

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА НЕСЛИЯНИЯ ПРОТИВОПОЛОЖНО ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ

*В. А. Саранин**

*Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко
427621, Глазов, Удмуртия, Россия*

Поступила в редакцию 16 ноября 2010 г.

Предложена теория и проведено численное моделирование процесса сближения противоположно заряженных капель водного раствора электролита в силиконовом масле. Показано, что при малых расстояниях между каплями в результате электрогидродинамической неустойчивости равновесной поверхности одной из капель между ними может образоваться проводящий мостик, выравнивающий потенциалы капель. В результате капли начинают отталкиваться и могут разойтись, не коагулируя. Предложенную теорию подтверждает эффект неслияния капель, наблюдаемый в экспериментах [1].

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] экспериментально обнаружен и описан интересный и неожиданный эффект неслияния двух противоположно заряженных капель воды, взвешенных в масле (для увеличения электропроводности капель в экспериментах использовался водный раствор KCl). По утверждению авторов работы [1] проблема движения и взаимодействия заряженных капель в электрическом поле распространена от явлений в грозовом облаке до явлений в масс-спектрометрах, поэтому актуальна [2].

Суть некоторых экспериментов, описанных в работе [1], заключалась в следующем. Две капли раствора размещались в силиконовом масле между электродами, на которые подавалось высокое напряжение (порядка нескольких киловольт). Капли притягивались к разным электродам и приобретали разноименные заряды. Затем они начинали притягиваться друг к другу и сближаться. Если напряжение между электродами было относительно мало, а напряженность внешнего поля меньше некоторой критической величины (по мнению авторов работы [1]), то сближение заканчивалось слиянием капель. Если же напряженность поля превышала критическое значение, то сближение заканчивалось образованием проводящего мостика в промежутке между каплями, выравниванием их потенциалов и неслиянием капель — они начинали отталкиваться друг от дру-

га и удаляться. При этом объяснение наблюдаемого эффекта неслияния капель [1] сводится к следующему.

При движении капель навстречу друг другу напряженность поля на их сближающихся полюсах возрастает, и становится возможной неустойчивость равновесия поверхности одной из капель; в результате на поверхности возникает конус Тейлора [3]. Если конус Тейлора развивается полностью (до угла Тейлора 98.6°) до момента касания капель, то с его вершины может вырваться струйка проводящей жидкости [3], образующая проводящий мостик между каплями, потенциалы капель выравниваются, напряженность поля уменьшается, конус Тейлора схлопывается, мостик разрывается, капли начинают отталкиваться и расходиться (в очень вязкой жидкости типа силиконового масла движение капли практически безынерционно). Коагуляция капель не происходит. При относительно малых напряженностях внешнего поля (меньше критического значения) конус Тейлора начинает образовываться на столь близких расстояниях между каплями, что на некоторой стадии его эволюции капли соприкасаются и происходит их слияние.

Автор в целом согласен с этим сценарием, за исключением одного момента. Возрастание напряженности поля на сближающихся полюсах капель может происходить под влиянием только собственных зарядов капель (при сближении проводящих заряженных шаров напряженность поля на их ближай-

*E-mail: val-sar@yandex.ru, saranin@ggpi.org

ших полюсах возрастает до бесконечности [2, 4]), и тогда весь описанный выше сценарий может реализоваться и в отсутствие внешнего поля. В этом случае следовало бы говорить о критических зарядах капель, разделяющих акты слияния, неслияния. Однако в опытах [1] капли получали заряды от электродов, поэтому величина зарядов пропорциональна напряженности поля у электродов [5, 6]. В этом случае оправдано говорить о критической напряженности, но именно в указанном смысле, т. е. в том смысле, что роль внешнего поля сводится лишь к зарядке капель на электродах.

Теория взаимодействия двух заряженных проводящих шаров, а также теория устойчивости равновесия капель в электрическом поле, развитые, например, в работах [2, 3, 6], позволяют теоретически описать явление неслияния противоположно заряженных капель.

2. ТЕОРИЯ

Для построения теории будем считать капли заряженными, идеально проводящими шарами, взаимодействующими только между собой и с несущей жидкостью. Внешним полем пренебрежем, так как из дальнейших расчетов будет видно, что его напряженность на порядок меньше напряженности поля, создаваемого зарядами капель на их ближайших полюсах (в точках *A* и *B*, рис. 1).

Итак, рассмотрим два проводящих шара радиусами R_1, R_2 , находящиеся на расстоянии l между центрами и имеющие заряды q_1 и q_2 . В результате электростатической индукции заряд первого шара создает во втором электрическое изображение Q_{11} , которое, в свою очередь, является источником вторичного изображения q_{12} в первом шаре (рис. 1). Таким образом, напряженность поля в точке *A* создается не только собственно зарядами шаров, но и бесконечным числом зарядов-изображений, формирующихся в обоих шарах. Если заряжен только первый шар, то напряженность поля в точке *A* представляется в виде [4]

$$E_{A1} = k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1n}}{r_{1n}^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{1n}}{R_{1n}^2} \right), \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}, \quad (1)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Используя результаты работ [7, 8], можно записать [4]

$$q_{1n} = q_1 \frac{\gamma \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} n\beta [\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n\beta]}, \quad (2a)$$

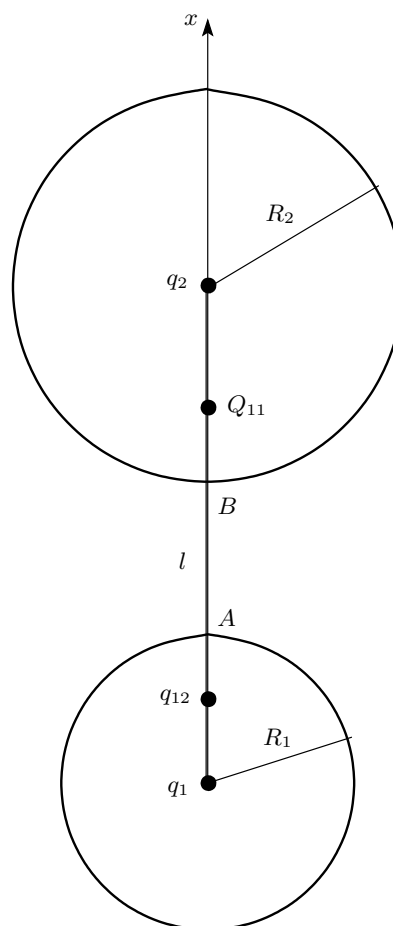


Рис. 1. К постановке задачи о взаимодействии двух заряженных капель

$$Q_{1n} = -q_1 \frac{\gamma \operatorname{sh} \beta}{r(1 + \gamma) \operatorname{sh} n\beta}, \quad (2b)$$

$$r_{1n} = \frac{1}{1 + \gamma} - r + \frac{r\gamma}{\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n\beta}, \quad (3a)$$

$$R_{1n} = r - \frac{1}{1 + \gamma} - \frac{r\gamma [\gamma + \operatorname{sh}(n-1)\beta / \operatorname{sh} n\beta]}{1 + \gamma^2 + 2\gamma \operatorname{ch} \beta}. \quad (3b)$$

Здесь обозначено $r = l / (R_1 + R_2)$, $\gamma = R_2 / R_1$, а параметр β связан с расстоянием между центрами шаров соотношением

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{r^2(1 + \gamma)^2 - (1 + \gamma^2)}{2\gamma}. \quad (4)$$

Пусть теперь первый шар не заряжен, $q_1 = 0$, а второй имеет заряд q_2 . Тогда для напряженности поля в точке *A* аналогично имеем

$$E_{A2} = k \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n}}{r_{2n}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{2n}}{R_{2n}^2} \right), \quad (5)$$

$$q_{2n} = q_2 \frac{\text{sh } \beta}{\text{sh } n\beta [1 + \gamma \text{sh}(n-1)\beta / \text{sh } n\beta]}, \quad (6a)$$

$$Q_{2n} = -q_2 \frac{\text{sh } \beta}{r(1 + \gamma) \text{sh } n\beta}, \quad (6b)$$

$$r_{2n} = -\frac{1}{1 + \gamma} + \frac{r}{1 + \gamma \text{sh}(n-1)\beta / \text{sh } n\beta}, \quad (7a)$$

$$R_{2n} = \frac{1}{1 + \gamma} - \frac{r [1 + \gamma \text{sh}(n-1)\beta / \text{sh } n\beta]}{1 + \gamma^2 + 2\gamma \text{ch } \beta}. \quad (7b)$$

В случае, когда оба шара имеют отличные от нуля заряды, напряженность поля в точке A равна

$$E_1 = E_{A1} + E_{A2}. \quad (8)$$

Напряженность E_2 поля в точке B (рис. 1) рассчитывается по тем же формулам, что и в точке A , но с заменой q_1 на q_2 и R_1 на R_2 .

Для нахождения силы, действующей на каждый из шаров, запишем сначала энергию их взаимодействия в виде [8]

$$W = \frac{1}{2} (q_1^2 s_{11} + 2q_1 q_2 s_{12} + q_2^2 s_{22}). \quad (9)$$

Здесь s_{11}, s_{12}, s_{22} — потенциальные коэффициенты. Удобнее, однако, перейти к емкостным коэффициентам c_{11}, c_{12}, c_{22} , так как выражения для них хорошо известны. Потенциальные и емкостные коэффициенты связаны соотношениями [8]

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, & s_{12} &= -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ s_{22} &= \frac{s_{11}c_{11}}{c_{22}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Энергия взаимодействия при этом имеет вид

$$W = \frac{k|q_1 q_2|}{R_1 + R_2} \frac{1 + \gamma}{2\alpha} \left(\frac{\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \right), \quad (11)$$

где $\alpha = q_2/q_1$. Энергия записана в единицах $k|q_1 q_2|/(R_1 + R_2)$, а емкостные коэффициенты в единицах R_1/k . Выражения для c_{11}, c_{12}, c_{22} в выбранных единицах могут быть записаны как [8]

$$\begin{aligned} c_{11} &= \gamma \text{sh } \beta \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma \text{sh } n\beta + \text{sh}(n-1)\beta]^{-1}, \\ c_{12} &= -\frac{\gamma \text{sh } \beta}{r(1 + \gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sh } n\beta)^{-1}, \\ c_{22} &= \gamma \text{sh } \beta \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma \text{sh } n\beta + \gamma \text{sh}(n-1)\beta]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение для силы получается дифференцированием выражения (11) по расстоянию l между центрами шаров. В единицах $k|q_1 q_2|/(R_1 + R_2)^2$ оно может быть представлено в форме

$$F_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{r(1 + \gamma)^3}{2\alpha \gamma \text{sh } \beta} f(c_{ik}, c'_{ik}), \quad (13)$$

$i, k = 1, 2.$

Здесь посредством f обозначена производная по β от выражения, стоящего в (11) в скобках:

$$\begin{aligned} f &= [(\alpha^2 c'_{11} - 2\alpha c'_{12} + c'_{22})(c_{11}c_{22} - c_{12}^2) - \\ &- (\alpha^2 c_{11} - 2\alpha c_{12} + c_{22})(c'_{11}c_{22} + c_{11}c'_{22} - 2c_{12}c'_{12})] \times \\ &\times (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)^{-2}. \end{aligned}$$

Производные от емкостных коэффициентов по β равны

$$\begin{aligned} c'_{11} &= -\text{sh } \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch } n\beta [n + \gamma(n-1) \text{ch } \beta] - \gamma(n-1) \text{sh } n\beta \text{sh } \beta}{[\text{sh } n\beta(1 + \gamma \text{ch } \beta) - \gamma \text{ch } n\beta \text{sh } \beta]^2} + c_{11} \text{cth } \beta, \\ c'_{22} &= -\text{sh } \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch } n\beta [\gamma n + (n-1) \text{ch } \beta] - (n-1) \text{sh } n\beta \text{sh } \beta}{[\text{sh } n\beta(\gamma + \text{ch } \beta) - \text{ch } n\beta \text{sh } \beta]^2} + c_{22} \text{cth } \beta, \\ c'_{12} &= c_{12} \text{cth } \beta - c_{12} \frac{\text{sh } \beta}{(1 + \gamma)^2 r^2} + \frac{\text{sh } \beta}{(1 + \gamma)r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \text{ch } n\beta}{\text{sh}^2 n\beta}. \end{aligned} \quad (14)$$

Напряженности поля на поверхности каждого из шаров в точках A и B и безразмерная сила рассчитывались по полученным формулам на компьютере (см. ниже). Для этого все слагаемые в суммах выражались через параметр $z = e^{-\beta}$ (β определяется соотношением (4)). Счет сумм прекращался, когда параметр z достигал машинного нуля, т. е. 10^{-38} в обычном режиме счета, а проверочные расчеты проводи-

лись в режиме двойной точности, вплоть до 10^{-80} .

Запишем уравнения движения капель в системе отсчета, связанной с несущей жидкостью, учитывая только электростатическую силу и силу сопротивления среды, пропорциональную скорости и радиусу капли. Будем считать, что сила тяжести скомпенсирована силой Архимеда. Тогда получим

$$m_i \ddot{x}_i = \mp \frac{k|q_1 q_2|}{(R_1 + R_2)^2} |F_r(r)| - K R_i \dot{x}_i, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Здесь m_i — масса капли, K — коэффициент сопротивления, $F_r(r)$ вычисляется по формулам (13), (14). Коэффициент сопротивления будем вычислять по формуле Рыбчинского — Адамара

$$K = 2\pi\eta \frac{3\eta + 2\eta_l}{\eta + \eta_l},$$

где η и η_l — вязкости соответственно капли и несущей жидкости. В экспериментах [1] капли водного раствора двигались в силиконовом масле. Для использовавшегося в опытах силиконового масла вязкость была равна примерно $\eta \approx 1$ Па·с, что в 1000 раз больше вязкости воды, поэтому для коэффициента сопротивления имеем $K \approx 4\pi\eta_l$.

С целью уменьшения числа параметров запишем $m_i = (4/3)\pi R_i^3 \rho$, где ρ — плотность водного раствора, и поделим на массу уравнение (15). В результате получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \mp Q_i^2 |F_r(r)| - \mu_i \dot{x}_i, \\ Q_i^2 &= \frac{3k|q_1 q_2|}{4\pi\rho R_i^3 (R_1 + R_2)^2}, \\ \mu_i &= \frac{3\eta_l}{\rho R_i^2}, \quad r = \frac{x_2 - x_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Полученная система уравнений интегрировалась численно. Для этого система двух уравнений подстановками $v_1 = \dot{x}_1$, $v_2 = \dot{x}_2$ сводилась к системе четырех уравнений первого порядка, затем для интегрирования применялся простой метод Эйлера:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + v_i^{(k-1)} \Delta t, \quad i = 1, 2,$$

где Δt — шаг по времени, $k = 1, 2, 3, \dots$ — номер шага интегрирования. На каждом шаге интегрирования по формулам, приведенным выше, рассчитывались сила и напряженность поля у полюсов капель (в точках A и B , см. рис. 1). Если напряженность в одном из полюсов превышала напряженность, необходимую для проявления неустойчивости и образования проводящего мостика между каплями, то потенциалы капель считались равными, а новые заряды рассчитывались из условия равенства потенциалов и закона сохранения полного электрического заряда капель. В результате были получены следующие соотношения для новых зарядов капель:

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{(q_1 + q_2)(c_{11} + c_{12})}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}, \\ q'_2 &= \frac{(q_1 + q_2)(c_{22} + c_{12})}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для того чтобы промоделировать опыты, описанные в работе [1], оценим величины зарядов на каплях. В работах [5, 6] показано, что при соприкосновении проводящего шара с электродом малой кривизны (например, с плоским [5]) шар получает заряд

$$q = 1.64ER^2/k, \quad (18)$$

где R — радиус шара, E — напряженность поля у поверхности электрода. В опытах [1] $R_1 \approx 0.25$ мм, $R_2 \approx 0.5$ мм, $E = 3$ кВ/см, капли водного раствора размещались в силиконовом масле. Диэлектрическая проницаемость силиконового масла $\varepsilon = 2.2$ – 2.8 [9]. В расчетах принималось $\varepsilon = 2.6$. Формула (18) при приведенных значениях величин дает

$$q_1 \approx -8.88 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}, \quad q_2 \approx 3.55 \cdot 10^{-11} \text{ Кл} \quad (19)$$

(большая капля соприкасается с положительным электродом, меньшая — с отрицательным).

В опытах [1] отчетливо было видно образование проводящего мостика между каплями перед их удалением друг от друга. Будем считать условием образования мостика условие неустойчивости равновесия поверхности одной из капель (как говорилось выше, потеря устойчивости приводит к образованию конуса Тейлора на поверхности капли и проводящей струйки-мостика). В качестве условия возникновения неустойчивости можно принять следующее простое условие:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_i^2}{2} > \frac{2\sigma}{R_i} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_i^2 R_i}{4\sigma} > 1, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе вода–масло, E_i — напряженность поля на поверхности капель в точках A и B (см. рис. 1). Это условие имеет прозрачный физический смысл — электрическое давление на поверхности капли должно быть больше капиллярного. Кроме того, условие (20) достаточно универсально. Действительно, если от напряженности поля перейти к заряду на одиночной заряженной сферической капле, то из (20) получим условие неустойчивости равновесия заряженной капли по Рэлею [10]

$$\frac{kq^2}{16\pi\sigma R^3} > 1. \quad (21)$$

Таким образом, если на поверхности одной из капель напряженность поля удовлетворяет условию

$$E_i > \sqrt{\frac{4\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 R_i}}, \quad (22)$$

то при моделировании считается, что проводящий мостик образовался, потенциалы капель выровнялись, а новые заряды капель равны q'_1 и q'_2 (17).

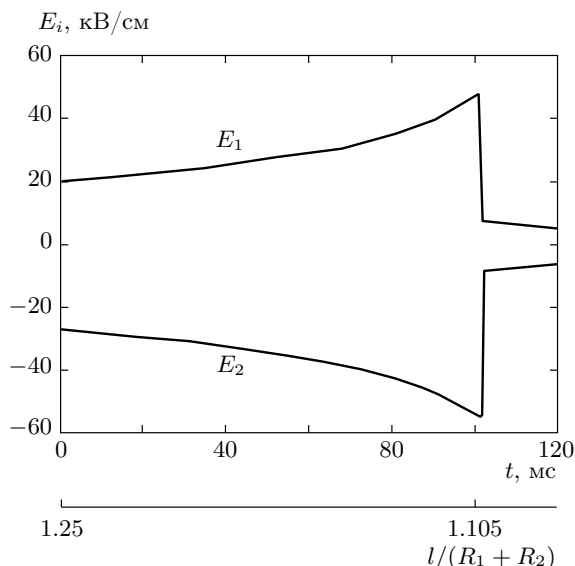


Рис. 2. Зависимости напряженности поля на сближающихся полюсах каплей от времени (ниже шкалы времени приведена шкала расстояний между центрами каплей в единицах суммы их радиусов)

Коэффициент поверхностного натяжения на границе вода–масло в расчетах принимался равным $\sigma = 72$ мН/м.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты численного моделирования для каплей воды в силиконовом масле с зарядами каплей, равными приведенным в (19), и радиусами $R_1 = 0.25$ мм, $R_2 = 0.5$ мм представлены на рис. 2 и 3. В качестве начальных условий выбирались следующие: $x_{10} = 0$, $x_{20} = 1.25(R_1 + R_2)$, $v_{10} = v_{20} = 0$. На рис. 2 показана зависимость напряженности поля на вершинах каплей в зависимости от времени. Неустойчивость возникает в момент времени $t \approx 102$ мс на вершине большей капли. На рис. 3 представлены зависимости скоростей каплей от времени. Видно, что после выравнивания потенциалов скорости каплей меняют знак, т.е. они не коагулируют, а начинают удаляться друг от друга. При этом процессы сближения и удаления каплей очень слабо зависят от начальных скоростей каплей из-за большой вязкости силиконового масла. В случае, когда начальные скорости были равны, например, $v_{10} = 0.8$ мм/с и $v_{20} = -0.4$ мм/с, время до наступления неустойчивости оказалось равным 90.5 мс, а максимальные скорости составили $v_1 \approx 1.06$ мм/с и $v_2 \approx -0.531$ мм/с. Заряды каплей

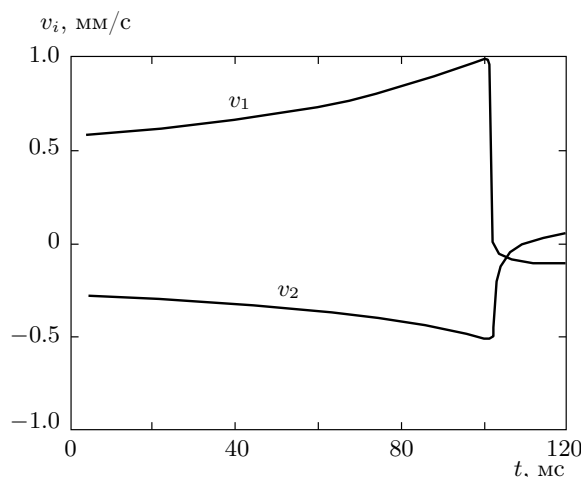


Рис. 3. Зависимости скорости каплей от времени. После выравнивания потенциалов скорости каплей меняют знак — капли расходятся, не коагулируя

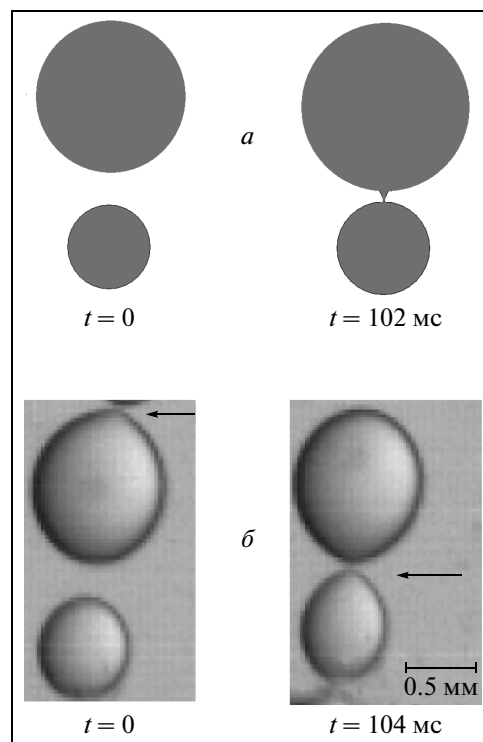


Рис. 4. Качественное сравнение результатов численного моделирования и эксперимента

после выравнивания потенциалов становятся равными $q'_1 = 6.32 \cdot 10^{-3}$ нКл и $q'_2 = 2.03 \cdot 10^{-2}$ нКл.

На рис. 4а качественно представлены результаты компьютерного моделирования при соблюдении относительного масштаба каплей и промежутков между ними. На рис. 4б приведены фотографии из работы [1] в начале сближения каплей и в момент

образования проводящего мостика (отмечен стрелкой). Видно, что имеется удовлетворительное соответствие результатов компьютерного моделирования и натурального эксперимента.

Анализ фотографий из работы [1] позволяет оценить величину отклонения формы капель от сферической. В качестве такой величины выберем

$$\delta = \frac{(a+b)/2 - b}{(a+b)/2} \cdot 100\%,$$

где a и b — большая и малая полуоси капли в форме эллипсоида вращения. Тогда по фотоснимкам отклонения от сферической формы до образования проводящего мостика составляют 5–7%. Теперь разумно предположить, что при компьютерном моделировании слияние капель произойдет, если расстояние между полюсами капель достигло значения менее чем $0.05(R_1 + R_2)$, а условие неустойчивости еще не выполнено. Моделирование процесса сближения капель при указанных выше параметрах, но с зарядами $q_1 = -0.004$ нКл и $q_2 = 0.016$ нКл, что соответствует зарядке капель в поле напряженностью $E \approx 1.35$ кВ/см, показало, что неустойчивость равновесной формы впервые наступает при $r \approx 1.045$ (расстояние между полюсами капель $0.045(R_1 + R_2)$). Тем самым можно считать, что при таких параметрах коагуляция капель становится возможной. Заметим, что в цитируемой работе [1] есть описание эксперимента, в котором при напряженности поля $E = 1.6$ кВ/см слияние капель еще происходило, а при $E = 3$ кВ/см слияния уже не было.

Следует обратить внимание еще на следующий факт, представляющий самостоятельный интерес. После перезарядки обе капли имеют положительные заряды, однако напряженность поля на поверхности меньшей капли равна $E_1 \approx -8.2$ кВ/см против $E_2 \approx 7.2$ кВ/см на поверхности большей капли (см. рис. 2). Знак «–» у E_1 означает, что вектор напряженности поля направлен внутрь капли, как если бы она была заряжена отрицательно. Этот несколько необычный факт может быть объяснен тем, что поле на поверхности первой капли создается не только ее собственным зарядом, но и зарядом второй капли, а также зарядами-изображениями. Если же собственного заряда у первой капли нет (или он мал, как в данном случае), это поле будет сформировано в основном второй каплей и ее изображением в первой, которое соответствует отрицательному заряду. Поэтому напряженность поля на поверхности первой капли будет отрицательной и по величине может быть даже больше, чем на поверхности второй капли.

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, проведенное исследование показало, что экспериментально наблюдаемый эффект неслияния противоположно заряженных капель обусловлен усилением напряженности поля на сближающихся полюсах капель их собственными зарядами и зарядами-изображениями (влияние внешнего поля при этом может быть пренебрежимо малым), развитием неустойчивости равновесия поверхности капли с последующим образованием конуса Тейлора и проводящего мостика между каплями, выравниванием потенциалов капель, последующим (практически мгновенным) их отталкиванием из-за безынерционности движения в очень вязкой среде. Эффект имеет пороговый характер: для его проявления заряды капель должны быть достаточно большими (в случае зарядки капель от электродов достаточно большой должна быть напряженность внешнего поля); при малых зарядах (напряженностях внешнего поля) становится возможной коагуляция капель.

В заключение автор благодарит всех участников Пермского гидродинамического семинара им. Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. D. Ristenpart, J. C. Bird, A. Belmonte et al., *Nature* **461**, 377 (2009).
2. В. А. Саранин, *Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва–Ижевск (2009).
3. G. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London A* **280**, 383 (1964).
4. В. А. Саранин, *УФН* **172**, 1449 (2002).
5. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, *ЖТФ* **32**, 375 (1962).
6. В. А. Саранин, В. В. Майер, *УФН* **180**, 1109 (2010).
7. Н. Н. Миролюбов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев, *Методы расчета электростатических полей*, Высшая школа, Москва (1963).
8. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954).
9. Б. А. Князев, А. Г. Костюрина, *Введение в лабораторный практикум «Электричество и магнетизм»: Учебное пособие*, Новосибирский госуниверситет, Новосибирск (2005).
10. Rayleigh, *Lord, Phil. Mag.* **14**, 184 (1882).