$$

Замена переменных  $\xi = (u - u_c)^{-1}$  приводит к интегралу

$$\phi = \mp \int \frac{d\xi}{\sqrt{-\beta + B\xi + C\xi^2}}, \quad (40)$$

где

$$B = -4u_c\beta - \alpha, \quad C = -(4u_c^2\beta + 3u_c\alpha/2 - \alpha/2u_cL^2),$$

$$\mp \phi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{C}} \ln(2\sqrt{C(-\beta + B\xi + C\xi^2)} + 2C\xi + B), & C > 0, \\ \frac{-1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\xi + B}{\sqrt{B^2 + 4C\beta}}, & \\ C < 0, \quad B^2 + 4C\beta > 0. \end{cases}$$

Минимальный радиус устойчивой круговой орбиты может быть получен из условия, что  $f(u)$  при соответствующем обратном радиусе имеет точку перегиба [13]:

$$f''(u) = -\frac{2\beta}{L^2} - 2 - 6\alpha u - 12\beta u^2 = 0, \quad (41)$$

что, с учетом (34), дает

$$8\beta^2 u_c^3 + 9\alpha\beta u_c^2 + 3\alpha^2 u_c + \alpha = 0. \quad (42)$$

В пределе  $\beta = 0$  имеем шварцшильдовское значение  $u_c = -1/3\alpha$  или  $r_c = -3\alpha$ .

Таким образом, для круговых орбит наличие отрицательного «приливного заряда» приводит к изменению радиуса последних стабильной и нестабильной орбит. Это дает возможность указать на допустимые области значений «приливного заряда».

### 5. ВКЛАД «ПРИЛИВНОГО ЗАРЯДА»

В соответствии с результатами работы [1], ограничение (7) допускает значения величины  $\beta$ , позволяющие влиять на геометрию пространства-времени в режиме больших (астрономических) масс. Так как характерные массы черных дыр в нашей Вселенной имеют порядок  $M_\odot$  и более, имеет смысл перейти к соответствующим единицам, так что величина  $\alpha$  примет вид

$$\alpha = -a \frac{M_\odot}{M_{pl}^2}. \quad (43)$$

При этом введенный параметр  $a$  имеет порядок 1. Приравняв к нулю выражение (4), получим формулу, связывающую радиус горизонта, массу и «приливной заряд»:

$$r_h = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}. \quad (44)$$

Переопределим  $\beta$  аналогично (43):

$$\beta = b \frac{M_\odot^2}{M_{pl}^4}. \quad (45)$$

Здесь мы ввели «нормализованный приливной заряд»  $b$ , характеризующий значение приливного заряда в масштабе  $M_\odot$ .

Сравнивая выражение для «нормализованного приливного заряда» из (45) с ограничением на значения «приливного заряда» из (7), получаем физическое ограничение на значения «нормализованного приливного заряда»:

$$|b| \ll 2R_\odot \frac{M_{pl}^2}{M_\odot}. \quad (46)$$

Подставляя численные значения для радиуса и массы Солнца ( $R_\odot = 696000$  км,  $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$  кг,  $M_{pl} = 10^{-8}$  кг) и переводя все величины в систему единиц  $\hbar = c = 1$ , получим

$$|b| \ll 10^6.$$

Как легко видеть, данное ограничение, полученное из условия (7), является более слабым по сравнению с тем, которое можно получить из анализа уравнения (42), так как  $a \sim 1$  в соответствии с соотношением (43). В самом деле, при замене

$$\tilde{u}_c = u_c M_\odot / M_{pl}^2$$

уравнение (42) примет следующий вид:

$$8b^2 \tilde{u}_c^3 + 9ab \tilde{u}_c^2 + 3a^2 \tilde{u}_c + a = 0. \quad (47)$$

Исходя из требования, чтобы поправочные члены в этом уравнении, определяемые  $b$ , были много меньше классических шварцшильдовских членов, определяемых  $a \sim 1$ , можно получить, что

$$|b| \ll 1.$$

При таких значениях  $b$  решение оказывается самосогласованным. Заметим, что оно не противоречит стандартной картине поведения вещества вблизи черной дыры и не вносит заметных поправок в круговые орбиты, что хорошо подтверждено существующими астрономическими данными [14].

Необходимо также заметить, что в пятимерной теории «приливной заряд» является функцией массы. Поэтому для изучения применимости обсуждаемой модели необходимо знание точного решения. В рамках данного подхода более жесткое, чем предложенное в [1], ограничение на значения «приливого заряда» можно получить при рассмотрении круговых орбит и условий существования последней стабильной орбиты.

## 6. ВЫВОДЫ

Несмотря на то что присутствие «приливого заряда»  $\beta$  меняет уравнения геодезических, на уровне астрономических масс наличие ненулевого «приливого заряда»  $\beta$  не должно оказывать влияния на их типы и форму. В противном случае это могло бы привести к возникновению противоречий с существующими наблюдательными данными. Ограничение на значения «приливого заряда»  $\beta$ , предложенное в настоящей работе, делает ненаблюдаемыми и другие возможные эффекты, связанные с  $\beta$  для черных дыр с массой больше или порядка солнечной. Возможно, проявление эффектов, связанных с «приливым зарядом», следует искать в микрофизике.

Таким образом, при выбранных нами значениях параметров полученное в работе [1] решение типа «черная дыра» в модели RS2 не дает противоречий с общей теорией относительности и наблюдаемыми эффектами в астрофизике. Более жесткое, чем предложенное в [1], ограничение на значения «приливого заряда» можно получить при рассмотрении круговых орбит и условий существования последней устойчивой орбиты.

Работа выполнена при поддержке государственного контракта № 02.740.11.0575 Федерального агентства по науке и инновациям РФ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezania, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000).
2. С. О. Алексеев, М. В. Сажин, О. С. Хованская, *Письма в АЖ* **28**, 163 (2002).
3. S. Mignemi and N. Stewart, *Phys. Rev.* **47**, 5259 (1993).
4. M. Cadoni and S. Mignemi, *Nucl. Phys. B* **427**, 669 (1994).
5. N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998).
6. L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
7. В. А. Рубаков, *УФН* **171**, 913 (2001).
8. A. Chamblin, S. W. Hawking, and H. S. Reall, *Phys. Rev. D* **61**, 065007 (2000).
9. S. B. Giddins, E. Katz, and L. Randall, *JHEP* **0003**, 023 (2000).
10. De-Chang Dai and D. Stojkovic, <http://arxiv.org/abs/1004.3291>.
11. T. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148**, 307 (2003).
12. R. Emparan, A. Fabbri, and N. Kaloper, *JHEP* **0208**, 043 (2002).
13. С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, Москва (1986), т. 1.
14. А. М. Черепашук, *УФН* **173**, 345 (2003).