

ТЕОРИЯ ЛАЗЕРНО-ПЛАЗМЕННОГО МЕТОДА ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ТЕРАГЕРЦЕВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Фролов^{а*}, А. В. Бородин^б, М. Н. Есаулков^б, И. И. Курицын^б, А. П. Шкуринов^б

^аОбъединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия

^бМосковский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 августа 2011 г.

Разработана теория, позволяющая рассчитать спектр и форму терагерцевого волнового пакета по временному профилю энергии второй гармоники лазерного поля, генерируемой при нелинейном взаимодействии лазерного и терагерцевого импульсов в плазме оптического пробоя. Показано, что спектральные и временные характеристики огибающей второй гармоники оптического излучения и терагерцевого импульса совпадают только при малых длительностях лазерного излучения. Для длинных лазерных импульсов спектральная линия второй гармоники смещается в область более низких частот, а ее временной профиль определяется интегралом по времени от электрического поля терагерцевого излучения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время заметно возрос интерес к вопросам теории и практики генерации излучения терагерцевого (ТГц) спектрального диапазона, что обусловлено возможностью его широкого использования в различных областях науки и техники. Один из перспективных способов получения мощного терагерцевого излучения связан с использованием оптических лазеров, генерирующих импульсы фемтосекундной длительности. При воздействии интенсивных фемтосекундных лазерных импульсов на газообразные и твердотельные мишени происходит генерация терагерцевого излучения, которая была впервые зарегистрирована в эксперименте [1] и объяснялась возбуждением кильватерных ленгмюровских колебаний в образующейся при оптической ионизации плазме. В дальнейшем генерация ТГц-излучения при лазерном воздействии на вещество наблюдалась во многих экспериментах (см., например, [2–5]), в которых в результате фотоионизации вещества образуется плазма. В литературе рассматриваются различные физические механизмы генерации терагерцевого излучения при лазерно-плазменных взаимодействиях [4–16]. Вместе с тем, наряду с вопросами создания излучателей ТГц-импульсов очень важной является проблема их

детектирования. Для регистрации ТГц-излучения используются различные устройства, такие как болометры, ячейки Голея, диоды Шоттки, фотопроводящие антенны и другие приборы. В последнее время для детектирования ТГц-излучения также стали применяться оптические лазеры. Преимущества использования лазеров, излучающих импульсы фемтосекундной длительности, связаны с возможностью детектирования ТГц-излучения в более широком частотном интервале и при комнатных температурах. Из литературы известен метод электрооптического детектирования [17, 18], который базируется на преобразовании частоты ТГц-диапазона в оптическую частоту в нелинейном кристалле. Для определения терагерцевого поля применяется также метод измерения интенсивности второй гармоники оптического излучения при нелинейном взаимодействии ТГц- и оптического импульсов в воздухе при наличии приложенного постоянного электрического поля [19, 20]. При этом используются оптические импульсы малой интенсивности, что не приводит к ионизации воздуха и образованию плазмы. В этом случае интенсивность второй гармоники $I_{2\omega_0}$ выражается через интенсивность лазерного излучения I_{ω_0} на несущей частоте ω_0 и напряженности терагерцевого E_T и постоянного E_0 электрических полей следующим образом:

*E-mail: frolov@ihed.ras.ru

$$I_{2\omega_0} \propto [\chi^{(3)}]^2 I_{\omega_0}^2 E_T E_0, \quad (1.1)$$

где $\chi^{(3)}$ — нелинейная восприимчивость воздуха. Формула (1.1) позволяет рассчитать временное распределение электрического поля в импульсе ТГц-излучения по измеренному профилю интенсивности второй гармоники.

В настоящей работе представлена теория лазерно-плазменного метода детектирования терагерцевого излучения, в котором экспериментальные данные по измерению энергии излучения на второй гармонике $2\omega_0$ лазерной частоты ω_0 используются для восстановления временного профиля и спектра ТГц-импульса. Физический механизм генерации электромагнитного поля на удвоенной частоте лазера, лежащий в основе данного метода определения временного профиля и спектра ТГц-импульса, связан с нелинейным взаимодействием лазерного излучения на основной частоте ω_0 с терагерцевым волновым пакетом в разреженной плазме, которая образуется в результате фотоионизации воздуха, при наличии внешнего приложенного электрического поля. На основе гидродинамической модели холодной бесстолкновительной плазмы, образующейся при оптическом пробое газа, получено выражение для интенсивности излучения на второй гармонике лазерной частоты. Показано, что в отличие от выражения (1.1) для неионизованного воздуха при образовании плазмы интенсивность второй гармоники оптического излучения определяется временной производной от квадрата интенсивности лазерного излучения на несущей частоте, интегралом по времени от электрического поля ТГц-импульса, а также величиной и направлением постоянного электрического поля. Вычислена полная энергия второй гармоники в зависимости от задержки по времени между оптическим и терагерцевым импульсами, а также получено интегральное уравнение для определения временного профиля электрического поля ТГц-импульса. Построено решение интегрального уравнения, которое позволяет по известной зависимости энергии второй гармоники от величины задержки рассчитать спектр и временной профиль импульса ТГц-излучения. Проанализированы спектральные и временные характеристики терагерцевого излучения в зависимости от соотношения длительностей лазерного и терагерцевого импульсов. Показано, что, если длительность лазерного импульса значительно меньше длительности импульса ТГц-излучения, то спектральные характеристики и временные профили второй гармоники и терагерцевого излучения практически совпа-

дают. Увеличение длительности лазерного импульса приводит к появлению существенных различий в спектральном составе и форме импульсов. Максимум в спектре ТГц-излучения смещается в область более высоких частот относительно максимума второй гармоники, а также появляются отличия во временном распределении импульсов второй гармоники и ТГц-излучения. Показано, что если длительность лазерного импульса значительно превосходит длительность волнового пакета ТГц-излучения, то энергия второй гармоники пропорциональна интегралу по времени от электрического поля терагерцевого импульса.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Пусть лазерный импульс умеренной интенсивности с несущей частотой ω_0 , распространяющийся в газовой среде, фокусируется с помощью длиннофокусной линзы в область пространства, где приложено внешнее постоянное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 (направление вектора \mathbf{E}_0 ортогонально направлению распространения лазерного излучения). В результате фокусировки лазерного излучения из-за фотоионизации газа образуется разреженная плазма, плотность электронов в которой N_{0e} значительно ниже критического значения для несущей частоты лазера $N_{cr} = m_e \omega_0^2 / 4\pi e^2$, где e , m_e — заряд и масса электрона. Вместе с лазерным излучением, но с некоторой задержкой по времени в ту же область газовой мишени фокусируется импульс терагерцевого излучения, в спектре которого имеется широкая линия с частотой в максимуме ω_T . При этом будем считать, что характерные частоты терагерцевого излучения значительно меньше лазерной частоты, но существенно превышают плазменную частоту ω_p , $\omega_p \ll \omega_T \ll \omega_0$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_{0e} / m_e}$. В таком случае плазма является прозрачной как для лазерного импульса, так и для импульса терагерцевого излучения, и они проходят сквозь плазменный слой практически без искажения своего спектрального состава и пространственно-временного распределения. В результате нелинейного взаимодействия лазерного и терагерцевого излучения в таком слое разреженной плазмы происходит возбуждение электромагнитных полей на второй гармонике лазерного излучения, которые свободно выходят в окружающую среду и могут регистрироваться соответствующей диагностической аппаратурой. Измеренные зависимости от

времени энергии излучения на удвоенной лазерной частоте могут быть использованы для анализа временного профиля и спектра терагерцевого импульса.

Для описания генерации второй гармоники оптического излучения будем использовать уравнения Максвелла для электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей, а также гидродинамические уравнения «холодной» бесстолкновительной плазмы для скорости \mathbf{V} и плотности N_e электронов:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e(N_e - N_{0e}), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_e + \text{div}(N_e \mathbf{V}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{V}^2, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{j}_e = eN_e \mathbf{V}$ — электрический ток, N_{0e} — равновесная плотность плазмы, c — скорость света. Отметим, что при получении уравнения (2.5) было использовано равенство

$$(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{V}^2 - \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V},$$

а также закон сохранения обобщенного вихря [21]:

$$\text{rot } \mathbf{V} + \frac{e}{m_e c} \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Для определенности будем считать, что импульсы лазерного и терагерцевого излучения распространяются вдоль оси z в положительном направлении. Ионизация газа происходит в результате фокусировки лазерного излучения длиннофокусной линзой, поэтому можно считать, что плазма образуется в некоторой области пространства ($-d \leq z \leq d$) и имеет практически однородное распределение плотности внутри этого слоя. Запишем все величины, входящие в уравнения (2.1)–(2.5), в виде суммы гармоник лазерного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{V}^{(1)} + \mathbf{V}^{(2)} + \dots, \\ N_e &= N_{0e} + \delta N^{(0)} + \delta N^{(1)} + \delta N^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_2 e^{-2i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \\ \mathbf{V}^{(1)} &= \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \\ \mathbf{V}^{(2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 e^{-2i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \\ \delta N^{(1)} &= \frac{1}{2} \delta N_1 e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}, \\ \delta N^{(2)} &= \frac{1}{2} \delta N_2 e^{-2i\omega_0 t} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь \mathbf{E}_1 , \mathbf{V}_1 , δN_1 — комплексные амплитуды электрического поля, скорости и возмущений плотности на основной частоте, \mathbf{E}_2 , \mathbf{V}_2 , δN_2 — комплексные амплитуды соответствующих величин на второй гармонике, $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{V}^{(0)}$, $\delta N^{(0)}$ — электрическое поле, скорость и возмущения плотности, медленно меняющиеся во времени за период лазерного поля. При этом медленно меняющееся поле $\mathbf{E}^{(0)}$ в наиболее общем виде можно представить в виде суммы $\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_{WF}$ постоянного внешнего приложенного поля \mathbf{E}_0 , поля ТГц-импульса \mathbf{E}_T и кильватерного поля лазерного импульса \mathbf{E}_{WF} .

Используя разложение в ряд по гармоникам лазерной частоты (2.7), из (2.1), (2.2) для электрического поля на второй гармонике получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}^{(2)} + c^2 \text{rot rot } \mathbf{E}^{(2)} = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}^{(2)}, \quad (2.9)$$

где выражение для электрического тока на удвоенной лазерной частоте имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(2)} &= \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ \frac{1}{2} e \delta N_1 \mathbf{V}_1 + \right. \\ &\left. + e \left[N_{0e} + \delta N^{(0)} \right] \mathbf{V}_2 + e \delta N_2 \mathbf{V}^{(0)} \right\} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим первое слагаемое в фигурных скобках формулы (2.10), которое определяется скоростью и возмущениями плотности электронов на несущей частоте лазера. Используя уравнение (2.5), можно найти выражение для амплитуды скорости на лазерной частоте:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \frac{ie}{m_e \omega_0} \mathbf{E}_1 + \\ &+ \frac{e}{m_e \omega_0^2} \nabla \left[\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

С учетом уравнения непрерывности (2.4) находим комплексную амплитуду колебаний электронной плотности на основной частоте оптического излучения:

$$\delta N_1 = -\frac{N_{0e}}{\omega_0^2 \varepsilon(\omega_0)} \Delta \left[\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right] - \frac{i}{\omega_0 \varepsilon(\omega_0)} \operatorname{div} \left[\delta N^{(0)} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} \delta N_2 \mathbf{V}_1^* \right], \quad (2.12)$$

где $\varepsilon(\omega_0) = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2$ — высокочастотная диэлектрическая проницаемость плазмы. Из (2.12) следует, что возмущения плотности на несущей частоте лазерного излучения в линейном приближении по амплитуде поля \mathbf{E}_1 отсутствуют. Это связано с тем, что лазерное излучение является поперечным электромагнитным полем. Поэтому отличный от нуля результат для величины δN_1 возникает только при учете нелинейностей, связанных с возбуждением электромагнитных полей на нулевой частоте $\delta N^{(0)}$, $\mathbf{V}^{(0)}$ и на второй гармонике лазерного поля δN_2 , \mathbf{V}_2 .

Второе и третье слагаемые в выражении для тока (2.10), а также формулы (2.11), (2.12) содержат амплитуды величин на второй гармонике лазерного излучения. Используя гидродинамические уравнения (2.4), (2.5), для амплитуд скорости электронов и возмущений плотности на второй гармонике находим

$$\mathbf{V}_2 = \frac{ie}{2m_e \omega_0} \mathbf{E}_2 - \frac{i}{2\omega_0} \nabla \left[\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{4} \mathbf{V}_1^2 \right], \quad (2.13)$$

$$\delta N_2 = -\frac{N_{0e} \Delta \mathbf{V}_1^2}{16\omega_0^2 \varepsilon(2\omega_0)}. \quad (2.14)$$

С учетом полученных соотношений (2.11)–(2.14) выражение для электрического тока на второй гармонике (2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(2)} = & \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ \frac{ie^2 N_{0e}}{2m_e \omega_0} \mathbf{E}_2 - \right. \\ & - \frac{ieN_{0e}}{2\omega_0} \nabla \left[\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{4} \mathbf{V}_1^2 \right] + \\ & + \delta N^{(0)} \left[\frac{ie^2}{2m_e \omega_0} \mathbf{E}_2 - \frac{ie}{8\omega_0} \nabla(\mathbf{V}_1^2) \right] - \\ & - \frac{eN_{0e} \mathbf{V}_1}{2\omega_0^2 \varepsilon(\omega_0)} \Delta \left[\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right] - \\ & - \frac{ie\mathbf{V}_1}{2\omega_0 \varepsilon(\omega_0)} \operatorname{div} \left[\delta N^{(0)} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} \delta N_2 \mathbf{V}_1^* \right] - \\ & \left. - \frac{eN_{0e} \mathbf{V}^{(0)}}{16\omega_0^2 \varepsilon(2\omega_0)} \Delta \mathbf{V}_1^2 \right\} + \text{с.с.} \quad (2.15) \end{aligned}$$

Используя полученный результат для тока (2.15), запишем уравнение для электрического поля второй гармоники (2.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}^{(2)} + \omega_p^2 \mathbf{E}^{(2)} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(2)} = \\ & = 8\pi i \omega_0 \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ -\frac{ieN_{0e}}{2\omega_0} \nabla \left[\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{4} \mathbf{V}_1^2 \right] + \right. \\ & + \delta N^{(0)} \left[\frac{ie^2}{2m_e \omega_0} \mathbf{E}_2 - \frac{ie}{8\omega_0} \nabla(\mathbf{V}_1^2) \right] - \\ & - \frac{eN_{0e} \mathbf{V}_1}{2\omega_0^2 \varepsilon(\omega_0)} \Delta \left[\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right] - \\ & - \frac{ie\mathbf{V}_1}{2\omega_0 \varepsilon(\omega_0)} \operatorname{div} \left[\delta N^{(0)} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} \delta N_2 \mathbf{V}_1^* \right] - \\ & \left. - \frac{eN_{0e} \mathbf{V}^{(0)}}{16\omega_0^2 \varepsilon(2\omega_0)} \Delta \mathbf{V}_1^2 \right\} + \text{с.с.} \quad (2.16) \end{aligned}$$

В правой части уравнения (2.16) содержатся слагаемые разного порядка малости по параметрам $\mathbf{V}_1^2/c^2 \ll 1$, $|\mathbf{V}^{(0)}|/c \ll 1$. Эти неравенства соответствуют тому, что скорости движения электрона в лазерном, терагерцевом и постоянном электрических полях малы по сравнению со скоростью света. Поэтому будем решать уравнение (2.16) по теории возмущений, используя указанные малые параметры. Представим электрическое поле второй гармоники в виде разложения

$$\mathbf{E}^{(2)} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots, \quad (2.17)$$

где нижний индекс указывает порядок малости слагаемых в сумме. Тогда в первом приближении по малому параметру $\mathbf{V}_1^2/c^2 \ll 1$ из уравнения (2.16) с учетом формулы (2.11) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_1 + \omega_p^2 \varepsilon_1 + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \varepsilon_1 = \\ & = - \left\{ \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \pi e N_{0e} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_0^2} \nabla \mathbf{E}_1^2 + \text{с.с.} \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \frac{\pi e N_{0e}}{4\omega_0^2 \varepsilon(2\omega_0)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_0^2} \nabla \mathbf{E}_1^2 + \text{с.с.} \quad (2.19)$$

В этом же приближении из формулы (2.13) находим скорость колебаний электронов на второй гармонике лазерного поля:

$$\mathbf{V}^{(2)} = \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \frac{i}{8\omega_0} \frac{1}{\varepsilon(2\omega_0)} \frac{e^2}{m_e^2 \omega_0^2} \nabla \mathbf{E}_1^2 + \text{с.с.} \quad (2.20)$$

Из полученных результатов (2.19), (2.20) следует, что в рассматриваемом приближении электрическое

поле второй гармоники (2.19) является чисто потенциальным и не содержит вихревой компоненты ($\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0$). Такое поле локализовано исключительно внутри плазменного слоя, оно не может выходить в окружающую среду в виде электромагнитного излучения. Поэтому следует рассмотреть поле второй гармоники в следующем приближении по малым параметрам $\mathbf{V}_1^2/c^2 \ll 1$, $|\mathbf{V}^{(0)}|/c \ll 1$. Тогда из уравнения (2.16) находим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \omega_p^2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + c^2 \text{rot rot } \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \\ & = -8\pi i \omega_0 \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ \frac{i e N_{0e}}{2\omega_0} \nabla (\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}^{(0)}) - \right. \\ & - \frac{e^3 N_{0e}}{4m_e^2 \omega_0^4} \nabla \left[(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla) \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right) \right] - \\ & - e \delta N^{(0)} \mathbf{V}_2 - \frac{e^3 N_{0e} \mathbf{E}_1}{2m_e^2 \omega_0^4 \varepsilon(\omega_0)} \times \\ & \times \Delta \left[\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{V}^{(0)} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{V}_2 \right] - \frac{e^3 N_{0e} \mathbf{V}^{(0)}}{16m_e^2 \omega_0^4 \varepsilon(2\omega_0)} \Delta \mathbf{E}_1^2 - \\ & - \left. \frac{i e^3 \mathbf{E}_1}{2m_e^2 \omega_0^3 \varepsilon(\omega_0)} \text{div} \left[\delta N^{(0)} \mathbf{E}_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \mathbf{E}_1^* \right] \right\} - \\ & - \text{с.с.} \quad (2.21) \end{aligned}$$

Входящие в уравнение (2.21) выражения для вариаций плотности и скорости электронов на второй гармонике лазерного поля определяются формулами (2.14), (2.20). Что касается низкочастотных значений этих величин, то для них из уравнений (2.4), (2.5) в линейном приближении следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}^{(0)} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}^{(0)} - \frac{e^2}{4m_e^2 \omega_0^2} \nabla |\mathbf{E}_1|^2, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N^{(0)} + N_{0e} \text{div } \mathbf{V}^{(0)} = 0. \quad (2.23)$$

Здесь медленно меняющаяся за период лазерного поля скорость $\mathbf{V}^{(0)}$ равна сумме трех слагаемых $\mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_{WF}$, что связано с движением электронов в постоянном электрическом поле, в поле терагерцевого излучения и в кильватерной волне лазерного импульса. В свою очередь низкочастотные возмущения плотности $\delta N^{(0)} = \delta N_T + \delta N_{WF}$ обусловлены колебаниями частиц в кильватерной волне и в поле ТГц-импульса. В постоянном электрическом поле возмущения плотности отсутствуют, а уравнение для скорости движения электронов в соответствии с (2.22) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_0 = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0. \quad (2.24)$$

В поле терагерцевого излучения скорость и возмущения плотности электронов согласно формуле (2.22) описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_T = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_T, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N_T + N_{0e} \text{div } \mathbf{V}_T = 0. \quad (2.26)$$

И наконец, под действием пондеромоторной силы лазерного излучения в плазме возбуждается кильватерная плазменная волна, скорость и возмущения плотности электронов в которой определяются в соответствии с формулами (2.22), (2.23) из следующих уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \mathbf{V}_{WF} = - \frac{e^2}{4m_e^2 \omega_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla |\mathbf{E}_1|^2, \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \delta N_{WF} = - \frac{N_{0e} e^2}{4m_e^2 \omega_0^2} \Delta |\mathbf{E}_1|^2. \quad (2.28)$$

Напомним, что колебания электронов в кильватерной волне происходят на плазменной частоте, которая так же, как и частота ТГц-излучения, значительно меньше лазерной частоты.

Таким образом, уравнение (2.21) совместно с формулами (2.20), (2.24)–(2.28) позволяет решить задачу о генерации электромагнитного поля на второй гармонике лазерной частоты при воздействии на разреженную плазму, находящуюся в постоянном электрическом поле, лазерного излучения на фундаментальной частоте и импульса терагерцевого поля. Отметим, что в правой части уравнения (2.21) содержатся слагаемые, пропорциональные следующим малым параметрам: $\mathbf{V}_1^4/c^4 \ll 1$, $|\mathbf{V}^{(0)}| \mathbf{V}_1^2/c^3 \ll 1$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРЕМЕННОГО ПРОФИЛЯ И СПЕКТРА ТЕРАГЕРЦЕВОГО ИМПУЛЬСА ПО ЭНЕРГИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В дальнейшем с целью диагностики терагерцевого импульса по интенсивности излучения на удвоенной лазерной частоте будем интересоваться только вкладом во вторую гармонику, возникающим в результате взаимодействия лазерного излучения с терагерцевой волной и постоянным электрическим полем. Это соответствует удержанию в правой части уравнения (2.21) слагаемых, содержащих произведение квадрата лазерного поля \mathbf{E}_1^2 на скорость движения электрона $\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T$ в постоянном электрическом

поле и в поле терагерцевого импульса. Кроме того, примем во внимание, что терагерцевая волна является поперечной электромагнитной волной, и поэтому в линейном приближении по амплитуде поля \mathbf{E}_T возмущения плотности электронов в ней в соответствии с уравнениями (2.25), (2.26) отсутствуют. В этом случае уравнение (2.21) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_2 + \omega_p^2 \varepsilon_2 + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \varepsilon_2 = \\ & = 8\pi i \omega_0 \frac{1}{2} e^{-2i\omega_0 t} \left\{ -\frac{ieN_{0e}}{2\omega_0} \nabla[\mathbf{V}_2 \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T)] + \right. \\ & + \frac{e^3 N_{0e}}{4m_e^2 \omega_0^4} \nabla [(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla) (\mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T))] + \\ & + \frac{e^3 N_{0e} \mathbf{E}_1}{2m_e^2 \omega_0^4 \varepsilon(\omega_0)} \Delta [\mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T)] + \\ & \left. + \frac{e^3 N_{0e} (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T)}{16m_e^2 \omega_0^4 \varepsilon(2\omega_0)} \Delta \mathbf{E}_1^2 \right\} + \text{c.c.} \quad (3.1) \end{aligned}$$

Если ввести в рассмотрение волновое число для лазерного излучения на основной гармонике $k_0 = (\omega_0/c) \sqrt{\varepsilon(\omega_0)}$, то комплексную амплитуду лазерного поля \mathbf{E}_1 можно записать в виде $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_L e^{ik_0 z}$. Тогда, пренебрегая отличием диэлектрической проницаемости на несущей частоте $\varepsilon(\omega_0)$ и на второй гармонике $\varepsilon(2\omega_0)$ от единицы, что заведомо выполняется в разреженной плазме при $\omega_p \ll \omega_0$, после несложных преобразований из (3.1) получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 - c^2 \Delta \right) \varepsilon_2 = -\frac{ie\omega_p^2}{m_e \omega_0 c^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \exp(-2i\omega_0 t + 2ik_0 z) \left[\mathbf{E}_L (\mathbf{E}_L \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \mathbf{E}_L^2 (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T) \right] + \text{c.c.} \right\}. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{V}_0 и \mathbf{V}_T — скорости движения электрона в постоянном электрическом поле и в поле терагерцевой волны, которые определяются из уравнений (2.24), (2.25) и имеют вид

$$\mathbf{V}_0 = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 (t - t_0), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V}_T = \frac{e}{m_e} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{E}_T(t'), \quad (3.4)$$

где t_0 — время начала движения электрона.

Для решения уравнения (3.2) будем использовать процедуру укорочения, которая позволяет получить из (3.2) уравнение гиперболического типа. С

этой целью представим электрическое поле второй гармоники в следующем виде:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \mathbf{A} \exp \left(-2i\omega_0 t + 2ik_0 z + \frac{3i\omega_p^2 t}{4\omega_0} \right) + \text{c.c.}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{A} — амплитуда электрического поля второй гармоники, медленно меняющаяся во времени за период π/ω_0 и в пространстве на длине волны π/k_0 . Подставим соотношение (3.5) в уравнение (3.2) и удержим только первые производные по времени и по продольной координате от амплитуды \mathbf{A} . Тогда, пренебрегая отличием групповой скорости лазерного импульса от скорости света, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ic^2}{4\omega_0} \Delta_{\perp} \right) \mathbf{A} = \frac{e\omega_p^2 E_L^2}{4m_e \omega_0^2 c^2} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T)) + \frac{1}{2} (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_T) \right\} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{3i\omega_p^2 t}{4\omega_0} \right), \quad (3.6) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \right)$$

— поперечный оператор Лапласа, $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, \mathbf{e}_L — вектор, характеризующий поляризацию лазерного импульса $\mathbf{E}_L = \mathbf{e}_L E_L$. Входящие в правую часть уравнения (3.6) скорости электрона в постоянном электрическом поле \mathbf{V}_0 и в терагерцевой волне \mathbf{V}_T определяются соотношениями (3.3), (3.4). В дальнейшем для определенности будем считать, что лазерный импульс имеет гауссово распределение по пространственным координатам [22]:

$$\begin{aligned} E_L(r_{\perp}, \xi, z) &= \frac{E_{0L}}{1 + iz/z_{RL}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{r_{\perp}^2}{2R_L^2 (1 + iz/z_{RL})} - \frac{\xi^2}{2\tau^2} \right\}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

где $\xi = t - z/c$ — продольная переменная в сопутствующей лазерному импульсу системе координат, τ , R_L — временная длительность и поперечный (в перетяжке) размер импульса, $z_{RL} = k_0 R_L^2$ — рэлеевская длина для лазерного излучения.

При фокусировке лазерного импульса его интенсивность увеличивается и в некоторой точке с координатой $z = -d$ впервые происходит ионизация газа и образуется плазма. Далее после прохождения импульсом перетяжки ($z = 0$) его интенсивность уменьшается из-за дифракции, в результате чего в

точке $z = d$ ионизация прекращается. В итоге мы имеем разреженную плазму, занимающую в направлении оси z слой толщиной $2d$ в области пространства $-d \leq z \leq d$. Так как мы предполагали, что для фокусировки оптического излучения используется длиннофокусная линза, то интенсивность лазерного импульса внутри плазменного слоя меняется незначительно. Поэтому можно считать, что плазма имеет практически однородное распределение плотности внутри слоя по продольной координате z . Будем также считать, что ионизация газа происходит только в малой окрестности максимума интенсивности лазерного импульса. Это означает, что в точке с координатой z плазма образуется в момент времени $t = z/c$, который соответствует максимуму лазерного поля (3.7). Поэтому начальный момент времени t_0 в соотношениях (3.3), (3.4) выбирается именно из этих соображений, и мы имеем следующие выражения для скорости движения электрона в постоянном электрическом поле и в поле терагерцевого излучения:

$$\mathbf{V}_0 = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \xi, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{V}_T = \frac{e}{m_e} \int_0^\xi d\xi' \mathbf{E}_T(\xi'). \quad (3.9)$$

Отметим, что входящая в формулы (3.8), (3.9) переменная $\xi = t - z/c$ положительна ($\xi \geq 0$), так как движение электрона в электрических полях \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_T происходит только для моментов времени $t \geq z/c$. Кроме того, при получении выражения (3.9) предполагалось, что электрическое поле терагерцевого излучения в продольном направлении зависит от переменной $\xi = t - z/c$, т. е. $\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_T(\mathbf{r}_\perp, \xi)$. Это справедливо в достаточно разреженной плазме, когда выполнено условие $\omega_p \ll \omega_T$. В этом случае групповая скорость терагерцевого импульса близка к скорости света.

Решение уравнения (3.6) можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_T, \quad (3.10)$$

где величины \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_T соответствуют вкладу во вторую гармонику соответственно постоянного электрического поля и поля ТГц-импульса и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ic^2}{4\omega_0} \Delta_\perp \right) \mathbf{A}_0 = \frac{e\omega_p^2 E_L^2}{4m_e \omega_0^2 c^2} \times \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{V}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{V}_0 \right] \exp \left(-\frac{3i\omega_p^2 t}{4\omega_0} \right), \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ic^2}{4\omega_0} \Delta_\perp \right) \mathbf{A}_T = \frac{e\omega_p^2 E_L^2}{4m_e \omega_0^2 c^2} \times \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{V}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{V}_T \right] \exp \left(-\frac{3i\omega_p^2 t}{4\omega_0} \right). \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.11) с учетом соотношений (3.7), (3.8) имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \omega_p^2 \frac{V_E^2}{4c^2} \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \xi \times \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2 (1 + iz/z_{RL})} \right\} \frac{1}{1 + iz/z_{RL}} \times \int_{-d/c}^t \frac{dt' \exp(-3i\omega_p^2 t' / 4\omega_0)}{1 + i[z - c(t - t')] / z_{RL}}, \quad (3.13)$$

где $V_E = eE_{0L}/m_e \omega_0$ — скорость осцилляций электрона в перетяжке лазерного импульса.

Для решения уравнения (3.12) предположим, что терагерцевое поле имеет гауссово распределение в поперечном направлении:

$$\mathbf{E}_T(r_\perp, \xi, z) = \mathbf{e}_T \frac{E_T(\xi)}{1 + iz/z_{RT}} \times \exp \left\{ -\frac{r_\perp^2}{2R_T^2 (1 + iz/z_{RT})} \right\}, \quad (3.14)$$

где \mathbf{e}_T , R_T , $E_T(\xi)$ — вектор поляризации, поперечный размер (в перетяжке) и временной профиль электрического поля ТГц-импульса, z_{RT} — характерное значение рэлеевской длины для ТГц-излучения. С учетом соотношений (3.7), (3.9), (3.14) решение уравнения (3.12) при условии, что поперечный размер терагерцевого импульса значительно превосходит радиус фокального пятна лазерного излучения $R_T \gg R_L$, имеет вид

$$\mathbf{A}_T = \omega_p^2 \frac{V_E^2}{4c^2} \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \times \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2 (1 + iz/z_{RL})} \right\} \int_0^\xi d\xi' E_T(\xi') \times \frac{1}{1 + iz/z_{RL}} \times \int_{-d/c}^t \frac{dt' \exp(-3i\omega_p^2 t' / 4\omega_0)}{\left[1 + i \frac{z - c(t - t')}{z_{RL}} \right] \left[1 + i \frac{z - c(t - t')}{z_{RT}} \right]}. \quad (3.15)$$

Далее будем считать выполненными следующие условия, соответствующие требованиям достаточно разреженной плазмы и большого размера фокального пятна лазерного импульса:

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} 2k_p d \ll 1, \quad 2d \ll z_{RL}, \quad (3.16)$$

где $k_p = \omega_p/c$. В этом случае интегралы в формулах (3.13), (3.15) легко вычисляются и мы получим выражение для амплитуд поля второй гармоники на правой границе плазмы ($z = d$):

$$\mathbf{A}_0 = \omega_p k_p d \frac{V_E^2}{2c^2} \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \xi \times \exp \left(-\frac{\xi^2}{L^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2} \right), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{A}_T = \omega_p k_p z_{RT} \arctg \left(\frac{d}{z_{RT}} \right) \frac{V_E^2}{2c^2} \times \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \times \exp \left(-\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2} \right) \int_0^\xi d\xi' E_T(\xi'). \quad (3.18)$$

Используя соотношения (3.5), (3.10), найдем интенсивность излучения на второй гармонике лазерной частоты:

$$I_{2\omega_0} = \frac{c}{8\pi} \times \left(|\mathbf{A}_0|^2 + |\mathbf{A}_T|^2 + \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_T^* + \mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{A}_T \right). \quad (3.19)$$

В дальнейшем будем интересоваться перекрестными слагаемыми в формуле (3.19), которые определяются произведением вкладов от терагерцевого импульса (3.18) и постоянного электрического поля (3.17). В эксперименте именно этот вклад в интенсивность излучения на второй гармонике детектируется путем изменения направления и величины приложенного постоянного электрического поля. Используя соотношения (3.17), (3.18) для интенсивности излучения на правой границе ($z = d$) плазменного слоя получим

$$I_{2\omega_0} = - \left(\left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \cdot \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \right) \times \frac{c}{4\pi} \omega_p^2 \tau^2 k_p^2 d z_{RT} \arctg \left(\frac{d}{z_{RT}} \right) \times \frac{\partial I_L^2}{\partial \xi} \int_0^\xi d\xi' E_T(\xi'), \quad (3.20)$$

где

$$I_L(\xi, r_\perp) = \frac{V_E^2}{4c^2} \exp \left(-\frac{\xi^2}{\tau^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2} \right)$$

— безразмерная интенсивность лазерного излучения на основной частоте. При условии $d \ll z_{RT}$ формула (3.20) упрощается и принимает вид

$$I_{2\omega_0} = - \left(\left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \cdot \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \right) \times \frac{c}{4\pi} \omega_p^2 \tau^2 k_p^2 d^2 \frac{\partial I_L^2}{\partial \xi} \int_0^\xi d\xi' E_T(\xi'). \quad (3.21)$$

В выражении (3.21) отсутствуют параметры, характеризующие поперечное распределение терагерцевого поля. Это связано с тем, что при выполнении условия $d \ll z_{RT}$ при прохождении через плазменный слой поперечный размер терагерцевого импульса мало меняется из-за дифракционных эффектов. Именно этот случай мы будем рассматривать в дальнейшем.

Отметим, что в отличие от неионизованного воздуха (см. формулу (1.1)) интенсивность излучения на второй гармонике в плазме (3.21) пропорциональна интегралу по времени от электрического поля ТГц-импульса и производной по времени от квадрата интенсивности оптического импульса на несущей частоте. Вместе с тем интенсивность излучения (3.21) зависит от поляризации лазерного и терагерцевого импульсов, а также от направления постоянного электрического поля.

Полученный результат для интенсивности излучения на второй гармонике лазерного поля (3.21) может быть использован для восстановления временного профиля электрического поля терагерцевого импульса. Следует отметить, что для сканирования всего продольного профиля ТГц-излучения применяется задержка по времени Δ между терагерцевым и оптическим импульсами. В этом случае выражение для безразмерной интенсивности лазерного импульса можно записать в виде

$$I_L(\xi - \Delta, r_\perp) = \frac{V_E^2}{4c^2} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \Delta)^2}{\tau^2} - \frac{r_\perp^2}{R_L^2} \right\}, \quad (3.22)$$

а формула (3.21) с учетом задержки принимает вид

$$I_{2\omega_0} = -\frac{c}{4\pi} \omega_p^2 \tau^2 k_p^2 d^2 \times \left(\left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \cdot \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \right) \times \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ I_L^2(\xi - \Delta) \right\} \int_\Delta^\xi d\xi' E_T(\xi'). \quad (3.23)$$

В эксперименте обычно измеряется энергия второй гармоники $W_{2\omega_0}$ в зависимости от величины задержки Δ . Для вычисления энергии излучения проинтегрируем интенсивность (3.23) по времени и по площади поперечного сечения. Тогда с учетом распределения интенсивности лазерного импульса (3.22) получим следующее выражение для энергии излучения на второй гармонике:

$$W_{2\omega_0}(\Delta) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{W_0}{\tau} \int_{\Delta}^{\infty} d\xi E_T(\xi) \times \exp\left[-\frac{2(\xi - \Delta)^2}{\tau^2}\right], \quad (3.24)$$

где величина W_0 имеет вид

$$W_0 = \frac{c}{4\pi} \omega_p^2 \tau^2 k_p^2 d^2 \times \left(\left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \right] \cdot \left[\mathbf{e}_L (\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_T \right] \right) \times \frac{V_E^4}{16c^4} \frac{\pi^{3/2} R_L^2 \tau}{4\sqrt{2}}. \quad (3.25)$$

Формула (3.24) связывает энергию излучения на удвоенной лазерной частоте $W_{2\omega_0}$ с электрическим полем терагерцевого импульса E_T , причем последнее стоит под знаком интеграла. Поэтому соотношение (3.24) фактически является интегральным уравнением с разностным ядром для определения временного профиля электрического поля терагерцевого излучения $E_T(\xi)$ по известной зависимости энергии второй гармоники от величины задержки $W_{2\omega_0}(\Delta)$. Запишем уравнение (3.24) в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}} \tau \frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = \int_{\Delta}^{\infty} d\xi K(\Delta - \xi) E_T(\xi), \quad (3.26)$$

где $K(t) = \exp(-2t^2/\tau^2)$ — ядро интегрального уравнения. Для решения интегрального уравнения с разностным ядром (3.26) будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье по времени, которые, к примеру, для терагерцевого поля имеют вид

$$E_T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega\xi) E_T(\omega), \quad (3.27)$$

$$E_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\omega\xi) E_T(\xi).$$

Тогда из уравнения (3.26) с учетом прямого преобразования (3.27) находим следующее соотношение

между фурье-компонентами входящих в (3.26) величин:

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}} \tau \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0} = E_T(\omega) \int_0^{\infty} dt \exp(-i\omega t) K(t). \quad (3.28)$$

Преобразуя интеграл, стоящий в правой части формулы (3.28), получим окончательное выражение для зависимости спектра терагерцевого поля от спектрального состава излучения на второй гармонике:

$$E_T(\omega) = \frac{\exp(\omega^2 \tau^2 / 8)}{1 - \operatorname{erf}(i\omega\tau/\sqrt{8})} \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0}, \quad (3.29)$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt \exp(-t^2)$$

— интеграл вероятности от комплексного аргумента z . Используя асимптотические свойства интеграла вероятности, из формулы (3.29) можно найти спектр терагерцевого излучения в области низких и высоких частот. В низкочастотной области спектра, когда выполнено условие $\omega\tau \ll 1$, из (3.29) получим соотношение

$$E_T(\omega) = \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0}, \quad (3.30)$$

из которого следует, что в этом пределе спектр терагерцевого излучения совпадает со спектром второй гармоники оптического поля. При выполнении неравенства $\omega\tau \gg 1$, что соответствует области высоких частот из формулы (3.29), имеем

$$E_T(\omega) = i\omega\tau \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0}. \quad (3.31)$$

Из полученного соотношения (3.31) видно, что в высокочастотной области спектр терагерцевого излучения отличается от спектра второй гармоники множителем, пропорциональным частоте. В общем случае для произвольных положительных частот $\omega > 0$ спектр ТГц-импульса в соответствии с формулой (3.29) определяется функцией $Y(x)$,

$$Y(x) = \left| \frac{\exp(x^2)}{1 - \operatorname{erf}(ix)} \right|, \quad (3.32)$$

где $x = \omega\tau/\sqrt{8}$. Зависимость (3.32) представлена на рис. 1, из которого следует, что для положительных значений аргумента, $x > 0$, функция $Y(x)$ всегда превышает единицу, $Y(x) > 1$. Отсюда заключаем, что спектр терагерцевого излучения более обогащен

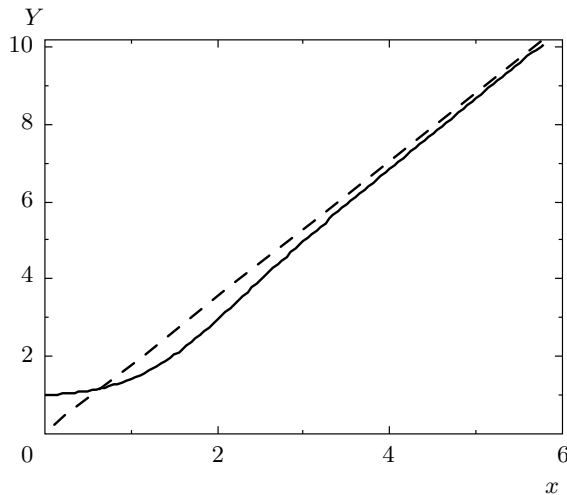


Рис. 1. Сплошная кривая — график функции $Y(x)$ (3.32), штриховая линия — линейная зависимость $\sqrt{\pi}x$

высокими частотами по сравнению со спектром второй гармоники. Кроме того, из формулы (3.32) находим, что уже при $x = 4$ с точностью около 3% функция $Y(x)$ принимает асимптотическое значение, равное $\sqrt{\pi}x$. Именно в этих условиях справедливо соотношение (3.31).

Используя полученную зависимость (3.29), можно восстановить временной профиль терагерцевого импульса. Применяя обратное преобразование Фурье (3.27), из формулы (3.29) находим

$$E_T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\exp\{i\omega(\Delta - \xi) + \omega^2\tau^2/8\}}{1 - \operatorname{erf}(i\omega\tau/\sqrt{8})}. \quad (3.33)$$

Полученное выражение (3.33) является искомым решением интегрального уравнения (3.26). Оно описывает временное распределение электрического поля в импульсе ТГц-излучения, если известна зависимость энергии второй гармоники от величины задержки. Однако непосредственно использовать соотношение (3.33) не очень удобно. Более целесообразным является вычисление временного профиля терагерцевого импульса по следующей формуле:

$$E_T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \times \frac{\exp\{-i\omega\xi + \omega^2\tau^2/8\}}{1 - \operatorname{erf}(i\omega\tau/\sqrt{8})} \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0}. \quad (3.34)$$

Соответственно, вначале можно найти спектр излучения на второй гармонике $W_{2\omega_0}(\omega)$, исходя из измеренной зависимости энергии второй гармоники от задержки $W_{2\omega_0}(\Delta)$. Далее, основываясь на соотношении (3.29), можно рассчитать спектр терагерцевого поля и уже потом по этому спектру определить временной профиль терагерцевого импульса в соответствии с формулой (3.34).

Исходя из представленных соотношений (3.24), (3.26), можно получить некоторые простые аналитические результаты для временного профиля терагерцевого импульса. При малой длительности лазерного импульса $\tau \rightarrow 0$, что соответствует условию $\tau_T \gg \tau$ (где τ_T — характерная длительность ТГц-импульса), с учетом аппроксимации дельта-функции Дирака $\delta(x)$ следующим соотношением

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{2x^2}{\tau^2}\right),$$

из формулы (3.26) находим

$$\frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = E_T(\Delta). \quad (3.35)$$

Из полученного соотношения (3.35) следует, что для коротких лазерных импульсов ($\tau_T \gg \tau$) временные профили огибающей второй гармоники лазерного излучения и электрического поля ТГц-импульса совпадают. В другом предельном случае большой длительности лазерного импульса $\tau \rightarrow \infty$ (или $\tau \gg \tau_T$) с учетом симметрии и равенства нулю среднего значения электрического поля в импульсе ТГц-излучения,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi E_T(\xi) = 0,$$

из формулы (3.26) получим следующее соотношение:

$$\frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\tau} \int_0^{\Delta} d\xi E_T(\xi). \quad (3.36)$$

Из формулы (3.36) следует, что для длинного лазерного импульса ($\tau \gg \tau_T$) огибающая второй гармоники оптического излучения определяется интегралом

по времени от электрического поля ТГц-импульса, который в соответствии с (3.9) пропорционален скорости электронов. Отметим, что полученные формулы для временного профиля ТГц-импульса (3.35), (3.36) находятся в соответствии со спектральными соотношениями (3.30), (3.31).

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим терагерцевый импульс с временным профилем электрического поля, который определяется второй производной от распределения Гаусса:

$$E_T(\xi) = E_{0T} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau_T^2}\right) \left(1 - \frac{\xi^2}{\tau_T^2}\right) = -E_{0T} \tau_T^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau_T^2}\right), \quad (3.37)$$

где E_{0T} , τ_T — характерные значения амплитуды и длительности ТГц-поля. Следует отметить, что терагерцевые импульсы с зависимостью от времени вида (3.37) возникают при падении на границу разреженной плазмы лазерных импульсов с длительностью, превышающей период плазменных колебаний [14, 15], а также при отражении лазерного излучения от сверхкритической плазмы [16]. Подставляя выражение (3.37) в соотношение (3.26), после несложных вычислений получим следующую зависимость огибающей второй гармоники оптического излучения от задержки:

$$\frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\tau_T}{\tau} \frac{E_{0T}}{(1 + 4\tau_T^2/\tau^2)^2} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\tau_T^2}\right) \times \left\{ -\frac{\Delta}{\sqrt{2}\tau_T} \left(1 + 8\frac{\tau_T^2}{\tau^2}\right) + 4\frac{\tau_T^2}{\tau^2} \frac{1 + 4(\tau_T^2/\tau^2)(1 - \Delta^2/\tau_T^2)}{\sqrt{1 + 4\tau_T^2/\tau^2}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{\Delta^2}{2\tau_T^2} \frac{1}{1 + 4\tau_T^2/\tau^2}\right) \times \operatorname{erfc}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}\tau_T} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\tau_T^2/\tau^2}}\right) \right\}, \quad (3.38)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt \exp(-t^2)$$

— дополнительный интеграл вероятности. В случае, когда длительность ТГц-импульса значительно превышает длительность импульса оптического излучения $\tau_T \gg \tau$, из формулы (3.38) следует совпадение временных профилей огибающей второй гармоники и терагерцевого излучения

$$\frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = E_{0T} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\tau_T^2}\right) \times \left(1 - \frac{\Delta^2}{\tau_T^2}\right) = E_T(\Delta), \quad (3.39)$$

что соответствует результату (3.35). В противоположном пределе, когда длительность лазерного импульса существенно больше длительности импульса терагерцевого излучения $\tau \gg \tau_T$ из (3.38) получим следующее соотношение между энергией второй гармоники и временным профилем электрического поля ТГц-импульса:

$$\frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0} = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\tau_T}{\tau} \frac{\Delta}{\tau_T} E_{0T} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\tau_T^2}\right) = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\tau} \int_0^\Delta d\xi E_T(\xi), \quad (3.40)$$

которое также совпадает с полученным ранее выражением (3.36). Отметим, что при большой длительности лазерного импульса $\tau \gg \tau_T$ огибающая второй гармоники оптического излучения (3.40) описывается первой производной от распределения Гаусса и ее зависимость от времени существенно отличается от временного профиля терагерцевого импульса (3.37). Кроме того, из формулы (3.40) следует, что амплитуда импульса второй гармоники в этом случае значительно меньше (по параметру $\tau_T/\tau \ll 1$) амплитуды ТГц-поля.

Для иллюстрации полученных аналитических результатов на рис. 2 приведены временные профили безразмерного электрического поля ТГц-импульса

$$e_T(\xi) = \frac{E_T(\xi)}{E_{0T}} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau_T^2}\right) \left(1 - \frac{\xi^2}{\tau_T^2}\right) \quad (3.41)$$

с длительностью $\tau_T = 70$ фс и нормированные величины огибающей второй гармоники (3.38)

$$w_{2\omega_0}(\Delta) = \frac{W_{2\omega_0}(\Delta)}{W_0 E_{0T}} \quad (3.42)$$

для трех значений длительности лазерного импульса τ . Видно, что с увеличением длительности оптического импульса временное распределение второй гармоники все более значительно отличается от временного профиля терагерцевого импульса. При больших значениях длительности лазерного излучения $\tau \gg \tau_T$ существенно уменьшается амплитуда огибающей второй гармоники, и кроме того, ее временной профиль стремится к первой производной от распределения Гаусса (кривая 3 на рис. 2).

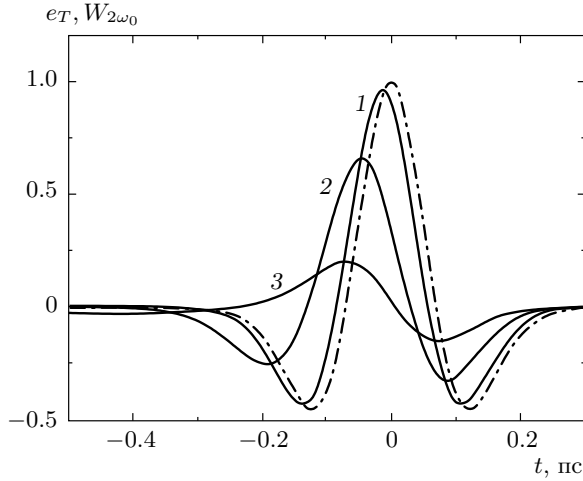


Рис. 2. Временные профили терагерцевого импульса (3.41) длительностью 70 фс (штрихпунктирная кривая) и второй гармоники (3.42) при различных длительностях детектирующего лазерного импульса (сплошные кривые). Сплошным кривым соответствуют длительности лазерного импульса 35 (1), 140 (2), 420 (3) фс

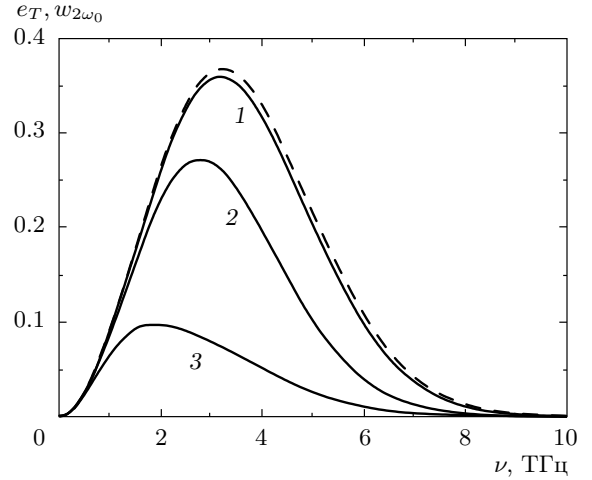


Рис. 3. Спектр терагерцевого импульса (3.45) длительностью 70 фс (штриховая кривая) и спектры второй гармоники (3.46) при различных длительностях детектирующего лазерного импульса (сплошные кривые). Сплошным кривым соответствуют длительности лазерного импульса 35 (1), 140 (2), 420 (3) фс

Используя соотношение (3.29), рассмотрим спектральные характеристики терагерцевого импульса и второй гармоники лазерного излучения. Используя преобразование Фурье, найдем спектр ТГц-импульса (3.37)

$$|E_T(\omega)| = \sqrt{2\pi} \omega^2 \tau_T^3 E_{0T} \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_T^2}{2}\right) \quad (3.43)$$

и огибающей второй гармоники из формулы (3.29)

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_{2\omega_0}(\omega)}{W_0} \right| &= \sqrt{2\pi} \omega^2 \tau_T^3 E_{0T} \exp\left[-\frac{\omega^2(\tau^2 + 4\tau_T^2)}{8}\right] \times \\ &\times \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\omega\tau/\sqrt{8}} dt \exp(t^2) \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

На рис. 3 представлен спектр терагерцевого импульса

$$\begin{aligned} e_T(\nu) &= \frac{|E_T(2\pi\nu)|}{2\sqrt{2\pi} \tau_T E_{0T}} = \\ &= \frac{(2\pi\nu\tau_T)^2}{2} \exp\left[-\frac{(2\pi\nu\tau_T)^2}{2}\right], \end{aligned} \quad (3.45)$$

с длительностью $\tau_T = 70$ фс, и спектры второй гармоники

$$\begin{aligned} w_{2\omega_0}(\nu) &= \frac{|W_{2\omega_0}/W_0|}{2\sqrt{2\pi} \tau_T E_{0T}} = \frac{(2\pi\nu\tau_T)^2}{2} \times \\ &\times \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{2\pi\nu\tau/\sqrt{8}} dt \exp(t^2) \right)^2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(2\pi\nu)^2(\tau^2 + 4\tau_T^2)}{8}\right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

для трех значений длительности лазерного импульса τ . Из рис. 3 следует, что для длительности лазерного импульса $\tau = 35$ фс спектр терагерцевого импульса незначительно отличается от спектра второй гармоники лазерного излучения. Увеличение длительности лазерного импульса приводит к уменьшению величины максимума и смещению его в область более низких частот.

Положение спектральной линии второй гармоники оптического излучения можно исследовать аналитически. Из формулы (3.45) следует, что положение максимума в спектре терагерцевого импульса определяется его обратной временной длительностью

$$\nu_{T,max} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\tau_T}. \quad (3.47)$$

Что касается спектральной линии второй гармоники, то ее положение зависит от соотношения длительностей лазерного и ТГц-импульсов. Для корот-

кого лазерного импульса $\tau \ll \tau_T$ из формулы (3.46), а также из рис. 3 следует, что спектральные линии терагерцевого импульса и огибающей второй гармоники совпадают. В этом случае положение спектральной линии второй гармоники определяется формулой (3.47), а величина максимума равна $w_{max} = 1/e$. При увеличении длительности лазерного импульса спектральная линия второй гармоники смещается в область низких частот. Действительно, при $\tau \gg \tau_T$ выражение (3.46) можно представить в виде

$$w_{2\omega_0}(\nu) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\tau_T}{\tau} \frac{2\pi\nu\tau_T}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{(2\pi\nu\tau_T)^2}{2}\right]. \quad (3.48)$$

Из формулы (3.48) находим положение

$$\nu_{T,max} = \frac{1}{2\pi\tau_T} \quad (3.49)$$

и величину максимума

$$w_{max} = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \frac{\tau_T}{\tau} \quad (3.50)$$

в спектре излучения второй гармоники. Сопоставляя результаты (3.47)–(3.50), заключаем, что при увеличении длительности лазерного импульса спектральная линия второй гармоники несколько смещается в область низких частот, а величина максимума при условии $\tau \gg \tau_T$ заметно уменьшается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена теория генерации второй гармоники лазерного излучения при взаимодействии лазерного импульса на фундаментальной частоте с терагерцевым импульсом в разреженной плазме при наличии внешнего приложенного электрического поля. Получено выражение для интенсивности излучения на удвоенной лазерной частоте, которое определяется временной производной от квадрата интенсивности лазерного излучения на основной частоте, интегралом по времени от электрического поля ТГц-импульса и напряженностью постоянного электрического поля. Вычислена энергия излучения на второй гармонике оптической частоты в зависимости от задержки и получено интегральное уравнение для определения временной зависимости электрического поля ТГц-импульса. Построено решение интегрального уравнения и показано, что основываясь на полученных в эксперименте данных по зависимости энергии второй гармоники от задержки можно восстановить временной профиль тера-

герцевого импульса. Получено соотношение, связывающее спектр ТГц-поля со спектральным составом излучения на второй гармонике, и проведен его анализ в областях низких и высоких частот. Показано, что спектр терагерцевого излучения обогащен более высокими частотами по сравнению со спектром второй гармоники лазерной частоты. Рассмотрено влияние длительности лазерного импульса на спектральные характеристики и временной профиль ТГц-импульса и огибающей второй гармоники оптического излучения. Показано, что если длительность лазерного импульса меньше длительности импульса ТГц-излучения, то временной профиль и спектр огибающей второй гармоники близки к соответствующим значениям для ТГц-импульса. При увеличении длительности лазерного импульса на несущей частоте между ТГц-импульсом и огибающей второй гармоники лазерного излучения возникают заметные отличия как в спектральном составе, так и во временном распределении. Показано, что с ростом длительности оптического импульса максимум в спектре второй гармоники уменьшается по величине и смещается в область более низких частот относительно спектрального максимума ТГц-импульса. Кроме того, при больших длительностях лазерного импульса амплитуда огибающей второй гармоники заметно уменьшается, а ее временной профиль определяется интегралом от электрического поля ТГц-импульса.

В заключение обсудим условия применимости полученных результатов (3.21), (3.23). Пренебрежение дифракционными эффектами для лазерного и терагерцевого импульсов ($d \ll z_{RL}, z_{RT}$) в соответствии с неравенствами (3.16) накладывают следующие ограничения на толщину плазменного слоя:

$$k_p d \ll \frac{\omega_0}{\omega_p}, \quad \frac{d}{R_L} \ll 2\pi \frac{R_L}{\lambda_0}, \quad \frac{d}{R_T} \ll 2\pi \frac{R_T}{\lambda_T}, \quad (4.1)$$

где λ_0 — длина волны лазерного излучения на основной частоте, λ_T — длина волны терагерцевого импульса, соответствующая частоте ω_T . Еще одно ограничение на толщину плазменного слоя следует из условия отличия групповой скорости терагерцевого излучения V_T от скорости света c . Действительно, при вычислении интеграла в формуле (3.15) электрическое поле терагерцевого импульса выносится из под интеграла $\int_{-d/c}^t dt'$. . . только благодаря зависимости от переменной $\xi = t - z/c$, являющейся комбинацией времени и продольной координаты. При учете отличия групповой скорости от скорости света $c - V_T \approx c\omega_p^2/2\omega_T^2$ интеграл от терагерцевого поля в выражении (3.15) будет иметь вид

$$\int_{-d/c}^t dt' \int_0^\xi d\xi' E_T \left(\xi' - \frac{\omega_p^2}{2\omega_T^2} t' \right). \quad (4.2)$$

Пренебрежение отличием групповой скорости от скорости света при интегрировании по переменной t' , в соответствии с формулой (4.2), справедливо при условии

$$\frac{d}{L_T} \ll \frac{\omega_T^2}{\omega_p^2}, \quad (4.3)$$

где $L_T = c\tau_T$ — характерный размер изменения электрического поля терагерцевого импульса в продольном направлении. При выполнении неравенства (4.3) электрическое поле ТГц-излучения может быть вынесено за знак интеграла $\int_{-d/c}^t dt' \dots$, и мы получим выражение (3.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Hamster, A. Sullivan, S. Gordon et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 2725 (1993).
2. N. Yugami, T. Higashiguchi, H. Gao et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 065003 (2002).
3. D. Dorranean, M. Starodubtsev, H. Kawakami et al., Phys. Rev. E **68**, 026409 (2003).
4. P. Sprangle, J. R. Penano, B. Hafizi, and C. A. Kapetanakis, Phys. Rev. E **69**, 066415 (2004).
5. J. van Tilborg, C. B. Schroeder, C. V. Filip et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 014801 (2006).
6. Л. М. Горбунов, А. А. Фролов, ЖЭТФ **110**, 1757 (1996).
7. Л. М. Горбунов, А. А. Фролов, Физика плазмы **26**, 688 (2000).
8. Z.-M. Sheng, H.-C. Wu, K. Li, and J. Zhang, Phys. Rev. E **69**, 025401 (2004).
9. Z.-M. Sheng, K. Mima, J. Zhang, and H. Sanuki, Phys. Rev. Lett. **94**, 095003 (2005).
10. Z.-M. Sheng, K. Mima, and J. Zhang, Phys. Plasmas **12**, 123103 (2005).
11. J. Yoshii, C. H. Lai, T. Katsouleas et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 4194 (1997).
12. N. Spence, T. Katsouleas, P. Muggli et al., Phys. Plasmas **8**, 4995 (2001).
13. M. I. Bakunov, S. V. Vodrov, A. V. Maslov, and A. M. Sergeev, Phys. Rev. E **70**, 016401 (2004).
14. Л. М. Горбунов, А. А. Фролов, Физика плазмы **32**, 544 (2006).
15. Л. М. Горбунов, А. А. Фролов, ЖЭТФ **129**, 1018 (2006).
16. А. А. Фролов, Физика плазмы **33**, 1107 (2007).
17. A. Nahata, D. H. Auston, and T. F. Heinz, Appl. Phys. Lett. **68**, 2 (1996).
18. С. П. Ковалев, Г. Х. Китаева, Письма в ЖЭТФ **94**, 95 (2011).
19. N. Karpowicz, J. Dai, X. Lu et al., Appl. Phys. Lett. **92**, 011131 (2008).
20. Xiaofei Lu and X.-C. Zhang, Appl. Phys. Lett. **98**, 151111 (2011).
21. А. Ш. Абдуллаев, Ю. М. Алиев, А. А. Фролов, Физика плазмы **12**, 827 (1986).
22. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, Теория волн, Наука, Москва (1979), с. 264.