

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

*К. В. Карельский<sup>a</sup>, А. С. Петросян<sup>a,b\*</sup>, С. В. Тарасевич<sup>a,c\*\*</sup>*

*<sup>a</sup> Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

*<sup>c</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119234, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 декабря 2010 г.

Исследована система уравнений магнитной гидродинамики тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. Найдены все автомодельные разрывные решения и все непрерывные центрированные автомодельные решения. Показано, что магнитогравитационные волны сжатия опрокидываются с образованием магнитогравитационной ударной волны. В явном виде решена задача распада произвольного разрыва для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды. Показано существование пяти различных конфигураций, реализующих решение задачи распада произвольного разрыва. Для каждой конфигурации найдены условия, необходимые и достаточные для ее реализации.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды являются альтернативой решению полной магнитогидродинамической системы уравнений тяжелой жидкости со свободной границей. Эти уравнения получаются из уравнений магнитной гидродинамики, записанных для слоя несжимаемой невязкой жидкости со свободной поверхностью, находящегося в поле сил тяжести, усреднены по глубине в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному линейному размеру задачи. Полученная таким образом система уравнений в магнитной гидродинамике играет такую же важную роль, как и классические уравнения в приближении мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости [1].

Приближение мелкой воды в магнитной гидродинамике применяется для изучения солнечного тахоклина [1–3], растекания материи при дисковой

аккреции в нейтронных звездах [4, 5], динамики атмосфер нейтронных звезд [6, 7], атмосфер внесолнечных планет [8], а также для оптимизации механических процессов при получении алюминия электролизом, а именно, для минимизации магнитогидродинамического шума на поверхности жидкого металла и тем самым уменьшения энергозатрат для производства алюминия [9].

Нелинейная динамика таких течений, описываемых полной системой уравнений магнитной гидродинамики на всех масштабах, не допускает аналитического исследования и является сложной задачей для компьютерного моделирования. Фактически, приближение мелкой воды для изучения крупномасштабных процессов в магнитной гидродинамике плазмы играет такую же фундаментальную роль, как и аналогичное приближение в гидродинамике нейтральной жидкости [10, 11], которое широко используется для изучения крупномасштабных процессов в атмосферах планет, Земли и в океанах [12].

Данная работа посвящена изучению нелинейных магнитогидродинамических течений тяжелой жидкости, описываемых простейшими магнитогидро-

\*E-mail: apetrosy@iki.rssi.ru

\*\*E-mail: aprilfire.ru@gmail.com

намическими уравнения мелкой воды на ровной границе в отсутствие внешних сил. Эти уравнения являются гамильтоновой системой [13] и могут быть использованы в качестве основы для создания моделей и развития теории многослойных стратифицированных магнитогидродинамических течений в приближении мелкой воды, а также для развития магнитогидродинамической теории мелкой воды при наличии внешних сил, например вращения или гидравлического трения. Гиперболичность магнитогидродинамических уравнений мелкой воды определяет, наряду с гладкими, наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью, за конечное время может привести к разрывному решению. В работе изучаются простые автомодельные решения уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды: магнитогравиационные волны разрежения, магнитогравиационные ударные волны и альфвеновские волны. Такие решения являются основополагающими в исследовании нелинейных волновых явлений и позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва.

В работе получено точное явное решение начальной задачи с кусочно-постоянными начальными условиями для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды. Эта задача впервые возникла в газовой динамике (задача Римана) [14]. Показано, что решение представляет собой одну из пяти волновых конфигураций:

две магнитогравиационные ударные волны и две альфвеновские волны;

левая магнитогравиационная ударная волна, правая магнитогравиационная волна разрежения и две альфвеновские волны;

левая магнитогравиационная волна разрежения, правая магнитогравиационная ударная волна и две альфвеновские волны;

две магнитогравиационные волны разрежения и две альфвеновские волны;

две магнитогравиационные волны разрежения и зона вакуума.

В работе найдены условия для начальных данных, при которых реализуется каждая конкретная конфигурация. В разд. 2 приведена исходная система уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды. В разд. 3 получены все центрированные частные решения типа простых волн и все разрывные решения с ненулевым потоком массы через разрыв. В разд. 4 сформулирована задача Римана; показано, что ее решение представляет

собой одну из пяти волновых конфигураций; получены условия для начальных данных, необходимых для реализации каждой конфигурации. В Заключении приведены основные результаты работы.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе описывается модель магнитогидродинамической мелкой воды для изучения течений магнитной жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести.

Система уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды над ровной границей получается из исходной системы уравнений магнитной гидродинамики [15, 16], записанной для слоя жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести в системе координат, где ось  $z$  направлена вдоль вектора силы тяжести и противоположна ему по направлению. В предположении малости толщины слоя и гидростатичности распределения полного давления (суммы гидродинамического и магнитного) проводится усреднение системы по глубине слоя жидкости. При усреднении пренебрегается квадратами отклонения скоростей и магнитного поля от усредненных по глубине величин. Для упрощения записи обозначим  $\tilde{B}_i = B_i/\sqrt{\rho}$ , где  $\rho$  — плотность жидкости (в дальнейшем знак тильды для сокращения опускается). Запишем исходную систему уравнений в одномерном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + (c_g^2 - u_1^2) \frac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \frac{\partial hu_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{\partial h}{\partial x} + u_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} + \\ &+ u_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} - B_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h B_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial h B_2}{\partial t} + (u_2 B_1 - u_1 B_2) \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial hu_1}{\partial x} - \\ &- B_1 \frac{\partial hu_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h B_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h B_1}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Здесь  $x$  — пространственная координата,  $t$  — время,  $h(x, t)$  — глубина слоя жидкости,  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  — скорости жидкости соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ ,

$B_1(x, t)$  и  $B_2(x, t)$  — магнитные поля соответственно по осям  $x$  и  $y$ ,  $g$  — гравитационная постоянная,  $c_g = \sqrt{B_1 + gh}$  — скорость распространения слабых возмущений. Система (2.1a) называется системой уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды [1, 17]. Дополнительное уравнение (2.1b) является следствием уравнения бездивергентности магнитного поля в полной системе исходных уравнений магнитной гидродинамики и используется для задания корректных начальных условий.

В следующем разделе будем искать частные автомодельные решения системы (2.1a).

### 3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе найдены решения, зависящие от  $x/t$ . Они получены в виде соотношений, позволяющих при заданных начальных условиях определить пространственно-временную область, занимаемую волной, а также значения искомым физических величин в каждой точке волны.

Для нахождения непрерывных автомодельных решений переписываем систему уравнений (2.1a) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_1 \\ hB_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_g^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 & -B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & 0 & u_1 \end{pmatrix} \times \\ \times \partial_x \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_1 \\ hB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Четвертое уравнение системы (3.1) вместе с уравнением (2.1b) дает условие  $B_1 h = \text{const}$ . Учитывая это равенство, далее рассматриваем систему из четырех оставшихся уравнений системы (3.1):

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_g^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 & -B_1 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & u_1 \end{pmatrix} \times \\ \times \partial_x \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проектируем систему уравнений (3.2) на линии вида  $x = \lambda t$ . Для этого введем новую переменную  $\alpha = x/t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \left(-\frac{x}{t^2}\right) \frac{d}{d\alpha} = \left(-\frac{1}{t}\right) \lambda \frac{d}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

после чего запишем систему (3.2) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ c_g^2 - u_1^2 & 2u_1 - \lambda & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & u_1 - \lambda & -B_1 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & u_1 - \lambda \end{pmatrix} \times \\ \times d_\alpha \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для того чтобы система (3.4) имела нетривиальные решения, необходимо равенство нулю определителя матрицы перед производными. Следовательно, величины  $\lambda$  должны быть собственными числами этой системы. Для данной системы имеются четыре вещественных собственных числа:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm B_1, \quad \lambda_{3,4} = u_1 \pm c_g.$$

Найдем зависимости между искомыми величинами, выполняющиеся для каждого собственного числа.

#### 3.1. Вырождение непрерывных альфвеновских волн

Рассмотрим собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Течения, соответствующие этим собственным числам, назовем непрерывными альфвеновскими волнами.

Для случая  $\lambda_1 = u_1 - B_1$  преобразуем систему уравнений (3.4) к виду

$$\begin{pmatrix} B_1 - u_1 & 1 & 0 & 0 \\ c_g^2 - u_1^2 & u_1 + B_1 & 0 & 0 \\ B_1 B_2 - u_1 u_2 & u_2 & B_1 & -B_1 \\ u_2 B_1 - u_1 B_2 & B_2 & -B_1 & B_1 \end{pmatrix} \times d_\alpha \begin{pmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \\ hB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

В системе уравнений (3.5) линейно независимы только три уравнения, поэтому для нахождения решения, соответствующего собственному числу  $\lambda_1$ , используем первые три уравнения системы (3.5):

$$\begin{aligned} (B_1 - u_1) \frac{dh}{d\alpha} + \frac{dh u_1}{d\alpha} &= 0, \\ (c_g^2 - u_1) \frac{dh}{d\alpha} + (u_1 + B_1) \frac{dh u_1}{d\alpha} &= 0, \\ (B_1 B_2 - u_1 u_2) \frac{dh}{d\alpha} + u_2 \frac{dh u_1}{d\alpha} + \\ + B_1 \frac{dh u_2}{d\alpha} - B_1 \frac{dh B_2}{d\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При умножении первого уравнения системы (3.6) на  $B_1 + u_1$  и вычитании его из второго уравнения системы (3.6) получаем

$$gh \frac{dh}{d\alpha} = 0,$$

откуда  $h = \text{const}$ . Тогда из первого уравнения системы (3.6) следует соотношение  $u_1 = \text{const}$ , а с учетом требования  $hB_1 = \text{const}$  во всей области определения системы (3.1) имеем  $B_1 = \text{const}$ . Из последнего уравнения системы (3.6) находим последнее соотношение

$$\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha}.$$

Таким образом, в простой волне, соответствующей значению  $\lambda_1 = u_1 - B_1$ , выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h = \text{const}, \quad u_1 = \text{const}, \quad B_1 = \text{const}, \\ \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{dB_2}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналогичным образом находим соотношения для второго собственного числа  $\lambda_2 = u_1 + B_1$ :

$$\begin{aligned} h = \text{const}, \quad u_1 = \text{const}, \quad B_1 = \text{const}, \\ \frac{du_2}{d\alpha} = -\frac{dB_2}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Найденные для  $\lambda_{1,2} = u_1 \mp B_1$  дифференциальные соотношения (3.7), (3.8) выполняются только на одной линии  $x = \lambda t$ , поэтому на полученной волне ни одна из искомым величин не может меняться. Таким образом, в автомодельном случае непрерывная альфвеновская волна вырождается.

### 3.2. Центрированные магнитогравитационные волны Римана

Течения, соответствующие решениям системы уравнений (3.4) при  $\lambda = \lambda_3$  и  $\lambda = \lambda_4$ , назовем центрированными магнитогравитационными волнами Римана, обращенными соответственно назад и вперед.

Собственному числу  $\lambda_3 = u_1 - c_g$  соответствует система линейно независимых дифференциальных уравнений, состоящая из первого, третьего и четвертого уравнений системы (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\alpha}(-u_1 + c_g) + \frac{dh u_1}{d\alpha} &= 0, \\ \frac{dh}{d\alpha}(B_1 B_2 - u_1 u_2) + \frac{dh u_1}{d\alpha} u_2 + \frac{dh u_2}{d\alpha} c_g - \\ - \frac{dh B_2}{d\alpha} B_1 &= 0, \\ \frac{dh}{d\alpha}(B_1 u_2 - u_1 B_2) + \frac{dh u_1}{d\alpha} B_2 - \frac{dh u_2}{d\alpha} B_1 + \\ + \frac{dh B_2}{d\alpha} c_g &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Складывая последние два уравнения системы (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\alpha} [B_1(B_2 + u_2) - u_1(B_2 + u_2)] + \frac{dh u_1}{d\alpha} (B_2 + u_2) + \\ + \frac{dh u_2}{d\alpha} (c_g - B_1) + \frac{dh B_2}{d\alpha} (c_g - B_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

После введения обозначения  $\gamma = B_2 + u_2$  уравнение (3.10) принимает вид

$$\frac{dh}{d\alpha} (B_1 - u_1) \gamma + \frac{dh u_1}{d\alpha} \gamma + \frac{dh \gamma}{d\alpha} (c_g - B_1) = 0,$$

или, после преобразований,

$$\frac{du_1}{d\alpha} h \gamma + \frac{dh}{d\alpha} c_g \gamma + c_g h \frac{d\gamma}{d\alpha} - B_1 h \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0. \quad (3.11)$$

С учетом первого уравнения системы (3.9), записанного в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{c_g}{h} \frac{dh}{d\alpha}, \quad (3.12)$$

первые два члена в уравнении (3.11) сокращаются, и оно принимает вид

$$h(B_1 - c_g) \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0.$$

Следовательно,  $B_2 + u_2 = \text{const}$ . После раскрытия производных произведений и учета последнего соотношения в виде

$$\frac{dB_2}{d\alpha} = -\frac{du_2}{d\alpha},$$

третье уравнение системы (3.9) переписывается в форме

$$\frac{du_1}{d\alpha} h B_2 + \frac{dB_2}{d\alpha} h B_1 + \frac{dB_2}{d\alpha} h c_g + \frac{dh}{d\alpha} B_2 c_g = 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части,

$$\left(\frac{du_1}{d\alpha} + \frac{c_g}{h} \frac{dh}{d\alpha}\right) B_2 + \frac{dB_2}{d\alpha} h B_1 + \frac{dB_2}{d\alpha} h c_g = 0,$$

и используем соотношение (3.12). В результате получаем

$$\frac{dB_2}{d\alpha} (h B_1 + h c_g) = 0,$$

откуда  $B_2 = \text{const}$ , а следовательно, и  $u_2 = \text{const}$ . Таким образом, в области простой волны, соответствующей третьему собственному числу системы уравнений (3.4), выполняются соотношения

$$u_2 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}, \quad B_1 h = \text{const}, \quad \frac{du_1}{d\alpha} = -\frac{c_g}{h} \frac{dh}{d\alpha}. \quad (3.13)$$

Отметим, что соотношения  $u_2 = \text{const}$ ,  $B_2 = \text{const}$  не зависят от значения  $\alpha$  во всей области полученного решения, в то время как переменные  $u_1$ ,  $B_1$ ,  $h$ , соответствующие последним двум соотношениям в (3.13), постоянны только на линиях  $dx/dt = \alpha$ .

Для собственного числа  $\lambda_4 = u_1 + c_g$  аналогичным образом получаем

$$u_2 = \text{const}, \quad B_2 = \text{const}, \quad B_1 h = \text{const}, \quad \frac{du_1}{d\alpha} = \frac{c_g}{h} \frac{dh}{d\alpha}. \quad (3.14)$$

Соотношения (3.13) и (3.14) описывают центрированные магнитогравитационные волны Римана, обращенные соответственно назад и вперед. Отметим, что при  $B_1 \rightarrow 0$  соотношения на этих волнах совпадают с соотношениями на центрированных волнах разрежения в обычной гидродинамике.

С учетом уравнения  $B_1 h = \text{const}$  во всей области определения системы (3.2) связь между  $u_1$  и  $h$  в центрированных магнитогравитационных волнах Римана записывается в виде

$$\frac{du_1}{d\alpha} = \pm \frac{d\varphi(h)}{d\alpha},$$

где знаки берутся соответственно для волн обращенных назад и вперед, а

$$\varphi(h) = \int \frac{c_g}{h} dh = \int \frac{\sqrt{(B_1 h)^2/h^2 + gh}}{h} dh$$

(последний интеграл не может быть взят в классе элементарных функций). Таким образом, выражения  $u_1 + \varphi(h) = \text{const}$  и  $u_1 - \varphi(h) = \text{const}$  являются инвариантом центрированных магнитогидродинамических волн Римана и сохраняются внутри волны, обращенной соответственно назад и вперед.

Таким образом, получены автомодельные решения магнитогидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды, описывающие центрированные магнитогравитационные волны.

### 3.3. Соотношения Ранкина – Гюгонио

Получим соотношения Ранкина – Гюгонио, выполняющиеся на линии разрыва. Как и ранее, эти соотношения вместе с начальными условиями задают направление линии разрыва и величину скачка искомых параметров. Для нахождения этих соотношений система уравнений (3.1) записывается в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1^2 - hB_1^2 + gh^2/2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 u_2 - hB_1 B_2)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hB_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial hB_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 B_2 - hB_1 u_2)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Интегрируя уравнения системы (3.15) по произвольной области  $G$ , гомеоморфной квадрату на плоскости  $xt$ , получаем

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_1}{\partial x} \right) dG &= 0, \\ \iint_G \left[ \frac{\partial hu_1}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1^2 - hB_1^2 + gh^2/2)}{\partial x} \right] dG &= 0, \\ \iint_G \left[ \frac{\partial hu_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 u_2 - hB_1 B_2)}{\partial x} \right] dG &= 0, \\ \iint_G \left( \frac{\partial hB_1}{\partial t} \right) dG &= 0, \\ \iint_G \left[ \frac{\partial hB_2}{\partial t} + \frac{\partial (hu_1 B_2 - hB_1 u_2)}{\partial x} \right] dG &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

После преобразования по формуле Грина объемных интегралов, входящих в левую часть системы (3.16), имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} h dx - (hu_1) dt &= 0, \\ \oint_{\partial G} (hu_1) dx - (hu_1^2 - hB_1^2 + gh^2/2) dt &= 0, \\ \oint_{\partial G} (hu_2) dx - (hu_1u_2 - hB_1B_2) dt &= 0, \\ \oint_{\partial G} (hB_1) dx &= 0, \\ \oint_{\partial G} (hB_2) dx - (hu_1B_2 - hB_1u_2) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Система интегральных уравнений (3.17) выполняется для произвольного интегрируемого контура  $\partial G$  и, в частности, для содержащего линию разрыва входящих в подынтегральные выражения функций.

Пусть  $x = x(t)$  — уравнение линии разрыва — обладает непрерывной касательной на отрезке  $[t_1, t_2]$ . В предположении, что функции  $u_1, u_2, B_1, B_2, h$  терпят разрыв только на линии  $x(t)$ , вводятся обозначения

$$\begin{aligned} u_1^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_1(x, t), \\ u_1^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_1(x, t), \\ u_2^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u_2(x, t), \\ u_2^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u_2(x, t), \\ B_1^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_1(x, t), \\ B_1^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_1(x, t), \\ B_2^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} B_2(x, t), \\ B_2^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} B_2(x, t), \\ h^I(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} h(x, t), \\ h^{II}(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} h(x, t). \end{aligned}$$

В качестве  $\partial G$  возьмем контур  $ABCE$ , бесконечно близко примыкающий линиями  $AB$  и  $CE$  к линии разрыва  $x(t)$  соответственно слева и справа от нее (рис. 1). Введем в рассмотрение скорость разрыва

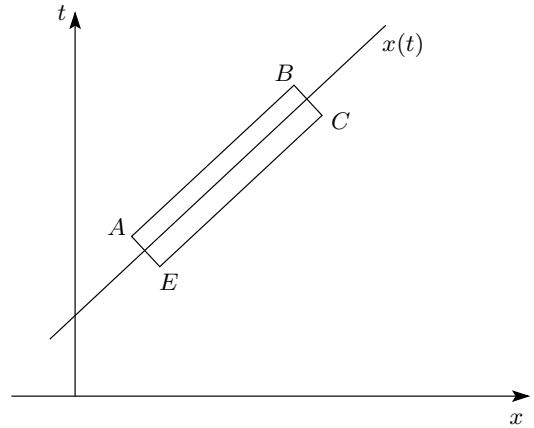


Рис.1. Линия разрыва, окруженная контуром  $ABCE$ , бесконечно близко примыкающим линиями  $AB$  и  $CE$  сверху и снизу к линии разрыва

$D = D(t) = x'(t)$ , откуда  $dx = D(t) dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{AB} (Dh - hu_1) dt - \int_{CE} (Dh - hu_1) dt &= 0, \\ \int_{AB} (Dhu_1 - hu_1^2 + hB_1^2 - gh^2/2) dt - \\ - \int_{CE} (Dhu_1 - hu_1^2 + hB_1^2 - gh^2/2) dt &= 0, \\ \int_{AB} (Dhu_2 - hu_1u_2 + hB_1B_2) dt - \\ - \int_{CE} (Dhu_2 - hu_1u_2 + hB_1B_2) dt &= 0, \\ \int_{AB} (DhB_1) dt - \int_{CE} (DhB_1) dt &= 0, \\ \int_{AB} (DhB_2 - hu_1B_2 + hB_1u_2) dt - \\ - \int_{CE} (DhB_2 - hu_1B_2 + hB_1u_2) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу произвольности контура  $ABCE$  соотношения (3.18) эквивалентны следующим условиям для подынтегральных выражений:

$$\begin{aligned}
 Dh^I - h^I u_1^I &= Dh^{II} - h^{II} u_1^{II}, \\
 Dh^I u_1^I - h^I (u_1^I)^2 + h^I (B_1^I)^2 - g(h^I)^2/2 &= \\
 = Dh^{II} u_1^{II} - h^{II} (u_1^{II})^2 + h^{II} (B_1^{II})^2 - g(h^{II})^2/2, \\
 Dh^I B_1^I &= Dh^{II} B_1^{II}, \\
 Dh^I u_2^I - h^I u_1^I u_2^I + h^I B_1^I B_2^I &= \\
 = Dh^{II} u_2^{II} - h^{II} u_1^{II} u_2^{II} + h^{II} B_1^{II} B_2^{II}, \\
 Dh^I B_2^I - h^I u_1^I B_2^I + h^I u_2^I B_1^I &= \\
 = Dh^{II} B_2^{II} - h^{II} u_1^{II} B_2^{II} + h^{II} u_2^{II} B_1^{II}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Соотношения (3.19) называются соотношениями Ранкина–Гюгонио для магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды. Найдем автомодельные решения, допускаемые этими соотношениями.

### 3.4. Магнитогравитационные ударные волны

Магнитогравитационной ударной волной называется разрывное течение, такое, что глубины жидкости слева и справа от разрыва различны,  $h^I \neq h^{II}$  [17]. Тогда из первых трех уравнений системы (3.19) следует

$$\begin{aligned}
 h^I B^I &= h^{II} B^{II}, \\
 D &= \frac{h^I u_1^I - h^{II} u_1^{II}}{h^I - h^{II}}, \\
 u_1^I - u_1^{II} &= \pm (h^I - h^{II}) \times \\
 &\times \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{II}}{h^I h^{II}}}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

После подстановки выражения для  $D$  из второго соотношения системы (3.20) в два последних уравнения системы (3.19) и перегруппировки слагаемых получаем

$$\begin{aligned}
 h^I h^{II} (u_1^I - u_1^{II}) (u_2^I - u_2^{II}) &= \\
 = -(h^I - h^{II}) (h^I B_1^I B_2^I - h^{II} B_1^{II} B_2^{II}),
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 h^I h^{II} (u_1^{II} - u_1^I) (B_2^{II} - B_2^I) &= \\
 = (h^I - h^{II}) (h^{II} u_2^{II} B_1^{II} - h^I u_2^I B_1^I).
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Если

$$B_2^I = B_2^{II}, \quad u_2^I = u_2^{II}, \tag{3.23}$$

то уравнения (3.21), (3.22) выполнены тождественно. В противном случае при делении уравнений (3.21), (3.22) друг на друга получаем

$$(u_2^I - u_2^{II})^2 = (B_1^I - B_1^{II})^2,$$

откуда

$$u_2^I - u_2^{II} = \pm (B_1^I - B_1^{II}). \tag{3.24}$$

Подставляя выражение (3.24) в первое уравнение системы (3.19) и учитывая третье уравнение системы (3.19), имеем

$$h^I - h^{II} (u_1^I - u_1^{II}) = \pm (h^I - h^{II}) h^I B_1^I$$

и, следовательно,

$$u_1^I - u_1^{II} = \pm (h^I - h^{II}) \frac{h^I B_1^I}{h^I h^{II}}. \tag{3.25}$$

Однако для одновременного выполнения третьего соотношения системы (3.20) и соотношения (3.25) необходимо, чтобы  $h^I + h^{II} = 0$ , что возможно лишь при равенстве нулю обеих глубин, т. е. при полном отсутствии жидкости. Следовательно, величины  $B_2$  и  $u_2$  не могут иметь разрыв на тех линиях, где имеет разрыв  $h$ .

Таким образом, соотношения (3.20), (3.23) задают магнитогравитационные ударные волны. Отметим, что магнитогравитационная ударная волна является аналогом гидродинамического прыжка для классических уравнений мелкой воды, и при  $B_1 \rightarrow 0$  соотношения на ней переходят в соотношения на гидродинамическом прыжке.

Так же как и в классической теории мелкой воды, магнитогравитационная ударная волна, являющаяся аналогом гидродинамической ударной волны [18], имеет сверхзвуковую скорость относительно жидкости перед ней и дозвуковую относительно жидкости за ней [19].

### 3.5. Альфвеновские разрывные волны

Альфвеновской разрывной волной назовем разрывное решение, для которого глубина справа от разрыва совпадает с глубиной слева,  $h^I = h^{II}$  [17]. Тогда из соотношений (3.20) следует, что непрерывными останутся также тангенциальные составляющие поля скорости и напряженности магнитного поля:  $B_1^I = B_1^{II}$  и  $u_1^I = u_1^{II}$ . Следовательно, нетривиальные соотношения на разрыве несут лишь последние два уравнения системы (3.17):

$$\begin{aligned}
 D &= u_1 - B_1 \frac{B_2^I - B_2^{II}}{u_2^I - u_2^{II}}, \\
 (B_2^I - B_2^{II})^2 &= (u_2^I - u_2^{II})^2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

После элементарных преобразований системы (3.26) получаем

$$\begin{aligned}
 D &= u_1 \pm B_1, \\
 B_2^I - B_2^{II} &= \mp (u_2^I - u_2^{II}).
 \end{aligned} \tag{3.27a}$$

Кроме того, по предположению выполняется также

$$h^I = h^{II}, \quad B_1^I = B_1^{II}, \quad u_1^I = u_1^{II}. \quad (3.27b)$$

Полученные соотношения (3.27) задают альфвеновские разрывные волны в приближении мелкой воды. В дальнейшем будем опускать слово «разрывные», поскольку непрерывные альфвеновские волны непригодны для построения решения задачи Римана.

### 3.6. Допустимые разрывы

В предыдущих двух подразделах было показано, что существуют два типа устойчивых разрывов с ненулевым потоком массы:

1) разрыв (3.20), (3.23), содержащий скачок свободной поверхности и нормальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый магнитогравитационной ударной волной;

2) разрыв (3.27) тангенциальных составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля, называемый альфвеновской волной в приближении мелкой воды.

Вообще говоря, система уравнений (3.19) допускает третий тип устойчивых разрывов, для которых нормальная составляющая скорости непрерывна и тождественно совпадает со скоростью самого разрыва, называемого контактным разрывом. Такой тип разрывов должен быть включен в рассмотрение при наличии физических различий в описании жидкости для задачи произвольного разрыва, например, когда жидкость в начальный момент времени в каждой из полуплоскостей имеет различную плотность. Другой пример контактного разрыва, рассматриваемый в данной работе, соответствует вырождению альфвеновской ударной волны при стремлении тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля к нулю. В этом случае поток массы через такую волну равен нулю, а нормальные составляющие напряженности магнитного поля и поля скорости становятся указанными физическими различиями.

## 4. ЗАДАЧА РАСПАДА ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА (ЗАДАЧА РИМАНА) ДЛЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе сформулирована задача распада произвольного разрыва для магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды и перечислены

все допустимые волновые конфигурации из ранее найденных частных решений. Показано, что в предположении автомодельности решение единственно, а в предположении единственности — автомодельно. Для каждой конфигурации найдены условия для начальных данных, необходимых для ее реализации.

### 4.1. Постановка задачи Римана

Рассмотрим систему уравнений (2.1a) с кусочно-постоянными начальными условиями для левого ( $x < 0$ ) и правого ( $x > 0$ ) полупространств, удовлетворяющими уравнению (2.1b):

$$\begin{aligned} t = 0, \\ \left. \begin{aligned} h = h^I, \quad u_1 = u_1^I, \quad u_2 = u_2^I, \\ B_1 = B_1^I, \quad B_2 = B_2^I \end{aligned} \right\} x < 0, \\ \left. \begin{aligned} h = h^{II}, \quad u_1 = u_1^{II}, \quad u_2 = u_2^{II}, \\ B_1 = B_1^{II}, \quad B_2 = B_2^{II} \end{aligned} \right\} x > 0, \\ B_1^I h^I = B_1^{II} h^{II}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Разрыв начальных условий для двух полубесконечных магнитных жидкостей, характеризующихся постоянными значениями приведенных выше параметров и удовлетворяющих системе (4.1), назовем произвольным разрывом [14]. Магнитогиродинамическое течение, удовлетворяющее системе уравнений (2.1a) при  $t > 0$  и начальным условиям (4.1), называется решением задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды.

Без ограничения общности считается, что глубина жидкости справа не превышает глубины жидкости слева. В случае отсутствия жидкости в правом полупространстве, как будет показано ниже, необходимо отсутствие нормальной составляющей магнитного поля в левом полупространстве,  $B_1^I = 0$ , что приводит к ее полному отсутствию,  $B_1 \equiv 0$ , во всей пространственно-временной области определения решений системы (2.1a), (4.1). В этом случае решение полностью аналогично решению классической задачи о разрушении дамбы [18] с учетом конвективного переноса составляющих поля скорости и напряженности магнитного поля. Магнитная жидкость справа считается покоящейся. Выполнение указанных условий легко достигается выбором направления пространственных осей и переходом в инерциальную систему координат, замороженную в начальный момент времени в правую жидкость.

Заметим, что в силу бездивергентности магнитного поля для нетривиальной магнитогиродинамической постановки,  $B_1 \neq 0$ , глубина жидкости во



всей области определения решения является строго положительной. Поэтому если в одном из полупространств жидкость отсутствует, то в другом нормальная составляющая магнитного поля необходимо вырождается. Случай отсутствия жидкости и в другом полупространстве, в силу полного вырождения решения (все магнитогидродинамические величины постоянны и равны нулю), не подлежит рассмотрению. Если нормальная составляющая напряженности магнитного поля отсутствует в обоих полупространствах,  $B_1 \equiv 0$ , то задача вырождается в гидродинамическую, и решение переходит в решение задачи о разрушении дамбы [18]. Действительно, если при этом тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля также равна нулю, т. е. магнитное поле отсутствует, система уравнений (2.1a) вырождается в классическую систему уравнений для мелкой воды. А при наличии ненулевой тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля,  $B_2 \neq 0$ , вырождается искомое решение. В этом случае, как будет показано ниже, правая и левая альфвеновские ударные волны «схлопываются», вырождаясь в контактный разрыв, а тангенциальные составляющие магнитного поля и поля скорости переносятся конвективно, что также соответствует решению чисто гидродинамической задачи о разрушении дамбы в приближении мелкой воды [18]. В дальнейшем случай «схлопывания» альфвеновских волн выделяться не будет.

Исходная система уравнений (2.1a) инвариантна относительно преобразований подобия переменных  $x$  и  $t$  ( $t' = kt$ ,  $x' = kx$ ,  $k > 0$ ) вместе со своим интегральным следствием. (В данном случае имеет смысл говорить именно о следствии интегральных законов сохранения из дифференциальных, поскольку уравнения для магнитной мелкой воды являются следствием усреднения дифференциальных уравнений магнитной гидродинамики по глубине слоя.) Поэтому из предположения единственности решения задачи распада произвольного разрыва и построенного ниже решения следует его автомодельность. В то же время построенное ниже решение в предположении автомодельности является доказательством существования и единственности.

Построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа централизованных непрерывных волн Римана, магнитогидродинамических и альфвеновских ударных волн, зон постоянного течения, контактных разрывов и в нахождении параметров, характеризующих их области определения.

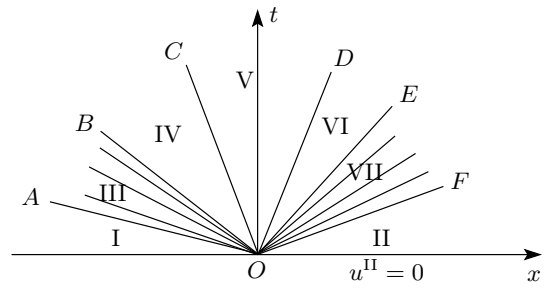


Рис. 2. Две централизованные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны

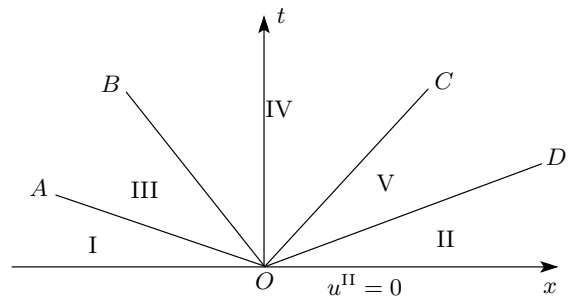


Рис. 3. Две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны

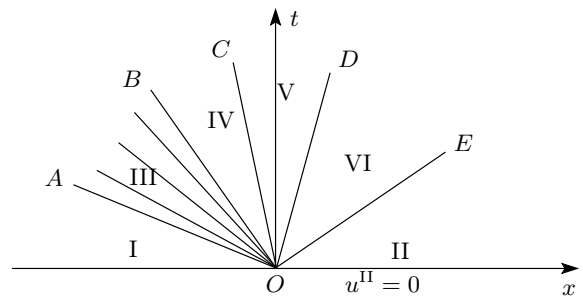


Рис. 4. Магнитогравитационная волна разрежения, обращенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны

Схематически автомодельная картина возникающего течения на пространственно-временной плоскости изображается одной из пяти возможных конфигураций:

две централизованные магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны (рис. 2);

две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны (рис. 3);

магнитогравитационная волна разрежения, обра-

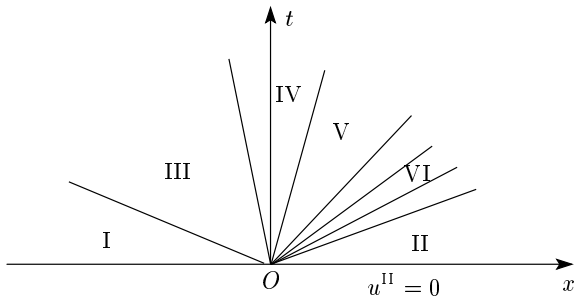


Рис. 5. Левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны

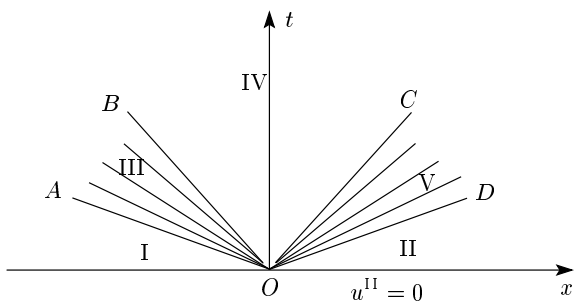


Рис. 6. Две гидродинамические волны Римана и зона вакуума

щенная назад, правая магнитогравитационная ударная волна и две альфвеновские волны (рис. 4);

левая магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения, обращенная вперед, и две альфвеновские волны (рис. 5);

две гидродинамические волны Римана и зона вакуума (рис. 6).

Последняя конфигурация совпадает с аналогичной конфигурацией в решении задачи о разрушении дамбы [18] с учетом конвективного переноса тангенциальных составляющих скорости и напряженности магнитного поля через разрыв. Данная конфигурация реализуется только при  $B_1 \equiv 0$ .

Покажем, что других волновых конфигураций быть не может. Действительно, из указанного в разд. 3 факта, что магнитогравитационная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды перед ней и дозвуковой относительно среды за ней, следует, что в один газ не могут бежать две магнитогравитационные ударные волны или магнитогравитационная ударная волна и волна разрежения. Две волны разрежения также не могут бежать в один газ, поскольку при этом их крайние характе-

ристики необходимо совпадают и они образуют одну волну разрежения. Кроме того, скорость альфвеновской волны всегда меньше скорости любой магнитогравитационной волны. Из перечисленных выше условий следует, что в один газ может бежать не более одной магнитогравитационной волны (ударной или разрежения) и одной альфвеновской, движущейся с меньшей относительно магнитогравитационной волны скоростью. Следовательно, при распаде разрыва не могут реализовываться конфигурации, отличные от указанных выше.

Рассмотрение задачи о распаде произвольного разрыва будем проводить следующим способом: непрерывно меняя конкретные начальные условия, реализующие одну из перечисленных выше конфигураций, найдем непрерывно изменяющееся решение, переходящее через критические значения параметров, отделяющих одну конфигурацию от другой.

#### 4.2. Конфигурация «две магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны»

Пусть начальные условия определяют конфигурацию «две центрированные магнитогравитационные волны разрежения Римана и две альфвеновские волны». Данная конфигурация разбивает область определения течения на семь областей, разделенных шестью лучами:  $OA, OB, OC, OD, OE, OF$  (рис. 2). Луч  $OA$ , задаваемый соотношением  $x = y_1 t$ , отделяет область постоянного течения I, в которой величины  $u_1, u_2, B_1, B_2$  и  $h$ , задаваемые начальными условиями

$$h = h^I, \quad u_1 = u_1^I, \quad u_2 = u_2^I, \quad B_1 = B_1^I, \quad B_2 = B_2^I$$

для левой массы жидкости, сохраняют свои значения, от области III — центрированной магнитогравитационной волны Римана, обращенной назад. Тогда, согласно (3.12),  $y_1 = u_1^I - c_g^I$ , поскольку луч  $OA$  задает характеристику центрированной волны Римана, обращенной назад. Луч  $OB$ , задаваемый соотношением  $x = y_2 t$ , также является характеристикой, отделяющей волну разрежения от области IV — зоны постоянного течения, следовательно,  $y_2 = u_1^{IV} - c_g^{IV}$ . Лучи  $OC$  и  $OD$ , заданные уравнениями  $x = y_3 t$  и  $x = y_4 t$ , соответствуют альфвеновским ударным волнам (3.27), поэтому  $y_3 = u_1^{IV} - |B_1^{IV}|, y_4 = u_1^V + |B_1^V|$ . Лучи  $OE$  и  $OF$ , соответствующие магнитогравитационной волне разрежения Римана, обращенной вперед (3.13), задаются, аналогично лучам  $OA$  и  $OB$ , соотношениями  $x = y_5 t$  и  $x = y_6 t$ , где  $y_5 = u_1^{VI} + c_g^{VI}, y_6 = c_g^{II}$ .

Рассмотрим области IV, V и VI. Они представляют собой три области постоянного течения, отделенные друг от друга альфвеновскими ударными волнами. Величины  $u_2$  и  $B_2$  в этих областях связаны, согласно (3.27), при  $B_1 > 0$  соотношениями

$$u_2^{IV} - B_2^{IV} = u_2^V - B_2^V, \quad u_2^V + B_2^V = u_2^{VI} + B_2^{VI},$$

а при  $B_1 < 0$  —

$$u_2^{IV} + B_2^{IV} = u_2^V + B_2^V, \quad u_2^V - B_2^V = u_2^{VI} - B_2^{VI},$$

откуда

$$u_2^V = \frac{1}{2} [u_2^{VI} + u_2^{IV} + \text{sign}(B_1)(B_2^{VI} - B_2^{IV})],$$

$$B_2^V = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{VI} - u_2^{IV}) + B_2^{VI} + B_2^{IV}].$$

Поскольку в центрированных магнитогиродинамических волнах Римана величины  $u_2$  и  $B_2$  не меняются, выполняются соотношения

$$u_2^I = u_2^{III} = u_2^{IV}, \quad u_2^{II} = u_2^{VII} = u_2^{VI},$$

следовательно,

$$u_2^V = \frac{1}{2} [u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^{II} - B_2^I)],$$

$$B_2^V = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I].$$

Таким образом, значения  $u_2$  и  $B_2$  однозначно определены и известны во всем пространстве в любой момент времени.

Поскольку на альфвеновских ударных волнах величины  $u_1$ ,  $B_1$  и  $h$  сохраняют свои значения, справедливы следующие равенства:

$$u_1^{IV} = u_1^V = u_1^{VI},$$

$$B_1^{VI} = B_1^V = B_1^{IV}, \quad h^{IV} = h^V = h^{VI}.$$

В дальнейшем для них в областях V и VI использованы обозначения с индексом «IV». Область III представляет собой волну Римана (3.12), обращенную назад, поэтому параметры в ней подчиняются соотношениям

$$u_1 + \varphi(h) = \text{const}, \quad B_1 h = \text{const},$$

откуда

$$u_1^I + \varphi(h^I) = u^{IV} + \varphi(h^{IV}), \quad B_1^I h^I = B_1^{IV} h^{IV}.$$

Аналогично, область VII представляет собой волну Римана (3.13), обращенную вперед, поэтому выполняются соотношения

$$-\varphi(h^{II}) = u^{IV} - \varphi(h^{IV}), \quad B_1^{II} h^{II} = B_1^{IV} h^{IV}.$$

Тогда

$$u_1^{IV} = \frac{1}{2} [u_1^I - \varphi(h^{II}) + \varphi(h^I)],$$

$$\varphi(h^{IV}) = \frac{1}{2} [u^I + \varphi(h^I) + \varphi(h^{II})].$$

Для реализации данной конфигурации необходимо, чтобы

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 \leq y_6,$$

$$u_1^I - c_g^I < u_1^{IV} - c_g^{IV} < u_1^{IV} - |B_1^{IV}| \leq u_1^{IV} + |B_1^{IV}| < u_1^{IV} + c_g^{IV} \leq c_g^{II}. \quad (4.2)$$

При этом равенство в последнем неравенстве цепочки (4.2) достигается в случае вырождения центрированной магнитогиродинамической волны Римана, обращенной вперед. Случай равенства

$$u_1^{IV} - |B_1^{IV}| = u_1^{IV} + |B_1^{IV}|$$

достигается лишь при отсутствии тангенциальной составляющей магнитного поля, что соответствует вырождению двух альфвеновских ударных волн в одну. Такая волна в точности совпадает с контактным разрывом между двумя жидкостями, характеризующимися различными нормальными составляющими поля скорости и магнитного поля. Далее такая ситуация будет считаться частным случаем двух альфвеновских ударных волн и не будет выделяться отдельно. Условия  $y_2 < y_3$  и  $y_4 < y_5$  выполняются автоматически, поскольку  $c_g = \sqrt{B_1^2 + gh} > B_1$  строго выполняется во всей области определения в силу строгой положительности глубины.

Для выполнения первого и последнего неравенств цепочки (4.2),  $u_1^I - c_g^I < u_1^{IV} - c_g^{IV}$  и  $u_1^{IV} + c_g^{IV} \leq c_g^{II}$ , необходимо и достаточно выполнение неравенств для глубин в соответствующих областях:

$$h_1^I \geq h_1^{II} \geq h_1^{IV}. \quad (4.3)$$

Таким образом, для нахождения условий совместности предложенной конфигурации остается показать существование и единственность значений  $u_1^{IV}$  и  $h_1^{IV}$ , таких что выполнены неравенства (4.3), а в каждой волне выполнено условие постоянства соответствующих инвариантов:

$$u_1^I + \varphi(h^I) = u_1^{IV} + \varphi(h^{IV}) \quad (4.4)$$

для центрированной волны Римана, обращенной назад и

$$-\varphi(h^{II}) = u_1^{IV} - \varphi(h^{IV}) \quad (4.5)$$

для центрированной волны Римана, обращенной вперед. Одновременное выполнение инвариантов

(4.4), (4.5) эквивалентно выполнению уравнения для  $h^{IV}$ :

$$\varphi(h^{IV}) = \frac{1}{2} [u_1^I + \varphi(h^I) + \varphi(h^{II})].$$

Заметим, что

$$\varphi(h) = \int \frac{dh}{h} \sqrt{\frac{(B_1 h)^2}{h^2} + gh}$$

является возрастающей функцией глубины, тогда условие выполнения неравенств (4.3) выглядит следующим образом:

$$u^I \leq \varphi(h^{II}) - \varphi(h^I). \tag{4.6}$$

**4.3. Конфигурация «магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны»**

В данной конфигурации пять лучей,  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  и  $OE$ , разбивают течение на шесть областей (рис. 3). В области I параметры, задаваемые начальными условиями (4.1) для левой массы жидкости, не изменяются. Аналогично, в области II параметры совпадают с начальными параметрами для правой массы жидкости. Лучи  $OA$  и  $OB$ , задаваемые уравнениями

$$x = y_1 t, \quad x = y_2 t,$$

где

$$y_1 = u_1^I - c_g^I, \quad y_2 = u_1^V - c_g^V,$$

ограничивают область центрированной магнитогравитационной волны разрежения Римана. Лучи  $OC$  и  $OD$ , определяемые соотношениями

$$x = y_3 t, \quad x = y_4 t,$$

где

$$y_3 = u_1^V - |B_1^V|, \quad y_4 = u_1^V + |B_1^V|,$$

являются альфвеновскими ударными волнами, а луч  $OE$ , задаваемый как  $x = Dt$ , является правой магнитогравитационной ударной волной.

Условия реализации данной конфигурации принимают вид

$$u_1^I - c_g^I \leq u_1^V - c_g^V \leq u_1^V - |B_1^V| \leq u_1^V + |B_1^V| \leq D.$$

Равенства в цепочке неравенств достигаются при вырождении соответствующих волн, как и в случае рассмотренной выше конфигурации. Для выполнения всей цепочки необходимо и достаточно, чтобы

$$h^{II} \leq h^{III} \leq h^I.$$

Второе равенство соответствует вырождению центрированной магнитогравитационной волны Римана, обращенной назад, в зону постоянного течения, а первое — вырождению правой магнитогравитационной ударной волны.

В областях III, IV и V выполняются соотношения

$$u_2^{IV} = \frac{1}{2} [u_2^{II} + u_2^I + \text{sign}(B_1)(B_2^I - B_2^{II})],$$

$$B_2^{IV} = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{II} - u_2^I) + B_2^{II} + B_2^I].$$

Используя равенства  $u_1^{III} = u_1^{IV} = u_1^V$ ,  $B_1^{III} = B_1^{IV} = B_1^V$ ,  $h^{III} = h^{IV} = h^V$ , можно обозначить соответствующие параметры в областях IV и V индексом «III».

Для области III, с одной стороны, выполняется условие постоянства инварианта Римана на магнитогравитационной волне разрежения, обращенной назад:

$$u_1^{III(1)} = u_1^I + \varphi(h^I) - \varphi(h^{III}),$$

с другой, — условие для правой ударной волны:

$$u_1^{III(2)} = -(h^{II} - h^{III}) \sqrt{\frac{g(h^{II} + h^{III})/2 + (B_1^I h^I)^2 / h^{II} h^{III}}{h^{II} h^{III}}}.$$

Первая функция является убывающей по переменной  $h^{III}$ , вторая — возрастающей, поэтому для существования и единственности корня на отрезке  $[h^{II}, h^I]$  необходимо и достаточно, чтобы

$$u_1^{III(1)}(h^{II}) \geq u_1^{III(2)}(h^{II}), \quad u_1^{III(1)}(h^I) \geq u_1^{III(2)}(h^I),$$

т. е.

$$u_1^I \geq \varphi(h^{II}) - \varphi(h^I),$$

$$u_1^I \geq (h^I - h^{II}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{II})/2 + (B_1^I h^I)^2 / h^I h^{II}}{h^I h^{II}}}. \tag{4.7}$$

Отметим, что при выполнении равенства в (4.7) решение соответствует случаю вырождения правой ударной волны и превращения ее в волну разрежения.

**4.4. Конфигурация «две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны»**

В данной конфигурации область определения течения разбивается лучами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  на пять областей (рис. 4). В каждой из этих областей течение постоянно. В области I параметры, задаваемые начальными условиями для левой массы жидкости, не изменяются. Аналогично, в области II параметры совпадают с начальными параметрами для

правой массы жидкости. Луч  $OA$ , задаваемый уравнением  $x = D_1 t$ , является левой магнитогравитационной ударной волной, на которой должны выполняться условия (3.20). Аналогично, луч  $OD$ , определяемый соотношением  $x = D_2 t$ , является правой магнитогравитационной ударной волной, на которой должны выполняться условия (3.20).

Лучи  $OB$  и  $OD$ , определяемые соотношениями

$$x = y_1 t, \quad x = y_2 t,$$

где

$$y_1 = u_1^{\text{III}} - |B_1^{\text{III}}|, \quad y_2 = u_1^{\text{V}} + |B_1^{\text{V}}|,$$

являются альфвеновскими ударными волнами.

Необходимым условием реализации данной конфигурации является цепочка неравенств

$$D_1 \leq u_1^{\text{III}} - |B_1^{\text{III}}| \leq u_1^{\text{V}} + |B_1^{\text{V}}| < D_2.$$

Выполнение первого и последнего неравенств цепочки является следствием эволюционности ударных магнитогравитационных волн. Равенство в первом неравенстве цепочки достигается при вырождении левой магнитогравитационной волны в зону постоянного течения, а равенство скоростей альфвеновских ударных волн, как и выше, соответствует вырождению этих двух волн в одну.

При рассмотрении областей III, IV и V, граничащих с альфвеновскими волнами, можно провести рассуждения, аналогичные изложенным при рассмотрении предыдущей конфигурации, и получить

$$u_2^{\text{V}} = \frac{1}{2} [u_2^{\text{VI}} + u_2^{\text{IV}} + \text{sign}(B_1)(B_2^{\text{VI}} - B_2^{\text{IV}})],$$

$$B_2^{\text{V}} = \frac{1}{2} [\text{sign}(B_1)(u_2^{\text{VI}} - u_2^{\text{IV}}) + B_2^{\text{VI}} + B_2^{\text{IV}}].$$

Принимая во внимание равенства

$$u_1^{\text{III}} = u_1^{\text{IV}} = u_1^{\text{V}},$$

$$B_1^{\text{III}} = B_1^{\text{IV}} = B_1^{\text{V}}, \quad h^{\text{III}} = h^{\text{IV}} = h^{\text{V}},$$

далее для соответствующих параметров из областей IV и V используем значения параметров с индексом «III».

Соотношения для магнитогравитационных ударных волн, записанные в соответствующих областях, имеют вид

$$u_1^{\text{III(1)}} = u_1^{\text{I}} + (h^{\text{I}} - h^{\text{III}}) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{g(h^{\text{I}} + h^{\text{III}})/2 + (B_1^{\text{I}} h^{\text{I}})^2 / h^{\text{I}} h^{\text{III}}}{h^{\text{I}} h^{\text{III}}}},$$

$$u_1^{\text{III(2)}} = -(h^{\text{II}} - h^{\text{III}}) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{g(h^{\text{II}} + h^{\text{III}})/2 + (B_1^{\text{I}} h^{\text{I}})^2 / h^{\text{II}} h^{\text{III}}}{h^{\text{II}} h^{\text{III}}}}$$

соответственно для левой и правой магнитогравитационных ударных волн.

С учетом неравенств  $h^{\text{III}} \geq h^{\text{I}} \geq h^{\text{II}}$  для ударных волн можно заметить, что первое выражение является убывающей функцией переменной  $h^{\text{III}}$ , а второе — возрастающей. Тогда, чтобы эти две функции имели единственный корень  $h^{\text{III}}$  на полуинтервале  $[h^{\text{I}}, +\infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $u_1^{\text{III(1)}}(h^{\text{I}}) \geq u_1^{\text{III(2)}}(h^{\text{I}})$ , откуда для выполнения этой конфигурации следует следующее условие для начальных данных:

$$u_1^{\text{I}} = (h^{\text{I}} - h^{\text{II}}) \sqrt{\frac{g(h^{\text{I}} + h^{\text{II}})/2 + (B_1^{\text{I}} h^{\text{I}})^2 / h^{\text{I}} h^{\text{II}}}{h^{\text{I}} h^{\text{II}}}}. \quad (4.8)$$

Отметим, что при выполнении равенства в (4.8) решение соответствует случаю вырождения левой ударной волны и превращения ее в волну разрежения.

#### 4.5. Конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума»

Если  $B_1^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} = 0$ , то магнитогравитационные волны разрежения превращаются в гидродинамические волны Римана, и может реализовываться конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» (рис. 6). Условием ее реализации является [18]

$$u_1^{\text{I}} < -2c_g^{\text{I}} - 2c_g^{\text{II}}.$$

Лучи  $OB$  и  $OC$  на рис. 6 отделяют зону вакуума ( $u_{1,2} = 0, B_{1,2} = 0, h = 0$ ) от зон, в которых величины  $u_2$  и  $B_2$  сохраняют начальные значения  $u_2 = u_2^{\text{I}}, B_2 = B_2^{\text{I}}$  слева и  $u_2 = u_2^{\text{II}}, B_2 = B_2^{\text{II}}$  справа, фактически являясь контактными разрывами.

#### 4.6. Решение задачи Римана

Таким образом, получены решения для произвольных начальных данных, удовлетворяющих условиям

$$B_1^{\text{I}} h^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} h^{\text{II}}, \quad h^{\text{II}} \neq 0,$$

$$h^{\text{I}} \geq h^{\text{II}} > 0, \quad u_1^{\text{II}} = 0$$

и

$$h^{\text{II}} = 0, \quad B_1^{\text{I}} = B_1^{\text{II}} = 0, \quad u_1^{\text{II}} = 0.$$

Для

$$u_1^{\text{I}} \geq (h^{\text{I}} - h^{\text{II}}) \sqrt{\frac{g(h^{\text{I}} + h^{\text{II}})/2 + (B_1^{\text{I}} h^{\text{I}})^2 / h^{\text{I}} h^{\text{II}}}{h^{\text{I}} h^{\text{II}}}}$$

реализуется конфигурация «две магнитогравитационные ударные волны и две альфвеновские волны», для

$$u_1^I > \varphi(h^{\text{II}}) - \varphi(h^I),$$

$$u_1^I < (h^I - h^{\text{II}}) \sqrt{\frac{g(h^I + h^{\text{II}})/2 + (B_1^I h^I)^2/h^I h^{\text{II}}}{h^I h^{\text{II}}}}$$

— конфигурация «магнитогравитационная ударная волна, магнитогравитационная волна разрежения и две альфвеновские волны», для

$$u_1^I \leq \varphi(h^{\text{II}}) - \varphi(h^I)$$

— конфигурация «две магнитогравитационные волны разрежения и две альфвеновские волны», для

$$B_1^I = B_1^{\text{II}} = 0,$$

$$u_1^I < -2c_g^I - 2c_g^{\text{II}}$$

— конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума».

Полученное решение задачи Римана помимо самостоятельной ценности является основополагающим для построения целого класса конечнообъемных численных методов сквозного счета, позволяющих рассчитывать как непрерывные, так и разрывные решения без выделения разрывов [20–23].

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована нелинейная динамика магнитогидродинамических течений тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. Найдены все централизованные автомодельные решения системы уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды: магнитогравитационные волны разрежения, магнитогравитационные ударные волны и альфвеновские волны. Решена задача распада произвольного разрыва для уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды над ровной поверхностью. Показано, что решение представляет собой одну из пяти конфигураций.

Из полученных результатов следует, что решение является суперпозицией двух решений: распада разрыва для мелкой воды без магнитного поля (с учетом измененной скорости звука  $c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$ ) и двух альфвеновских волн. При  $B_1 \equiv 0$  две альфвеновские волны совпадают и превращаются в контактный разрыв. Конфигурация «две гидродинамические волны Римана и зона вакуума» существенно отличается от остальных, поскольку может реализовываться лишь при изначальном равенстве нулю нормальной компоненты магнитного поля.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (№ МК-1349.2011.2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Gilman, *Astrophys. J.* **544**, L79 (2000).
2. M. Miesch and P. Gilman, *Solar Phys.* **220**, 287 (2004).
3. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, *Astrophys. J.* **691**, L41 (2009).
4. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астрофиз. ж.* **25**, 323 (1999).
5. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, *Письма в астрофиз. ж.* **36**, 896 (2010).
6. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, *Astrophys. J.* **566**, 1018 (2002).
7. K. Heng and A. Spitkovsky, *Astrophys. J.* **703**, 1819 (2009).
8. J. Cho, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **366**, 4477 (2008).
9. V. Bojarevics and K. Pericleous, in *Proc. of the 15th Riga and 6th Pamir Conf. on Fundamental and Applied MHD Aluminium Reduction Cells*, Riga (2005), Vol. II, p. 87.
10. K. V. Karelsky, V. V. Papkov, A. S. Petrosyan et al., *Phys. Lett. A* **271**, 341 (2000).
11. K. V. Karelsky and A. S. Petrosyan, *Fluid Dynam. Res.* **38**, 339 (2006).
12. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
13. P. J. Dellar, *Phys. Plasmas* **9**, 1130 (2002).
14. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных явлений*, Наука, Москва (1966).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
16. *Электродинамика плазмы*, под ред. А. И. Ахиезера, Наука, Москва (1974).
17. H. De Streck, *Phys. Plasmas* **8**, 3293 (2001).

18. K. V. Karelsky, V. V. Papkov, and A. S. Petrosyan, *Phys. Lett. A* **271**, 349 (2000).
19. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
20. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modeling* **21**, 539 (2006).
21. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modeling* **22**, 543 (2007).
22. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and A. G. Slavin, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modeling* **24**, 229 (2009).
23. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. Г. Славин, *Матем. моделирование* **21**(6), 41 (2009).