

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГРОССА – ПИТАЕВСКОГО ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

*А. А. Ишханян, В. П. Крайнов**

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 17 января 2011 г.

Аналитически и численно исследовано решение стационарного уравнения Гросса – Питаевского для одномерного потенциала оптической решетки в случае отталкивательной нелинейности. Показана математическая аналогия задачи с известной задачей о классическом математическом маятнике Капицы, возбуждаемом слабой регулярной высокочастотной силой. При определенных значениях параметров задачи в системе возникает динамический хаос. Он аналитически моделируется нелинейным уравнением диффузии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно решение линейного одномерного стационарного уравнения Шредингера с периодическим потенциалом. Такая задача имитирует простейшую модель движения свободных электронов в кристаллической решетке металла. Решение описывается функциями Блоха, которые характеризуются фазовым множителем, набираемым на каждом периоде потенциала, соответствующем постоянной кристаллической решетки. Допустимые значения энергий электрона образуют разрешенные зоны Блоха, отделенные друг от друга областями запрещенных значений энергии. Наиболее простое аналитическое решение было получено впервые Дираком для случая, когда потенциал представляет собой бесконечный набор одномерных дельта-функций (потенциал Кронига – Пенни), отстоящих друг от друга на постоянную величину [1].

Задача усложняется, когда в уравнение Шредингера вводится нелинейный (кубический по волновой функции) член, отвечающий конденсату Бозе – Эйнштейна — получается так называемое уравнение Гросса – Питаевского [2]. В работе [3] одномерный периодический потенциал описывался синусоидальной функцией координаты (так называемый потенциал оптической решетки). Численно исследова-

лось туннелирование конденсата между разрешенными зонами Блоха, обусловленное нелинейностью. Аналогичный оптический потенциал использовался в работе [4] для описания нелинейных стоячих волн в зонах Блоха. Сверхпроводимость конденсата Бозе – Эйнштейна в оптическом потенциале рассматривалась численно в статье [5]. В этой статье отмечалась также нестабильность решений, приводящая к удвоению периода их осцилляций.

Численно явление классического хаоса исследовалось в работе [6]. Потенциал, рассмотренный в этой работе, соответствовал не полю одномерной кристаллической решетки, как в нашей работе, а полю стоячей электромагнитной волны, образованной двумя бегущими навстречу друг другу волнами с близкими частотами. Для того чтобы избежать ускорения узлов такой стоячей волны из-за неравенства частот бегущих волн, вводилось также дополнительно постоянное электрическое поле. Нелинейность в уравнении Гросса – Питаевского предполагалась кубической. Волновая функция оказывается в ряде случаев хаотической функцией координаты.

В работе [7] численно рассматривалось туннелирование конденсата Бозе – Эйнштейна между двумя различными зонами Блоха, обусловленное нелинейностью. Показано, что такое туннелирование носит несимметричный характер, а именно, вероятность перехода в более высоко лежащую зону Блоха оказывалась больше, чем в обратном направлении. В

*E-mail: vpkrainov@mail.ru

статье [8] авторы демонстрируют, что имеются стационарные состояния конденсата Бозе – Эйнштейна в оптической решетке, которые не удовлетворяют обычному условию периодичности Блоха. Существуют состояния, для которых имеет место удвоение периода решетки.

Численное решение одномерного уравнения Гросса – Питаевского с потенциалом Кронига – Пенни было найдено в работе [9]. Показано, что этот потенциал приводит к решениям, аналогичным тем, что получаются для оптического синусоидального потенциала. Однако его преимущество состоит в том, что решение описывается комбинацией эллиптических функций Якоби и оно проще для численного анализа. Дальнейшее усложнение задачи заключается в добавлении осцилляторного потенциала ловушки в аксиальном направлении соответствующей трехмерной задачи [10]. При этом показано, что сохраняется неустойчивость конденсата Бозе – Эйнштейна.

Устойчивость конденсата Бозе – Эйнштейна в потенциале Кронига – Пенни, приводящая к явлению его сверхпроводимости, детально исследовалась в статье [11]. В нелинейной модели Кронига – Пенни возникают и солитоны [12], стационарно распространяющиеся в одномерной решетке. Обзор нелинейных волн, возникающих в конденсатах Бозе – Эйнштейна, дан в работе [13]. В недавней работе [14] рассматривается бесконечный набор равноотстоящих друг от друга положительных потенциалов в виде дельта-функций. Авторы ограничиваются отталкивательным нелинейным кубическим членом в стационарном уравнении Гросса – Питаевского и полагают, что химический потенциал $\mu > 0$. Как и в настоящей работе, рассматриваются вещественные решения для волновой функции. Динамический хаос развивается путем механизма удвоения периода осцилляций при последовательных бифуркациях стационарных состояний (аналогично известной модели Фейгенбаума в задаче о возникновении турбулентности в жидкости).

Данная работа посвящена аналитическому рассмотрению динамического хаоса в оптической решетке, создаваемого нелинейностью Гросса – Питаевского.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Стационарное одномерное уравнение Гросса – Питаевского имеет общий вид (в системе единиц, где $\hbar = m = 1$):

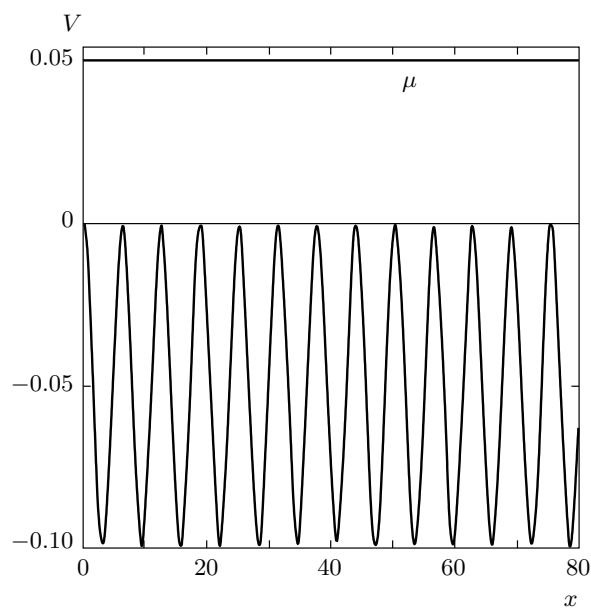


Рис. 1. Одномерный потенциал оптической решетки $V(x)$. Химический потенциал $\mu = 0.05$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi + g|\psi|^2\psi = \mu\psi. \quad (1)$$

Рассмотрим одномерный притягивательный потенциал ионов кристаллической решетки в виде

$$V(x) = -2V_0 \sin^2(x/2a), \quad V_0 > 0.$$

Здесь величина a характеризует постоянную одномерной кристаллической решетки при распространении электронов проводимости. Удобнее выбрать для расчетов этот потенциал, чем бесконечный набор дельта-функций Дирака на расстоянии a друг от друга. На рис. 1 зависимость потенциала $V(x)$ показана для параметров $V_0 = 0.05$, $a = 1$ в отсутствие нелинейности (для состояния непрерывного спектра). Показана также и величина химического потенциала $\mu = 0.05$. Как видно из рисунка, электрон находится в состоянии непрерывного спектра, т. е. свободно перемещается по кристаллической решетке. Без ограничения общности можно выбрать $a = 1$. Далее рассмотрим только вещественные волновые функции и проведем замену в (1):

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu + V_0}{6g}} \varphi.$$

При этом ограничиваемся случаем отталкивательной нелинейности, т. е. $g > 0$. Получаем уравнение для волновой функции в виде

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V_0\varphi \cos x = (\mu + V_0) \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right). \quad (2)$$

Удобно далее изменить вид нелинейного члена в правой части (2), сделав замену

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \rightarrow \sin \varphi,$$

не нарушая общей идеологии рассмотрения нелинейного уравнения Шредингера:

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V_0 \varphi \cos x = (\mu + V_0) \sin \varphi. \quad (3)$$

Вводя частоту малых колебаний фиктивного «математического маятника» $\omega_0 = \sqrt{2(\mu + V_0)}$, перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 2V_0 \varphi \cos x. \quad (4)$$

Если под координатой x понимать время, а под φ — угол отклонения маятника от положения нижнего равновесия, то уравнение (4) описывает маятник Капицы, возбуждаемый малой периодической силой (правая часть уравнения (4)). Частота вынуждающей силы в маятнике Капицы (равная единице) предполагается достаточно большой по сравнению с частотой малых колебаний, т. е. $\omega_0^2 = 2(\mu + V_0) \ll 1$ (в указанных безразмерных единицах $\hbar = m = a = 1$). В обычных единицах это означает достаточно малый параметр кристаллической решетки a , так что

$$\mu + V_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}.$$

При этом амплитуда колебаний точки подвеса предполагается малой по сравнению с размерами маятника, т. е. $V_0 \ll 1$. Это согласуется с предыдущим неравенством с учетом того, что $\mu \ll 1$. Наиболее интересно исследование динамики маятника вблизи сепаратрисы, когда его полная энергия близка к ω_0^2 (маятник переходит из верхнего положения, где он покоится, в нижнее и обратно в верхнее). Сепаратриса разделяет колебательное и вращательное движение маятника.

3. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА

Умножая (4) на $d\varphi/dx$ и интегрируя по x в пределах одного полного колебания, получим малое изменение полной энергии маятника за одно колебание:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \varphi \right) = \\ &= 2V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{d\varphi}{dx} \cos x dx. \quad (5) \end{aligned}$$

Ввиду малости V_0 (малости правой части уравнения (5)) в правую часть можно подставить известные решения для невозмущенного математического маятника при условии, что он покоится в верхней точке:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\omega_0}{\text{ch}(\omega_0 x)},$$

$$\varphi = 2 \arctg [\text{sh}(\omega_0 x)].$$

Значение $x = 0$ соответствует низшему положению маятника $\varphi = 0$. Подставляя эти значения в правую часть (5), получим величину изменения энергии на n -м колебании:

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= -8\omega_0 V_0 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg(\text{sh}(\omega_0 x))}{\text{ch}(\omega_0 x)} \cos(x + x_n) dx. \quad (6) \end{aligned}$$

При этом предполагается, что нижнее положение маятник проходит, когда координата равна x_n . Оставляя только четную часть подынтегрального выражения, из (6) находим:

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 8V_0 \sin x_n \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg(\text{sh}(z))}{\text{ch}(z)} \sin \frac{z}{\omega_0} dz. \quad (7) \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральное выражение не содержит особых точек, правая часть (7) представляет собой далекую фурье-компоненту и экспоненциально мала ($\omega_0 \ll 1$). Следовательно, интеграл определяется особенностью в точке, ближайшей к вещественной оси переменной z . Эта точка есть $z = \pi i/2$. Итак, основная зависимость в интеграле (7) имеет вид $\exp(-\pi/2\omega_0)$. При численном расчете интеграла (7) находим с точностью 1–2 % аналитическое выражение

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \frac{6.4 + 112\omega_0}{\omega_0} \sin x_n \exp\left(-\frac{\pi}{2\omega_0}\right). \quad (8)$$

Возводя это выражение в квадрат и усредняя по фазе x_n в условиях развивающегося динамического хаоса, т. е. делая замену $\sin^2(x_n) \rightarrow 1/2$, получим изменение энергии за одно колебание:

$$\Delta E^2 = \frac{1}{2} V_0^2 \left(\frac{6.4 + 112\omega_0}{\omega_0} \right)^2 \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_0}\right).$$

Расстояние «по времени x » между двумя соседними колебаниями маятника равно

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{32\omega_0^2}{|E_{n+1} - \omega_0^2|} \gg 1. \quad (9)$$

Здесь зависимость от энергии является довольно слабой (логарифмической).

Итак, изменение энергии носит диффузионный характер:

$$\Delta E^2 = \frac{V_0^2(6.4 + 112\omega_0)^2}{2\omega_0 \ln \frac{32\omega_0^2}{|E - \omega_0^2|}} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_0}\right) \Delta x. \quad (10)$$

Здесь коэффициент пропорциональности представляет собой слабо зависящий от энергии коэффициент диффузии

$$D(E) = \frac{V_0^2(6.4 + 112\omega_0)^2}{2\omega_0 \ln \frac{32\omega_0^2}{|E - \omega_0^2|}} \exp\left(-\frac{\pi}{\omega_0}\right).$$

Условие возникновения динамического хаоса согласно работе [15] определяется значением так называемого коэффициента растяжения фазы (роль фазы играет координата x)

$$K = \frac{(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} > 1$$

при $x_n - x_{n-1} \propto 1$. В условиях динамического хаоса фаза меняется сильно и нерегулярно. Из формулы (10) с учетом (9) находим

$$\begin{aligned} K &\propto \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{|E_{n+1} - \omega_0^2|}{|E_n - \omega_0^2|} \propto \\ &\propto \frac{1}{\omega_0} \ln \left(1 + \frac{|E_{n+1} - E_n|}{|E_n - \omega_0^2|}\right) \propto \\ &\propto \frac{1}{\omega_0} \frac{|E_{n+1} - E_n|}{|E_n - \omega_0^2|} \propto \frac{\exp(-\pi/2\omega_0)}{|E_n - \omega_0^2|} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, ширина сепаратрисного слоя $|E_n - \omega_0^2|$ вблизи верхней точки равновесия маятника экспоненциально мала. Итак, по мере изменения координаты система экспоненциально медленно уходит от положения верхней точки равновесия как в режиме колебаний, так и в режиме вращений маятника. Затем коэффициент растяжения фазы становится малым, и дрожание точки подвеса перестает оказывать влияние на изменение энергии маятника, т. е. динамический хаос исчезает.

Динамический хаос в системе наступает, когда волновая функция системы при каком-то значении координаты x близка к величине

$$\psi = \pi \sqrt{\frac{\mu + V_0}{6g}}.$$

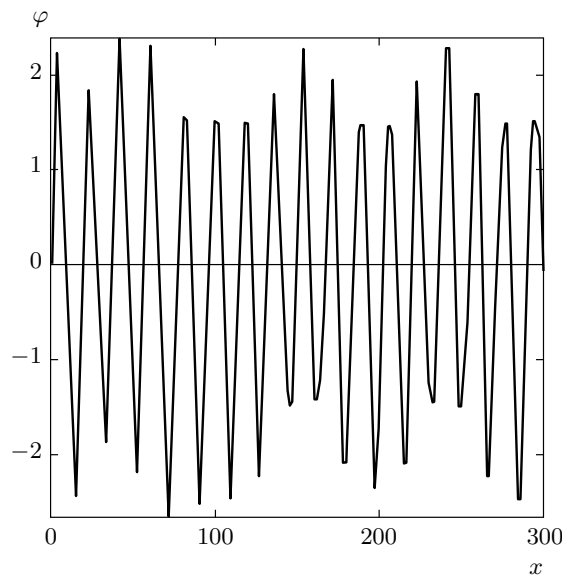


Рис. 2. Регулярное колебательное движение маятника Капицы

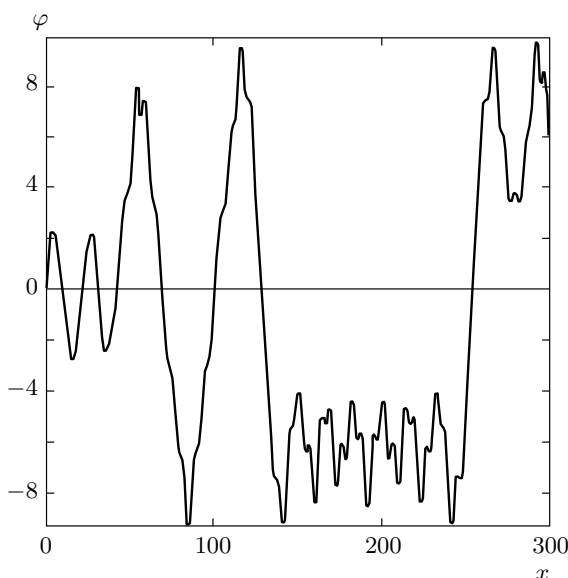


Рис. 3. Развитие хаотического движения маятника

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В подтверждение аналитических результатов, полученных в предыдущем разделе, приведем различные решения уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 2V_0\varphi \cos x$$

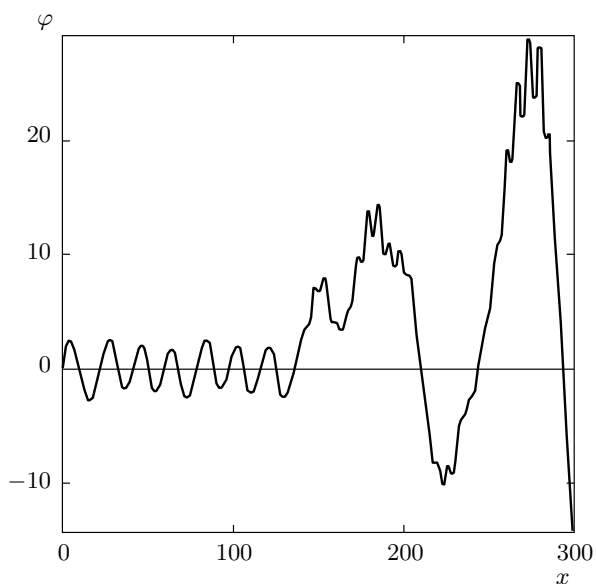


Рис. 4. Динамический хаос в движении маятника. Значения параметров указаны в тексте

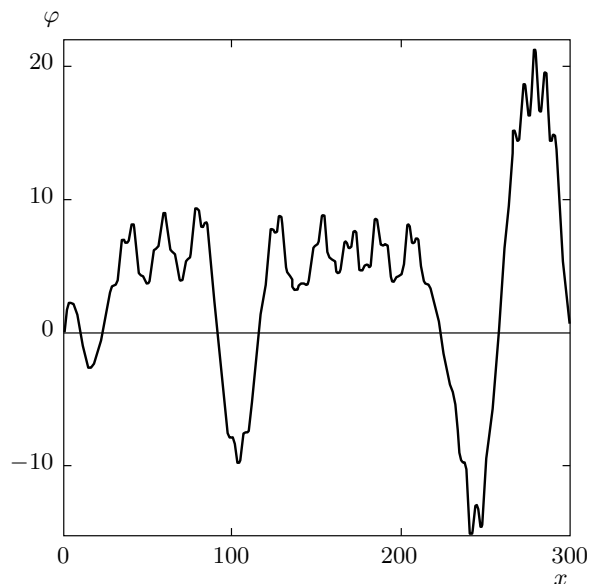


Рис. 5. Изменение хаотического движения при ничтожно малом изменении параметров. Значения параметров указаны в тексте

в окрестности сепаратрисы. На рис. 2 приведена зависимость $\varphi(x)$ для случая значений параметров, при которых имеет место режим регулярных колебаний маятника в условиях слабого влияния возмущения при небольшой энергии маятника:

$$V_0 = 0.05, \quad \mu = 0.05, \quad \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = 0.880, \quad \omega_0^2 = 0.2.$$

Отметим, что точное условие покоя маятника Капицы в верхнем положении равновесия достигается при значении $\varphi'(0) = 2\omega_0 = 0.8944\dots$

На рис. 3 показан режим движения маятника в условиях начала динамического хаоса, когда скорость маятника в верхнем положении мала. Он соответствует параметрам

$$V_0 = 0.05, \quad \mu = 0.05, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.894.$$

На рис. 4, 5 представлен динамический хаос для значений параметров

$$V_0 = 0.05, \quad \mu = 0.05, \quad \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(0) = 0.8955 \quad (\text{рис. 4}), \quad 0.896 \quad (\text{рис. 5}).$$

Видно, что решение весьма сильно меняется при ничтожно малом изменении параметров задачи. Наконец, на рис. 6 представлен режим регулярного вращения маятника, соответствующий значениям параметров

$$V_0 = 0.05, \quad \mu = 0.05, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.0.$$

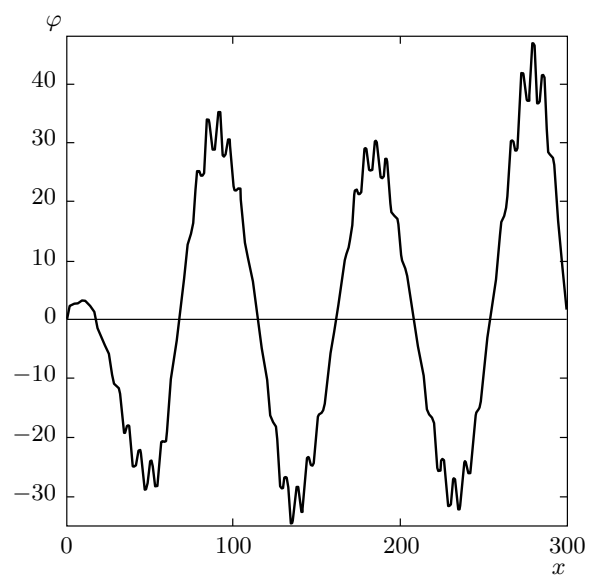


Рис. 6. Режим регулярного вращения маятника Капицы

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В одномерной задаче Гросса–Питаевского с потенциалом оптической решетки и отталкивательной нелинейностью аналитически показано возникновение динамического хаоса в волновой функции при определенных значениях параметров.

С математической точки зрения задача аналогична известной задаче математического маятника Капицы. При усреднении хаотическое решение аппроксимируется процессом нелинейной диффузии решения по координате. Аналитические результаты подтверждаются численными решениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00054).

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, Мир, Москва (1974), задача 29.
2. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford Univ. Press, Oxford (1974).
3. Biao Wu and Qian Niu, *Phys. Rev. A* **61**, 023402 (2000).
4. J. C. Bronski, L. D. Carr, B. Deconinck, and J. N. Kutz, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1402 (2001).
5. Biao Wu and Qian Niu, *Phys. Rev. A* **64**, 061603 (2001).
6. Q. Thommen, J. C. Garreau, and V. Zehnle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 210405 (2003).
7. M. Jona-Lasinio, O. Morsch, M. Cristiani, N. Malossi, J. H. Muller, E. Courtade, M. Anderlini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 230406 (2003).
8. M. Machholm, A. Nicolin, C. J. Pethick, and H. Smith, *Phys. Rev. A* **69**, 043604 (2004).
9. B. T. Seaman, L. D. Carr, and M. J. Holland, *Phys. Rev. A* **71**, 033622 (2005).
10. L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140406 (2004).
11. Ipei Danshita and Shunji Tsuchiya, *Phys. Rev. A* **75**, 033612 (2007).
12. Y. Kominis, *Phys. Rev. E* **73**, 066619 (2006).
13. R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis, *Nonlinearity* **21**, R139 (2008).
14. D. Witthaut, K. Rapedius, and H. J. Korsch, arXiv:cond-mat/0506645.
15. B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52**, 263 (1979); Г. М. Заславский, *Стохастичность колебательных систем*, Наука, Москва (1984).